

题型 1 函数综合问题

题型解读

函数综合问题是历年高考的热点和重点内容之一,一般难度较大,考查内容和形式灵活多样.在解决函数综合问题时,要认真分析、处理好各种关系,把握问题的主线,运用相关的知识和方法将复杂问题逐步化归为基本问题来解决,尤其是注意等价转化、分类讨论、数形结合等思想的综合运用,弄清题目的已知条件,尤其要挖掘题目中的隐含条件.

经典剖析

例 1 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D ,若对任意 $x_1, x_2 \in D$,当 $x_1+x_2=2a$ 时,恒有 $f(x_1)+f(x_2)=2b$,则称点 (a,b) 为函数 $y=f(x)$ 图象的对称中心.研究函数 $f(x)=x+\sin(\pi x)-3$ 的某一个对称中心,并利用对称中心的上述定义,可得到 $f\left(\frac{1}{2\,018}\right)+f\left(\frac{2}{2\,018}\right)+\cdots+f\left(\frac{4\,034}{2\,018}\right)+f\left(\frac{4\,035}{2\,018}\right)$ 的值为 ()

A. 4 035

B. -4 035

C. 8 070

D. -8 070

分析与解

①根据题目条件及所求的代数式结构,观察 目标代数式中一头一尾两个自变量之和为 2,所以先探究 $f(2-x)+f(x)$ 的值,得到函数 $f(x)$ 的对称中心.

因为 $f(2-x)+f(x)=2-x+\sin[\pi(2-x)]-3+x+\sin(\pi x)-3=2-x+\sin(2\pi-\pi x)-3+x+\sin(\pi x)-3=-4$,

所以函数 $f(x)$ 关于点 $(1,-2)$ 对称.

设 $f\left(\frac{1}{2\,018}\right)+f\left(\frac{2}{2\,018}\right)+\cdots+f\left(\frac{4\,034}{2\,018}\right)+f\left(\frac{4\,035}{2\,018}\right)=S$,

然后用倒序相加法求解.

则 $f\left(\frac{4\,035}{2\,018}\right)+f\left(\frac{4\,034}{2\,018}\right)+\cdots+f\left(\frac{2}{2\,018}\right)+f\left(\frac{1}{2\,018}\right)=S$.

两式相加得 $2S=4\,035\left[f\left(\frac{1}{2\,018}\right)+f\left(\frac{4\,035}{2\,018}\right)\right]=4\,035\times(-4)$,

所以 $S=-2\times 4\,035=-8\,070$.

答案 D

解后反思

本题主要考查了函数的对称性,要根据目标函数要求的式子,先观察出首末两项的和,从而找到对称中心,再采用倒序相加法解决求和问题.

例 2 (多选题)若定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$,对任意 $x, y \in \mathbf{R}$, $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$,且 $f(x)$ 不恒为 0,则下列说法正确的是 ()

A. $f(0)=0$

B. $f(x)$ 为偶函数

C. $f(x)+f(0) \geq 0$

D. 若 $f(1)=0$, 则 $\sum_{i=1}^{2\,024} f(i) = 4\,048$



分析与解

对于 A, 抽象函数求值, 往往运用赋值法, 可令 $x=y=0$, 结合 $f(x)$ 不恒为 0, 即可求解 $f(0)$.

令 $x=y=0$, 有 $2f(0)=2[f(0)]^2$, 所以 $f(0)=0$ 或 $f(0)=1$,

若 $f(0)=0$, 则只令 $y=0$, 有 $2f(x)=2f(x)f(0)=0$, 即 $f(x)$ 恒为 0,

所以只能 $f(0)=1$, 故 A 错误;

对于 B, 判断函数的奇偶性, 一般运用定义法, 不妨令 $x=0$, 可以得到 $f(-y)$ 与 $f(y)$ 的关系式.

由 A 可知 $f(0)=1$, 不妨令 $x=0$, 有 $f(y)+f(-y)=2f(0)f(y)=2f(y)$,

即 $f(-y)=f(y)$, 且函数 $f(y)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 它关于原点对称, 所以 $f(y)$ 即 $f(x)$ 为偶函数, 故 B 正确;

对于 C, 令 $x=y$, 可得 $f(2x)+f(0)=2[f(x)]^2 \geq 0$, 可以运用换元, 令 $t=2x$, 即可判断.

令 $x=y$, 有 $f(2x)+f(0)=2[f(x)]^2 \geq 0$, 令 $t=2x$, 由 $x \in \mathbf{R}$, 得 $t=2x \in \mathbf{R}$,

所以当 $t \in \mathbf{R}$ 时, 有 $f(t)+f(0) \geq 0$, 即当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $f(x)+f(0) \geq 0$, 故 C 正确;

对于 D, 由于求前 2 014 项和, 涉及函数的周期性, 可以从函数的轴对称和中心对称入手, 根据周期函数的定义求解.

若 $f(1)=0$, 令 $x=1$, 有 $f(1+y)+f(1-y)=2f(1)f(y)=0$,

若 $f(x+a)+f(-x+b)=c$, 则函数 $f(x)$ 关于 $(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2})$ 中心对称, 因此不难得到 $f(x)$ 的对称中心.

所以 $f(x)$ 关于点 $(1, 0)$ 中心对称, 又 $f(x)$ 为偶函数,

所以 $f(1+y)=-f(1-y)=-f(y-1)=f(y-3)$, 所以 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数,

由于周期为 4, 因此只要求出前 4 项, $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 的值, 问题就可以解决.

又 $f(0)=1, f(1)=0$, 所以 $f(2)=-f(0)=-1, f(3)=f(-1)=f(1)=0, f(4)=f(0)=1$,

所以 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0-1+0+1=0$,

所以 $\sum_{i=1}^{2024} f(i) = 506 \times [f(1)+f(2)+f(3)+f(4)] = 0$, 故 D 错误.

答案 BC

解后反思

本题考查抽象函数的求值以及函数的奇偶性、对称性、周期的应用, 综合性强, 属于常考的热点题型. 要解决好此类问题, 需要熟练掌握并灵活运用一些常见结论:

①函数的对称性: 若 $f(x+a)+f(-x+b)=c$, 则函数 $f(x)$ 关于 $(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2})$ 中心对称,

若 $f(x+a)=f(-x+b)$, 则函数 $f(x)$ 关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称.

②函数周期性的常用结论: 对于 $f(x)$ 定义域内任一自变量的值 x : 若 $f(x+a)=-f(x)$, 则周期 $T=2a(a>0)$; 若 $f(x+a)=\frac{1}{f(x)}$, 则 $T=2a(a>0)$; 若 $f(x+a)=-\frac{1}{f(x)}$, 则 $T=2a(a>0)$.

③函数同时具有轴对称和中心对称, 则必具有周期性, 最小正周期为相邻对称轴和对称中心距离的 4 倍, 是相邻对称轴(对称中心)距离的 2 倍.

例 3 设函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}$ ($x \neq 0$ 且 $a \in \mathbf{R}$).

(1) 判断 $f(x)$ 的奇偶性, 并用定义证明;

(2) 若不等式 $f(2^x) < -2^x + \frac{1}{2^x} + 6$ 在 $[0, 2]$ 上恒成立, 试求 a 的取值范围;

(3) 设函数 $g(x)=\frac{1-x}{1+x}, x \in [0, \frac{1}{2}]$ 的值域为 A , 函数 $f(x)$ 在 A 上的最大值为 M , 最小值为 m , 若 $2m > M$ 成立, 求 a 的取值范围.

分析与解

(1) 可看出 $f(x)$ 是奇函数, 根据奇函数的定义证明即可.



因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

$$\text{且 } f(-x) = -x + \frac{a}{-x} = -f(x),$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(2) 由题意可得出 $a < -2(2^x)^2 + 1 + 6 \cdot 2^x$ 在 $[0, 2]$ 上恒成立, 然后令 $t = 2^x, t \in [1, 4]$, 从而得出 $a < -2t^2 + 6t + 1$, 令 $y = -2t^2 + 6t + 1 (t \in [1, 4])$, 只需 $a < y_{\min}$, 配方求出 y 的最小值, 即可求解.

若不等式 $f(2^x) < -2^x + \frac{1}{2^x} + 6$ 在 $[0, 2]$ 上恒成立,

$$\text{即 } 2^x + \frac{a}{2^x} < -2^x + \frac{1}{2^x} + 6 \text{ 在 } [0, 2] \text{ 上恒成立,}$$

$$\text{即 } a < -2(2^x)^2 + 1 + 6 \cdot 2^x \text{ 在 } [0, 2] \text{ 上恒成立,}$$

$$\text{令 } t = 2^x, \text{ 则 } t \in [1, 4], \text{ 令 } y = -2t^2 + 6t + 1, \text{ 故 } y = -2\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{2},$$

所以当 $t = 4$, 即 $x = 2$ 时, 函数取最小值 -7 , 故 $a < -7$, 即 a 的取值范围为 $(-\infty, -7)$.

(3) 容易求出 $A = \left[\frac{1}{3}, 1\right]$, 从而得出 $x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ 时, $2f(x)_{\min} > f(x)_{\max}$, 可讨论 a . 容易得出 $a \leq 0$ 时, 不符合题意; $a > 0$ 时, 可知 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{a})$ 上是减函数, 在 $[\sqrt{a}, +\infty)$ 上是增函数, 从而可讨论 $0 < a \leq \frac{1}{9}, \frac{1}{9} < a < 1$ 和 $a \geq 1$, 然后分别求出 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ 上的最小值和最大值, 根据 $2m > M$ 求出 a 的取值范围即可.

因为 $g(x) = \frac{1-x}{1+x} = -1 + \frac{2}{1+x}$ 是 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上的减函数,

$$\text{所以 } g(x) \text{ 在 } \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ 上的值域 } A = \left[g\left(\frac{1}{2}\right), g(0)\right] = \left[\frac{1}{3}, 1\right],$$

所以 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ 上, 恒有 $2f(x)_{\min} > f(x)_{\max}$,

① 当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ 上单调递增,

$$\text{所以 } f(x)_{\max} = f(1) = a + 1, f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{3}\right) = 3a + \frac{1}{3},$$

$$\text{所以 } 2\left(3a + \frac{1}{3}\right) > a + 1, \text{ 解得 } a > \frac{1}{15}, \text{ 不满足 } a < 0.$$

② 当 $a = 0$ 时, $f(x) = x$ 在 $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ 上是增函数,

$$\text{所以 } f(x)_{\max} = 1, f(x)_{\min} = \frac{1}{3}, 2 \times \frac{1}{3} < 1, \text{ 不满足题意.}$$

③ 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{a})$ 上单调递减, 在 $[\sqrt{a}, +\infty)$ 上单调递增.

(i) 当 $\sqrt{a} \leq \frac{1}{3}$, 即 $0 < a \leq \frac{1}{9}$ 时, $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ 上单调递增,

$$\text{所以 } f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{3}\right) = 3a + \frac{1}{3}, f(x)_{\max} = f(1) = a + 1,$$

$$\text{所以 } 2\left(3a + \frac{1}{3}\right) > a + 1, \text{ 解得 } \frac{1}{15} < a \leq \frac{1}{9};$$

(ii) 当 $\sqrt{a} \geq 1$, 即 $a \geq 1$ 时, $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ 上单调递减,

$$\text{所以 } f(x)_{\min} = f(1) = a + 1, f(x)_{\max} = f\left(\frac{1}{3}\right) = 3a + \frac{1}{3},$$

$$\text{所以 } 2(a + 1) > 3a + \frac{1}{3}, \text{ 解得 } 1 \leq a < \frac{5}{3};$$

(iii) 当 $\frac{1}{3} < \sqrt{a} < 1$, 即 $\frac{1}{9} < a < 1$ 时, $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{3}, \sqrt{a}\right)$ 上单调递减, 在 $[\sqrt{a}, 1]$ 上单调递增,

$$\text{所以 } f(x)_{\min} = f(\sqrt{a}) = 2\sqrt{a}, f\left(\frac{1}{3}\right) = 3a + \frac{1}{3}, f(1) = a + 1,$$

$$\text{当 } 3a + \frac{1}{3} \geq a + 1, \text{ 即 } \frac{1}{3} \leq a < 1 \text{ 时, } 4\sqrt{a} > 3a + \frac{1}{3},$$



解得 $\frac{7-4\sqrt{3}}{9} < a < \frac{7+4\sqrt{3}}{9}$, 所以 $\frac{1}{3} \leq a < 1$,

当 $3a + \frac{1}{3} < a + 1$, 即 $\frac{1}{9} < a < \frac{1}{3}$ 时, $4\sqrt{a} > a + 1$,

解得 $7-4\sqrt{3} < a < 7+4\sqrt{3}$, 所以 $\frac{1}{9} < a < \frac{1}{3}$.

综上, 实数 a 的取值范围是 $(\frac{1}{15}, \frac{5}{3})$.

解后反思

本题考查了奇函数的定义及证明, 指数函数的单调性, 配方求二次函数最值的配方法, 换元法求函数最值的换元法, 函数 $f(x) = x + \frac{a}{x}$ 的单调性, 根据函数单调性求函数在闭区间上的最值的方法, 考查了计算和推理能力.

提升练习

☞ 答案见 P52

- 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 若对任意 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ 且 $x_1 \neq x_2$ 时, $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 2(x_1 + x_2)$ 恒成立, 且 $f(2) = 8$, 则满足 $f(m^2 + m) \leq 2(m^2 + m)^2$ 的实数 m 的取值范围是 ()
 A. $[-2, 1]$ B. $[0, 1]$
 C. $[0, 2]$ D. $[-2, 2]$
- 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-4, 4]$ 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = -x^2 + 4x$, 则不等式 $f[f(x)] < f(x)$ 的解集为 ()
 A. $(-3, 0) \cup (3, 4]$ B. $(-4, -3) \cup (-1, 0) \cup (1, 3)$
 C. $(-1, 0) \cup (1, 2) \cup (2, 3)$ D. $(-4, -3) \cup (1, 2) \cup (2, 3)$
- (多选题) 已知函数 $f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 + a}{x^2 + 1} (x \in \mathbf{R})$ 的值域为 $[m, +\infty)$, 则实数 a 与实数 m 的取值可能为 ()
 A. $a = 0, m = 0$ B. $a = 1, m = 1$ C. $a = 3, m = 3$ D. $a = \sqrt{2}, m = \sqrt{2}$
- 已知函数 $f(x) = (x^2 - x)(x^2 + ax + b)$ 的图象关于直线 $x = 2$ 对称, 则 $a + b =$ _____; 函数 $y = f(x)$ 的最小值为 _____.

题型 2 分段函数相关问题的研究

题型解读

分段函数是函数中比较复杂的一种函数, 其要点在于自变量取不同范围的值时所对应的解析式不同, 所以在解决分段函数的问题时要时刻盯着自变量的范围是否在发生变化, 即“分段函数——分段看”. 分段函数既能考查函数的概念及性质, 又能体现分类讨论、数形结合的数学思想方法, 因此成为高考命题的热点之一.

经典剖析

例 1 设函数 $f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x - 1, & x \leq 0, \\ f(x-2), & x > 0, \end{cases} g(x) = \log_a(x-1), a > 1$. ① $f(2\ 019)$ 的值为 _____; ② 若函数

$h(x) = f(x) - g(x)$ 恰有 3 个零点, 则实数 a 的取值范围是 _____.

分析与解

- ① 根据分段函数 $f(x)$ 的解析式, 要求 $f(2\ 019)$ 的值, 先要判断 2 019 与定义域的关系. 满足 $x > 0$, $f(x) = f(x-2)$, 说明自变量减少 2, 函数值不变, 可将 2 019 不断减 2, 直到取到负数为止.

$$f(2\ 019) = f(2\ 017) = \dots = f(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - 1 = 1.$$

- ② 想研究函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 的零点, 常用方法有: 1. “数”(代数法), 即 找出函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 的解析



式,从方程的角度求解;2. “形”(图象法),即画出函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 的图象,看图象与 x 轴的交点个数,或者将方程 $h(x)=f(x)-g(x)=0$ 变形成 $f(x)=g(x)$,看函数 $f(x),g(x)$ 图象的交点情况,来确定 a 的取值范围. 比较后,本题该考虑“形”的办法.

当 $0 < x \leq 2$ 时, $-2 < x-2 \leq 0$, 所以 $f(x)=f(x-2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}-1$;

当 $2 < x \leq 4$ 时, $-2 < x-4 \leq 0$, 所以 $f(x)=f(x-4)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}-1$;

当 $4 < x \leq 6$ 时, $-2 < x-6 \leq 0$, 所以 $f(x)=f(x-6)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6}-1$;

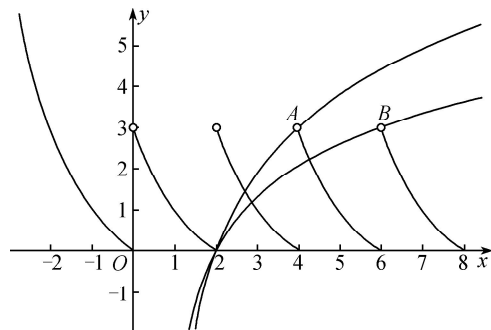
当 $6 < x \leq 8$ 时, $-2 < x-8 \leq 0$, 所以 $f(x)=f(x-8)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-8}-1$.

由上可知 $x > 0$, $f(x)=f(x-2)$, 说明 自变量减少 2, 函数值不变. 当 $0 < x \leq 2$ 时, 图象由 $-2 < x \leq 0$ 向右平移两个单位长度得到, 以此类推.

函数 $g(x)=\log_a(x-1)$ ($a > 1$), 可以判断出 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 且过定点 $(2, 0)$.

在同一平面直角坐标系内画出 $f(x)$ 和 $g(x)$ 两个函数图象如右图所示, 要想两个函数图象有 3 个交点, 可以找出图象上的两个特殊位置点 A, B .

由 $\log_a(4-1)=3$, 得 $a=\sqrt[3]{3}$, 由 $\log_a(6-1)=3$, 得 $a=\sqrt[3]{5}$. 由图可知, 也即函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 恰有 3 个零点时, a 的取值范围是 $(\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{5}]$.



答案 ①1 ② $(\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{5}]$

解后反思

本题主要考查分段函数求函数值, 在求值时要看清楚分段函数的定义域. 考查分段函数解析式的求法, 能够将未知转化为已知. 即从图象看本题当 $0 < x \leq 2$ 时, 图象由 $-2 < x \leq 0$ 向右平移两个单位得到, 从解析式看当 $0 < x \leq 2$ 时, $-2 < x-2 \leq 0$, 所以 $f(x)=f(x-2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}-1$. 画分段函数的图象时, 对端点一定要单独考虑.

求解函数零点问题的两种策略: “数”和“形”, “数”即从方程的角度出发, 研究方程解的个数, “形”即从图象出发, 研究图象交点的情况——这就是数形结合的数学思想方法, 数与形是不能分割的, 在处理函数问题时经常会用到这样的思想方法.

例 2 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x|x|, & x \in (-\infty, 1], \\ 3+\frac{2}{x-2}, & x \in (1, 2). \end{cases}$

(1) 解不等式 $f(\sqrt{1-x^2})+2f(x)<0$;

(2) 若 $x_1, x_2 \in (-\infty, 2)$ 满足 $f(x_1)=f(x_2)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 求证: $x_1+x_2<2$.

分析与解

(1) 由题意 $1-x^2 \geq 0$, 所以 $x \in [-1, 1]$,

讨论 x 的取值范围, 化简 $f(\sqrt{1-x^2})+2f(x)<0$, 分段解不等式, 再取并集, 即可求解.

① 当 $x \in [-1, 0]$ 时, 不等式 $f(\sqrt{1-x^2})+2f(x)<0$, 即 $1-x^2-2x^2<0$,

解得 $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$, 所以 $x \in \left[-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

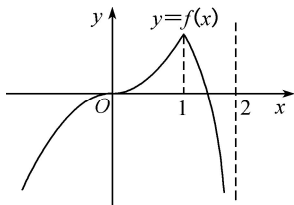
② 当 $x \in (0, 1]$ 时, 不等式 $f(\sqrt{1-x^2})+2f(x)<0$, 即 $1-x^2+2x^2<0$, 解得 $x \in \emptyset$.



综上, $x \in \left[-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

(2) 先作出函数 $f(x) = \begin{cases} x|x|, & x \in (-\infty, 1], \\ 3 + \frac{2}{x-2}, & x \in (1, 2) \end{cases}$ 的大致图象, 结合图象确定 x_1, x_2 的取值范围.

函数 $f(x) = \begin{cases} x|x|, & x \in (-\infty, 1], \\ 3 + \frac{2}{x-2}, & x \in (1, 2) \end{cases}$ 的大致图象如图所示,



当 $x \in (-\infty, 1]$ 时, 函数单调递增, 当 $x \in (1, 2)$ 时, 函数单调递减,

所以若 $x_1, x_2 \in (-\infty, 2)$ 满足 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $x_1 < 1 < x_2 < 2$,

由于 $f(x_1) = f(x_2)$, 当 $f(x_1) = f(x_2) \leq 0$ 时, $x_1 \leq 0, x_1 + x_2 < 2$ 显然成立,

由图象知①若 $x_1 \leq 0$, 则显然 $x_1 + x_2 < 2$;

当 $x_1 > 0$ 时, 直接证明 $x_1 + x_2 < 2$ 较难处理, 可以考虑等价转化 $x_2 < 2 - x_1$, 且结合 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递减, 以及 $f(x_1) = f(x_2)$, 转化为证明 $f(x_1) > f(2 - x_1)$.

②若 $x_1 > 0$, 要证明 $x_1 + x_2 < 2$, 则要证 $x_2 < 2 - x_1$,

注意到 $x_2 > 1, 2 - x_1 > 1$, 且 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递减,

则可证明 $f(x_2) > f(2 - x_1)$,

因为 $f(x_1) = f(x_2)$, 所以可证明 $f(x_1) > f(2 - x_1)$,

证明不等式往往通过作差, 因此可以构造函数 $F(x) = f(x) - f(2 - x), x \in (0, 1)$, 又 $F(1) = 0$, 所以只要证明 $F(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 通过单调性的定义即可完成.

构造函数 $F(x) = f(x) - f(2 - x), x \in (0, 1)$, 则 $F(x) = x^2 - \left(3 - \frac{2}{x}\right)$,

$$\forall t_1, t_2 \in (0, 1), \text{ 且 } t_1 < t_2, F(t_1) - F(t_2) = t_1^2 + \frac{2}{t_1} - t_2^2 - \frac{2}{t_2} = (t_1^2 - t_2^2) + \frac{2(t_2 - t_1)}{t_1 t_2} = (t_1 - t_2) \left[(t_1 + t_2) - \frac{2}{t_1 t_2} \right].$$

因为 $t_1 + t_2 < 2, t_1 t_2 < 1, \frac{2}{t_1 t_2} > 2$, 所以 $(t_1 + t_2) - \frac{2}{t_1 t_2} < 0$,

所以 $F(t_1) - F(t_2) > 0$, 所以 $F(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减.

因为 $F(1) = f(1) - f(1) = 0$, 所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $F(x) > F(1) = 0$, 即 $f(x) > f(2 - x)$,

所以 $f(x_2) > f(2 - x_1)$, 从而 $x_1 + x_2 < 2$ 得证.

解后反思

本题考查分段函数与不等式的求解, 利用函数的单调性证明不等式, 解答本题的难点在于证明 $x_1 + x_2 < 2$,

解答时利用函数 $f(x) = \begin{cases} x|x|, & x \in (-\infty, 1], \\ 3 + \frac{2}{x-2}, & x \in (1, 2) \end{cases}$ 的图象确定 x_1, x_2 的范围, 再结合范围分类讨论, 进而构造函数, 利用函数的单调性解决问题.

例3 已知函数 $y = f_1(x), y = f_2(x)$, 定义函数 $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & f_1(x) \leq f_2(x), \\ f_2(x), & f_1(x) > f_2(x). \end{cases}$

(1) 设函数 $f_1(x) = x + 3, f_2(x) = x^2 - x$, 求函数 $y = f(x)$ 的解析式;

(2) 在(1)的条件下, 设 $g(x) = mx + 2 (m \in \mathbf{R})$, 若函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 有三个不同的零点, 求 m 的取值范围;

(3) 设函数 $f_1(x) = x^2 - 2, f_2(x) = |x - a|$, 若函数 $F(x) = f_1(x) + f_2(x)$, 求函数 $F(x)$ 的最小值.



分析与解

(1) 根据函数 $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & f_1(x) \leq f_2(x), \\ f_2(x), & f_1(x) > f_2(x) \end{cases}$ 的定义, 取 $f_1(x), f_2(x)$ 两个函数中较小的. 即 当 $f_1(x) \leq f_2(x)$ 时,

$f(x) = f_1(x)$, 当 $f_1(x) > f_2(x)$ 时, $f(x) = f_2(x)$, 由此可以求出分段函数 $f(x)$ 的解析式.

因为 $f_1(x) = x+3, f_2(x) = x^2 - x$,

当 $f_1(x) \leq f_2(x)$, 即 $x \geq 3$ 或 $x \leq -1$ 时, $f(x) = x+3$,

当 $f_1(x) > f_2(x)$, 即 $-1 < x < 3$ 时, $f(x) = x^2 - x$,

综上, $f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 3, \\ x^2 - x, & -1 < x < 3. \end{cases}$

(2) 已知函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 有三个不同的零点, 即方程 $f(x) = g(x)$ 有三个不同的实数根, 因为函数 $f(x)$ 是分段函数, 需分类讨论. 当 $x \leq -1$ 或 $x \geq 3$ 时, 方程化简为 $mx+2 = x+3$, 当 $-1 < x < 3$ 时, 方程 $mx+2 = x^2 - x$, 要想有三个实数解, 则需从 一次方程和二次方程解的情况出发分析.

由(1)知 $f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 3, \\ x^2 - x, & -1 < x < 3, \end{cases}$ 从而 $h(x) = f(x) - g(x) = \begin{cases} x+3-(mx+2), & x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 3, \\ x^2 - x - (mx+2), & -1 < x < 3. \end{cases}$

若 $h(x)$ 有 3 个不同的零点, 根据 $h(x)$ 的分段解析式可知各段应分别有 1 个和 2 个零点.

所以当 $x \leq -1$ 或 $x \geq 3$ 时, $mx+2 = x+3$ 恰有一个实数解,

所以 $m-1 = \frac{1}{x} \in (0, \frac{1}{3}]$ 或 $m-1 = \frac{1}{x} \in [-1, 0)$,

解得 $m \in [0, 1) \cup (1, \frac{4}{3}]$.

而当 $-1 < x < 3$ 时, $mx+2 = x^2 - x$ 恰有两个不同的实数解,

即当 $-1 < x < 3$ 时, $x^2 - (m+1)x - 2 = 0$ 恰有两个不同的实数解,

设函数 $p(x) = x^2 - (m+1)x - 2$, 结合二次函数的图象, 即图象与 x 轴的两个交点均落在 $(-1, 3)$ 内, 由一元二次方程根的分布的特点得

$$\begin{cases} \Delta > 0, \\ h(-1) > 0, \\ h(3) > 0, \\ -1 < \frac{m+1}{2} < 3, \end{cases} \quad \text{所以} \quad \begin{cases} (m+1)^2 + 8 > 0, \\ m > 0, \\ m < \frac{4}{3}, \\ -3 < m < 5, \end{cases}$$

解得 $m \in (0, \frac{4}{3})$.

当 $-1 < x < 3$ 时, $mx+2 = x^2 - x$ 恰有两个不同的实数解, 我们还可以将方程变形为 当 $-1 < x < 3$ 且 $x \neq 0$ 时,

$m = x - \frac{2}{x} - 1$, 利用函数 $m(x) = x - \frac{2}{x} - 1$ 的图象与 $y = m$ 的交点个数求解, 即参变分离的思想.

综上, 实数 m 的取值范围为 $(0, 1) \cup (1, \frac{4}{3})$.

(3) 函数 $F(x) = f_1(x) + f_2(x)$, 即 $F(x) = x^2 - 2 + |x-a|$, 对于一个含有绝对值的函数, 我们都可以通过讨论

绝对值内部的符号, 去掉绝对值, 将函数转化为分段函数. 根据题意, $F(x) = \begin{cases} (x+\frac{1}{2})^2 - a - \frac{9}{4}, & x \geq a, \\ (x-\frac{1}{2})^2 + a - \frac{9}{4}, & x < a. \end{cases}$ 考虑二次函

数的图象特征, 该题属于定轴动区间, 讨论 对称轴与区间端点值间的关系, 确定函数在定义域内的单调性, 从而求出函数的最值.

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x) = x^2 + |x-a| - 2 = \begin{cases} x^2 + x - a - 2, & x \geq a, \\ x^2 - x + a - 2, & x < a \end{cases} = \begin{cases} (x+\frac{1}{2})^2 - a - \frac{9}{4}, & x \geq a, \\ (x-\frac{1}{2})^2 + a - \frac{9}{4}, & x < a. \end{cases}$$



①若 $a > \frac{1}{2}$, 则函数 $F(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1}{2})$ 上是单调减函数, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上是单调增函数,

此时, 函数 $F(x)$ 的最小值为 $F(\frac{1}{2}) = a - \frac{9}{4}$;

②若 $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$, 则函数 $F(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 上是单调减函数, 在 $(a, +\infty)$ 上是单调增函数, 此时, 函数 $F(x)$ 的最小值为 $F(a) = a^2 - 2$;

③若 $a < -\frac{1}{2}$, 则函数 $F(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 上是单调减函数, 在 $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ 上是单调增函数, 此时, 函数 $F(x)$ 的最小值为 $F(-\frac{1}{2}) = -a - \frac{9}{4}$.

$$\text{综上, } [F(x)]_{\min} = \begin{cases} -a - \frac{9}{4}, & a < -\frac{1}{2}, \\ a^2 - 2, & -\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}, \\ a - \frac{9}{4}, & a > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

本题对分段函数的最值的处理, 我们还可以分段求解, 即通过讨论 对称轴与区间的关系, 分别求出 $x \geq a$ 时与 $x < a$ 时的最小值, 分段函数是一个整体, 还需要 将求出的 $x \geq a$ 时的最小值与 $x < a$ 时的最小值进行比较, 取较小的作为分段函数整体的最小值.

解后反思

本题主要考查了分段函数的定义. 对于分段函数的零点问题, 我们可以分段求. 函数的零点问题可以转化成方程解的问题, 还可以数形结合转化为函数图象的交点问题. 解题过程中可以借助参变分离将变量的分类讨论问题进行转化. 而分段函数则是一个整体, 一个函数, 分段函数的定义域和值域, 都是各段函数定义域、值域的并集, 因此分段函数的性质, 我们可以分段研究, 再进行整合.

提升练习

答案见 P52

1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x + \frac{5}{2}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 3^x, & x > 1, \end{cases}$ 若 $0 \leq b < a$, 且 $f(a) = f(b)$, 则 $b f(a)$ 的取值范围为 ()

- A. $(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}]$ B. $[-\frac{25}{16}, +\infty)$ C. $[0, \frac{7}{2}]$ D. $[-\frac{25}{16}, \frac{7}{2}]$

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_2(x-1)|, & 1 < x \leq 3, \\ \frac{1}{3}x^2 - \frac{10}{3}x + 8, & x > 3, \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) = m$ 有 4 个不同的实根 x_1, x_2, x_3, x_4 , 且 $x_1 <$

$x_2 < x_3 < x_4$, 则 $\frac{(x_1+x_2)(x_3+x_4)}{x_1 x_2} =$ ()

- A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + a, & x < a, \\ x^2 + 2ax, & x \geq a, \end{cases}$ 给出下列四个结论:

①当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 的最小值为 0; ②当 $a \in (-1, 0) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$ 时, $f(x)$ 不存在最小值; ③ $f(x)$ 零点个数为 $g(a)$, 则函数 $g(a)$ 的值域为 $\{0, 1, 2, 3\}$; ④当 $a \geq 1$ 时, 对任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $f(x_1) + f(x_2) \geq 2f(\frac{x_1+x_2}{2})$.

其中所有正确结论的序号是_____.