

一、数学思想

(一) 数形结合思想

数形结合是数学解题中常用的思想方法,应用数形结合可以使某些抽象的数学问题直观化、生动化,能够变抽象思维为形象思维,有助于简捷、巧妙地解决数学问题.

应用数形结合思想需要以形助数,正确地绘图对题意的理解、思路的探求、方法的选择以及结论的判断都有重要的作用;要善于把作图与计算结合起来,充分发挥图形的作用;要观察图形的形状、大小和位置关系等,寻找图形中蕴含的数量关系,运用推理或计算得出结论.应用数形结合思想也需要以数解形,挖掘几何图形中的数量关系,用代数方法解几何问题,根据几何图形建立方程或写出函数表达式是常用的方法.

例 1.1 (2023·宿迁)规定:若函数 y_1 的图像与函数 y_2 的图像有三个不同的公共点,则称这两个函数互为“兄弟函数”,其公共点称为“兄弟点”.

(1) 有下列三个函数:① $y=x+1$;② $y=-\frac{3}{x}$;③ $y=-x^2+1$. 其中与二次函数 $y=2x^2-4x-3$ 互为“兄弟函数”的是_____ (填序号).

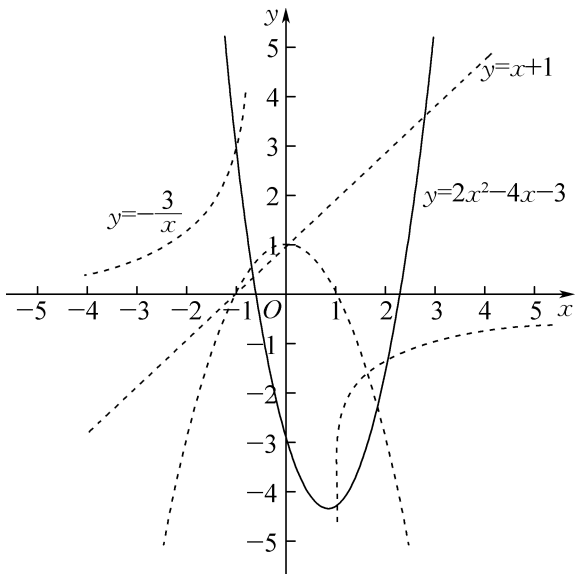
(2) 若函数 $y_1=ax^2-5x+2(a\neq 0)$ 与 $y_2=-\frac{1}{x}$ 互为“兄弟函数”, $x=1$ 是其中一个“兄弟点”的横坐标.

①求实数 a 的值;

②直接写出另外两个“兄弟点”的横坐标是_____,_____.

(3) 若函数 $y_1=|x-m|$ (m 为常数)与 $y_2=-\frac{2}{x}$ 互为“兄弟函数”,三个“兄弟点”的横坐标分别为 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 求 $(x_2+x_3-2x_1)^2$ 的取值范围.

分析: (1) **解法 1** 如图,分别画出三个函数① $y=x+1$;② $y=-\frac{3}{x}$;③ $y=-x^2+1$ 与二次函数 $y=2x^2-4x-3$ 的图像,观察交点个数.



分析: (1) ①利用相似三角形的性质求出 CD 的长, 利用直角三角形斜边中线的性质求出 CE 的长. ②因为 $CD \perp AB$, $0 < a < b$, 所以点 D, E 不重合, 根据“垂线段最短”可知, $CD < CE$, 即 $\frac{1}{2}(a+b) > \sqrt{ab}$, 所以 $a+b > 2\sqrt{ab}$.

(2) ①当 $m=1, n=2$ 时, $l=\frac{9}{8}$; 当 $m=3, n=3$ 时, $l=1$. ②通过反比例函数的图像, 构造出与 l 有关的图形的某一数量特征. 本题可根据反比例函数 k 的几何意义求解.

答案: (1) ①因为 $AC \perp BC, CD \perp AB$, 所以 $\angle ADC = \angle CDB = \angle ACB = 90^\circ$, $\angle ACD + \angle A = 90^\circ$, $\angle A + \angle B = 90^\circ$, 所以 $\angle ACD = \angle B$. 所以 $\triangle ADC \sim \triangle CDB$, 所以 $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$, 所以 $CD^2 = AD \cdot BD$. 因为 $AD=a, BD=b, CD>0$, 所以 $CD=\sqrt{ab}$. 因为 $\angle ACB=90^\circ, AE=EB$, 所以 $CE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}(a+b)$.

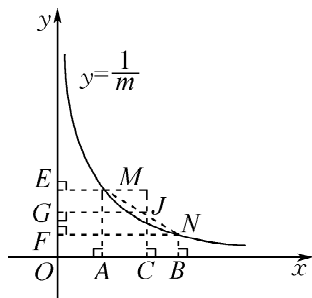
$$\textcircled{2} > a+b > 2\sqrt{ab}$$

$$(2) \textcircled{1} \frac{9}{8} \quad 1$$

②1 该猜想的说明如下:

如图, 过点 M 作 $MA \perp x$ 轴于点 $A, ME \perp y$ 轴于点 E , 过点 N 作 $NB \perp x$ 轴于点 $B, NF \perp y$ 轴于点 F , 连接 MN , 取 MN 的中点 J , 过点 J 作 $JC \perp x$ 轴于点 $C, JG \perp y$ 轴于点 G , 则点 $J\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$. 因为当 $m \neq n$ 时, 点 J 在反比例函数图像的上方, 可得 $S_{\text{矩形}JCOG} > 1$, 当 $m=n$ 时, 点 J 落在反比例函数的图像上, 可得 $S_{\text{矩形}JCOG} = 1$, 所以 $S_{\text{矩形}JCOG} \geq 1$. 所以

$$\frac{p}{2} \cdot \frac{q}{2} \geq 1, \text{即 } l \geq 1, \text{所以 } l \text{ 的最小值为 } 1.$$



点拨: 本题属于反比例函数综合题, 考查了反比例函数的性质、相似三角形的判定和性质, 以及直角三角形斜边中线的性质等知识, 解题的关键是理解反比例函数 k 的几何意义, 并巧妙地运用数形结合思想.

(二) 整体思想

整体思想就是从问题的整体性质出发, 发现问题的整体结构特征, 善于用“集成”的眼光, 把某些式子或图形看成一个整体, 突出对问题的整体结构的分析和改造, 把握它们与由已知条件容易得出的结论之间的关联, 进行有目的、有意识的整体处理.

整体是与局部对应的, 当按常规不容易求某一个(或多个)未知量时, 不妨打破常规, 通过观察与分析, 根据题目的结构特征, 把某一组数或某一个代数式看作一个整体, 把握整体与局部的联系, 从而找到解决问题的新途径.

例 2.1 阅读下列材料, 解答问题.

解方程 $(x^2-1)^2 - 5(x^2-1) + 4 = 0$ 时, 我们可以将 x^2-1 视为一个整体, 然后设 $x^2-1=y$, 则原方程可化为 $y^2 - 5y + 4 = 0$ ①. 解得 $y_1=1, y_2=4$. 当 $y=1$ 时, $x^2-1=1, x^2=2$, 解得 $x=\pm\sqrt{2}$; 当 $y=4$ 时, $x^2-1=4, x^2=5$, 解得 $x=\pm\sqrt{5}$. 所以 $x_1=\sqrt{2}, x_2=-\sqrt{2}, x_3=\sqrt{5}, x_4=-\sqrt{5}$.

还可以通过适当变形,虽不求出 x, y 的具体值,但却整体求得代数式的值. 如:由①-②可得 $x-4y=-2$;由①+② $\times 2$ 可得 $7x+5y=19$. 这样的解题思想就是通常所说的“整体思想”.

【解决问题】(1) 已知二元一次方程组 $\begin{cases} 2x+y=7, \\ x+2y=8, \end{cases}$ 则 $x-y=$ _____, $x+y=$ _____.

(2) 某班级组织活动购买小奖品,买 20 支铅笔、3 块橡皮和 2 本日记本共需 32 元,买 39 支铅笔、5 块橡皮和 3 本日记本共需 58 元,则购买 5 支铅笔、5 块橡皮和 5 本日记本共需多少元?

(3) 对于实数 x, y , 定义新运算: $x * y = ax + by + c$, 其中 a, b, c 是常数, 等式右边是通常的加法和乘法运算. 如果 $3 * 5 = 15, 4 * 7 = 28$, 那么 $1 * 1 =$ _____.

分析: (1) 已知 $\begin{cases} 2x+y=7 \text{ ①,} \\ x+2y=8 \text{ ②,} \end{cases}$ 利用解题的“整体思想”, ①-②即可求得 $x-y$ 的值, (①+②) $\div 3$ 即可求得 $x+y$ 的值.

(2) 设每支铅笔 x 元, 每块橡皮 y 元, 每本日记本 z 元. 根据题意列出方程组, 先求出 1 支铅笔、1 块橡皮和 1 本日记本的单价和, 再求出购买 5 支铅笔、5 块橡皮和 5 本日记本的总价.

(3) **解法 1** 根据题意, 得 $1 * 1 = a + b + c, 3 * 5 = 3a + 5b + c = 15 \text{ ①}, 4 * 7 = 4a + 7b + c = 28 \text{ ②}$. 由① $\times 3$ -② $\times 2$, 得 $a + b + c = -11$. 所以 $1 * 1 = a + b + c = -11$.

解法 2 由 $\begin{cases} 3a+5b+c=15, \\ 4a+7b+c=28, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=13-2b, \\ c=b-24. \end{cases}$ 所以 $1 * 1 = a + b + c = (13-2b) + b + (b-24) = -11$.

答案: (1) $-1 \quad 5$

(2) 设铅笔的单价为 x 元/支, 橡皮的单价为 y 元/块, 日记本的单价为 z 元/本.

根据题意, 得 $\begin{cases} 20x+3y+2z=32 \text{ ①,} \\ 39x+5y+3z=58 \text{ ②.} \end{cases}$ 由① $\times 2$ -②, 得 $x+y+z=6$. 所以 $5x+5y+5z=30$.

所以购买 5 支铅笔、5 块橡皮和 5 本日记本共需 30 元.

(3) -11

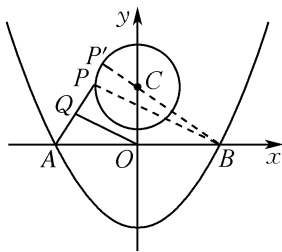
点拨: 根据方程未知数的系数之间的关系, 通过适当变形整体可求得代数式的值. 本题还可以通过整体代入求代数式的值.

(三) 转化(或化归)思想

转化(或化归)不仅是一种重要的解题思想, 也是一种基本的思维策略, 更是一种有效的思维方式. 所谓的转化(或化归)思想方法, 就是在研究和解决有关数学问题时, 采用某种手段将问题通过变换使之转化, 一般总是将复杂问题转化为简单问题, 将难解的问题转化为容易求解的问题, 将未解决的问题通过化归转化为已解决的问题, 或者归结为一个已为人们所熟知的、具有既定方法或程序的问题.

数学解题的过程, 实际上就是把未知转化(或化归)到已知的过程, 也就是把不熟悉的问题转化为熟悉的问题, 通过对条件和结论的转化最终求得问题的答案. 常见的转化方法有待定系数法、配方法、整体代入法、反证法等, 常用的转化策略有化动为静、由抽象到具体、由不等到相等、逆向思维等.

例 3.1 (2022·无锡市锡山区一模) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ, \angle A = 30^\circ, AB =$



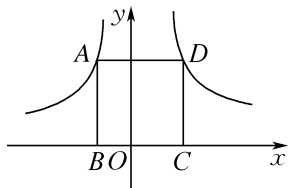
答案:C

点拨:本题间接考查了圆外一点到圆上一点的距离:最短与最长的情形分别是该点与圆心的连线依次与圆的交点到该点的距离. 本题也考查了三角形的中位线, 利用转化思想, 计算出 BP' 的长即可得到线段 OQ 长的最大值.

(四) 方程思想

方程思想就是从问题中发现或构造等量关系, 恰当引入未知量, 把已知量和未知量之间的等量关系转化为方程, 从而使问题得到解决. 在几何计算题中, 常利用几何中的定理、公式、性质(勾股定理、三角函数关系式、相似三角形对应边成比例等)作为等量关系来构造方程, 或利用图形中某些位置关系所隐含的等量关系(线段和差、面积和差等)来构造方程.

例 4.1 (2021 · 徐州) 如图, 点 A, D 分别在函数 $y = -\frac{3}{x}$, $y = \frac{6}{x}$ 的图像上, 点 B, C 在 x 轴上. 若四边形 $ABCD$ 为正方形, 点 D 在第一象限, 则点 D 的坐标是_____.



分析:根据题意可设点 A, D 的纵坐标为 n , 则点 A, D 的坐标可分别表示为 $(-\frac{3}{n}, n)$, $(\frac{6}{n}, n)$. 根据正方形的性质, 得 $\frac{6}{n} + \frac{3}{n} = n$, 解得 $n = \pm 3$. 又因为点 D 在第一象限, 所以 $n = 3$, 所以点 D 的坐标是 $(2, 3)$.

答案: $(2, 3)$

点拨:根据反比例函数图像上点的坐标特征, 表示出点 A, D 的坐标, 再根据正方形的性质, 建立方程是解题的关键.

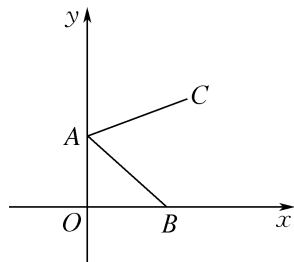
例 4.2 (2022 · 苏州) 如图, 点 A 的坐标为 $(0, 2)$, B 是 x 轴正半轴上的一点, 将线段 AB 绕点 A 按逆时针方向旋转 60° 得到线段 AC . 若点 C 的坐标为 $(m, 3)$, 则 m 的值为 ()

A. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{2\sqrt{21}}{3}$

C. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{4\sqrt{21}}{3}$



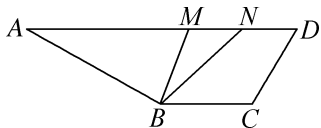
分析:连接 BC , 过点 C 作 $CE \perp OA$, $CD \perp OB$, 垂足分别为 E, D . 设 $BD = x$. 易知 $OB = m -$

点拨: 本题中存在多个等量关系,如三角形相似、直角三角形三边的平方关系,因此应用方程思想是解题基本策略,而将条件“ $\frac{A_1E}{EC}=\sqrt{6}-1$ ”转化为“ $\frac{A_1C}{EC}=\sqrt{6}$ ”是解题关键.

(五) 函数思想

函数思想是用运动和变化的观点,去分析和研究数学问题中的数量关系,建立函数关系或构造函数,运用函数的图像和性质去分析问题、转化问题,从而使问题获得解决.

例 5.1 (2023·无锡) 如图,在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle DAB = 30^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$, $BC = CD = 2$. 若线段 MN 在边 AD 上运动,且 $MN = 1$,则 $BM^2 + 2BN^2$ 的最小值是 ()



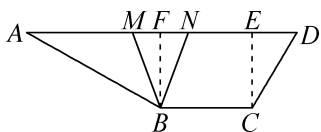
A. $\frac{13}{2}$

B. $\frac{29}{3}$

C. $\frac{39}{4}$

D. 10

分析: 如图,过点 B 作 $BF \perp AD$ 于点 F ,过点 C 作 $CE \perp AD$ 于点 E . 易得 $CE = CD \cdot \sin \angle ADC = \frac{\sqrt{3}}{2} CD = \sqrt{3}$, $BF = CE = \sqrt{3}$. 要使 $BM^2 + 2BN^2$ 的值最小,则 BM 和 BN 越小越好,所以点 F 在线段 MN 上. 设 $MF = x$ ($0 < x < 1$), $FN = 1 - x$, 则 $BM^2 + 2BN^2 = BF^2 + FM^2 + 2(BF^2 + FN^2) = x^2 + 3 + 2[(1-x)^2 + 3] = 3x^2 - 4x + 11 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{29}{3}$. 所以当 $x = \frac{2}{3}$ 时, $BM^2 + 2BN^2$ 有最小值,最小值是 $\frac{29}{3}$.



答案: B

点拨: 本题考查了矩形的性质以及直角三角形的性质,正确地作出辅助线是解题的关键. 根据勾股定理,构造出 $BM^2 + 2BN^2$ 与 MF 的长 x 之间的函数表达式,利用二次函数的性质直接求最值,从而使问题得到解决.

例 5.2 (2024·扬州市广陵区二模) 某公园要在小广场建造一个喷泉景观. 在小广场中央 O 处垂直于地面安装一个高为 1.25 m 的花形柱子 OA ,安置在柱子顶端 A 处的喷头向外喷水,水流在各个方向上沿形状相同的抛物线路径落下,且在过 OA 的任一平面上抛物线路径如图 1 所示,为使水流形状较为美观,设计成水流在距 OA 的水平距离为 1 m 时达到最大高度,此时离地面 2.25 m.

(1) 以点 O 为原点建立如图 2 所示的平面直角坐标系,水流到 OA 水平距离为 x m,水流喷出的高度为 y m,求出在第一象限内的抛物线表达式(不要求写出自变量的取值范围).

(2) 张师傅在喷泉景观内维修设备期间,喷水管意外喷水,但是身高 1.76 m 的张师傅却没有被水淋到,此时他离花形柱子 OA 的距离为 d m,求 d 的取值范围.

(3) 为了美观,在离花形柱子 4 m 处的地面 B, C 处安装射灯,射灯射出的光线与地面成 45° 角,如图 3 所示,光线交汇点 P 在花形柱子 OA 的正上方,且 $OP = 4$ m,求光线与抛物线水

续表

制定加工方案			
探究任务	任务 1	探寻变量关系	求 x, y 之间的数量关系.
	任务 2	建立数学模型	设该工厂每天的总利润为 w 元, 求 w 关于 x 的函数表达式.
	任务 3	拟定加工方案	制定使每天总利润最大的加工方案.

分析:任务 1: 根据题意安排 x 名工人加工“雅”服装, y 名工人加工“风”服装, 得出加工“正”服装的有 $(70-x-y)$ 人, 然后利用“正”服装总件数和“风”服装相等, 得出关系式即可得出结果.

任务 2: 根据题意, 得“雅”服装每天获利为 $x[100-2(x-10)]$, 然后将 2 种服装的获利求和即可得出结果.

任务 3: 根据任务 2 结果化为顶点式, 然后结合题意, 求解即可.

答案:任务 1: 根据题意, 加工“雅”服装的有 x 人, 加工“风”服装的有 y 人, 所以加工“正”服装的有 $(70-x-y)$ 人. 因为“正”服装总件数和“风”服装相等, 所以 $(70-x-y) \times 1 = 2y$, 整理, 得 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{70}{3} (10 \leq x \leq 70)$.

任务 2: 根据题意, 得“雅”服装每天获利为 $x[100-2(x-10)]$ 元, 所以 $w = 2y \times 24 + (70-x-y) \times 48 + x[100-2(x-10)]$, 整理, 得 $w = -2x^2 + 72x + 3\,360 (10 \leq x \leq 70)$.

任务 3: 由任务 2, 得 $w = -2x^2 + 72x + 3\,360 = -2(x-18)^2 + 4\,008$, 所以当 $x=18$ 时, 获得最大利润, 此时 $y = -\frac{1}{3} \times 18 + \frac{70}{3} = \frac{52}{3}$, 不符合题意. 因为二次函数图像开口向下, 所以取 $x=17$ 或 $x=19$. 当 $x=17$ 时, $y = \frac{53}{3}$, 不符合题意; 当 $x=19$ 时, $y=17$, 符合题意. 所以 $70-x-y=34$. 综上所述, 安排 19 名工人加工“雅”服装, 17 名工人加工“风”服装, 34 名工人加工“正”服装, 即可获得最大利润.

点拨:题目主要考查一次函数及二次函数的应用, 理解题意, 根据二次函数的性质求解是解题关键.

(六) 分类讨论思想

在解决一个复杂问题时, 因为情形的多样性, 不便于或无法一次性去解决, 常需要用一个标准将原问题划分成几种小问题, 将这些小问题一一加以解决, 从而使原问题得到完全解决, 这就是分类讨论思想.

当数学问题中的条件、结论不明确或题意中含参数或图形不确定时, 就应分类讨论. 分类

的一般原则是:①分类中的每一部分是相互独立的;②一次分类按一个标准;③分类讨论应逐级进行.正确的分类必须是周全的,既不重复,也不遗漏.

例 6.1 互不重合的 A, B, C 三点在同一直线上,已知 $AC=2a+1, BC=a+4, AB=3a$, 这三点的位置关系是 ()

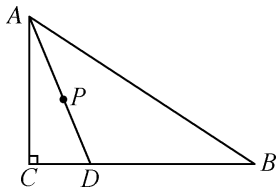
- A. 点 A 在 B, C 两点之间 B. 点 B 在 A, C 两点之间
C. 点 C 在 A, B 两点之间 D. 无法确定

分析:用假设法,分三种情形,分别计算各选项中的 a 值,再作出判断. 因为 $AC=2a+1, BC=a+4, AB=3a, A, B, C$ 三点互不重合,所以 $a>0$. 若点 A 在 B, C 之间,则 $AB+AC=BC$,即 $3a+2a+1=a+4$,解得 $a=\frac{3}{4}$,故选项 A 情况存在;若点 B 在 A, C 之间,则 $BC+AB=AC$,即 $a+4+3a=2a+1$,解得 $a=-\frac{3}{2}$,故选项 B 情况不存在;若点 C 在 A, B 之间,则 $BC+AC=AB$,即 $a+4+2a+1=3a$,此时无解,故选项 C 情况不存在. 综上所述,选项 A 说法正确.

答案:A

点拨:本题主要考查两点间的距离及整式的加减,分类讨论和反证法的应用是解题的关键.

例 6.2 如图,在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ, AC=12$,点 D 在边 BC 上, $CD=5, BD=13$. P 是线段 AD 上一动点,当半径为 6 的 $\odot P$ 与 $\triangle ABC$ 的一边相切时, AP 的长为_____.



分析:因为在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ, AC=12, BC=BD+CD=18$,所以 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{12^2+18^2}=6\sqrt{13}$. 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $\angle C=90^\circ, AC=12, CD=5$,所以 $AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=13$.

当 $\odot P$ 与 BC 相切时,点 P 到 BC 的距离为 6. 过点 P 作 $PH \perp BC$ 于点 H ,则 $PH=6$. 因为 $\angle C=90^\circ$,所以 $AC \perp BC$. 所以 $PH \parallel AC$,所以 $\triangle DPH \sim \triangle DAC$,所以 $\frac{PD}{AD} = \frac{PH}{AC}$,所以 $\frac{PD}{13} = \frac{6}{12}$,所以 $PD=6.5$,所以 $AP=6.5$.

当 $\odot P$ 与 AB 相切时,点 P 到 AB 的距离为 6. 过点 P 作 $PG \perp AB$ 于点 G ,则 $PG=6$. 因为 $AD=BD=13$,所以 $\angle PAG = \angle B$. 又因为 $\angle AGP = \angle C = 90^\circ$,所以 $\triangle AGP \sim \triangle BCA$,所以 $\frac{AP}{BA} = \frac{PG}{AC}$,即 $\frac{AP}{6\sqrt{13}} = \frac{6}{12}$,所以 $AP=3\sqrt{13}$.

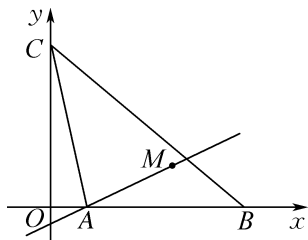


图 1

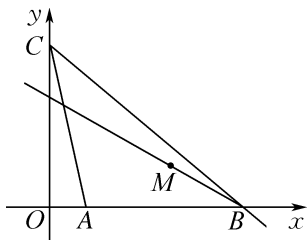


图 2

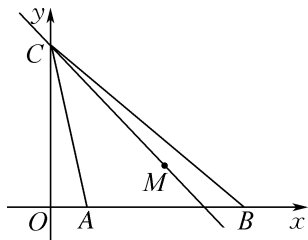


图 3

(2) 当过点 $M(3,1)$ 的直线将 $\triangle ABC$ 分成三角形和梯形时, 过点 M 的直线 ME 必与 $\triangle ABC$ 一边平行, 则必有 A 型相似. 因为平分面积, 所以相似比为 $1:\sqrt{2}$. ①如图 4, 由直线 $ME \parallel AB$, 可得 $\frac{CE}{CO} = \frac{CN}{CA} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 即 $\frac{5a-1}{5a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 解得 $a = \frac{2+\sqrt{2}}{5}$. ②如图 5, 过点 M 作 $MN \perp AB$ 于点 N . 由直线 $ME \parallel AC$, 可得 $\frac{BE}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 因为 $AB=4$, 所以 $BE=2\sqrt{2}$. 因为 $BN=5-3=2 < 2\sqrt{2}=BE$, 不符合图形实际, 所以不成立. ③如图 6, 过点 M 作 $MN \perp AB$ 于点 N . 由直线 $ME \parallel BC$, 可得 $\frac{AE}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\angle MEN = \angle CBO$. 易得 $AE=2\sqrt{2}$, $NE=2\sqrt{2}-2$, $\tan \angle MEN = \tan \angle CBO$, 即 $\frac{1}{2\sqrt{2}-2} = \frac{5a}{5}$, 解得 $a = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

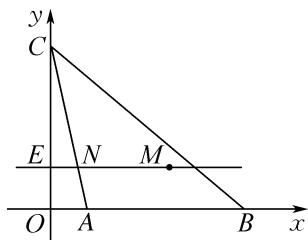


图 4

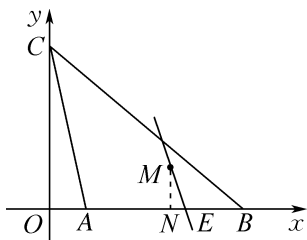


图 5

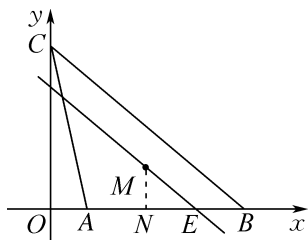


图 6

答案: $\frac{9}{10}$ 或 $\frac{2+\sqrt{2}}{5}$ 或 $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

点拨: 本题主要考查相似三角形的性质与判定, 以及一次函数的性质等相关知识, 涉及平分面积的多种方法. 根据题意画出每种情形下的图形, 进行正确的计算、推理和判断是解题的关键.

(七) 特殊与一般思想

人类认知常常是从特殊到一般, 即从诸多具体的、特殊的情况中探究出一般规律. 数学也是人类认知的一种: 从特殊到一般, 能加深对数学问题的理解, 有时还能化难为易, 打开解题思路.

有时, 遇到一个具体的、特殊的, 但不便于直接处理的问题, 可以通过寻找一般规律, 最后再回代到所给定的具体问题中.

例 7.1 计算: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 20^3 =$ _____.