

第3章 代数式

本章导读

本章内容是用字母将实际问题中的一类数据抽象成代数式,从而实现了思维上的一个质的飞跃,体现了从特殊到一般的认知过程.对于整式,必须理解单项式的系数与次数、多项式的项与次数、同类项的定义,掌握整式的加减运算法则.本章渗透的数学思想有:整体代换思想——代数式的求值,函数与方程思想——列代数式,分类讨论思想——实际生活中代数式模型.在整式的加减运算中,注意去括号法则的灵活运用,特别是括号前带有“-”时,去括号时括号内各项均变号,同时注意同类项的判断.



超能聚焦镜

焦点1 符号意识

【思维解读】符号意识主要是指能够理解并运用符号表示数、数量关系和变化规律,能够使用符号进行运算和推理,知道得到的结论具有一般性.符号意识主要包括两方面的内容,一个是关于概念的符号,另一个是关于运算关系的符号.

【例题展示 1】先阅读下面的材料,再解答后面各题:

式子“ $1+2+3+4+5+\cdots+100$ ”表示从 1 开始的 100 个连续自然数的和.由于上述式子比较长,书写也不方便,为了简便起见,我们可将“ $1+2+3+4+5+\cdots+100$ ”表示为 $\sum_{n=1}^{100} n$, 这里“ Σ ”是求和符号.例如:“ $1+3+5+7+9+\cdots+99$ ”(即从 1 开始的 100 以内的连续奇数的和)可表示为 $\sum_{n=1}^{50} (2n-1)$. 又如:“ $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3+10^3$ ”可表示为 $\sum_{n=1}^{10} n^3$.

(1) $2+4+6+8+10+\cdots+100$ (即从 2 开始的 100 以内的连

续偶数的和)用求和符号可表示为_____;

(2) 计算: $\sum_{n=1}^5 (n^2+1) = \underline{\hspace{2cm}}$ (填写最后的计算结果);

(3) 若 $\sum_{n=x}^{x+3} (3n-10) = 14$, 求 x 的值.

分析: (1) 由阅读材料可得 $2+4+6+8+10+\cdots+100 = \sum_{n=1}^{50} 2n$;

(2) $\sum_{n=1}^5 (n^2+1) = (1+1) + (4+1) + (9+1) + (16+1) + (25+1) = 60$;

(3) $\sum_{n=x}^{x+3} (3n-10) = (3x-10) + [3(x+1)-10] + [3(x+2)-10] + [3(x+3)-10] = 14$, 求出 x 即可.

答案: (1) $\sum_{n=1}^{50} 2n$ (2) 60 (3) 由题意可得, $\sum_{n=x}^{x+3} (3n-10) = (3x-10) + [3(x+1)-10] + [3(x+2)-10] + [3(x+3)-10] = 14$, 整理, 得 $12x-22=14$. 解得 $x=3$.

【超级链接】“巅峰训练 9”第 5 题

【例题展示 2】1925 年, 数学家莫伦发现了世界上第一个完美长方形(图 1), 它恰好能被分割成 9 个大小不同的正方形; 图 2 是另一个由 9 个大小各异的正方形构成的完美长方形; 图中数据分别表示小正方形的边长. 图 3 也是一个完美长方形, 它由 10 个大小各异的正方形构成, 其中标注 1, 2 的正方形边长分别为 x, y .

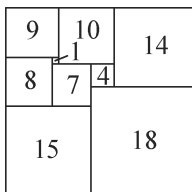


图 1

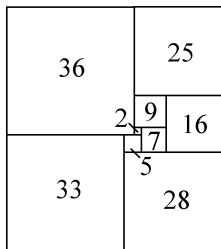


图 2

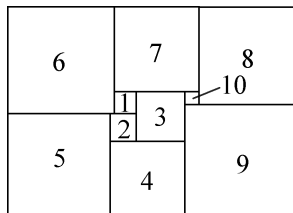


图 3

(1) 用含 x, y 的代数式分别表示图 3 中 10 个正方形的边长;

(2)当 $x=5$ 时,求图 3 的完美长方形的周长及面积.

分析:根据“正方形的四边长相等”这一几何性质,由内到外,逐一表示各正方形的边长.

答案:(1)根据题意,得标注 3 的正方形的边长为 $x+y$,标注 4 的正方形的边长为 $x+y+y=x+2y$,标注 5 的正方形的边长为 $x+2y+y=x+3y$,标注 6 的正方形的边长为 $(x+3y)+(y-x)=4y$,标注 7 的正方形的边长为 $4y-x$,标注 8 的正方形的边长为 $(4y-x)+[(4y-x)-x-(x+y)]=7y-4x$,标注 9 的正方形的边长为 $(7y-4x)+[(4y-x)-x-(x+y)]=10y-7x$,标注 10 的正方形的边长为 $(4y-x)-x-(x+y)=3y-3x$.

(2)由图形可知,标注 5 和 6 的正方形的边长之和等于标注 8 和 9 的正方形的边长之和,从而 $(x+3y)+4y=(7y-4x)+(10y-7x)$,即 $6x=5y$. 当 $x=5$ 时, $y=6$,此完美长方形的长为 $4y+(4y-x)+(7y-4x)=15y-5x=65$,宽为 $(x+3y)+4y=x+7y=47$,所以此完美长方形的周长为 $2\times(65+47)=224$,面积为 $65\times 47=3\ 055$.

【超级链接】“期末综合练(2)”第 10 题

【例题展示 3】在小学,我们知道像 12,227,36,45,108,⋯这样的自然数能被 3 整除.一般地,如果一个自然数所有数位上的数字之和能被 3 整除,那么这个自然数就能被 3 整除,事实上,我们可以证明这个结论的正确性.以两位数为例,若一个两位数的十位、个位上的数字分别为 a, b ,则通常记这个两位数为 $\overline{ab}$,于是 $\overline{ab}=10a+b=9a+(a+b)$. 显然, $9a$ 能被 3 整除,因此,若 $a+b$ 能被 3 整除,那么 $9a+(a+b)$ 就能被 3 整除,即 $\overline{ab}$ 能被 3 整除. 根据上述材料,解答下列问题:

(1) 下列各数中,能被 3 整除的有_____ (填序号).

①13; ②45; ③525; ④2 024.

(2) 设 $\overline{abc}$ 是一个三位数,试探究这个数能被 3 整除的条件.

(3) 若 $10a+b-c$ 能被 11 整除,试判断 $\overline{abc}$ 能否被 11 整除,并加以说明.

分析:(1) ① $1+3=4$,4 不能被 3 整除,故 13 不能被 3 整除.

② $4+5=9$,9 能被 3 整除,故 45 能被 3 整除.

③ $5+2+5=12$,12 能被 3 整除,故 525 能被 3 整除.

④ $2+0+2+4=8$,8 不能被 3 整除,故 2 024 不能被 3 整除.

(2) 先表示出这个三位数,化简整理为 $=100a+10b+c=3(33a+3b)+(a+b+c)$,从而得到结果.

(3) 根据题意,把三位数表示为 $11(10a+b)-(10a+b-c)$,从而得到结果.

答案:(1) ②③

(2) 设 $\overline{abc}$ 是一个三位数,所以 $\overline{abc}=100a+10b+c=99a+a+9b+b+c=3(33a+3b)+(a+b+c)$. 因为 $3(33a+3b)$ 能被 3 整除,所以若 $a+b+c$ 能被 3 整除,那么 $3(33a+3b)+(a+b+c)$ 就能被 3 整除,即 $\overline{abc}$ 能被 3 整除的条件为 $a+b+c$ 能被 3 整除.

(3) 若 $10a+b-c$ 能被 11 整除,则 $\overline{abc}$ 能被 11 整除,理由如下:

因为 $\overline{abc}=100a+10b+c=110a-10a+11b-b+c=110a+11b-10a-b+c=11(10a+b)-(10a+b-c)$. 又因为 $11(10a+b)$ 和 $10a+b-c$ 都能被 11 整除,所以 $\overline{abc}$ 能被 11 整除.

【超级链接】“第 3 章综合练(1)” 第 12 题

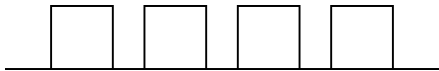
焦点2 信息数学

【思维解读】计算器、计算机正深刻影响着数学学习的内容和方式,现代信息技术是学习数学和解决问题的有力工具. 近年出现的以信息技术为背景的

问题是中考竞赛试卷中一道亮丽的风景,这类问题将信息技术渗透并有机融合到数学之中,构思巧妙、立意新颖,其内容涉及计算机常识(数制、字节等)、计算机的数据输出、计算机中的数据处理、计算机运算程序、网络与通讯等.解决这类问题的关键是找到与数学知识内在的联系,将其转化为数学问题.

【例题展示 1】你觉得手机很神奇吗?它能在瞬间清晰地传递声音、文字、图像等信号,据说以后还能发送味道、触觉信息呢!这里都有手机中芯片的功劳.其实,这些信号在芯片中都是以二进制的形式给出的.每个二进制数都由 0 和 1 构成,芯片上电子元件的“开”和“关”分别用“1”和“0”表示.一组电子元件的开关状态就表示相应的二进制数,例如“开开关”可表示为“110”.

如图,手机芯片的某段电路上分布着一组电子元件(假设它们首尾不相连),且相邻的两个元件不能同时是关的.



(1)若此电路上有 4 个元件,则这 4 个元件所有不同的开关状态共有多少种?请一一列出,并说明理由.

(2)若用 a_k 表示电路上 k ($k \geq 1$) 个电子元件所有不同的开关状态数,试探索 a_k, a_{k+1}, a_{k+2} 之间的关系式(不要求论证).

(3)试用(2)中探索出的递推关系式,计算 a_{10} 的值.

分析: (1)通过穷举,得出答案.

(2)利用数学归纳与猜想的方法,从特例入手,归纳出相应关系式.

答案: (1)这 4 个元件所有不同的开关状态可表示为:

进制数	开关状态
1111	全开
1110, 1101, 1011, 0111	三开一关
1010, 0101, 0110	两开两关

所以这 4 个元件所有不同的开关状态共有 8 种.

(2) 由 $a_1=2, a_2=3, a_3=5, a_4=8$, 可归纳得出 $a_{k+2}=a_{k+1}+a_k$.

(3) $a_5=a_4+a_3=8+5=13; a_6=a_5+a_4=13+8=21; a_7=a_6+a_5=21+13=34; a_8=a_7+a_6=34+21=55; a_9=a_8+a_7=55+34=89; a_{10}=a_9+a_8=89+55=144$.

【超级链接】“巅峰训练 9”第 4 题

【例题展示 2】先阅读下面的材料,再解答后面各题.

当今社会对保密要求越来越高,密码正在成为人们生活的一部分.有一种密码的明文(真实文)按计算机键盘字母排列分解,其中 $Q, W, E, \dots, N, M$ 这 26 个字母依次对应 $1, 2, 3, \dots, 25, 26$ 这 26 个正整数(见下表):

Q	W	E	R	T	Y	U	I	O	P	A	S	D
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
F	G	H	J	K	L	Z	X	C	V	B	N	M
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

给出下列变换公式:

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{3} (x \text{ 是正整数}, 1 \leq x \leq 26, x \text{ 被 } 3 \text{ 整除}), \\ x' = \frac{x+2}{3} + 17 (x \text{ 是正整数}, 1 \leq x \leq 26, x \text{ 被 } 3 \text{ 除余 } 1), \\ x' = \frac{x+1}{3} + 8 (x \text{ 是正整数}, 1 \leq x \leq 26, x \text{ 被 } 3 \text{ 除余 } 2). \end{cases}$$

将明文转换成密文,如 $4 \rightarrow \frac{4+2}{3} + 17 = 19$, 即 R 变为 L ; $11 \rightarrow$

$\frac{11+1}{3} + 8 = 12$, 即 A 变为 S .

将密文转换成明文,如 $21 \rightarrow 3 \times (21 - 17) - 2 = 10$,即 X 变为 P ; $13 \rightarrow 3 \times (13 - 8) - 1 = 14$,即 D 变为 F .

(1)按上述方法将明文 NET 译为密文.

(2)若按上述方法将明文译成的密文为 DWN ,请找出它的明文.

分析: (1)根据明文变换公式,求得相应整数,推出密文;

(2)逆用变换公式,即由 x' 导出 x 值,推出明文,解题的关键是确定变换公式中 x' 的取值范围.

答案: (1)将明文 NET 转换成密文: $N \rightarrow 25 \rightarrow \frac{25+2}{3} + 17 = 26 \rightarrow M$, $E \rightarrow 3 \rightarrow \frac{3}{3} = 1 \rightarrow Q$, $T \rightarrow 5 \rightarrow \frac{5+1}{3} + 8 = 10 \rightarrow P$, 即明文 NET 的密文为 MQP .

(2)将密文 DWN 转换成明文: $D \rightarrow 13 \rightarrow 3 \times (13 - 8) - 1 = 14 \rightarrow F$, $W \rightarrow 2 \rightarrow 3 \times 2 = 6 \rightarrow Y$, $N \rightarrow 25 \rightarrow 3 \times (25 - 17) - 2 = 22 \rightarrow C$, 即密文 DWN 的明文为 FYC .

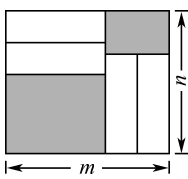
【超级链接】“第3章综合练(2)”第9题

焦点3 整式的加减运算

【思维解读】在代数式中,我们把那些含有相同字母,并且相同字母的次数也分别相同的单项式看作一类——称为同类项,一个多项式中的同类项可以合并在一起——称为合并同类项,整式加减的实质就是合并同类项.解答代数式的化简求值问题的基本方法有:将字母的值代入或将字母间的关系整体代入,而关键是对代数式进行恰当变形,其中去括号、添括号能改变代数式的结构,是变形求解的常用方法.

【例题展示 1】(1)已知当 $x = 1$ 时, $2ax^2 + bx$ 的值为 3,则当 $x = 2$ 时, $ax^2 + bx - 8$ 的值为_____.

(2) 把四张形状、大小完全相同的小长方形卡片不重叠地放在一个底面为长方形(长为 m , 宽为 n) 的盒子底部(如图), 盒子底面未被卡片覆盖的部分用阴影表示, 则图中两块阴影部分的周长和是 ()



- A. $4m$ B. $4n$ C. $2(m+n)$ D. $4(m-n)$

(3) 记 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 令 $T_n = \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n}$, 称 T_n

为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 这列数的“理想数”. 已知 $a_1, a_2, \cdots, a_{505}$ 的“理想数”为 2 024, 求 $8, a_1, a_2, \cdots, a_{505}$ 的“理想数”.

分析: (1) 因为无法直接求出 a, b 的值, 所以利用整体代换法.

(2) 设小长方形的长为 a , 宽为 b , 那么题图中阴影部分的周长和为 $2(n-a+m-a) + 2(m-2b+n-2b) = 4m + 4n - 4(a+2b)$. 又因为 $a+2b=m$, 所以 $4m+4n-4(a+2b)=4n$.

(3) 从理解“理想数”的意义入手, 导出 T_n 与 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的关系, 要求的是 T_{506} 的值.

答案: (1) -2

(2) B

(3) 由定义, 得 $T_n = \frac{1}{n} [a_1 + (a_1 + a_2) + (a_1 + a_2 + a_3) + \cdots + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)]$, 即 $T_n = \frac{1}{n} [na_1 + (n-1)a_2 + (n-2)a_3 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n]$. 所以 $T_{505} = \frac{1}{505} (505a_1 + 504a_2 + 503a_3 + \cdots + 2a_{504} + a_{505}) = 2\,024$, 所以 $505a_1 + 504a_2 + 503a_3 + \cdots + 2a_{504} + a_{505} = 2\,024 \times 505$, 所以 $8, a_1, a_2, \cdots, a_{505}$ 的“理想数”为 $T_{506} = \frac{1}{506} (506 \times 8 + 505a_1 + 504a_2 + 503a_3 + \cdots + 2a_{504} + a_{505}) = \frac{1}{506} \times (506 \times 8 + 2\,024 \times 505) = 2\,028$.

【超级链接】“巅峰训练 10”第 2, 3 题

【例题展示 2】阅读下列材料,并解决有关问题.

我们知道 $|x| = \begin{cases} x(x>0), \\ 0(x=0), \\ -x(x<0), \end{cases}$ 可以用这一结论来化简含有绝对值

的代数式,如化简代数式 $|x+1|+|x-2|$ 时,可依次令 $x+1=0$ 和 $x-2=0$,分别求得 $x=-1$ 和 $x=2$ ($-1, 2$ 分别称为 $|x+1|$ 与 $|x-2|$ 的零点值). 零点值 $x=-1$ 和 $x=2$ 可将数轴上的全体数分成不重复且不遗漏的如下 3 种情况:① $x<-1$; ② $-1\leq x<2$; ③ $x\geq 2$. 从而化简代数式 $|x+1|+|x-2|$ 可分以下 3 种情况:

①当 $x<-1$ 时,原式 $=-(x+1)-(x-2)=-2x+1$;

②当 $-1\leq x<2$ 时,原式 $=x+1-(x-2)=3$;

③当 $x\geq 2$ 时,原式 $=x+1+x-2=2x-1$.

综上所述,原式 $= \begin{cases} -2x+1(x<-1), \\ 3(-1\leq x<2), \\ 2x-1(x\geq 2). \end{cases}$

(1)分别求出 $|x+2|$ 和 $|x-4|$ 的零点值.

(2)化简代数式 $|x+2|+|x-4|$.

分析:通过阅读,知道此类习题的化简步骤大致是:一定零点;二定区间;三定符号;最后化简.

答案:(1)由 $x+2=0$,得 $x=-2$,所以 $|x+2|$ 的零点值为 -2 ;
由 $x-4=0$,得 $x=4$,所以 $|x-4|$ 的零点值为 4 .

(2)当 $x<-2$ 时,原式 $=-(x+2)-(x-4)=-2x+2$;

当 $-2\leq x\leq 4$ 时,原式 $=x+2-(x-4)=6$;

当 $x>4$ 时,原式 $=x+2+x-4=2x-2$.

综上所述,原式 $= \begin{cases} -2x+2(x<-2), \\ 6(-2\leq x\leq 4), \\ 2x-2(x>4). \end{cases}$

【超级链接】“第3章综合练(2)”第7题

【例题展示3】一般情况下, $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} = \frac{a+b}{2+3}$ 不成立, 但有些数可以使它成立, 例如 $a=b=0$. 我们称使 $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} = \frac{a+b}{2+3}$ 成立的一对数 a, b 为“相伴数对”, 记为 (a, b) .

(1) 若 $(1, b)$ 是“相伴数对”, 求 b 的值.

(2) 写出一个“相伴数对” (a, b) , 其中 $a \neq 0$ 且 $a \neq 1$.

(3) 若 (m, n) 是“相伴数对”, 求代数式 $m - \frac{22}{3}n - [4m - 2(3n - 1)]$ 的值.

分析: 本题是整式运算的典型例题, 将一类具有相同性质的“数对”用字母表示, 并赋予名词“相伴数对”, 故从定义出发解答所有问题.

答案: (1) 因为 $(1, b)$ 是“相伴数对”, 所以 $\frac{1}{2} + \frac{b}{3} = \frac{1+b}{2+3}$, 解得 $b = -\frac{9}{4}$.

(2) 答案不唯一, 如 $(2, -\frac{9}{2})$.

(3) 由 (m, n) 是“相伴数对”, 得 $\frac{m}{2} + \frac{n}{3} = \frac{m+n}{2+3}$, 即 $9m + 4n = 0$.

所以原式 $= m - \frac{22}{3}n - (4m - 6n + 2) = m - \frac{22}{3}n - 4m + 6n - 2 = -\frac{4}{3}n - 3m - 2 = -\frac{4n + 9m}{3} - 2 = -2$.

【归纳总结】对于任意有理数 a , 均存在“相伴数对” $(a, -\frac{9}{4}a)$.

【超级链接】“第3章综合练(1)”第7题