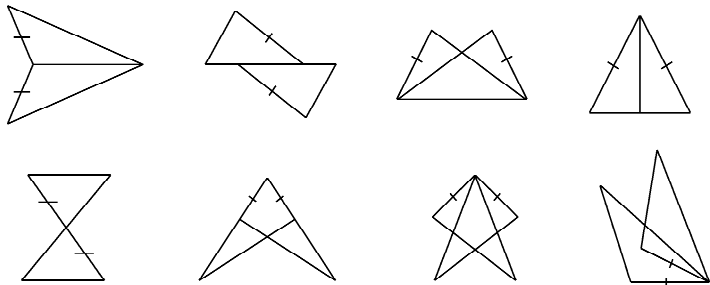


第1章 三角形

本章导读

三角形是基本的几何图形之一,在生产和生活中有广泛的应用.本章通过举出三角形的实际例子认识和感受三角形,形成三角形的概念.了解三角形的任意两边之和大于第三边,理解三角形及与三角形有关的线段(边、高、中线、角平分线)的概念.两个几何图形的全等是指两个图形之间的一种关系,其中最基本的关系是两个图形点的对应关系,以及对应边、对应角之间的相等关系.全等三角形是研究三角形、四边形等图形性质的主要工具,是解决有关线段、角等问题的一个出发点.证明线段相等、线段和差相等、角相等、两直线位置关系等问题经常会直接或间接地用到全等三角形.我们把这种运用全等三角形来解决问题的方法称为全等三角形法.

我们实际遇到的图形,两个全等三角形并不完全重合在一起,而是处于各种不同的位置,但其中一个可以由另一个经过平移、翻折、旋转等变换而得到.了解全等变换的这几种形式,有助于发现全等三角形、确定对应元素.善于在复杂的图形中发现、分解、构造基本的全等三角形是解题的关键,应熟悉以下常见的基本图形:



超能聚焦镜

焦点1 三角形三边关系

【思维解读】三角形的任意一边大于另两边之差,小于另两边之和,在具

体的问题中,可以用此关系求线段的范围和确定三角形的存在性问题.

【例题展示】已知在 $\triangle ABC$ 中,三边长 a, b, c 都是整数,且满足 $a > b > c, a = 8$,那么满足条件的三角形共有多少个?

【分析】首先根据三角形三边之间的关系,可得 $b + c > a$.再根据条件 $b > c$ 可确定 $b > 4$,再由 $a > b$ 可得, $4 < b < 8$,进而可确定 b 的值,再确定 c 的值即可.

【答案】根据三角形三边之间的关系,可得 $b + c > a$.因为 $b > c$,所以 $b > 4$.因为 $a > b, a = 8$,所以 $4 < b < 8$.因为 b 为整数,所以 b 的值可取 $5, 6, 7$.所以 $a = 8, b = 5, c = 4; a = 8, b = 6, c = 5$ 或 $c = 4$ 或 $c = 3; a = 8, b = 7, c = 6$ 或 $c = 5$ 或 $c = 4$ 或 $c = 3$ 或 $c = 2$.因此满足条件的三角形共有 $1 + 3 + 5 = 9$ (个).

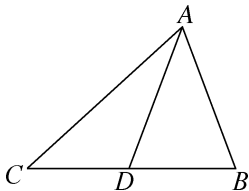
【超级链接】“巅峰训练1”第9题;“第1章综合练(2)”第6题.

焦点2 三角形的特殊线段

【思维解读】三角形的中线是从一个顶点到对边中点的线段.中线的一个重要特性是它将三角形的面积一分为二,可以通过中线将三角形划分为两个面积相等的小三角形,从而简化计算.三角形的高线常与直角相关,解决面积和角度问题.三角形的角平分线是从三角形的一个顶点出发,到其对边的一条线段,它将三角形的角平分成分两个相等的角.角平分线常用于处理与角度和面积相关的问题.构造角平分线的模型可证明线段相等.当条件中出现角平分线时,常过角平分线上的点向角的两边作垂线,根据角平分线的性质得垂线段相等.同样,欲证明某射线为角平分线时,只需过该射线上一点向角的两边作垂线,再证垂线段相等即可.

【例题展示 1】如图,在 $\triangle ABC$ 中, AD 是边 BC 上的中线, $\triangle ADC$ 的周长比 $\triangle ABD$ 的周长多 5 cm , AB 与 AC 的和为 13 cm ,

求 AC 的长.



【分析】 根据中线的定义, 可知 $CD=BD$. 结合三角形周长公式知 $AC-AB=5$ cm, 又因为 $AC+AB=13$ cm, 可求 AC 的长度.

【答案】 因为 AD 是边 BC 上的中线, 所以 D 为 BC 的中点, 所以 $CD=BD$. 因为 $\triangle ADC$ 的周长比 $\triangle ABD$ 的周长多 5 cm, 所以 $AC-AB=5$ cm. 又因为 $AB+AC=13$ cm, 所以 $AC=9$ cm.

【超级链接】“巅峰训练 1”第 2, 11 题.

【例题展示 2】 如图 1, 在四边形 $ABCD$ 中, 对角线 BD 平分 $\angle ABC$, $\angle ACB = 72^\circ$, $\angle ABC = 50^\circ$, 并且 $\angle BAD + \angle CAD = 180^\circ$, 那么 $\angle ADC$ 的度数为 ()

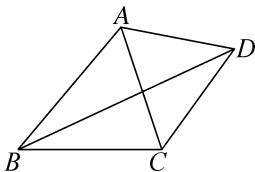


图 1

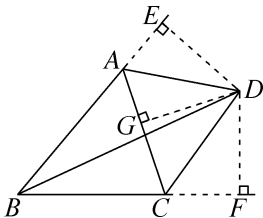


图 2

A. 62° B. 65° C. 68° D. 70°

【分析】 如图 2, 过点 D 分别作 $DE \perp BA$, 交 BA 的延长线于点 E , $DF \perp BC$, 交 BC 的延长线于点 F . 因为 BD 是 $\angle ABC$ 的平分线, 所以 $DE=DF$. 又因为 $\angle BAD + \angle CAD = 180^\circ$, $\angle BAD + \angle EAD = 180^\circ$, 所以 $\angle CAD = \angle EAD$, 所

以 AD 为 $\angle EAC$ 的平分线. 过点 D 作 $DG \perp AC$ 于点 G , 则 $DE = DF = DG$, 所以 CD 为 $\angle ACF$ 的平分线. 因为 $\angle ACB = 72^\circ$, $\angle ABC = 50^\circ$, 所以 $\angle DCA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABC) = 54^\circ$, $\angle BAC = 180^\circ - 72^\circ - 50^\circ = 58^\circ$. 所以 $\angle DAC = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 58^\circ) = 61^\circ$, 所以 $\angle ADC = 180^\circ - \angle DAC - \angle DCA = 180^\circ - 61^\circ - 54^\circ = 65^\circ$.

【答案】 B

【方法总结】 当条件中出现角平分线时, 从角平分线上的一点向角的两边作垂线段, 是常见的辅助线.

【超级链接】 “巅峰训练 4” 第 2 题.

【例题展示 3】 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC < 60^\circ$, CD 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 D , 点 E 在线段 CD 上 (点 E 不与点 C, D 重合), 且 $\angle EAC = 2\angle EBC$.

(1) 如图 1, 若 $\angle EBC = 27^\circ$, 且 $EB = EC$, 则 $\angle DEB =$ _____, $\angle AEC =$ _____.

(2) 如图 2, ①求证: $AE + AC = BC$;

②若 $\angle ECB = 30^\circ$, 且 $AC = BE$, 求 $\angle EBC$ 的度数.

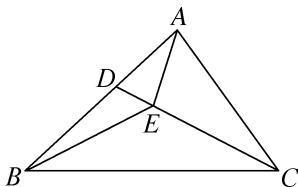


图 1

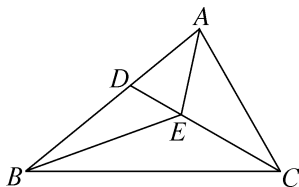


图 2

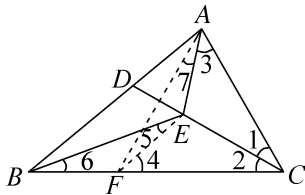


图 3

【分析】 (1) 根据三角形的内角和定理以及等腰三角形的性质进行求解.

(2) 利用截取法, 构造一个三角形与 $\triangle ACE$ 全等, 然后通过长度或角度之间的关系进行求解.

【答案】 (1) 54° 99°

(2) ①如图 3, 在 CB 上截取 CF , 使得 $FC=AC$, 连接 EF . 因为 CD 平分 $\angle ACB$, 所以 $\angle 1=\angle 2$. 在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle FCE$ 中, 因为 $AC=FC$, $\angle 1=\angle 2$, $EC=EC$, 所以 $\triangle ACE \cong \triangle FCE$, 所以 $\angle 3=\angle 4$, $AE=FE$. 因为 $\angle 4=\angle 5+\angle 6$, 所以 $\angle 3=\angle 5+\angle 6$. 因为 $\angle 3=2\angle 6$, 所以 $\angle 5=\angle 6$, 所以 $FB=FE$. 所以 $AE=FB$, 所以 $AE+AC=FB+FC=BC$.

②如图 3, 连接 AF . 因为 $\angle 1=\angle 2=30^\circ$, 所以 $\angle ACF=\angle 1+\angle 2=60^\circ$. 因为 $AC=FC$, 所以 $\triangle ACF$ 是等边三角形, 所以 $AF=AC$, $\angle FAC=60^\circ$. 因为 $AC=BE$, 所以 $BE=AF$. 在 $\triangle BFE$ 和 $\triangle AEF$ 中, 因为 $BF=AE$, $FE=EF$, $BE=AF$, 所以 $\triangle BFE \cong \triangle AEF$, 所以 $\angle 6=\angle 7$. 因为 $\angle 7+\angle 3=60^\circ$, 所以 $\angle 6+\angle 3=60^\circ$. 因为 $\angle 3=2\angle 6$, 所以 $\angle 6+2\angle 6=60^\circ$, 所以 $\angle 6=20^\circ$, 即 $\angle EBC=20^\circ$.

【方法总结】当条件中出现角平分线时, 在角的两边截取相等的线段, 即利用翻折法构成全等三角形, 也是常见的辅助线.

【超级链接】“巅峰训练 4”第 9 题.

焦点 3 全等三角形的性质与判定

【思维解读】在证明三角形全等时, “SSS”“SAS”“ASA”“AAS”可用于任意三角形全等的判定; “HL”只限于直角三角形全等的判定. 注意“SSA”“AAA”不能判定两个三角形全等. 在证明时注意观察图形的特征, 如等角重合、有等角、公共边、公共角, 捕捉图形隐含的信息, 如对顶角相等、等角(或同角)的余角(或补角)相等, 利用题目给定的条件, 如角平分线定义、线段中点定义等, 利用定理及等式性质、等量代换等技巧.

【例题展示 1】给出下列说法: ①全等三角形对应边上的中线、高、对应角的平分线对应相等; ②两边和其中一边上的中线(或第三边上的中线)对应相等的两个三角形全等; ③两角和其中一角的平

分线(或第三角的平分线)对应相等的两个三角形全等;④两边和其中一边上的高(或第三边上的高)对应相等的两个三角形全等. 其中说法正确的有 ()

- A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 1 个

【分析】 根据全等三角形的判定方法,此题应采用排除法,对选项逐个进行分析从而确定正确答案,全等三角形对应边上的中线、高、对应角的平分线对应相等,故①正确;两边和其中一边上的中线对应相等易证两个三角形全等,两边和第三边上的中线对应相等,可以先证明两边的夹角相等,再证明两个三角形全等,如图 1,在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中, $AB = DE$, $AC = DF$, $AP = DQ$, 分别延长中线 AP , DQ 至点 M , N , 使 $PM = AP$, $QN = QD$, 则 $\triangle PAC \cong \triangle PMB$, $\triangle QDF \cong \triangle QNE$, 所以 $BM = CA$, $NE = DF$, 从而 $\triangle AMB \cong \triangle DNE$, 所以 $\angle 1 + \angle 2 = \angle 1 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 6 = \angle 4 + \angle 5$, 即 $\angle BAC = \angle EDF$, 所以 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, 故②正确;两角和其中一角的平分线(或第三角的平分线)对应相等,可以用“ AAS ”或者“ ASA ”判定两个三角形全等,故③正确;两边和其中一边上的高(或第三边上的高)对应相等时,如图 2 左图, $BC = BC'$, $CD = C'D'$, 如图 2 右图, $BC = B'C$, $CD \perp AB'$, 这两种情况下 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABC'$ 都不全等,故④错误. 所以说法正确的有 3 个.

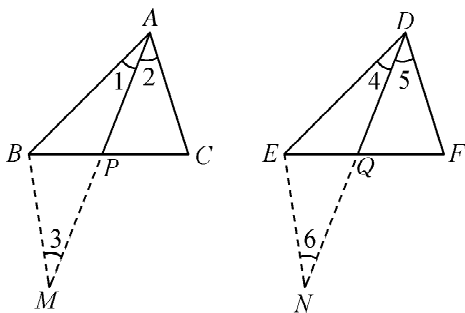


图 1

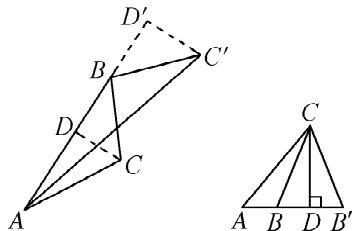


图 2

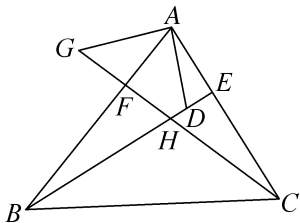
【答案】 B

【超级链接】“第 1 章综合练(1)”第 4 题.

【例题展示 2】(2025 盐城市期末)如图,在 $\triangle ABC$ 中, BE, CF 分别是 AC, AB 两边上的高,在 BE 上截取 $BD=AC$,在 CF 的延长线上截取 $CG=AB$,连接 AD, AG .

(1) 求证: $AD=GA$.

(2) 问: AD 与 AG 的位置关系如何?并说明理由.



【分析】(1) 因为 $BE \perp AC, CF \perp AB$, 所以 $\angle HFB = \angle HEC$. 由对顶角相等, 得 $\angle BHF = \angle CHE$, 所以 $\angle ABD = \angle ACG$. 再由 $AB = GC, BD = CA$, 可得 $\triangle ABD \cong \triangle GCA$ (SAS), 所以 $AD = GA$.

(2) 利用全等得出 $\angle ADB = \angle GAC$, 再利用三角形的外角和定理得到 $\angle ADB = \angle AED + \angle DAE$, 又因为 $\angle GAC = \angle GAD + \angle DAE$, 利用等量代换可得出 $\angle AED = \angle GAD = 90^\circ$, 即 $AD \perp AG$.

【答案】(1) 因为 $BE \perp AC, CF \perp AB$, 所以 $\angle HFB = \angle HEC = 90^\circ$. 又因为 $\angle BHF = \angle CHE$, 所以 $\angle ABD = \angle GCA$. 在

$$\triangle ABD \text{ 和 } \triangle GCA \text{ 中 } \begin{cases} AB = GC, \\ \angle ABD = \angle GCA, \text{ 所以 } \triangle ABD \cong \triangle GCA \\ BD = CA, \end{cases}$$

(SAS), 所以 $AD = GA$.

(2) 位置关系是 $AD \perp AG$, 理由如下:

因为 $\triangle ABD \cong \triangle GCA$, 所以 $\angle ADB = \angle GAC$. 又因为 $\angle ADB = \angle AED + \angle DAE, \angle GAC = \angle GAD + \angle DAE$, 所以

$\angle GAD = \angle AED = 90^\circ$, 所以 $AD \perp AG$.

【超级链接】“巅峰训练 2”第 3 题.

【例题展示 3】如图 1, CD 是经过 $\angle BCA$ 的顶点 C 的一条直线, $CA = BC$, E, F 分别是直线 CD 上的两点, 且 $\angle BEC = \angle CFA = \alpha$.

(1) 若直线 CD 经过 $\angle BCA$ 的内部, 且点 E, F 在射线 CD 上, 请解决下面两个问题:

①如图 2, 若 $\angle BCA = \alpha = 90^\circ$, 则 BE _____ CF , EF _____ $|BE - AF|$ (填“ $>$ ”“ $<$ ”或“ $=$ ”).

②如图 3, 若 $0^\circ < \angle BCA < 180^\circ$, 请添加一个关于 α 与 $\angle BCA$ 之间关系的条件“_____”, 使①中的两个结论仍然成立, 并证明这两个结论.

(2) 如图 4, 若直线 CD 经过 $\angle BCA$ 的外部, $\angle BCA = \alpha$, 请提出关于 EF, BE, AF 三条线段之间数量关系的合理猜想, 并说明理由.

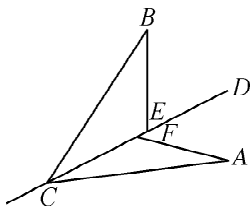


图 1

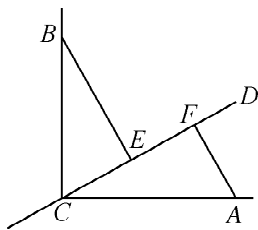


图 2

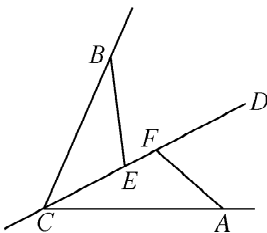


图 3

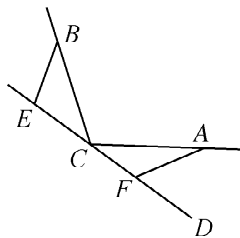


图 4

【分析】(1) ①易知 $\angle BEC = \angle CFA = 90^\circ$, $\angle CBE = \angle ACF$, 根据“AAS”可证 $\triangle BCE \cong \triangle CAF$, 推出 $BE = CF$, $CE = AF$, 当点 E 在点 F 的右侧时, 同理可证; 对于②, 可用①进行逆推, 寻找 $\triangle BCE \cong \triangle CAF$ 应满足的条件. 对于(2)可用归纳类比的方法提出猜想.

【答案】(1) ① = =

$$\textcircled{2} \alpha + \angle BCA = 180^\circ$$

证明: 当点 E 在点 F 的左侧时, 因为 $\angle BEC = \angle CFA = \alpha$, $\alpha + \angle BCA = 180^\circ$, $\alpha + \angle BED = 180^\circ$, 所以 $\angle BED = \angle BCA$. 因为 $\angle BED = \angle CBE + \angle BCE$, $\angle BCA = \angle ACF + \angle BCE$, 所以 $\angle CBE = \angle ACF$. 在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle CAF$ 中, 因为 $\angle CBE = \angle ACF$, $\angle BEC = \angle CFA$, $BC = CA$, 所以 $\triangle BCE \cong \triangle CAF$. 所以 $BE = CF$, $CE = AF$, 所以 $EF = CF - CE = BE - AF$. 当点 E 在点 F 的右侧时, 同理可证 $EF = AF - BE$. 所以 $EF = |BE - AF|$.

(2) $EF = BE + AF$. 理由如下:

因为 $\angle BEC = \angle CFA = \alpha$, $\angle BCA = \alpha$, $\angle CBE + \angle BCE + \angle BEC = 180^\circ$, $\angle BCE + \angle ACF + \angle BCA = 180^\circ$, 所以 $\angle CBE + \angle BCE = \angle BCE + \angle ACF$, 所以 $\angle CBE = \angle ACF$. 在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle CAF$ 中, 因为 $\angle CBE = \angle ACF$, $\angle BEC = \angle CFA$, $BC = CA$, 所以 $\triangle BCE \cong \triangle CAF$, 所以 $AF = CE$, $BE = CF$. 因为 $EF = CF + CE$, 所以 $EF = BE + AF$.

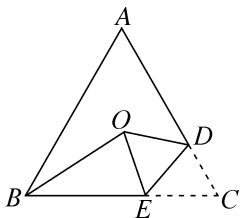
【超级链接】“第1章综合练(1)”第10题.

焦点4 线段垂直平分线

【思维解读】线段垂直平分线的性质定理为我们提供了证明两条线段相等的又一方法; 线段垂直平分线性质的逆定理是判定点在直线上或直线经

过某点的重要依据.

【例题展示 1】如图,在等腰三角形 ABC 中, $AB = AC$, 将 $\triangle ABC$ 沿 DE 折叠,使底角顶点 C 落在三角形三边的垂直平分线的交点 O 处. 若 $BE = BO$, 则 $\angle ABC$ 的度数为 ()



- A. 54° B. 60° C. 63° D. 72°

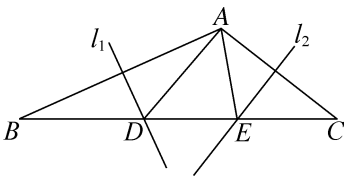
【分析】因为三角形三边的垂直平分线交于点 O , 所以该点到三角形三个顶点的距离相等. 连接 OA, OC 后, 图形中存在多个等腰三角形, 从而利用方程思想求解其角度. 设 $\angle OCE = x^\circ$, 由折叠的性质, 可知 $OE = CE$, 所以 $\angle COE = \angle OCE = x^\circ$. 因为三角形三边的垂直平分线的交于点 O , 所以 $OB = OC = OA$, 所以 $\angle OBC = \angle OCE = x^\circ$, $\angle OAB = \angle OBA$, $\angle OAC = \angle OCA$. 因为 $\angle OEB = \angle OCE + \angle COE = 2x^\circ$, 所以可证 $\angle BOE = 2x^\circ$. 在 $\triangle OBE$ 中, $\angle OBC + \angle BOE + \angle OEB = 180^\circ$, 即 $x + 2x + 2x = 180$, 解得 $x = 36$. 所以 $\angle OBC = \angle OCE = 36^\circ$, 所以 $\angle A = \frac{180^\circ - \angle OBE - \angle OCB}{2} = 54^\circ$, 所以 $\angle ABC = \frac{180^\circ - \angle A}{2} = 63^\circ$.

【答案】C

【超级链接】“巅峰训练 4”第 4 题.

【例题展示 2】(2025 苏州市期末)如图,在 $\triangle ABC$ 中,边 AB 的垂直平分线 l_1 与边 BC 相交于点 D ,边 AC 的垂直平分线 l_2 与边 BC 相交于点 E (点 D 在点 E 的左侧). 若 $\triangle ADE$ 的周长为 8, $\angle DAE = 60^\circ$.

- (1) 求 BC 的长;
 (2) 求 $\angle BAC$ 的度数.



【分析】(1) 根据线段垂直平分线的性质,得 $DA = DB$, $EA = EC$,再根据三角形的周长公式计算,得到答案.

(2) 根据三角形内角和定理,得 $\angle ADE + \angle AED = 120^\circ$,再根据等腰三角形的性质、三角形外角性质,求出 $\angle BAD + \angle EAC = 60^\circ$,最后根据角的和差求解即可.

【答案】(1) 因为 l_1 垂直平分 AB ,所以 $DB = DA$,同理 $EA = EC$.因为 $\triangle ADE$ 的周长为 $AD + AE + DE = 8$,所以 $BC = BD + DE + EC = DA + DE + EA = 8$.

(2) 因为 $\angle DAE = 60^\circ$,所以 $\angle ADE + \angle AED = 180^\circ - \angle DAE = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.因为 $DA = DB$, $EA = EC$,所以 $\angle BAD = \angle ABC$, $\angle EAC = \angle ACB$.因为 $\angle ADE = \angle BAD + \angle ABC$, $\angle AED = \angle EAC + \angle ACB$,所以 $\angle BAD + \angle EAC = \frac{1}{2}(\angle ADE + \angle AED) = 60^\circ$,所以 $\angle BAC = \angle BAD + \angle EAC + \angle DAE = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

【超级链接】“巅峰训练4”第10题.

焦点5 等腰三角形

【思维解读】等腰三角形的性质定理揭示了三角形中边相等与角相等之

间的关系,由两边相等推出两角相等,是证明两角相等常用的依据之一;等腰三角形底边上的中线、底边上的高、顶角的平分线“三线合一”的性质是证明两条线段相等、两个角相等以及两条直线互相垂直的重要依据;等腰三角形的判定定理揭示了三角形中角与边的转化关系,它是证明线段相等的重要定理,也是把三角形中角的相等关系转化为边的相等关系的重要依据.

【例题展示 1】定义:如图 1,如果两条线段将一个三角形分成三个等腰三角形,我们把这两条线段叫作这个三角形的“三分线”.

(1) 请你在图 2 中用两种不同的方法画出顶角为 45° 的等腰三角形的“三分线”,并标注每个等腰三角形顶角的度数(若两种方法分得的三角形成三对全等三角形,则视为同一种).

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 30^\circ$, AD 和 DE 是 $\triangle ABC$ 的“三分线”,点 D 在边 BC 上,点 E 在边 AC 上,且 $AD = BD$, $DE = CE$,设 $\angle C = x^\circ$,试画出示意图,并求出 x 所有可能的值.

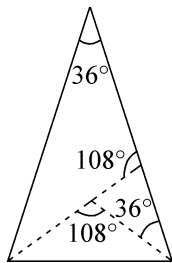


图 1

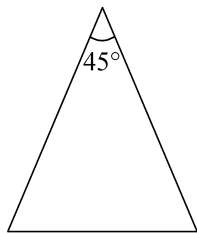


图 2

【分析】(1) 正确理解“三分线”的定义,当顶角为 45° 时,分割后的三角形中必有一个等腰直角三角形,从而这两条线中必有一条垂直于原三角形的腰,由此作出一条线,余下的图形中,我们可尝试从不同的顶点画线,探讨使之成为等腰三角形的角度方面的条件.

(2) 已知 $\triangle ABC$ 不一定为等腰三角形,但分割后的三角形中, $\triangle ABD$ 与

$\triangle EDC$ 的形状已确定,故只要对 $\triangle ADE$ 进行分类讨论即可.

【答案】(1) 作法如图 3 至图 5 所示,画出两种即可.

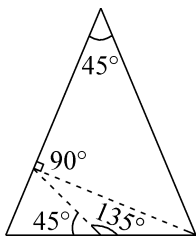


图 3

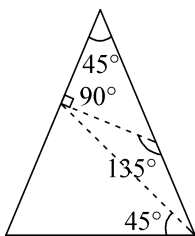


图 4

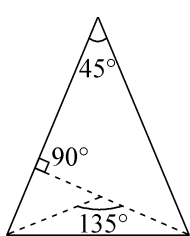


图 5

(2) 如图 6, 当 $AD=AE$ 时, 由条件, 得 $\angle ADE = \angle AED = 2x^\circ$, 从而由 $\angle ADC = 2\angle B$, 得 $2x + x = 2 \times 30$, 解得 $x = 20$ (符合题意); 如图 7, 当 $AD=DE$ 时, $\angle DAE = \angle AED = 2x^\circ$, 从而 $\angle ADE = 180^\circ - 4x^\circ$, 由 $\angle ADC = 2\angle B$, 得 $180 - 4x + x = 2 \times 30$, 解得 $x = 40$ (符合题意); 当 $AE=DE$ 时, $\angle DAE = \angle ADE = 90^\circ - x^\circ$, 此时 $90 - x + x = 60$ (不符合题意). 综上所述, $\angle C$ 的度数是 20° 或 40° .

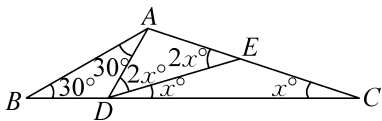


图 6

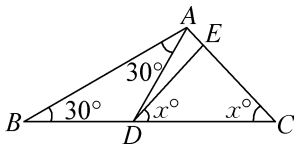


图 7

【方法总结】因为等腰三角形有腰与底之分、顶角与底角之分, 所以对于等腰三角形的有关计算问题, 通常需要进行分类讨论.

【变式拓展】(1) 若等腰三角形的两边长分别为 3 cm, 5 cm, 则它的周长等于_____.

(2) 若等腰三角形的一内角度数为 30° , 则另两角度数分别为_____.

【答案】 (1) 11 cm 或 13 cm (2) $75^\circ, 75^\circ$ 或 $30^\circ, 120^\circ$

【超级链接】“第 1 章综合练(1)”第 11 题.

【例题展示 2】如图 1, 在等腰三角形 ABC 中, $AB = AC = 6$, $\angle BAC = \alpha$, D 是边 AC 上一点(不与点 A, C 重合), 连接 BD , 将 $\triangle ABD$ 沿 BD 翻折得到 $\triangle EBD$, 连接 CE .

(1) 若 $\alpha = 120^\circ$, 当 $BD \parallel CE$ 时, 请用无刻度的直尺和圆规作出点 E 的位置(在图 2 中作图, 写出必要的说明).

(2) ①如图 3, 当点 E 落在边 BC 上, 且 $\triangle CDE$ 为等腰三角形时, 求 α 的值.

②当点 D 在边 AC 上运动时, 存在点 E 落在边 AC 上, 求 α 的取值范围.

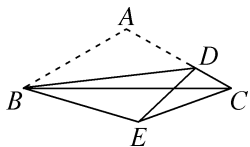


图 1

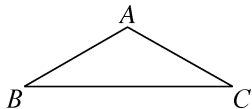


图 2

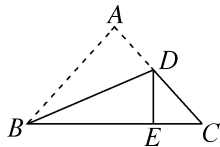


图 3

【分析】 (1) 当 $BD \parallel CE$ 时, $\angle BDA = \angle ACE$, $\angle BDE = \angle DEC$. 易知 $\triangle ABD \cong \triangle EBD$, 所以 $\angle BDE = \angle BDA$, $AD = ED$. 所以 $\angle DEC = \angle ACE$, 所以 $AD = CD$, 可知 D 为 AC 的中点, 再根据 $\triangle ABD \cong \triangle EBD$ 即可作图.

(2) ①当 $\triangle CDE$ 为等腰三角形时, 可分为三种情况, 从而根据等腰三角形的性质讨论即可.

②当存在点 E 落在边 AC 上时, $\triangle ABD \cong \triangle EBD$, 即 $\angle ADB = \angle EDB = 90^\circ$, $\angle BAC = \angle BED = \alpha$, $\alpha < 90^\circ$, 可得 $\angle ACB = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$, 点 E 可与点 C 重合, 不与点 D 重合, 即可求解.

【答案】 (1) 如图 4, 当 $BD \parallel CE$ 时, $\angle BDA = \angle ACE$,

$\angle BDE = \angle DEC$. 由翻折的性质, 得 $\triangle ABD \cong \triangle EBD$, 所以 $\angle BDE = \angle BDA$, $BE = BA$, $AD = ED$, 所以 $\angle DEC = \angle BDE = \angle BDA = \angle ACE$, 所以 $AD = ED = CD$, 即 D 为 AC 的中点. 具体作图如下:

如图 5, 先作出 AC 的垂直平分线, 得 AC 的中点 D , 再以点 D 为圆心, AD 为半径作圆弧, 以点 B 为圆心, BA 为半径作圆弧, 两弧交点就是点 E 的位置.

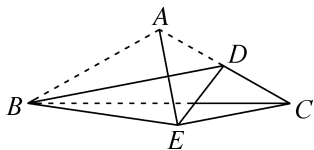


图 4

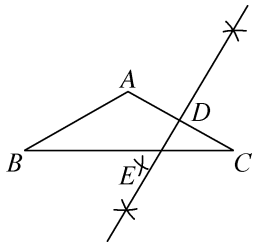


图 5

(2) ①当 $\triangle CDE$ 为等腰三角形时, 可分为三种情况: 当 $DE = EC$ 时, 因为 $\triangle ABD \cong \triangle EBD$, $\angle BAC = \alpha$, 所以 $\angle BAC = \angle BED = \alpha$, 因为 $AB = AC$, 所以 $\angle ABC = \angle ACB = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$, 因为 $DE = EC$, 所以 $\angle ACB = \angle EDC = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$, 因为 $\angle DEB = \angle EDC + \angle ACB$, 所以 $\alpha = \frac{180^\circ - \alpha}{2} \times 2$, 解得 $\alpha = 90^\circ$; 当 $DE = CD$ 时, 因为 $\angle DEC = \angle ACB = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$, 因为 $\angle BED = \angle BAC = \alpha$, 所以 $\angle DEC = 180^\circ - \alpha$, 所以 $180^\circ - \alpha = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$, 解得 $\alpha = 180^\circ$ (不符合题意); 当 $CE = CD$ 时, 因

为 $\angle ACB = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$, $\angle BED = \angle BAC = \alpha$, 所以 $\angle DEC = 180^\circ - \alpha$, 所以 $\angle EDC = \angle DEC = 180^\circ - \alpha$, 所以 $\angle DEC + \angle EDC + \angle ACB = 180^\circ$, 即 $(180^\circ - \alpha) \times 2 + \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 180^\circ$, 解得 $\alpha = 108^\circ$. 综上所述 $\alpha = 90^\circ$ 或 $\alpha = 180^\circ$.

② 当存在点 E 落在边 AC 上时, $\triangle ABD \cong \triangle EBD$, 所以 $\angle ADB = \angle EDB = 90^\circ$, $\angle BAC = \angle BED = \alpha$, 所以 $\alpha < 90^\circ$. 因为 $\angle ACB = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$, 点 E 可与点 C 重合, 不与点 D 重合, 所以 $\angle BED \geq \angle ACB$, 所以 $\alpha \geq \frac{180^\circ - \alpha}{2}$, 解得 $\alpha \geq 60^\circ$. 综上所述, $60^\circ \leq \alpha < 90^\circ$.

【方法总结】方程(组)思想是三角形角度、边长计算中的重要工具. 要熟练掌握通过设未知数、利用条件设法建立方程(组)来求解具体问题的方法.

【变式拓展】(1) 已知等腰三角形一腰上的中线把这个三角形的周长分成 12 cm 和 21 cm 两部分, 求这个等腰三角形的底边长.

(2) 如果等腰三角形中一个角的度数是另一个角度数的一半, 求该三角形各内角的度数.

【答案】(1) 设这个等腰三角形的腰长为 $2x$ cm, 底边长为 y cm, 则 $\begin{cases} 3x = 12, \\ x + y = 21 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 3x = 21, \\ x + y = 12, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 4, \\ y = 17 \end{cases}$ (舍去) 或 $\begin{cases} x = 7, \\ y = 5. \end{cases}$ 所以这个等腰三角形底边长是 5 cm.

(2) 设一内角为 x° , 另一内角为 $2x^\circ$. 当底角为 x° 时, $x + 2x +$

$x=180$, 解得 $x=45$, 故此时该等腰三角形各内角的度数分别为 $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$; 当底角为 $2x^\circ$ 时, $2x+2x+x=180$, 解得 $x=36$, 故此时该等腰三角形各内角的度数分别为 $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$.

【超级链接】“巅峰训练6”第12题.

【例题展示3】老师布置了这样一道作业题: 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC \neq BC$, 点 D 和点 A 在线段 BC 的同侧, $BD=BC$, $\angle BAC=\alpha$, $\angle DBC=\beta$, $\alpha+\beta=120^\circ$, 连接 AD , 求 $\angle ADB$ 的度数.

小聪提供了研究这个问题的思路 and 过程: 先从特殊问题开始研究, 当 $\alpha=90^\circ, \beta=30^\circ$ 时(如图1), 利用轴对称知识, 以 AB 为对称轴构造 $\triangle ABD$ 的轴对称图形 $\triangle ABD'$, 连接 CD' (如图2), 然后利用 $\alpha=90^\circ, \beta=30^\circ$ 以及等边三角形的相关知识便可解决这个问题.

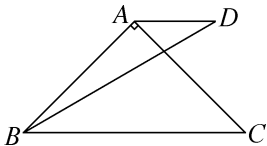


图 1

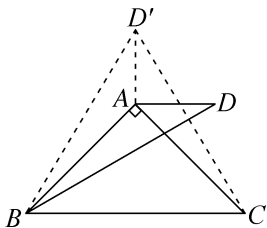


图 2

(1) 请结合小聪研究问题的思路 and 过程, 求出这种特殊情况下 $\angle ADB$ 的度数.

(2) 结合小聪研究特殊问题的启发, 请解决老师布置的这道作业题.

【分析】根据题意, 可知小聪已给出了一种证明思路与方法, 故只要遵循这种思路去思考与证明, 就能解决问题.

【答案】(1) 因为 $AB=AC, \angle BAC=90^\circ$, 所以 $\angle ABC=45^\circ$.

因为 $\angle DBC = 30^\circ$, 所以 $\angle ABD = \angle ABC - \angle DBC = 15^\circ$. 根据题意, 得 $\triangle ABD \cong \triangle ABD'$, 所以 $BD = BD'$, $\angle ABD = \angle ABD' = 15^\circ$, $\angle ADB = \angle AD'B$, 所以 $\angle D'BC = \angle ABD' + \angle ABC = 60^\circ$. 又因为 $BD = BC$, 所以 $BD' = BC$, 所以 $\triangle D'BC$ 是等边三角形, 所以 $D'B = D'C$, $\angle BD'C = 60^\circ$. 又因为 $AB = AC$, $AD' = AD'$, 所以 $\triangle AD'B \cong \triangle AD'C$, 所以 $\angle AD'B = \angle AD'C$. 所以 $\angle AD'B = \frac{1}{2} \angle BD'C = 30^\circ$, 所以 $\angle ADB = 30^\circ$.

(2) 当 $60^\circ < \alpha \leq 120^\circ$ 时, 如图 3, 以 AB 为对称轴构造 $\triangle ABD$ 的轴对称图形 $\triangle ABD'$, 连接 CD' . 因为 $AB = AC$, 所以 $\angle ABC = \angle ACB$. 因为 $\angle BAC = \alpha$, 所以 $\angle ABC = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, 所以 $\angle ABD = \angle ABC - \angle DBC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \beta$. 因为 $\triangle ABD \cong \triangle ABD'$, 所以 $\angle ABD = \angle ABD' = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \beta$, $BD = BD'$, $\angle ADB = \angle AD'B$, 所以 $\angle D'BC = \angle ABD' + \angle ABC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \beta + 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 180^\circ - (\alpha + \beta)$. 因为 $\alpha + \beta = 120^\circ$, 所以 $\angle D'BC = 60^\circ$, 以下同(1)可求得 $\angle ADB = 30^\circ$. 当 $0^\circ < \alpha < 60^\circ$ 时, 如图 4, 以 AB 为对称轴构造 $\triangle ABD$ 的轴对称图形 $\triangle ABD'$, 连接 CD' . 同理可得 $\angle ABC = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, 所以 $\angle ABD = \angle DBC - \angle ABC = \beta - (90^\circ - \frac{\alpha}{2})$. 因为 $\triangle ABD \cong \triangle ABD'$, 所以 $\angle ABD =$

$\angle ABD' = \beta - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$, $BD = BD'$, $\angle ADB = \angle AD'B$, 所以

$$\angle D'BC = \angle ABC - \angle ABD' = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \left[\beta - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\right] = 180^\circ -$$

$(\alpha + \beta)$. 因为 $\alpha + \beta = 120^\circ$, 所以 $\angle D'BC = 60^\circ$. 又因为 $BD = BC$, 所以 $BD' = BC$, 所以 $\triangle D'BC$ 是等边三角形, 所以 $D'B = D'C$, $\angle BD'C = 60^\circ$. 同(1)可证 $\triangle AD'B \cong \triangle AD'C$, 所以 $\angle AD'B = \angle AD'C$. 因为 $\angle AD'B + \angle AD'C + \angle BD'C = 360^\circ$, 所以 $\angle ADB = \angle AD'B = 150^\circ$.

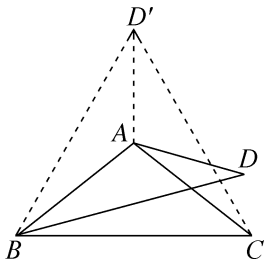


图 3

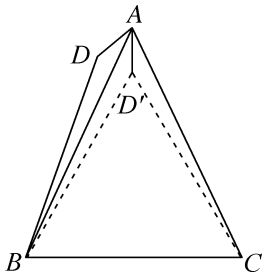


图 4

【方法总结】利用轴对称性质,构造全等三角形,也是一种常见的辅助线作法.

【超级链接】“巅峰训练 4”第 9 题.

焦点 6 全等三角形中常见的辅助线

【例题展示 1】(1) 问题背景: 如图 1, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle BAD = 120^\circ$, $\angle B = \angle ADC = 90^\circ$, E, F 分别是边 BC, CD 上的点, 且 $\angle EAF = 60^\circ$, 请探究图中线段 BE, EF, FD 之间的数量关系. 小王同学探究此问题的方法是: 延长 FD 至点 G , 使 $DG = BE$, 连接 AG , 先证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADG$, 再证明 $\triangle AEF \cong \triangle AGF$, 可得出结论, 他的结论应是_____.

(2) 探索延伸:如图 2,若在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle B + \angle D = 180^\circ$, E, F 分别是边 BC, CD 上的点,且 $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$,上述结论是否仍然成立? 请说明理由.

(3) 实际应用:如图 3,舰艇甲在指挥中心(O 处)北偏西 30° 的点 A 处,舰艇乙在指挥中心南偏东 70° 的点 B 处,并且两舰艇到指挥中心的距离相等,接到行动指令后,舰艇甲向正东方向以 60 n mile/h 的速度前进,舰艇乙沿北偏东 50° 的方向以 80 n mile/h 的速度前进, 1.5 h 后,指挥中心观测到甲、乙两舰艇分别到达点 E, F 处,且两舰艇与指挥中心的连线所形成的夹角为 70° ,求此时两舰艇之间的距离.

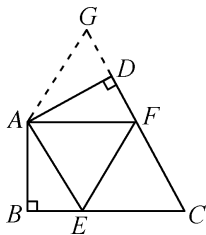


图 1

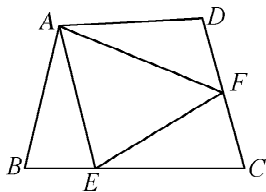


图 2

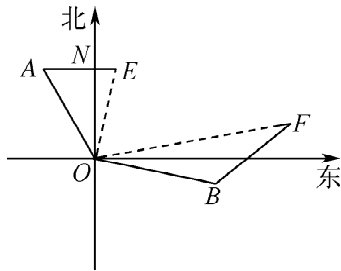


图 3

【分析】(1) 根据全等三角形对应边相等解答.

(2) 本题关键是作辅助线,使做题的思路与(1)的解题思路相近.不妨先尝试应用上题中的解决方法.

(3) 此实际应用的解答要尽可能利用上一题的条件和结论,要构造辅助线,使之符合探索延伸的条件,再根据探索延伸的结论解答即可.

【答案】(1) $EF = BE + FD$

(2) $EF = BE + FD$ 仍然成立.理由如下:

如图 1,延长 FD 至点 G ,使 $DG = BE$,连接 AG . 因为 $\angle B +$

$\angle ADC = 180^\circ$, $\angle ADC + \angle ADG = 180^\circ$, 所以 $\angle B = \angle ADG$. 在

$\triangle ABE$ 和 $\triangle ADG$ 中, $\begin{cases} BE=DG, \\ \angle B=\angle ADG, \text{ 所以 } \triangle ABE \cong \triangle ADG, \text{ 所以} \\ AB=AD, \end{cases}$

$AE=AG$, $\angle BAE = \angle DAG$. 因为 $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$, 所以

$\angle GAF = \angle DAG + \angle DAF = \angle BAE + \angle DAF = \angle BAD -$

$\angle EAF = \angle EAF$. 在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AGF$ 中, $\begin{cases} AE=AG, \\ \angle EAF=\angle GAF, \text{ 所} \\ AF=AF, \end{cases}$

以 $\triangle AEF \cong \triangle AGF$, 所以 $EF=GF$. 因为 $GF=DG+FD=BE+FD$, 所以 $EF=BE+FD$.

(3) 如图 2, 连接 EF . 因为 $\angle AOB = 30^\circ + 90^\circ + (90^\circ - 70^\circ) = 140^\circ$, $\angle EOF = 70^\circ$, 所以 $\angle EOF = \frac{1}{2} \angle AOB$. 又因为 $OA=OB$, $\angle OAE + \angle OBF = (90^\circ - 30^\circ) + (70^\circ + 50^\circ) = 180^\circ$, 所以符合“探索延伸”中的条件, 所以结论 $EF=AE+BF$ 成立. 所以 $EF = 1.5 \times (60+80) = 210(\text{n mile})$, 即此时两舰艇之间的距离是 210 n mile.

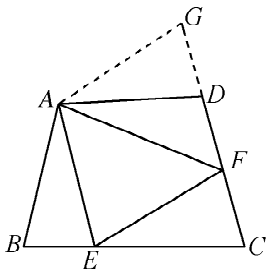


图 1

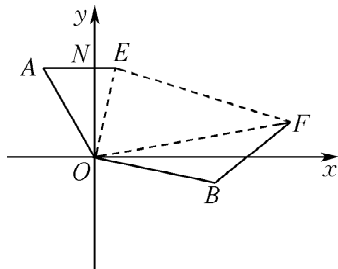
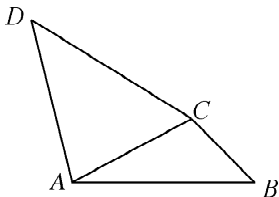


图 2

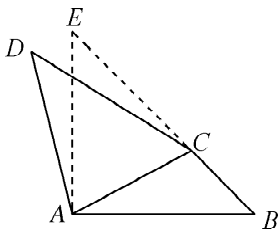
【超级链接】“巅峰训练 2”第 11 题.

【例题展示 2】如图,在四边形 $ABCD$ 中, $\angle ACB = \angle BAD = 105^\circ$, $\angle ABC = \angle ADC = 45^\circ$. 求证: $CD = AB$.



【分析】易得 $\angle CAB = 30^\circ$, $\angle DAC = 75^\circ$, $\angle DCA = 60^\circ$, $\angle ACB + \angle DAC = 180^\circ$, 由特殊度数和角度之间的互补关系可联想到特殊三角形、共线点等.

【答案】因为 $\angle ACB = \angle BAD = 105^\circ$, $\angle ABC = \angle ADC = 45^\circ$, 所以 $\angle CAB = 30^\circ$, $\angle DAC = 75^\circ$, $\angle DCA = 60^\circ$, $\angle ACB + \angle DAC = 180^\circ$. 如图,过点 A 作 $AE \perp AB$, 交 BC 的延长线于点 E , 则 $AB = AE$, $\angle E = \angle D$. 因为 $\angle D = \angle E$, $\angle DAC = \angle ECA = 75^\circ$, $AC = CA$, 所以 $\triangle ADC \cong \triangle CEA$, 所以 $CD = AE = AB$.



【方法总结】从题设条件中无法证明图形中的三角形全等时,应另行添加辅助线,构造全等三角形. 常见的辅助线作法有:①倍长中线;②截等长线段;③添加平行线;④连接线段中点;⑤补全图形;⑥利用对称、翻折或旋转.

【超级链接】“巅峰训练 2”第 5 题.