

高中数学

小题为王[®]做

全程提优

必修第一册

主 编 恩波教育研究中心
编 委 苗 勇 邹广银 刘伟华

 南京大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高中数学小题狂做全程提优：必修·第一册 / 恩波
教育研究中心主编. —南京：南京大学出版社, 2023. 8(2025. 6 重印)
ISBN 978-7-305-27065-9

I. ①高… II. ①恩… III. ①中学数学课—高中—教
学参考资料 IV. ①G634. 603

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 100011 号

出版发行 南京大学出版社
社 址 南京市汉口路 22 号 邮 编 210093

GAOZHONG SHUXUE XIAOTI KUANGZUO QUANCHENG TIYOU • BIXIU • DI-YI CE
书 名 高中数学小题狂做全程提优·必修·第一册
主 编 恩波教育研究中心
责任编辑 刘 琦 编辑热线 025-83530763

印 刷 天长市梦远印刷服务有限公司
开 本 880 mm×1230 mm 1/16 开 印张 21 字数 588 千
版 次 2023 年 8 月第 1 版 2025 年 6 月第 3 次印刷
ISBN 978-7-305-27065-9
定 价 69.80 元

网 址 <http://www.njupco.com>
官方微博 <http://weibo.com/njupco>
官方微信 njupress
销售咨询热线 025-83594756

-
- * 版权所有,侵权必究
 - * 凡购买南大版图书,如有印装质量问题,请与所购
图书销售部门联系调换

Contents 目录

第1章 集合

►见答案

课时提优1	1.1 集合的概念与表示	1
课时提优2	1.2 子集、全集、补集	3
课时提优3	1.3 交集、并集	5
单元综合练1	集合及其运算	7
章末提优		9
感悟真题		11

易错 忽视方程有两个相等的实数根/1

方法 求一个集合的真子集的个数/2

反思 用 Venn 图或数轴表示集合间的关系/3

第2章 常用逻辑用语

课时提优4	2.1 命题、定理、定义	12
课时提优5	2.2 充分条件、必要条件、充要条件	14
课时提优6	2.3 全称量词命题与存在量词命题	16
单元综合练2	常用逻辑用语	18
章末提优		19
阶段滚动(第1章)		21
感悟真题		21

反思 判断一个全称量词命题真假的要点/7

第3章 不等式

课时提优7	3.1 不等式的基本性质	22
课时提优8	3.2.1 基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ ($a, b \geq 0$) 的证明	24
课时提优9	3.2.2 基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ ($a, b \geq 0$) 的应用	26
课时提优10	3.3.1 从函数观点看一元二次方程	28
课时提优11	3.3.2 从函数观点看一元二次不等式	30
单元综合练3	不等式及其应用	32
培优突破练1	利用基本不等式求最值问题	34
培优突破练2	含参的不等式恒成立与有解问题	36
章末提优		38
阶段滚动(第1章—第2章)		41
感悟真题		41

反思 利用基本不等式求最值需满足的三个条件/14

反思 灵活运用整体代换的思想/17

分析 常数分离求最值/19

第4章 指数与对数

课时提优 12	4.1 指数	42
课时提优 13	4.2.1 对数的概念	44
课时提优 14	4.2.2 对数的运算性质	46
单元综合练 4	指数与对数的运算	48
章末提优		50
阶段滚动(第1章—第3章,不含第4章)		53
感悟真题		54

方法 利用题设条件与所求结论之间的差异性寻找解题突破口/24

反思 形如 $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ 的双重根式问题/25

第5章 函数概念与性质

课时提优 15	5.1 函数的概念和图象(1)	55
课时提优 16	5.1 函数的概念和图象(2)	57
课时提优 17	5.2 函数的表示方法	60
课时提优 18	5.3 函数的单调性(1)	63
课时提优 19	5.3 函数的单调性(2)	65
课时提优 20	5.4 函数的奇偶性	67
单元综合练 5	函数基本性质的综合问题	69
培优突破练 3	分段函数的有关问题	71
章末提优		74
阶段滚动(第1章—第4章)		76
感悟真题		76

方法 简单函数的定义域的求法/30

方法 常见函数的值域的求法/30

方法 判断或证明函数单调性的方法/37

第6章 幂函数、指数函数和对数函数

课时提优 21	6.1 幂函数	77
课时提优 22	6.2 指数函数(1)	79
课时提优 23	6.2 指数函数(2)	81
课时提优 24	6.3 对数函数(1)	83
课时提优 25	6.3 对数函数(2)	85
单元综合练 6	指数函数、对数函数及其应用	87
培优突破练 4	与指数对数函数有关的复合函数问题	89
章末提优		91
阶段滚动(第1章—第5章)		93
感悟真题		93

方法 比较指数式大小的方法/52

方法 解决与指数函数有关的综合问题/56

第7章 三角函数

课时提优 26	7.1.1 任意角	94
课时提优 27	7.1.2 弧度制	96
课时提优 28	7.2.1 任意角的三角函数	99

课时提优 29	7.2.2 同角三角函数关系(1)	101
课时提优 30	7.2.2 同角三角函数关系(2)	103
课时提优 31	7.2.3 三角函数的诱导公式(1)	105
课时提优 32	7.2.3 三角函数的诱导公式(2)	107
单元综合练 7	三角函数有关概念及其应用	109
课时提优 33	7.3.1 三角函数的周期性	110
课时提优 34	7.3.2 三角函数的图象和性质(1)	112
课时提优 35	7.3.2 三角函数的图象和性质(2)	114
课时提优 36	7.3.3 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ (1)	116
课时提优 37	7.3.3 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ (2)	119
单元综合练 8	三角函数的图象和性质	122
课时提优 38	7.4 三角函数应用	124
培优突破练 5	三角函数的化简与求值问题	128
培优突破练 6	三角函数的最值与范围问题	130
章末提优		132
阶段滚动(第 1 章—第 6 章)		134
感悟真题		134

第 8 章 函数应用

课时提优 39	8.1.1 函数的零点	135
课时提优 40	8.1.2 用二分法求方程的近似解	137
课时提优 41	8.2 函数与数学模型	139
章末提优		142
阶段滚动(第 1 章—第 7 章)		145
感悟真题		145

答案全解精析(另册)

小帮手——思维导图+专题突破(另册)

方法 区域角的写法/68

方法 三角函数式的化简技巧/74

方法 解决条件求值问题的方法/75

方法 已知单调区间求参数范围的 3 种方法/79

方法 求三角函数值域或最值的常用方法/79

方法 探究函数零点的两种方法/96

反思 函数新定义问题的解法/98

第1章 集合

课时提优 1 1.1 集合的概念与表示

答案见 P1

题型索引

题型 1 集合元素的确定性(题 1)

题型 2 常见数集的符号(题 5)

题型 3 新定义问题(题 15)

题型 4 集合的表示方法(题 2,7,8)

题型 5 集合元素的互异性(题 3,4,6,8,12)

基础强化

- (2024 河北衡水中学月考)下列对象能构成集合的是 ()
A. 本班成绩较好的同学全体
B. 与 10 接近的实数全体
C. 绝对值小于 5 的整数全体
D. 本班兴趣广泛的学生
- 若用列举法表示集合 $A = \{(x, y) \mid \begin{cases} 2y - x = 7, \\ x + y = 2 \end{cases}\}$, 则下列表示正确的是 ()
A. $\{x = -1, y = 3\}$ B. $\{(-1, 3)\}$
C. $\{3, -1\}$ D. $\{-1, 3\}$
- 集合 A 中的元素为 1, 2, 3, 5. 当 $x \in A$ 时, 若 $x - 1 \notin A, x + 1 \notin A$, 则称 x 为 A 的一个“孤立元素”, 则 A 中孤立元素的个数为 ()
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- (多选题, 2025 江苏苏州中学月考)若集合 $A = \{a^2 + 2a, 3a + 2, 8\}$, 则实数 a 的取值可以是 ()
A. 2 B. 3 C. -4 D. 5
- (2024 山西运城月考)有下列各组关系或说法:
① $0 \in \mathbf{N}^*$; ② $3\sqrt{5} \notin \mathbf{Q}$; ③ $\pi \in \mathbf{Q}$; ④ $3 + \sqrt{7} \notin \mathbf{R}$;
⑤若集合 E 是由所有平行四边形构成的集合, 则某个正方形 $ABCD$ 是集合 E 的元素. 其中正确的个数是_____.
- (2024 湖南长沙期末)已知集合 $A = \{a + 2, 2a^2 + a\}$, 若 $3 \in A$, 则实数 a 的值是_____.

综合提升

- (2025 山东济南期中)集合 $\{(x, y) \mid xy \leq 0, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ 是指 ()
A. 第一象限内的所有点组成的集合
B. 第三象限内的所有点组成的集合
C. 第一象限和第三象限内的所有点组成的集合
D. 不在第一象限内也不在第三象限内的所有点组成的集合
- (2025 河南驻马店一中期中)集合 $A = \left\{ \frac{6}{3-x} \in \mathbf{Z} \mid x \in \mathbf{N}^* \right\}$, 用列举法表示集合 A 为 ()
A. $\{3, 6\}$
B. $\{1, 2, 4, 5, 6, 9\}$
C. $\{-6, -3, -2, -1, 3, 6\}$
D. $\{-6, -3, -2, -1, 2, 3, 6\}$
- (多选题)已知集合 $A = \{y \mid y = x^2 + 1\}$, 集合 $B = \{(x, y) \mid y = x^2 + 1\}$, 且在 A, B 中, $x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$, 则下列选项中的元素与集合的关系正确的是 ()
A. $2 \in A$, 且 $2 \notin B$
B. $(1, 2) \in A$, 且 $(1, 2) \in B$
C. $2 \in A$, 且 $(3, 10) \in B$
D. $(3, 10) \in A$, 且 $2 \in B$
- (多选题)已知 $A = \{x \mid x^2 + px + q = x\}$, $B = \{x \mid (x-1)^2 + p(x-1) + q = x+1\}$, 当 $A = \{2\}$ 时, 则集合 B 中实数 x 的可能取值为 ()

A. $4-\sqrt{2}$

B. $3-\sqrt{2}$

C. $3+\sqrt{2}$

D. $4+\sqrt{2}$

11. (2025 浙江绍兴月考) 设 $a \in \mathbf{R}$, 若集合 $S = \{-1, a, a^2 + 2\}$ 中的最大元素为 3, 则 $a =$ _____.

12. 式子 $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{a^2}{|a^2|} + \frac{\sqrt{-b}}{|\sqrt{-b}|}$ 的所有可能取值组成的集合为 _____.

13. 已知集合 $A = \{x | ax^2 + 2x + 1 = 0, a \in \mathbf{R}\}$.

- (1) 若 A 中只有一个元素, 求 a 的值;
- (2) 若 A 中至少有一个元素, 求 a 的取值范围;
- (3) 若 A 中至多有一个元素, 求 a 的取值范围.

14. (2024 江苏常州中学期中) 设集合 $A = \{x | x = a^2 + b^2, a, b \in \mathbf{N}\}$.

- (1) 将集合 A 中的元素进行从小到大的排列, 求最小的六个元素组成的子集 B ;
- (2) 对任意的 $x_1, x_2 \in A$, 判定 $x_1 + x_2$ 和 $x_1 x_2$ 是否是集合 A 中的元素? 并证明你的结论.

应用·创新

15. (多选题) 设 P 是一个数集, 且至少含有两个数, 若对任意 $a, b \in P$, 都有 $a + b, a - b, ab, \frac{a}{b} \in P$ (除数 $b \neq 0$), 则称数集 P 是一个数域. 例如, 有理数集 $\mathbf{Q}$ 是数域; 数集 $F = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbf{Q}\}$ 也是数域. 下列命题是真命题的是 ()

- A. 整数集是数域
- B. 若有理数集 $\mathbf{Q} \subseteq M$, 则数集 M 必为数域
- C. 数域必为无限集
- D. 存在无穷多个数域

单元综合练1 集合及其运算

答案见 P3

综合提升

- (2025 云南昆明期中) 设集合 $A = \{x | x > 1\}$, $B = \{x | -2 < x < 2\}$, 则 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B =$ ()
A. $(-\infty, 2)$ B. $(1, 2]$
C. $(-2, 1)$ D. $(-2, 1]$
- (2023 四川成都 49 中月考) 对于集合 M, N , 定义 $M - N = \{x | x \in M \text{ 且 } x \notin N\}$, $M \oplus N = (M - N) \cup (N - M)$. 设 $A = \left\{y \mid y \geq -\frac{9}{4}\right\}$, $B = \{y | y < 0\}$, 则 $A \oplus B =$ ()
A. $\left\{y \mid -\frac{9}{4} < y \leq 0\right\}$
B. $\left\{y \mid -\frac{9}{4} \leq y < 0\right\}$
C. $\left\{y \mid y < -\frac{9}{4} \text{ 或 } y \geq 0\right\}$
D. $\left\{y \mid y < -\frac{9}{4} \text{ 或 } y > 0\right\}$
- (多选题) 已知 $U = \{2, 3, m^2 + 2m - 3\}$, $A = \{|m+1|, 2\}$, $\complement_U A = \{5\}$, 则 m 的值可以是 ()
A. -4 B. -2 C. 2 D. 4
- (多选题, 2025 吉林长春月考) 当两个集合有公共元素, 且互不为对方的子集时, 我们称这两个集合“相交”. 对于集合 $M = \{x | ax^2 - 1 = 0\}$, $N = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$, 若集合 M 与 N “相交”, 则实数 a 等于 ()
A. 4 B. 2 C. 1 D. 0
- 若全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x \geq 1\} \cup \{x | x \leq 0\}$, 则 $\complement_U A =$ _____.
- (2025 山西大同月考) 含有有限个元素的数集, 定义“交替和”如下: 把集合中的数按从小到大的顺序排列, 然后从最大的数开始交替地加减各数, 例如 $\{4, 6, 9\}$ 的交替和是 $9 - 6 + 4 = 7$, 而 $\{5\}$ 的交替和是 5, 则集合 $M = \{1, 2, 3, 4\}$ 的所

有非空子集的交替和的总和为 _____.

- (2023 河北邢台期中) 已知① $B = \{x | -2 < x < 3\}$, ② $\complement_{\mathbf{R}} B = \{x | -3 < x < 5\}$, ③ $B = \{x | x \geq a^2 + 6\}$ 且 $A \cup B = \{x | x > a\}$, 在这三个条件中任选一个, 补充在下面的问题中, 并解答该问题.
问题: 已知非空集合 $A = \{x | a < x < 8 - a\}$, _____, 若 $A \cap B = \emptyset$, 求实数 a 的取值集合.

8. (2024 福建泉州月考) 设集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 5 = 0\}$.

- (1) 若 $A \cap B = \{2\}$, 求实数 a 的值;
- (2) 若集合 B 中有两个元素 x_1, x_2 , 求 $|x_1 - x_2|$ (用含 a 的代数式表示);
- (3) 若 $U = \mathbf{R}$, $B \cap (\complement_U A) = \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.

应用·创新

9. (2024 上海黄浦格致中学月考) 已知 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B = \{a^2 | a \in A\}$, 其中 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$, 且 a_1, a_2, a_3, a_4 均为整数. 若 $A \cap B = \{a_3, a_4\}$, $a_1 + a_3 = 0$, 且 $A \cup B$ 中的所有元素之和为 270, 则集合 A 中所有元素之和为_____.

章末提优

答案见 P4

- (2025 江苏淮安期中)已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 集合 $A = \{2, 4\}$, 集合 $B = \{1, 4, 6\}$, 则 $(\complement_U A) \cap B =$ ()
 A. $\{3, 6\}$ B. $\{1, 6\}$
 C. $\{1, 4, 6\}$ D. $\{4, 6\}$
- (2024 浙江杭州月考)若集合 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $M = \{1, 2\}$, $N = \{2, 3\}$, 则集合 $(\complement_U M) \cup N =$ ()
 A. $\{3\}$ B. $\{4, 5\}$
 C. $\{1, 2, 3\}$ D. $\{2, 3, 4\}$
- (2024 江苏盐城中学月考)已知 a 为实数, $A = [1, 4)$, $B = [a, +\infty)$, 若 $A \subseteq B$, 则 a 的取值范围是 ()
 A. $(-\infty, 1)$ B. $(-\infty, 1]$
 C. $(1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$
- (2025 河南郑州期中)已知集合 $A = \left\{x \mid \frac{x}{|x|} + \frac{x+3}{|x+3|} = 0\right\}$, 则 $A \cap \mathbf{Z} =$ ()
 A. $\{1, 2\}$ B. $\{-2, -1, 1, 2\}$
 C. $\{-1, 1\}$ D. $\{-2, -1\}$
- (2023 四川内江月考)某小学对小学生的课外活动进行了调查. 调查结果显示: 参加舞蹈课外活动的有 63 人, 参加唱歌课外活动的有 89 人, 参加体育课外活动的有 47 人, 三种课外活动都参加的有 24 人, 只选择两种课外活动参加的有 22 人, 不参加其中任何一种课外活动的有 15 人. 则接受调查的小学生共有 ()
 A. 120 人 B. 144 人 C. 177 人 D. 192 人
- (2024 河北冀州中学期中)定义集合 A, B 的运算 $A * B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B, \text{ 且 } x \notin A \cap B\}$, 则 $(A * B) * A =$ ()
 A. $A \cap B$ B. $A \cup B$ C. A D. B
- (多选题, 2025 四川成都期末)已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 $A = \{1, 3\}$, 集合 $B = \{1, 2, 4\}$, 则
 A. $\complement_U B \subseteq \complement_U A$
 B. $\complement_U A$ 的子集个数为 8
 C. $\complement_U (A \cup B) = \{5\}$
 D. $(\complement_U A) \cup (\complement_U B) = \{2, 3, 5\}$
- (多选题, 2024 江苏宿迁月考)已知集合 $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 7\}$, $B = \{x \mid m+1 < x < 2m-1\}$, 则使得 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = \emptyset$ 成立的实数 m 的取值范围可以是 ()
 A. $\{m \mid -3 \leq m \leq 4\}$ B. $\{m \mid m > 2\}$
 C. $\{m \mid 2 < m < 4\}$ D. $\{m \mid m \leq 4\}$
- (多选题, 2025 江苏镇江期中)用 $\text{card}(A)$ 来表示有限集合 A 中元素的个数, 例如, $A = \{a, b, c\}$, 则 $\text{card}(A) = 3$. 已知 U 是全集, A, B 是 U 的两个非空真子集, $\text{card}(U) = 24$, 则 ()
 A. 若 $\text{card}(A) = 18$, 则 $\text{card}(\complement_U A) = 6$
 B. 若 $\text{card}(B) = 18$, $\text{card}(A \cap B) = 8$, 则 $\text{card}[(\complement_U A) \cap B] = 10$
 C. 若 $\text{card}(A) = 12$, $\text{card}(B) = 16$, $\text{card}(A \cup B) = 20$, 则 $\text{card}[(\complement_U A) \cap (\complement_U B)] = 8$
 D. 若 $\frac{\text{card}(A)}{\text{card}(U)} = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(B)}$, 则 $\frac{\text{card}(\complement_U A)}{\text{card}(U)} = \frac{\text{card}[(\complement_U A) \cap B]}{\text{card}(B)}$
- (2025 江苏徐州期中)对于集合 A, B , 我们把集合 $\{x \mid x \in A, \text{ 且 } x \notin B\}$ 叫作集合 A 与 B 的差集, 记作 $A - B$. 若 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, 则 $B - A =$ _____.
- (2023 江西南昌月考)若集合 $A = \{x \mid -3 \leq x < 1\}$, $B = \{x \mid x \leq a\}$, 且 $A \cup B = \{x \mid x < 1\}$, 则实数 a 的取值范围是_____.
- (2024 陕西西安期末)已知集合 $A = \{x \mid 2x^2 - px + q = 0\}$, $B = \{x \mid 6x^2 + (p+2)x + 5 + q = 0\}$, 若 $A \cap B = \left\{\frac{1}{2}\right\}$, 则 $A \cup B =$ _____.

13. (2025 湖北武汉期中) 已知集合 $A = \{-1, 0, 2\}$, $B = \{x \in \mathbf{N}^* \mid x \leq 4\}$.

- (1) 写出集合 A 的所有真子集;
- (2) 设全集 $U = \{x \in \mathbf{Z} \mid |x| \leq 4\}$, 求 $A \cap B$, $(\complement_U B) \cup A$;
- (3) 若 $C = \{(x, y) \mid x \in B, y \in B, y - x \in B\}$, 求集合 C .

14. (2023 山东青岛期末) 已知全集为 $\mathbf{R}$, $M = [-2, 2]$, $N = [0, 2]$.

- (1) 求 $M \cap (\complement_{\mathbf{R}} N)$;
- (2) 若 $C = \{x \mid 1 - 2a \leq x \leq a\}$, 且 $C \cup M = C$, 求 a 的取值范围.

15. (2025 陕西西安期中) 已知集合 $A = \{x \mid x = m^2 - n^2, m, n \in \mathbf{Z}\}$.

- (1) 判断 5, 12, 14 是否属于 A , 并说明理由;
- (2) 若集合 $B = \{x \mid x = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, 求证: $B \subseteq A$;
- (3) 写出集合 A 中的所有偶数.

感悟真题

答案见 P5

1. (2024 新高考I卷,1)已知集合 $A = \{x | -5 < x^3 < 5\}$, $B = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 - A. $\{-1, 0\}$
 - B. $\{2, 3\}$
 - C. $\{-3, -1, 0\}$
 - D. $\{-1, 0, 2\}$
2. (2024 全国甲卷文,2)若集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $B = \{x | x+1 \in A\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 - A. $\{1, 3, 4\}$
 - B. $\{2, 3, 4\}$
 - C. $\{1, 2, 3, 4\}$
 - D. $\{0, 1, 2, 3, 4, 9\}$
3. (2024 全国甲卷理,2)已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $B = \{x | \sqrt{x} \in A\}$, 则 $\complement_A(A \cap B) =$ ()
 - A. $\{1, 4, 9\}$
 - B. $\{3, 4, 9\}$
 - C. $\{1, 2, 3\}$
 - D. $\{2, 3, 5\}$
4. (2023 新高考II卷,2)设集合 $A = \{0, -a\}$, $B = \{1, a-2, 2a-2\}$, 若 $A \subseteq B$, 则 $a =$ ()
 - A. 2
 - B. 1
 - C. $\frac{2}{3}$
 - D. -1
5. (2023 全国乙卷理,2)设集合 $U = \mathbf{R}$, 集合 $M = \{x | x < 1\}$, $N = \{x | -1 < x < 2\}$, 则 $\{x | x \geq 2\} =$ ()
 - A. $\complement_U(M \cup N)$
 - B. $N \cup \complement_U M$
 - C. $\complement_U(M \cap N)$
 - D. $M \cup \complement_U N$

第2章 常用逻辑用语

课时提优4 2.1 命题、定理、定义

答案见 P5

题型索引

题型1 命题的概念(题1,5,8)

题型2 命题的构成(题2,6,11)

题型3 命题真假的判断(题4,7,9,10,12,13,14,15)

基础强化

- 下列语句不能成为命题的是 ()
 - $5 > 12$
 - $x > 0$
 - 若一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有实根, 则 $b^2 - 4ac \geq 0$
 - 三角形的三条中线交于一点
- 命题“正方形的四条边都相等”中的条件是 ()
 - 正方形
 - 正方形的四条边
 - 四条边
 - 四条边都相等
- 下列说法不是定理的是 ()
 - 同位角相等, 两直线平行
 - 三角形两边之和大于第三边
 - 直角三角形中两条直角边的平方和等于斜边的平方
 - 两组对边分别平行的四边形叫作平行四边形
- (多选题, 2024 重庆第一中学期中) 下列命题是真命题的是 ()
 - 所有平行四边形的对角线互相平分
 - 若 x, y 是无理数, 则 xy 一定是有理数
 - 若 $m < 1$, 则关于 x 的方程 $x^2 + 2x + m = 0$ 有两个负根
 - 两个相似三角形的周长之比等于它们对应的边长之比
- 给出下列语句: ①平行四边形不是梯形; ②2是无理数; ③方程 $9x^2 - 1 = 0$ 的解是 $x = \pm \frac{1}{3}$; ④这是一棵大树; ⑤2008年8月8日是北京奥运会开幕的日子. 其中是命题的有 _____. (填序号)

- 如果 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 = \angle 3$, 那么 $\angle 1 = \angle 3$, 该命题的结论是 _____.

综合提升

- 下列命题是假命题的是 ()
 - 若 $x \in A$, 则 $x \in A \cap B$
 - 若 $x \in A \cap B$, 则 $x \in A$
 - 若 $x \in A \cap B$, 则 $x \in A \cup B$
 - 若 $x \in A$, 则 $x \in A \cup B$
- (2025 江苏南通期中) 关于区间 $I = (a, +\infty)$, 有下列四个命题:
甲: 小于1的数都不在区间 I 内;
乙: 区间 I 内不存在两个数互为倒数;
丙: 区间 I 内存在小于1的数;
丁: 区间 I 内每个数的平方都大于它本身.
若只有一个假命题, 则该命题是 ()
 - 甲
 - 乙
 - 丙
 - 丁
- (多选题) 下列命题是真命题的有 ()
 - 关于 x 的方程 $mx^2 - 2x + 3 = 0$ 是一元二次方程
 - 空集是任意非空集合的真子集
 - 如果 $x > 3$, 那么 $x \geq 0$
 - 如果两个实数的和是有理数, 那么这两个数都是有理数
- (多选题) 对于实数 a, b, c , 下列说法正确的是 ()
 - 若 $a = b$, 则 $a + c = b + c$
 - 若 $a + c = b + c$, 则 $a = b$
 - 若 $a = b$, 则 $ac = bc$
 - 若 $ac = bc$, 则 $a = b$
- (2025 湖南长沙月考) 小华同学学完集合的基本运算后, 自己定义了如下集合运算: $A * B =$

$\{x|x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$, 小华列举了如下命题:

- ①任意集合 $A, A * A = \emptyset$;
- ②任意集合 $A, B, A * B = B * A$;
- ③任意集合 $A, B, A * B \subseteq A$;
- ④若 $A \cap B = A$, 则 $A * B = \emptyset$.

其中, 所有正确命题的序号是_____.

12. 设 a, b, c 是任意实数, 能够说明“若 $c < b < a$ 且 $ac < 0$, 则 $ab < ac$ ”是假命题的一组整数 a, b, c 的值依次为_____.

13. 把下列命题改写成“若 p , 则 q ”的形式, 并判断命题的真假.

(1) 当 $m > \frac{1}{4}$ 时, $mx^2 - x + 1 = 0$ 无实根;

(2) 一个整数的个位数是 0, 这个数一定能被 5 整除, 也能被 2 整除.

14. 把下列命题改写成“若 p , 则 q ”的形式, 并判断命题的真假.

(1) 偶数不能被 2 整除;

(2) 当 $|a-1|^2 + |b-1|^2 = 0$ 时, $a=b=1$;

(3) 两个相似三角形是全等三角形.

应用·创新

15. 将下列命题改写成“若 p , 则 q ”的形式, 并判断命题的真假.

(1) 6 是 12 和 18 的公约数;

(2) 当 $a > -1$ 时, 方程 $ax^2 + 2x - 1 = 0$ 有两个不等实根;

(3) 平行四边形的对角线互相平分;

(4) 已知 x, y 为非零自然数, 当 $y - x = 2$ 时, $y = 4, x = 2$.

阶段滚动(第1章)

答案见 P10

- (2025 山东泰安期末)已知集合 $M = \{x | 1 \leq x \leq m, x \in \mathbf{Z}\}$, 若集合 M 有 8 个子集, 则实数 m 的值可以为 ()
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- (2023 上海浦东华师大二附中月考)设集合 M , $P \neq \emptyset$, 定义集合 $M - P = \{x | x \in M, x \notin P\}$, 则集合 $M - (M - P)$ 是 ()
A. P B. M
C. $M \cup P$ D. $M \cap P$
- (多选题, 2023 广东阳江期中)下列结论正确的是 ()
A. $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$
B. 集合 A, B , 若 $A \cup B = A \cap B$, 则 $A = B$
C. 若集合 $A = \{x | y = x\}$, $B = \{y | y = x\}$, 则 $A = B$
D. 集合 $M = \{-1, 3\}$, $N = \{x | ax - 1 = 0\}$, 若 $N \subseteq M$, 则 $a = -1$ 或 $a = \frac{1}{3}$
- 若集合 $A = (-\infty, 2]$, $B = \{x | kx + 1 < 0, k \in \mathbf{R}\}$, $A \cap B = \emptyset$, 则 k 的取值范围是_____.
- (2025 湖南长沙期末)已知集合 $M = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \subseteq M$, 集合 A 中所有元素的乘积称为集合 A 的“累积值”, 且规定: 当集合 A 中只有一个元素时, 其累积值即为该元素的数值, 空集的累积值为 0. 设集合 A 的累积值为 n , 回答下列问题:
(1) 若 $n = 3$, 则这样的集合 A 共有_____个;
(2) 若 n 为偶数, 则这样的集合 A 共有_____个.

感悟真题

答案见 P10

- (2024 新高考 II 卷, 6)已知命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, |x+1| > 1$, 命题 $q: \exists x > 0, x^3 = x$, 则 ()
A. p 和 q 都是真命题
B. $\neg p$ 和 q 都是真命题
C. p 和 $\neg q$ 都是真命题
D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题
- (重庆文科卷)“ $x = 1$ ”是“ $x^2 - 2x + 1 = 0$ ”的 ()
A. 充要条件
B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件
D. 既不充分又不必要条件
- (2020 天津卷)设 $a \in \mathbf{R}$, 则“ $a > 1$ ”是“ $a^2 > a$ ”的 ()
A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分又不必要条件
- 若 $a > 0, b > 0$, 则“ $a + b \leq 4$ ”是“ $ab \leq 4$ ”的 ()
A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分又不必要条件
- (浙江卷文)设 a, b 是实数, 则“ $a + b > 0$ ”是“ $ab > 0$ ”的 ()
A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分又不必要条件

第3章 不等式

课时提优7 3.1 不等式的基本性质

答案见 P10

题型索引

题型1 利用不等式的性质判断不等关系(题3,7)

题型2 作差法比较大小(题1,11,13)

题型3 作商法比较大小(题2,14)

题型4 利用不等式的性质求取值范围(题6)

题型5 不等式模型的实际问题(题8,10,15)

基础强化

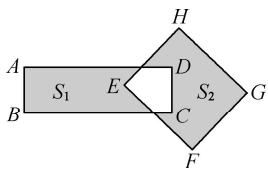
- (2023 全国课时练习)已知 $a+b>0, b<0$, 那么 $a, b, -a, -b$ 的大小关系是 ()
A. $a>b>-b>-a$
B. $a>-b>-a>b$
C. $a>-b>b>-a$
D. $a>b>-a>-b$
- (2022 金安区校级开学考试)已知 $P = \frac{1}{a^2+a+1}, Q = a^2 - a + 1$, 则 P, Q 的大小关系为 ()
A. $P>Q$ B. $P<Q$
C. $P\leq Q$ D. 无法确定
- (2022 安徽期中)已知 $a>b>c>d>0$, 且 $a+d=b+c$, 则以下不正确的是 ()
A. $a+c>b+d$ B. $ac>bd$
C. $ad<bc$ D. $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$
- (多选题, 2025 江苏盐城期末)若不等式 $m<n$ 与 $\frac{1}{m}>\frac{1}{n}$ (m, n 为实数)同时成立, 则下列不等关系可能成立的是 ()
A. $m<n<0$ B. $0<m<n$
C. $m<0<n$ D. $mn>0$
- (2024 河南郑州期中)如果实数对 (a, b) 满足 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$, 那么实数对 (a, b) 可以为_____. (写一对即可)
- (2022 山东济宁月考)若 $2<a<5, 3<b<10$, 则 $a-2b$ 的取值范围是_____.

综合提升

- (2024 四川乐山期末)已知 $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, 下列命题正确的是 ()
A. 若 $a>b$, 则 $ac>bc$
B. 若 $a>b, c>d$, 则 $ac>bd$
C. 若 $\frac{1}{|a|}<\frac{1}{|b|}$, 则 $|a|>|b|$
D. 若 $a>b$, 则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$
- (2025 辽宁大连期中)公园的绿化率是指绿化面积与公园的面积之比. 已知某公园的面积为 $a \text{ m}^2$, 绿化面积为 $b \text{ m}^2$ ($0<b<a$), 现对该公园再扩建面积 $2x \text{ m}^2$, 其中绿化面积为 $x \text{ m}^2$, 则扩建后公园的绿化率与原来公园的绿化率相比 ()
A. 变大 B. 变小
C. 当 $a>2b$ 时, 变大 D. 当 $a<2b$ 时, 变大
- (多选题, 2022 江苏如皋中学开学考试)已知 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 则下列命题为真命题的有 ()
A. 若 $a<b<0$, 则 $a^2<ab<b^2$
B. 若 $a>b$, 则 $ac^2\geq bc^2$
C. 若 $ac^2>bc^2$, 则 $a>b$
D. 若 $a>b>1$, 则 $\frac{b+1}{a+1}>\frac{b}{a}$
- (多选题, 2024 安徽芜湖期中)甲、乙两名同学同时从教室步行到学校食堂就餐(路程相等), 甲前一半时间步行速度是 v_1 , 后一半时间步行速度是 v_2 ; 乙前一半路程步行速度是 v_1 , 后一半路程步行速度是 v_2 . 则 ()

- A. 若 $v_1 = v_2$, 则两人同时到食堂
 B. 若 $v_1 > v_2$, 则甲先到食堂
 C. 若 $v_1 < v_2$, 则甲先到食堂
 D. 若 $v_1 < v_2$, 则乙先到食堂

11. (2024 安徽合肥期中) 矩形 $ABCD$ 的一组邻边长为 $a, b-c$, 矩形 $EFGH$ 的一组邻边长为 $b, a-c$ ($a > b > c > 0$). 按如图所示的方式重叠后两阴影部分的面积分别为 S_1, S_2 , 则 S_1 _____ S_2 (填“ $>$ ”“ $<$ ”“ $=$ ”).



12. (2025 浙江丽水期末) 已知下列论断: ① $\frac{1}{a} > \frac{1}{|b|}$; ② $\frac{1}{a^2} > \frac{1}{b^2}$; ③ $b+1 > |a|$; ④ $b-1 > a^2$; ⑤ $b^3 > (a-1)^3$. 以其中一个论断作为条件, 另一个论断作为结论, 写出你认为正确的一个命题: _____ (请按“序号 $\Rightarrow$ 序号”的格式书写).
13. (1) 已知 $a \geq b > 0$, 求证: $3a^3 + 2b^3 \geq 3a^2b + 2ab^2$;
 (2) 已知 $a \in \mathbf{R}$, 且 $a \neq 1$, 比较 $a+2$ 与 $\frac{3}{1-a}$ 的大小.

14. (1) 已知 $a > b > c > d > 0, ad = bc$, 求证: $a + d > b + c$;
 (2) 当 $a > 0, b > 0$ 且 $a \neq b$ 时, 比较 $a^a b^b$ 与 $a^b b^a$ 的大小.

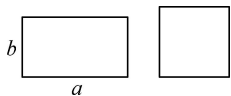
应用·创新

15. (2024 湖北武汉校考) 不等关系是数学中一种最基本的数量关系. 请用所学的数学知识解决下列生活中的问题: 已知 b g 糖水含有 a g 糖 ($b > a > 0$), 再添加 m g 糖 (假设全部溶解), 糖水变甜了. 请将这一事实表示为一个不等式, 并证明这个不等式.

培优突破练 1 利用基本不等式求最值问题

答案见 P19

1. (2024 福建三明期中) 已知长为 a , 宽为 b 的长方形, 如果该长方形的面积与边长为 k_1 的正方形面积相等; 该长方形周长与边长为 k_2 的正方形周长相等; 该长方形的对角线与边长为 k_3 的正方形对角线相等; 该长方形的面积和周长的比与边长为 k_4 的正方形面积和周长的比相等, 那么 k_1, k_2, k_3, k_4 的大小关系为 ()



- A. $k_1 \leq k_4 \leq k_2 \leq k_3$ B. $k_3 \leq k_1 \leq k_2 \leq k_4$
C. $k_4 \leq k_1 \leq k_3 \leq k_2$ D. $k_4 \leq k_1 \leq k_2 \leq k_3$
2. (2024 广东深圳月考) 下列推导过程正确的为 ()

- A. $\forall a \in \mathbf{R}, \frac{4}{a} + a \geq 4$, 当且仅当 $\frac{4}{a} = a$ 时等号成立
B. 若 $ab > 0$, 则 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$, 当且仅当 $\frac{b}{a} = \frac{a}{b}$ 时等号成立
C. 若 $a < 0$, 则 $a + \frac{1}{a} \geq -2$, 当且仅当 $a = \frac{1}{a}$ 时等号成立
D. $\forall x \in \mathbf{R}, \sqrt{x^2 + 4} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} \geq 2$, 当且仅当

$$\sqrt{x^2 + 4} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} \text{ 时等号成立}$$

3. (2024 重庆育才中学期中) 若 $a > -3$, 则 $\frac{a^2 + 6a + 13}{a + 3}$ 的最小值为 ()
A. 2 B. 4 C. 5 D. 6
4. (2024 江苏连云港期中) 已知实数 $x > 0, y > 0$, $\frac{2}{x} + y = 1$, 则 $2x + \frac{1}{3y}$ 的最小值是 ()

- A. $4 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{13}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$
C. $\frac{13}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}$

5. (2024 四川眉山第一中学阶段练习) 设 $b > 0$, $ab + b = 1$, 则 a^2b 的最小值为 ()
A. 0 B. 1 C. 2 D. 4
6. (2025 安徽宿州期中) 已知不等式 $(x + ay) \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 16$ 对任意正实数 x, y 恒成立, 则正实数 a 的最小值为 ()
A. 2 B. 4 C. 6 D. 9

7. (多选题, 2025 河南期中) 已知 a, b 为正实数, 且 $a > 1, b > 1, ab - a - b = 0$, 则 ()
A. ab 的最大值为 4
B. $2a + b$ 的最小值为 $3 + 2\sqrt{2}$
C. $a + b$ 的最小值为 $3 - 2\sqrt{2}$
D. $\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1}$ 的最小值为 2

8. (多选题, 2025 河北石家庄精英中学阶段练习) 已知 x, y 都是正数, 且 $2x + y = 1$, 则下列结论正确的是 ()
A. $2xy$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$
B. $4x^2 + y^2$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$
C. $\sqrt{2x} + \sqrt{y}$ 的最小值为 $\sqrt{2}$
D. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为 $3 + 2\sqrt{2}$

9. (多选题, 2025 河北唐山期末) 现将一条长为 10 的细绳截成两段, 分别围成一个正方形以及一个三边长的比例为 $3 : 4 : 5$ 的三角形, 则下列说法正确的是 ()

- A. 两个图形的面积之和的最小值为 $\frac{5}{2}$
B. 两个图形的面积之积的最大值为 $\frac{625}{384}$
C. 若两个图形的面积之和大于 $\frac{35}{12}$, 则正方形周长的取值范围是 $(6, 10)$
D. 若两个图形的面积之和大于 $\frac{35}{12}$, 则正方形周长与三角形周长之比的最大值为 $\frac{2}{3}$

10. 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, $4x^2y^2 + y^4 = 1$, 则 $x^2 + y^2$ 的最小值为_____.

11. (2024 江苏宿迁期中) 设 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, 利用直角三角形的边角关系, 结合不等式知识可求得 $\sin \alpha + \cos \alpha$ 的最大值为_____.

12. (2025 辽宁辽阳月考) 若 $0 < a < 4$, 则 $\frac{2}{a} + \frac{8}{4-a}$ 的值可以是_____.

13. (2025 河南郑州期中) 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, $m = ab + 1$, $n = a + b$.

(1) 若 $a > 1, b < 1$, 试比较 m 与 n 的大小;

(2) 若 $a > 1, b > 1$, 且 $m - n = 49$, 求 $a + b$ 的最小值.

14. (2024 贵州黔东南阶段练习) 若 $a > 0, b > 0$, 且 $ab = a + 2b + 4$.

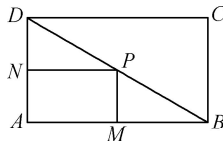
(1) 求 ab 的最小值;

(2) 求 $a + b$ 的取值范围.

15. (2024 江苏无锡期中) 如图, P 是矩形 $ABCD$ 对角线 BD 上一点, 过点 P 作 $PM \perp AB$, $PN \perp AD$, 分别交 AB, AD 于 M, N 两点.

(1) 当 $AB = 3, AD = 2$ 时, 设 $PM = x, PN = y$, 找出 x, y 的关系式, 求四边形 $AMPN$ 面积的最大值, 并指出此时点 P 的位置.

(2) 当矩形 $ABCD$ 的面积为 6 时, 四边形 $AMPN$ 的面积是否有最大值? 若有, 求出最大值; 若没有, 请说明理由.



阶段滚动(第1章—第2章)

答案见 P23

1. 下列命题的否定为真命题的是 ()
- A. $\exists x, y \in \mathbf{R}$, 使得方程 $2x+5y=9$ 有整数解
- B. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2-2x+1 \geq 0$
- C. 有一组邻边相等的平行四边形是菱形
- D. $\forall x \in \mathbf{R}$, 方程 $ax^2+bx+c=0$ 是一元二次方程
2. (2024 四川成都月考) 设集合 $A=\{-1, 0, 1\}$, 集合 $B=\{x|x>t\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 则实数 t 的取值范围是 ()
- A. $\{t|t \leq 1\}$ B. $\{t|t \geq 1\}$
- C. $\{t|t < 1\}$ D. $\{t|t > 1\}$
3. 已知集合 $M=\{x|m \leq x \leq m+\frac{3}{4}\}$, $N=\{x|n-\frac{1}{3} \leq x \leq n\}$, 且 M, N 都是集合 $\{x|0 \leq x \leq 1\}$ 的子集, 若把 $b-a$ 叫作集合 $\{x|a \leq x \leq b\}$ 的长度, 那么集合 $M \cap N$ 的长度的最小值为 ()
- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{12}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{5}{12}$
4. 已知 $p: -1 \leq x \leq 4, q: 1-m \leq x \leq 1+m (m>0)$, 且 p 是 q 的充分条件但不是必要条件, 则实数 m 的取值范围为 _____.
5. (2024 河北衡水中学期中) 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}, B=\{x|x^2-ax+a-1=0\}, C=\{x|x^2-mx+2=0\}$.
- (1) 命题 $p: \forall x \in B$, 都有 $x \in A$, 若命题 p 为真命题, 求实数 a 的值;
- (2) 若 $A \cap C = C$, 求实数 m 的取值范围.

感悟真题

答案见 P23

1. (2023 新高考 I 卷, 1) 已知集合 $M=\{-2, -1, 0, 1, 2\}, N=\{x|x^2-x-6 \geq 0\}$, 则 $M \cap N =$ ()
- A. $\{-2, -1, 0, 1\}$ B. $\{0, 1, 2\}$
- C. $\{-2\}$ D. $\{2\}$
2. (多选题, 2022 新高考 II 卷) 对任意 $x, y, x^2+y^2-xy=1$, 则 ()
- A. $x+y \leq 1$
- B. $x+y \geq -2$
- C. $x^2+y^2 \leq 2$
- D. $x^2+y^2 \geq 1$
3. (2017 全国卷理 I) 已知函数 $y_1=-x^2+ax+4, y_2=|x+1|+|x-1|$.
- (1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $y_1 \geq y_2$ 的解集;
- (2) 若不等式 $y_1 \geq y_2$ 的解集包含 $[-1, 1]$, 求实数 a 的取值范围.