

第1章 一元二次方程

本章导读

方程是科学研究中的重要数学思想方法,本章内容是一元一次方程的延续,利用配方法、公式法、因式分解法等不同方法将“二次”降为“一次”,从而化归为一次方程求解,此法也是解三次和更高次方程的通法.在利用公式法的求解过程中,必须考虑根的判别式 b^2-4ac 的非负性;在 $b^2-4ac \geq 0$ 的条件下,可以发现方程的根与系数存在一定关系,这种关系在后续的二次函数的学习中也有着广泛的应用.通过学习二次方程的解法,还可以对一些实际问题进行数学建模,从而达到解决问题的目的.



超能聚焦镜

焦点1 一元二次方程的概念

【思维解读】形如 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的方程称为一元二次方程.这一定义强调了二次项系数 $a \neq 0$,且未知数的最高次数为2;当某一实数代入上述方程时,等式成立,则该实数是此方程的根,这一结论在计算代数式的值时,有着广泛的应用.

【例题展示 1】已知关于 x 的方程 $(m-1)x^{m^2+1}+3mx+4=0$ 是一元二次方程,则 m 的值为_____.

【分析】判断一个方程是否为一元二次方程,关键是看将原整式方程化简后,是否只含有一个未知数且未知数的最高次数是否为2.特别地,当二次项的系数用字母表示时,不能忽略“二次项系数不为零”这一隐含条件.本题由题意可知, $m^2+1=2$ 且 $m-1 \neq 0$,从而解得 $m=-1$.

【答案】 -1

【超级链接】“巅峰训练1”第11题.

焦点2 一元二次方程的解法

【思维解读】一元二次方程的解法有下列几种:对于形如 $x^2=p$ ($p \geq 0$) 的方程,可用直接开平方法;其余形式可利用配方法转化为直接开平方法;在掌握求根公式后可利用公式法求解;特别地,当 b^2-4ac 为完全平方式时,可用因式分解法求解.

【例题展示 1】用适当的方法解下列关于 x 的方程:

$$(1)(x-2)^2-9(x+1)^2=0;$$

$$(2)x^2-6ax=b^2-9a^2;$$

$$(3)2x^2+(2\sqrt{2}-\sqrt{3})x-\sqrt{6}=0;$$

$$(4)(2x+1)(x-3)=(4x-1)(3-x).$$

【分析】方程(1)可用因式分解法或直接开平方法;方程(2)可用配方法;方程(3)可用公式法或因式分解法;方程(4)可用因式分解法.

【答案】(1)解法 1 原方程可化为 $[(x-2)+3(x+1)][(x-2)-3(x+1)]=0$, 化简, 得 $(4x+1)(2x+5)=0$, 解得 $x_1=-\frac{5}{2}, x_2=-\frac{1}{4}$.

解法 2 原方程可化为 $(x-2)^2=[3(x+1)]^2$, 两边同时开平方, 得 $x-2=3(x+1)$ 或 $x-2=-3(x+1)$, 解得 $x_1=-\frac{5}{2}, x_2=-\frac{1}{4}$.

(2)原方程配方, 得 $x^2-6ax+9a^2=b^2$, 即 $(x-3a)^2=b^2$, 解得 $x_1=3a-b, x_2=3a+b$.

(3)**解法 1** 因为 $(2\sqrt{2}-\sqrt{3})^2-4 \times 2 \times (-\sqrt{6})=8-4\sqrt{6}+3+8\sqrt{6}=(2\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$, 所以 $x=\frac{-(2\sqrt{2}-\sqrt{3}) \pm \sqrt{(2\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}}{2 \times 2}$, 所以 $x_1=\frac{\sqrt{3}}{2}, x_2=-\sqrt{2}$.

如方程 $\sqrt{x+1}=2$ 就是无理方程,可以通过方程两边平方转化为 $x+1=4$,解得 $x=3$.方程两边平方时可能会产生增根,所以必须对方程的根进行检验.如方程 $\sqrt{2x+3}=x$ 两边平方并解得 $x_1=3$, $x_2=-1$,经检验, $x_2=-1$ 是原方程的增根.

对于关于 x 的方程 $\sqrt{a-x}=x+3$,解决下列问题:求当 $a=3$ 时方程的根.

【分析】本题把方程两边平方去根号后求解.注意结果需检验.

【答案】当 $a=3$ 时,有 $\sqrt{3-x}=x+3$.两边平方,得 $3-x=x^2+6x+9$,即 $x^2+7x+6=0$,解得 $x_1=-1$, $x_2=-6$.经检验, $x_2=-6$ 是原方程的增根,所以原方程的根为 $x=-1$.

【误点警示】在解无理方程时,最常用的方法是两边平方法及换元法,本题用了平方法.注意解无理方程一定要验根.

【超级链接】“巅峰训练2”第14题.

焦点3 一元二次方程的根与系数的关系

【思维解读】法国数学家韦达最早发现代数方程的根与系数之间有以下关系:若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 的系数满足根的判别式 $b^2-4ac \geq 0$,则一定存在两个实数根 x_1, x_2 ,且 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$.因此,人们把这个关系称为韦达定理.韦达定理揭示了根与系数的一种必然关系,利用这个关系,我们可以解决诸如已知一根求另一根、构造方程、证明等式和不等式等问题.

【例题展示 1】(1)已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2m-1)x+m^2+1=0$ 的两个实数根分别为 x_1, x_2 .若 $x_1^2+x_2^2=x_1x_2+10$,则 m 的值为_____.

(2)已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-mx+5(m-5)=0$ 的两个正实数根分别为 x_1, x_2 ,且 $2x_1+x_2=7$,则 m 的值为_____.

【分析】(1)由根与系数的关系,得 $x_1+x_2=2m-1, x_1x_2=m^2+1$. 因为 $x_1^2+x_2^2=x_1x_2+10$, 所以 $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=x_1x_2+10$, 所以 $(2m-1)^2-3(m^2+1)=10$. 化简, 得 $m^2-4m-12=0$, 解得 $m_1=6, m_2=-2$. 又因为根的判别式 $[-(2m-1)]^2-4(m^2+1)=-4m-3 \geq 0$, 所以 $m \leq -\frac{3}{4}$, 所以 m 的值为 -2 .

(2)由根与系数的关系,得 $x_1+x_2=m, x_1x_2=5(m-5)$. 因为 $2x_1+x_2=7$, 所以 $x_1=7-m, x_2=2m-7$. 所以 $(7-m)(2m-7)=5(m-5)$. 化简, 得 m^2-

$$8m+12=0, \text{ 解得 } m_1=2, m_2=6. \text{ 因为 } x_1, x_2 \text{ 为正实数, 所以 } \begin{cases} 7-m>0, \\ 2m-7>0, \\ 5(m-5)>0, \\ m>0, \end{cases} \text{ 解得}$$

$5 < m < 7$, 所以 m 的值为 6 .

【答案】(1) -2 (2) 6

【方法总结】对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$ 来说, 当 $b^2-4ac \geq 0$ 时, 有两个正根的条件是 $x_1+x_2=-\frac{b}{a} > 0, x_1x_2=\frac{c}{a} > 0$; 同理, 有两个负根的条件是 $x_1+x_2=-\frac{b}{a} < 0, x_1x_2=\frac{c}{a} > 0$; 有一正一负根的条件是 $x_1x_2=\frac{c}{a} < 0$.

【变式拓展】若 x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $4x^2+4(m-1)x+m^2=0$ 的两个非零实数根, 则 x_1 与 x_2 能否同号? 若能同号, 请求出相应的 m 的取值范围; 若不能同号, 请说明理由.

【答案】 x_1, x_2 能同号且同为原方程的正实数根. 因为关于 x 的一元二次方程 $4x^2+4(m-1)x+m^2=0$ 有两个非零实数根, 所以根的判别式 $[4(m-1)]^2-4 \times 4m^2=-32m+16 \geq 0$, 所以 $m \leq \frac{1}{2}$. 此时 $x_1+x_2=1-m > 0, x_1x_2=\frac{1}{4}m^2 \geq 0$, 所以 x_1, x_2 同为原方

当 $k=4$ 时, 方程为 $x^2-11x+30=0$, 解得 $x_1=5, x_2=6$, 此时 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 5, 5, 6, 周长为 16.

【思维发散】 因为原方程根的判别式为 1, 故本题还可直接先求解方程的根, 再根据条件求 k 的值, 即原方程可化为 $x^2-(2k+3)x+(k+1)(k+2)=0$, 故 $[x-(k+1)][x-(k+2)]=0$, 解得 $x_1=k+1, x_2=k+2$. 在第(2)题中, 由 $k+1=5$, 得 $k+2=6$, 此时三角形的周长为 16; 由 $k+2=5$, 得 $k+1=4$, 此时三角形的周长为 14.

【超级链接】 “巅峰训练 4”第 6 题.

焦点 4 一元二次方程的整数解

【思维解读】 一元二次方程的整数根问题, 既涉及方程的解法、判别式、韦达定理等与方程相关的知识, 又与整除、奇数、偶数、质数、合数等整数知识密切相关. 解含参数的一元二次方程的整数解问题的基本策略有: (1) 从求根入手, 求出根的表达式, 利用整除求解; (2) 从根的判别式入手, 运用根的判别式求出参数或解的取值范围, 或引入参数, 或通过穷举, 逼近求解; (3) 从韦达定理入手, 从根与系数的关系式中消去参数, 得到关于两根的不定方程, 借助因数分解、因式分解求解; (4) 从变更主元入手, 当方程中参数次数较低时, 可考虑以参数为主元求解.

【例题展示 1】 若关于 x 的方程 $(6-k)(9-k)x^2-(117-15k)x+54=0$ 的解都是整数, 则符合条件的整数 k 的值有 _____ 个.

【分析】 因为方程的类型未指明, 所以必须按一次方程、二次方程两种情形讨论; 又从本题特征分析, 用因式分解法可得到根的简单表达式, 再利用整数性质求得 k 值.

(1) ① 当 $6-k=0$, 即 $k=6$ 时, 原方程可简化为 $-27x+54=0$, 解得 $x=2$;

② 当 $9-k=0$, 即 $k=9$ 时, 原方程可简化为 $18x+54=0$, 解得 $x=-3$.

(2) 当 $6-k \neq 0$ 且 $9-k \neq 0$, 即 $k \neq 6$ 且 $k \neq 9$ 时, $x_1 = \frac{9}{6-k}, x_2 = \frac{6}{9-k}$.

【答案】当 $k=0$ 时,原方程可化为 $x-1=0$,解得 $x=1$,符合题意.

当 $k \neq 0$ 时,若原方程有两个整数根 $\alpha, \beta (\alpha \leq \beta)$, 则

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{k+1}{k} = -1 - \frac{1}{k}, \\ \alpha\beta = \frac{k-1}{k} = 1 - \frac{1}{k}, \end{cases}$$

从而 $\alpha\beta - (\alpha + \beta) = 2$, 进而得到 $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$.

由对称性可得 $\begin{cases} \alpha - 1 = 1, \\ \beta - 1 = 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \alpha - 1 = -1, \\ \beta - 1 = -3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} \alpha = 2, \\ \beta = 4 \end{cases}$

或 $\begin{cases} \alpha = 0, \\ \beta = -2. \end{cases}$

当 $\begin{cases} \alpha = 2, \\ \beta = 4 \end{cases}$ 时, $k = -\frac{1}{7}$; 当 $\begin{cases} \alpha = 0, \\ \beta = -2 \end{cases}$ 时, $k = 1$.

经检验,当 $k = -\frac{1}{7}$ 与 $k = 1$ 时,原方程均满足根的判别式 $(k+1)^2 - 4k(k-1) \geq 0$.

综上所述, k 的值为 0 或 $-\frac{1}{7}$ 或 1.

【超级链接】“巅峰训练 2”第 9 题.

焦点 5 用一元二次方程解决问题

【思维解读】方程是刻画现实问题的有效模型之一,一元二次方程是方程模型的重要代表,许多实际问题可转化为解一元二次方程.列一元二次方程解应用题的一般步骤与列一元一次方程解应用题的一般步骤基本相同,解题的关键是恰当设未知数、分析数量关系,将实际问题中内在、本质的联系抽象为数学问题,建立二次方程模型解决问题.

【例题展示 1】象棋比赛中,每位选手都与其他选手恰好比赛一局,每局赢者记 2 分,输者记 0 分,如果平局,两位选手各记 1 分.

今有4位同学统计了比赛中全部选手的得分总数,分别是2 018, 2 019, 2 069, 2 070. 经核实,其中有一位同学统计无误,试计算这次比赛共有多少位选手参加.

【分析】有关比赛类应用题,有两种题型,一是单循环比赛,如本题,若有 n 个选手参加比赛,则比赛总场次为 $\frac{n(n-1)}{2}$;二是主客场比赛,则比赛总场次为 $n(n-1)$. 根据本题题意可知,每场比赛总得分均为2分,故所有场次总分为 $n(n-1)$ 分,将题中所给数据代入,一一验证,即可解决问题.

【答案】设这次比赛共有 n 位选手参加. 由题意,可知全部选手的得分总数为 $n(n-1)$. 因为 $n(n-1)$ 为两个相邻自然数的积,必然是偶数,所以2 019与2 069一定不符合题意.

若 $n(n-1)=2\ 018$,即 $n^2-n-2\ 018=0$,因 $(-1)^2-4\times 1\times (-2\ 018)=8\ 073$,个位数字为3,一定不是平方数,故此方程无整数解;

若 $n(n-1)=2\ 070$,即 $n^2-n-2\ 070=0$,因 $(-1)^2-4\times 1\times (-2\ 070)=8\ 281=91^2$,故此方程有整数解. 解得 $n_1=46$, $n_2=-45$,其中 $n_2=-45$ 不符合题意,舍去.

所以这次比赛中共有46位选手参加.

【超级链接】“第1章综合练(1)”第9题.

【例题展示 2】小明的爸爸做经营水果的生意. 一天,他先去水果批发市场,用100元购进甲种水果,用150元购进乙种水果,乙种水果比甲种水果多购进10 kg,乙种水果的批发价比甲种水果的批发价高0.5元/kg. 然后到零售市场,都按2.8元/kg零售,结果乙种水果很快售完,甲种水果售出 $\frac{4}{5}$ 时,出现滞销,他便按原售价的五折售完剩下的水果,请你帮小明的爸爸算一算,这天卖水果是赔钱了还是赚钱了(两种水果的零售价均不低于批发价,不考虑其他因

素)? 若赔钱,赔多少? 若赚钱,赚多少?

【分析】本题是商品销售类问题,其三个量之间存在着下列关系:金额=数量 $\times$ 单价.首先根据单价之差,求得甲、乙两种水果的质量,然后利用公式“利润=售价-进价”计算其是否盈利.

【答案】设小明的爸爸购进乙种水果 x kg,则购进甲种水果 $(x-10)$ kg,所以甲种水果的批发价为 $\frac{100}{x-10}$ 元/kg,乙种水果的批发价为 $\frac{150}{x}$ 元/kg. 根据题意,得 $\frac{150}{x} - \frac{100}{x-10} = 0.5$. 整理,得 $x^2 - 110x + 3\ 000 = 0$,解得 $x_1 = 50, x_2 = 60$. 经检验, $x_1 = 50, x_2 = 60$ 都是原方程的根.

当 $x = 50$ 时,乙种水果的批发价为 $\frac{150}{50} = 3$ (元/kg),高于水果零售价,不合题意,舍去;

当 $x = 60$ 时,甲种水果的批发价为 $\frac{100}{60-10} = 2$ (元/kg),乙种水果的批发价为 $\frac{150}{60} = 2.5$ (元/kg),符合题意.

因此,小明的爸爸购进乙种水果 60 kg,购进甲种水果 $60 - 10 = 50$ (kg),小明的爸爸这一天卖水果的利润为 $(50 \times \frac{4}{5} \times 2.8 + 50 \times \frac{1}{5} \times 2.8 \times \frac{1}{2} + 60 \times 2.8) - (100 + 150) = 44$ (元). 所以小明的爸爸这一天卖水果赚钱了,赚了 44 元.

【误点警示】因为本题所列方程是分式方程,通过去分母化成整式方程后求解时,可能出现增根,所以需要检验.

【超级链接】“巅峰训练 5”第 11 题;“第 1 章综合练(1)”第 12 题;“第 1 章综合练(2)”第 1,10 题.