

# Contents 目录

## 第一章 集合与常用逻辑用语

|      |                         |   |
|------|-------------------------|---|
| 题型一  | 集合元素的性质                 | 2 |
| 题型二  | 集合的表示                   | 2 |
| 题型三  | 集合中元素的个数                | 2 |
| 题型四  | 集合的包含关系                 | 3 |
| 题型五  | 集合的交、并、补的运算             | 3 |
| 题型六  | 集合的新定义问题                | 4 |
| 题型七  | 充分条件、必要条件的判断            | 4 |
| 题型八  | 由充分条件、必要条件与充要条件求参数的取值范围 | 5 |
| 题型九  | 充分条件、必要条件和充要条件的证明       | 5 |
| 题型十  | 全称量词命题与存在量词命题真假的判断      | 6 |
| 题型十一 | 含有一个量词命题的否定             | 6 |

## 第二章 一元二次函数、方程和不等式

|     |                   |    |
|-----|-------------------|----|
| 题型一 | 比较两式的大小           | 8  |
| 题型二 | 一元二次不等式的解法与应用     | 9  |
| 题型三 | 三个“二次”之间的关系问题     | 10 |
| 题型四 | 一元二次不等式恒成立(能成立)问题 | 10 |
| 题型五 | 利用基本不等式求最值        | 11 |
| 题型六 | 基本不等式的实际应用问题      | 13 |

## 第三章 函数概念与性质

|     |          |    |
|-----|----------|----|
| 题型一 | 函数的概念    | 19 |
| 题型二 | 函数的定义域问题 | 20 |
| 题型三 | 函数的值域问题  | 21 |
| 题型四 | 函数的表示问题  | 22 |
| 题型五 | 函数的图象问题  | 23 |
| 题型六 | 分段函数问题   | 24 |

题型七 函数的单调性问题 ..... 25

题型八 函数的最值问题 ..... 27

题型九 函数的奇偶性问题 ..... 29

题型十 幂函数的定义域和值域问题 ..... 31

题型十一 幂函数的单调性问题 ..... 31

题型十二 幂函数的奇偶性问题 ..... 32

题型十三 函数的应用 ..... 32

第四章 指数函数与对数函数

题型一 化简与运算问题 ..... 37

题型二 指数条件求值问题 ..... 39

题型三 求解含幂的方程 ..... 40

题型四 指数幂等式的证明问题 ..... 40

题型五 指数式与对数式的互化问题 ..... 40

题型六 对数的运算性质的应用 ..... 41

题型七 换底公式的应用 ..... 41

题型八 对数方程的求解 ..... 41

题型九 对数条件求值问题 ..... 42

题型十 与指数(或对数)相关的实际应用题 ..... 42

题型十一 指数函数、对数函数的定义域和值域问题 ..... 42

题型十二 指数函数、对数函数的图象问题 ..... 43

题型十三 幂函数、指数函数和对数函数的大小比较问题 ..... 45

题型十四 指数函数、对数函数的单调性问题 ..... 46

题型十五 指数函数、对数函数的奇偶性问题 ..... 48

题型十六 指数函数、对数函数的复合函数问题 ..... 48

题型十七 指数函数、对数函数的性质的综合问题 ..... 49

题型十八 求函数的零点 ..... 51

题型十九 函数零点个数的判断 ..... 51

题型二十 判断零点所在的区间 ..... 51

题型二十一 用二分法求函数的零点 ..... 52

题型二十二 根据零点分布求参数的取值范围 ..... 52

题型二十三 根据零点个数求参数的取值范围 ..... 52

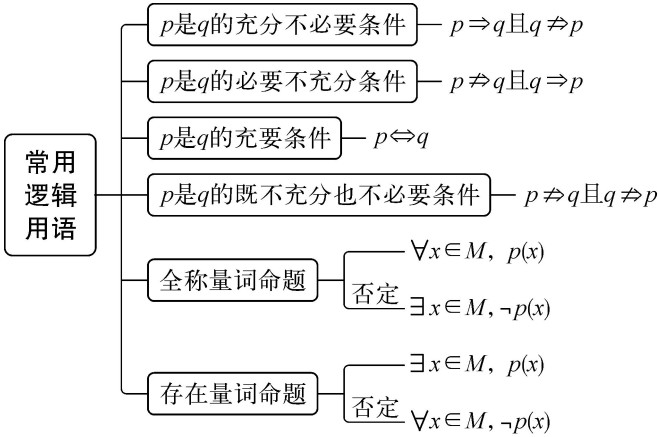
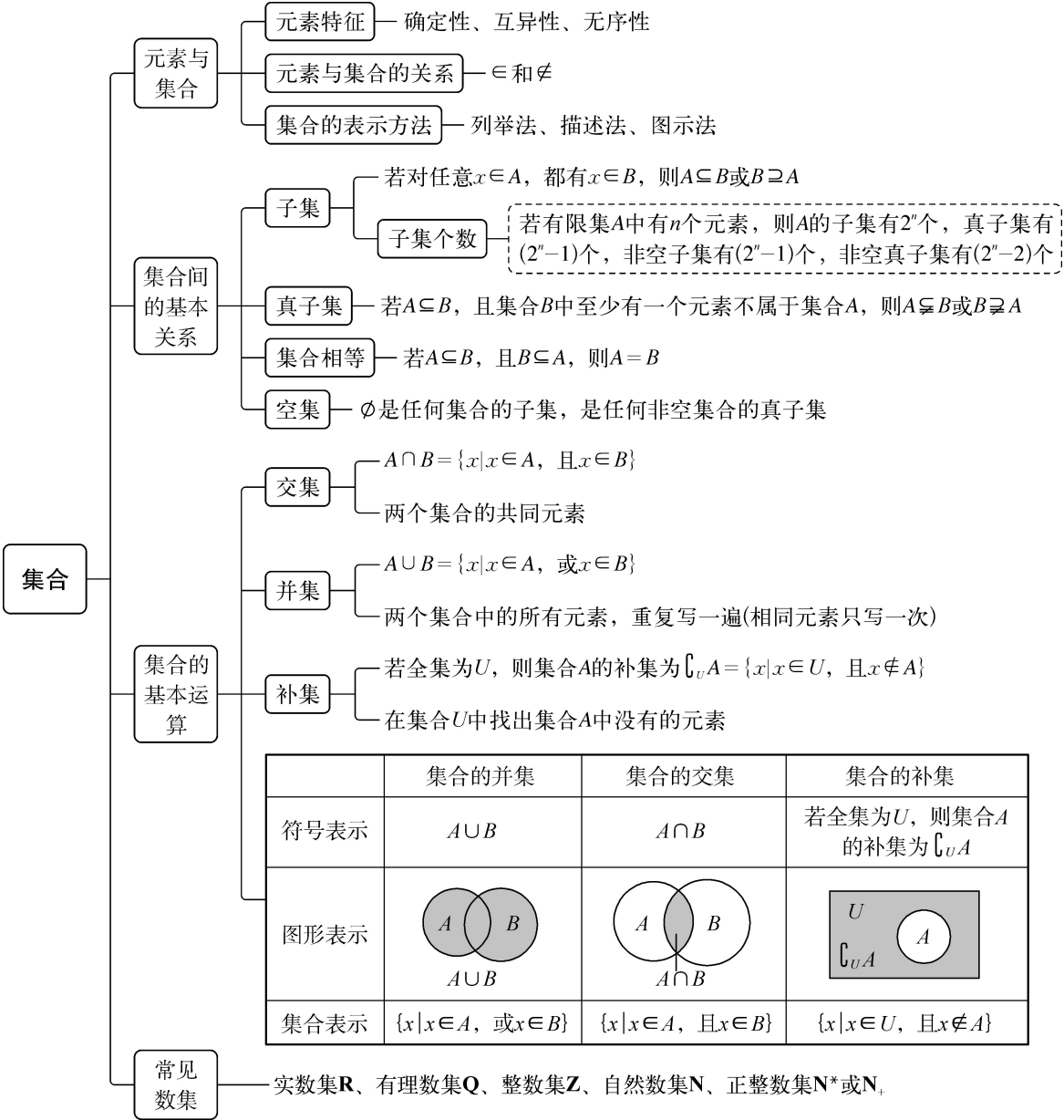
题型二十四 选择函数模型 ..... 53  
 题型二十五 已知函数模型解决实际问题 ..... 54  
 题型二十六 函数模型的应用 ..... 55  
 题型二十七 不动点 ..... 55

第五章 三角函数

题型一 任意角、角度制与弧度制的概念 ..... 63  
 题型二 终边相同的角 ..... 63  
 题型三 确定  $n$  分角与  $n$  倍角的象限 ..... 64  
 题型四 扇形的弧长、面积计算 ..... 64  
 题型五 任意角三角函数的定义 ..... 64  
 题型六 三角函数符号的判定 ..... 65  
 题型七  $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha$  知一求二 ..... 65  
 题型八 正、余弦齐次式的应用 ..... 66  
 题型九 利用同角三角函数关系式化简与证明 ..... 66  
 题型十  $\sin \alpha \pm \cos \alpha$  与  $\sin \alpha \cos \alpha$  关系的应用 ..... 67  
 题型十一 利用诱导公式化简求值 ..... 67  
 题型十二 解三角不等式 ..... 68  
 题型十三 三角函数的单调性 ..... 68  
 题型十四 三角函数的周期性、奇偶性及对称性 ..... 69  
 题型十五 两角和与差的三角函数公式 ..... 70  
 题型十六 两角和与差的三角函数公式的逆用与变形 ..... 70  
 题型十七 角的变换问题 ..... 70  
 题型十八 给角求值 ..... 71  
 题型十九 给值求值 ..... 71  
 题型二十 给值求角 ..... 72  
 题型二十一 正切恒等式及求非特殊角 ..... 72  
 题型二十二 函数  $y=A \sin(\omega x+\varphi)$  的图象及变换 ..... 73  
 题型二十三 由图象求函数  $y=A \sin(\omega x+\varphi)$  的解析式 ..... 73  
 题型二十四 三角函数的最值或值域 ..... 74  
 题型二十五 三角函数中有关  $\omega$  的求解 ..... 74  
 题型二十六 函数  $y=A \sin(\omega x+\varphi)$  图象与性质的综合应用 ..... 75

第一章 集合与常用逻辑用语

思维导图



### 题型一 集合元素的性质

例1 考察下列每组对象,能组成一个集合的是( )

①某高中高一年级聪明的学生;②在平面直角坐标系中,横、纵坐标相等的点;③不小于3的正整数;④ $\sqrt{3}$ 的近似值.

A. ①② B. ③④ C. ②③ D. ①③

答案 C

解析 对于①,“某高中高一年级聪明的学生”,其中聪明没有明确的定义,故不能构成集合;

对于②,“在平面直角坐标系中,横、纵坐标相等的点”,符合集合的定义,能构成集合;

对于③,“不小于3的正整数”,符合集合的定义,能构成集合;

对于④,“ $\sqrt{3}$ 的近似值”,对近似的精确度没有明确定义,故不能构成集合.

综上所述,只有②③能构成集合,①④不能构成集合.

例2 已知集合  $A = \{a+2, (a+1)^2, a^2+3a+3\}$ . 若  $1 \in A$ ,求实数  $a$  的取值集合.

答案  $\{0\}$

解析 因为  $1 \in A$ ,所以

①若  $a+2=1$ ,解得  $a=-1$ ,此时集合为  $\{1, 0, 1\}$ ,不满足集合中元素的互异性,所以不成立,即  $a \neq -1$ .

②若  $(a+1)^2=1$ ,解得  $a=0$  或  $a=-2$ .

当  $a=0$  时,集合为  $\{2, 1, 3\}$ ,满足条件,即  $a=0$  成立.

当  $a=-2$  时,集合为  $\{0, 1, 1\}$ ,不满足集合中元素的互异性,所以不成立,即  $a \neq -2$ .

③若  $a^2+3a+3=1$ ,解得  $a=-1$  或  $a=-2$ ,由①②知都不成立.

所以满足条件的实数  $a$  的取值集合为  $\{0\}$ .

**方法总结** 集合中元素的三个特性:

(1)确定性:集合中的元素是确定的,即任何一个对象都必须明确它是或不是某个集合的元素,两者必居其一.判断指定的对象能不能组成集合,关键是看作为集合的元素是否具有确定性,也就是能否找到一个明确的标准.

(2)互异性:集合中的元素必须是互异的,就是说,对于一个给定的集合,它的任意两个元素都是不同的.

(3)无序性:集合中元素的排列无先后顺序,任意调换集合中元素的位置,集合不变.

### 题型二 集合的表示

例3 用适当的方法表示下列集合.

(1) 方程  $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 0$  的解集;

(2)  $A = \{y | y = x^2 - 1, |x| \leq 2, x \in \mathbf{Z}\}$ ;

(3) 平面直角坐标系中第二、四象限内的点的集合;

(4) 不等式  $2x+3>7$  的解集.

解析 (1) 由  $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 0$ ,得  $x-2=0, y+3=0$ ,解得  $x=2, y=-3$ .

所以集合为  $\{(2, -3)\}$ .

(2) 由  $|x| \leq 2, x \in \mathbf{Z}$ ,得  $x = -2, -1, 0, 1, 2$ .

当  $x=2$  或  $x=-2$  时,  $y=3$ ;

当  $x=1$  或  $x=-1$  时,  $y=0$ ;

当  $x=0$  时,  $y=-1$ .

所以集合  $A = \{3, 0, -1\}$ .

(3)  $\{(x, y) | xy < 0, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ .

(4) 解不等式  $2x+3>7$ ,得  $x>2$ .

所以不等式  $2x+3>7$  的解集可表示为  $\{x | x>2\}$ .

### 题型三 集合中元素的个数

例4 集合  $A = \left\{x \in \mathbf{Z} \mid y = \frac{12}{x+3}, y \in \mathbf{Z}\right\}$  的元素个数为( )

A. 4 B. 5 C. 10 D. 12

答案 D

解析 由题意,集合  $A = \left\{x \in \mathbf{Z} \mid y = \frac{12}{x+3}, y \in \mathbf{Z}\right\}$  中的元素满足  $x$  是整数,且  $y$  是整数,故  $x+3$  应是12的因数(含负因数),由此可得  $x = -15, -9, -7, -6, -5, -4, -2, -1, 0, 1, 3, 9$ ,此时  $y$  的值分别为  $-1, -2, -3, -4, -6, -12, 12, 6, 4, 3, 2, 1$ ,符合条件的  $x$  共有12个.

例5 已知集合  $A$  满足  $\{1, 2\} \subseteq A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,则集合  $A$  有\_\_\_\_\_个;当集合  $A$  中的元素最多时,集合  $A$  的真子集有\_\_\_\_\_个.

答案 8 31

解析 集合  $A$  满足  $\{1, 2\} \subseteq A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,所以集合  $A$  有  $\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,则集合  $A$  有8个.

当集合  $A$  中的元素最多时,  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,此时集合  $A$  的真子集有  $2^5 - 1 = 31$ (个).

**方法总结** 1. 确定集合中元素的个数,先要确定集合中的元素是什么,再看这些元素满足什么限制条件,最后根据限制条件求参数的值或确定集合中元素的个数,要注意检验集合是否满足元素的互异性.

2. 含有  $n$  个元素的集合,其子集个数为  $2^n$ ,真子集个数为  $2^n - 1$ .如例5中的集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,有5个元素,所以集合  $A$  的真子集个数为  $2^5 - 1 = 31$ .

#### 题型四 集合的包含关系

例 6 下列六个关系式:① $\{a,b\}=\{b,a\}$ ;② $\{a,b\}\subseteq\{b,a\}$ ;③ $\emptyset=\{\emptyset\}$ ;④ $\{0\}=\emptyset$ ;⑤ $\emptyset\subseteq\{0\}$ ;⑥ $0\in\{0\}$ . 其中正确的个数是 ( )

A. 1 B. 3 C. 4 D. 6

答案 C

解析 ①正确,集合中元素具有无序性;②正确,任何集合是自身的子集;③错误, $\emptyset$ 表示空集,而 $\{\emptyset\}$ 表示的是含 $\emptyset$ 这个元素的集合,是元素与集合的关系,应改为 $\emptyset\in\{\emptyset\}$ ;④错误, $\emptyset$ 表示空集,而 $\{0\}$ 表示含有一个元素 0 的集合,并非空集,应改为 $\emptyset\subseteq\{0\}$ ;⑤正确,空集是任何非空集合的真子集;⑥正确,是元素与集合的关系.

**方法总结** 对于一个集合,首先要弄清集合中的元素是什么(点?数?集合?)?再找出这些元素满足的条件,从而确定集合.进而判断集合的包含关系,并进行集合的交、并、补的运算.

例 7 如果集合  $S=\{x|x=4n+2,n\in\mathbf{N}\}$ ,  $T=\{x|x=4k-2,k\in\mathbf{Z}\}$ , 则 ( )

A.  $S\subsetneq T$  B.  $T\subsetneq S$  C.  $S=T$  D.  $S\cap T=\emptyset$

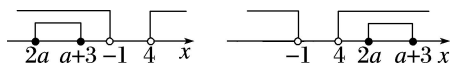
答案 A

解析 因为  $S=\{x|x=4n+2,n\in\mathbf{N}\}$ , 所以  $S=\{x|x=4(n+1)-2,n+1\in\mathbf{N}^*\}$ , 即对任意  $x\in S$  都有  $x\in T$ , 但存在  $-2\in T$  且  $-2\notin S$ , 所以  $S\subsetneq T$ .

例 8 已知集合  $A=\{x|x<-1$  或  $x>4\}$ ,  $B=\{x|2a\leq x\leq a+3\}$ , 若  $B\subseteq A$ , 求实数  $a$  的取值范围.

解析 ①当  $B=\emptyset$  时,  $2a>a+3$ , 即  $a>3$ , 显然满足题意.

②当  $B\neq\emptyset$  时, 根据题意作出如图所示的数轴,



可得  $\begin{cases} a+3\geq 2a, \\ a+3<-1 \end{cases}$  或  $\begin{cases} a+3\geq 2a, \\ 2a>4, \end{cases}$

解得  $a<-4$  或  $2<a\leq 3$ .

综上所述, 实数  $a$  的取值范围是  $\{a|a<-4$  或  $a>2\}$ .

**方法总结** 判断一个集合  $A$  中的任意元素是否属于另一集合  $B$ , 若是, 则  $A\subseteq B$ , 否则  $A$  不是  $B$  的子集; 其次, 判断另一个集合  $B$  中的任意元素是否属于一个集合  $A$ , 若是, 则  $B\subseteq A$ , 否则  $B$  不是  $A$  的子集; 若既有  $A\subseteq B$ , 又有  $B\subseteq A$ , 则  $A=B$ . 注意空集是任意集合的子集, 是任意非空集合的真子集. 由集合的包含关系求参数的取值范围可以借助数轴求解.

#### 题型五 集合的交、并、补的运算

例 9 已知集合  $A=\{(x,y)|y=x^2-2\}$ ,  $B=\{(x,y)|x-y=0\}$ , 则  $A\cap B=$ \_\_\_\_\_.

答案  $\{(-1,-1),(2,2)\}$

解析 集合  $A, B$  的代表元素是点, 而  $A\cap B$  是一个集合, 于是  $A\cap B$  是由两个交点所构成的集合, 即  $\{(-1,-1),(2,2)\}$ .

例 10 设全集  $U=\mathbf{R}$ , 集合  $A=\{x|-1\leq x<3\}$ ,  $B=\{x|2x-4\geq x-2\}$ .

(1) 求  $\complement_U(A\cap B)$ ;

(2) 若集合  $C=\{x|x-a>0\}$ , 满足  $B\cup C=C$ , 求实数  $a$  的取值范围.

解析 (1) 解不等式  $2x-4\geq x-2$  可得  $x\geq 2$ , 所以  $B=\{x|x\geq 2\}$ .

又集合  $A=\{x|-1\leq x<3\}$ , 所以  $A\cap B=\{x|2\leq x<3\}$ .

又  $U=\mathbf{R}$ , 所以  $\complement_U(A\cap B)=\{x|x<2$  或  $x\geq 3\}$ .

(2) 易知集合  $C=\{x|x-a>0\}=\{x|x>a\}$ .

由  $B\cup C=C$  可得  $B\subseteq C$ , 故有  $a<2$ .

故实数  $a$  的取值范围是  $(-\infty, 2)$ .

例 11 设  $U=\mathbf{R}$ , 集合  $A=\{x|x^2+3x+2=0\}$ ,  $B=\{x|x^2+(m+1)x+m=0\}$ . 若  $(\complement_U A)\cap B=\emptyset$ , 则  $m$  的值是\_\_\_\_\_.

答案 1 或 2

解析  $A=\{-2,-1\}$ . 由  $(\complement_U A)\cap B=\emptyset$ , 得  $B\subseteq A$ .

因为方程  $x^2+(m+1)x+m=0$  的判别式  $\Delta=(m+1)^2-4m=(m-1)^2\geq 0$ , 所以  $B\neq\emptyset$ .

所以  $B=\{-1\}$  或  $B=\{-2\}$  或  $B=\{-1,-2\}$ .

①若  $B=\{-1\}$ , 则  $m=1$ ;

②若  $B=\{-2\}$ , 则应有  $-(m+1)=(-2)+(-2)=-4$ , 且  $m=(-2)\times(-2)=4$ , 这两式不能同时成立, 所以  $B\neq\{-2\}$ ;

③若  $B=\{-1,-2\}$ , 则应有  $-(m+1)=(-1)+(-2)=-3$ , 且  $m=(-1)\times(-2)=2$ , 由这两式得  $m=2$ .

经检验知  $m=1$  和  $m=2$  符合条件.

所以  $m$  的值是 1 或 2.

**方法总结** 1. 解答集合题目, 认清集合元素的属性(是点集、数集或其他情形)和化简集合是正确求解的两个先决条件.

2. 集合的交、并、补的运算和集合的包含关系存在着一些必然的联系, 这些联系通过 Venn 图进行直观的分析不难找出来. 如  $A\cup B=A\iff B\subseteq A$ ,  $(\complement_U A)\cap B=\emptyset\iff B\subseteq A$  等, 在解题中碰到这种情况时要善于转化, 这是破解这类难点的一种极为有效的方法.

3. 数轴图示法是进行集合的交、并、补的运算的常用方法, 其中运用数轴图示法要特别注意端点是实心还是空心(即端点值能否取到).

4. 集合的交、并、补的运算中还要注意空集这一集合的特殊性, 必要时单独列出.

## 题型六 集合的新定义问题

**例 12 (多选题)** 对任意  $A, B \subseteq \mathbf{R}$ , 记  $A \oplus B = \{x | x \in A \cup B, x \notin A \cap B\}$ , 并称  $A \oplus B$  为集合  $A, B$  的“对称差”. 例如, 若  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}$ , 则  $A \oplus B = \{1, 4\}$ . 下列命题为真命题的是 ( )

- A. 若  $A, B \subseteq \mathbf{R}$ , 且  $A \oplus B = B$ , 则  $A = \emptyset$
- B. 若  $A, B \subseteq \mathbf{R}$ , 且  $A \oplus B = \emptyset$ , 则  $A = B$
- C. 若  $A, B \subseteq \mathbf{R}$ , 且  $A \oplus B \subseteq A$ , 则  $A \subseteq B$
- D. 存在  $A, B \subseteq \mathbf{R}$ , 使得  $A \oplus B = \complement_{\mathbf{R}} A \oplus \complement_{\mathbf{R}} B$

**答案 ABD**

**解析** 根据定义知  $A \oplus B = [(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B] \cup [A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B)]$ .

对于 A, 若  $A \oplus B = B$ , 则  $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = B, A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) = \emptyset$ , 又  $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = B$ , 所以  $B \subseteq \complement_{\mathbf{R}} A, A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) = \emptyset$ , 则  $A \subseteq B$ , 所以  $A = \emptyset$ , A 正确;

对于 B, 若  $A \oplus B = \emptyset$ , 则  $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = \emptyset, A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) = \emptyset$ , 所以  $A \cap B = A = B$ , B 正确;

对于 C, 若  $A \oplus B \subseteq A$ , 则  $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = \emptyset, A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) \subseteq A$ , 则  $B \subseteq A$ , C 错误;

对于 D, 当  $A = B$  时,  $A \oplus B = \emptyset, (\complement_{\mathbf{R}} A) \oplus (\complement_{\mathbf{R}} B) = \emptyset = A \oplus B$ , D 正确.

**例 13** 设  $S$  是整数集  $\mathbf{Z}$  的非空子集, 如果  $\forall a, b \in S$ , 有  $ab \in S$ , 则称  $S$  关于数的乘法是封闭的. 若  $T, V$  是  $\mathbf{Z}$  的两个不相交的非空子集,  $T \cup V = \mathbf{Z}$ , 且  $\forall a, b, c \in T$ , 有  $abc \in T$ ;  $\forall x, y, z \in V$ , 有  $xyz \in V$ . 则下列结论恒成立的是 ( ) (填序号).

- ①  $T, V$  中至少有一个关于乘法是封闭的;
- ②  $T, V$  中至多有一个关于乘法是封闭的;
- ③  $T, V$  中有且只有一个关于乘法是封闭的;
- ④  $T, V$  关于乘法都是封闭的.

**答案 ①**

**解析** 不妨设  $c = 1 \in T$ , 则  $\forall a, b \in T$ . 因为  $\forall a, b, c \in T$ , 都有  $abc \in T$ , 所以  $ab \in T$ , 所以  $T$  关于乘法是封闭的, 即  $T, V$  中至少有一个关于乘法是封闭的, 故 ① 成立; 若  $T$  为偶数集,  $V$  为奇数集, 则它们符合题意, 且关于乘法都是封闭的, 从而 ②③ 错误; 若  $T$  为非负整数集,  $V$  为负整数集, 显然  $T, V$  是  $\mathbf{Z}$  的两个不相交的非空子集,  $T \cup V = \mathbf{Z}$ , 且  $\forall a, b, c \in T$ , 有  $abc \in T, \forall x, y, z \in V$ , 有  $xyz \in V$ , 但是  $\forall x, y \in V$ , 有  $xy > 0, xy \notin V$ , ④ 错误.

**方法总结** 1. 新定义问题主要考查接受和处理新信息的能力, 解题时要充分理解题目的含义, 进行全面分析, 灵活处理.

2. 新定义问题较为抽象, 题意难以理解, 但若“以退为进”, 取一些特殊的数(数集)代入检验, 有时可有利于问题的解决.

## 题型七 充分条件、必要条件的判断

**例 14** 指出下列各题中  $p$  是  $q$  的什么条件.

- (1)  $p: x-3=0, q: (x-2)(x-3)=0$ .
- (2)  $p$ : 两个三角形相似,  $q$ : 两个三角形全等.
- (3)  $p: a > b, q: ac > bc$ .

**解析** (1)  $x-3=0 \Rightarrow (x-2)(x-3)=0$ , 但  $(x-2)(x-3)=0 \not\Rightarrow x-3=0$ , 故  $p$  是  $q$  的充分不必要条件.

(2) 两个三角形相似  $\not\Rightarrow$  两个三角形全等, 但两个三角形全等  $\Rightarrow$  两个三角形相似, 故  $p$  是  $q$  的必要不充分条件.

(3)  $a > b \not\Rightarrow ac > bc$ , 且  $ac > bc \not\Rightarrow a > b$ , 故  $p$  是  $q$  的既不充分也不必要条件.

**例 15** 设  $a, b, c$  为正数, 则“ $a+b > c$ ”是“ $a^2+b^2 > c^2$ ”的 ( )

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
- C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

**答案 B**

**解析** 因为  $a, b, c$  为正数,

所以当  $a=2, b=2, c=3$  时, 满足  $a+b > c$ , 但  $a^2+b^2 > c^2$  不成立, 即充分性不成立;

若  $a^2+b^2 > c^2$ , 则  $(a+b)^2 - 2ab > c^2$ , 即  $(a+b)^2 > c^2 + 2ab > c^2$ ,

即  $\sqrt{(a+b)^2} > \sqrt{c^2}$ , 即  $a+b > c$  成立, 即必要性成立.

综上, “ $a+b > c$ ”是“ $a^2+b^2 > c^2$ ”的必要不充分条件.

**例 16** 使  $x \in \{x | x \leq 0 \text{ 或 } x > 3\}$  成立的一个充分不必要条件是 ( )

- A.  $x \leq 0$  或  $x > 3$  B.  $x < -1$  或  $x > 3$
- C.  $x \leq 0$  或  $x > 1$  D.  $x \geq 0$

**答案 B**

**解析** 设集合  $A = \{x | x \leq 0 \text{ 或 } x > 3\}$ , 使  $x \in \{x | x \leq 0 \text{ 或 } x > 3\}$  成立的充分不必要条件对应的集合为  $B$ , 则  $B \subsetneq A$ , 结合选项知 B 满足条件.

**方法总结** 探求充分、必要条件问题, 应明确“条件”与“结论”及寻找“结论”的什么条件, 其解题的通法是先推导出“结论”的充要条件, 将充要条件“放大”, 即得“结论”的必要不充分条件, 将充要条件“缩小”, 即得“结论”的充分不必要条件.

**例 17** 已知  $p$  是  $r$  的充分不必要条件,  $q$  是  $r$  的充分条件,  $s$  是  $r$  的必要条件,  $q$  是  $s$  的必要条件, 现有下列命题: ①  $s$  是  $q$  的充要条件; ②  $p$  是  $q$  的充分不必要条件; ③  $r$  是  $q$  的必要不充分条件; ④  $r$  是  $s$  的充分不必要条件. 其中真命题序号是 ( )

- A. ①④ B. ①② C. ②③ D. ③④

**答案 B**

**解析** 分析: 根据条件及充分条件和必要条件确定  $p, q, r, s$  之间的关系, 然后逐一判断命题 ①②③④ 即可.

因为  $p$  是  $r$  的充分不必要条件, 所以  $p \Rightarrow r, r \not\Rightarrow p$ .

因为  $q$  是  $r$  的充分条件, 所以  $q \Rightarrow r$ .

因为  $s$  是  $r$  的必要条件, 所以  $r \Rightarrow s$ .

因为  $q$  是  $s$  的必要条件, 所以  $s \Rightarrow q$ .

因为  $q \Rightarrow r, r \Rightarrow s$ , 所以  $q \Rightarrow s$ . 又  $s \Rightarrow q$ , 所以  $s$  是  $q$  的充要条件, ①为真命题.

因为  $p \Rightarrow r, r \Rightarrow s, s \Rightarrow q$ , 所以  $p \Rightarrow q$ . 若  $q \Rightarrow p$ , 则  $r \Rightarrow s, s \Rightarrow q, q \Rightarrow p$ , 故  $r \Rightarrow p$ , 与  $r \not\Rightarrow p$  矛盾, 所以  $q \not\Rightarrow p$ , 所以  $p$  是  $q$  的充分不必要条件, ②为真命题.

因为  $r \Rightarrow s, s \Rightarrow q$ , 所以  $r \Rightarrow q$ , 即  $r$  是  $q$  的充分条件, ③为假命题.

因为  $s \Rightarrow q, q \Rightarrow r$ , 所以  $s \Rightarrow r$ . 又  $r \Rightarrow s$ , 所以  $r$  是  $s$  的充要条件, ④为假命题.

**方法总结** 判断  $p$  是  $q$  的什么条件, 需要从两方面进行分析: 一是由条件  $p$  能否推得条件  $q$ ; 二是由条件  $q$  能否推得条件  $p$ . 对于带有否定性的命题或比较难判断的命题, 除借助集合思想把抽象、复杂问题形象化、直观化外, 还可将其等价转化后进行判断.

#### 题型八 由充分条件、必要条件与充要条件求参数的取值范围

**例 18** 已知  $p: -2 < x < 8, q: 1 - a < x < 2a - 3$ . 若  $p$  是  $q$  的充分不必要条件, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

答案  $\left\{a \mid a \geq \frac{11}{2}\right\}$

解析 若  $p$  是  $q$  的一个充分不必要条件, 则  $\{x \mid -2 < x < 8\}$  是  $\{x \mid 1 - a < x < 2a - 3\}$  的真子集,

则  $\begin{cases} 1 - a \leq -2, \\ 2a - 3 \geq 8, \end{cases}$  且等号不同时成立, 解得  $a \geq \frac{11}{2}$ .

所以实数  $a$  的取值范围是  $\left\{a \mid a \geq \frac{11}{2}\right\}$ .

**例 19** 已知集合  $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < ax + 1 \leq 3, a \neq 0\}$ , 集合  $B = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 < x \leq 2\}$ . 若命题  $p: x \in A$ , 命题  $q: x \in B$ , 且  $p$  是  $q$  的充分不必要条件, 求实数  $a$  的取值范围.

解析 由题意得  $A \subsetneq B$ .

由集合  $A$ , 得  $-1 < ax \leq 2 (*)$ .

①当  $a > 0$  时, 由  $(*)$  得  $A = \left\{x \mid -\frac{1}{a} < x \leq \frac{2}{a}\right\} \neq \emptyset$ ,

因为  $A \subsetneq B$ , 所以  $\begin{cases} -\frac{1}{a} \geq -1, \\ \frac{2}{a} < 2 \end{cases}$  或  $\begin{cases} -\frac{1}{a} > -1, \\ \frac{2}{a} \leq 2, \end{cases}$  解得

$a > 1$ .

②当  $a < 0$  时, 由  $(*)$  得  $A = \left\{x \mid \frac{2}{a} \leq x < -\frac{1}{a}\right\} \neq \emptyset$ ,

因为  $A \subsetneq B$ , 所以  $\begin{cases} \frac{2}{a} > -1, \\ -\frac{1}{a} \leq 2, \end{cases}$  解得  $a < -2$ .

综上, 实数  $a$  的取值范围是  $\{a \mid a < -2 \text{ 或 } a > 1\}$ .

**方法总结** 利用集合间的包含关系判断充分条件和必要条件: 若  $A \subseteq B$ , 则  $x \in A$  是  $x \in B$  的充分条件; 若  $B \subseteq A$ , 则  $x \in A$  是  $x \in B$  的必要条件; 若  $A = B$ , 则  $x \in A$  是  $x \in B$  的充要条件. 反之亦然.

#### 题型九 充分条件、必要条件和充要条件的证明

**例 20** 求证: 等式  $a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2$  对任意实数  $x$  恒成立的充要条件是  $a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2$ .

解析 证明: 先证充分性,

若  $a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2$ , 则等式  $a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2$  显然对任意实数  $x$  恒成立, 充分性成立.

再证必要性,

由于等式  $a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2$  对任意实数  $x$  恒成立,

分别将  $x = 0, x = 1, x = -1$  代入可得

$$\begin{cases} c_1 = c_2, \\ a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2, \\ a_1 - b_1 + c_1 = a_2 - b_2 + c_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2, \\ c_1 = c_2, \end{cases} \text{ 必要性成立.}$$

故等式  $a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2$  对任意实数  $x$  恒成立的充要条件是  $a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2$ .

**例 21** 设  $a, b, c$  为  $\triangle ABC$  的三边, 求证: 方程  $x^2 + 2ax + b^2 = 0$  与  $x^2 + 2cx - b^2 = 0$  有公共根的充要条件是  $\angle A = 90^\circ$ .

解析 证明: 先证充分性,

因为  $\angle A = 90^\circ$ ,

所以方程  $x^2 + 2ax + b^2 = 0$  可化为  $x^2 + 2ax + a^2 - c^2 = 0$ ,

所以  $x^2 + 2ax + (a+c)(a-c) = 0$ , 所以  $[x + (a+c)][x + (a-c)] = 0$ ,

所以该方程有两个根  $x_1 = -(a+c), x_2 = -(a-c)$ .

同理, 另一方程  $x^2 + 2cx - b^2 = 0$  可化为  $x^2 + 2cx + c^2 - a^2 = 0$ ,

所以  $x^2 + 2cx + (c+a)(c-a) = 0$ , 所以  $[x + (c+a)][x + (c-a)] = 0$ ,

所以该方程有两个根  $x_3 = -(a+c), x_4 = -(c-a)$ .

可以发现  $x_1 = x_3$ , 所以这两个方程有公共根.

再证必要性,

设  $\alpha$  是两方程的公共根, 所以  $\begin{cases} \alpha^2 + 2a\alpha + b^2 = 0 & \text{①,} \\ \alpha^2 + 2c\alpha - b^2 = 0 & \text{②.} \end{cases}$

由①+②得  $2\alpha^2 + 2\alpha(a+c) = 0$ .

若  $\alpha = 0$ , 由①得  $b^2 = 0$ , 即  $b = 0$ , 与三角形的边长大于 0 矛盾, 所以  $\alpha \neq 0$ ,

所以  $\alpha = -(a+c)$ .

代入①得  $(a+c)^2 - 2a(a+c) + b^2 = 0$ , 整理得  $c^2 + b^2 = a^2$ ,

所以  $\angle A = 90^\circ$ .

综上所述, 方程  $x^2 + 2ax + b^2 = 0$  与  $x^2 + 2cx - b^2 = 0$  有公共根的充要条件是  $\angle A = 90^\circ$ .

**例 22** 已知  $a, b$  是实数, 求证:  $a^4 - b^4 - 2b^2 = 1$  成立的充要条件是  $a^2 - b^2 = 1$ .

**解析** **证明:** 因为  $a^2 + b^2 + 1 \neq 0$ , 所以  $a^4 - b^4 - 2b^2 = 1 \Leftrightarrow a^4 - (b^4 + 2b^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow (a^2)^2 - (b^2 + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (a^2 + b^2 + 1)(a^2 - b^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 1$ .

所以  $a^4 - b^4 - 2b^2 = 1$  成立的充要条件是  $a^2 - b^2 = 1$ .

**方法总结** 证明  $p$  是  $q$  的充要条件, 既要证充分性成立, 即证  $p \Rightarrow q$ , 又要证明必要性成立, 即证  $q \Rightarrow p$ . 若每一步证明均可逆(步步互为充要条件), 则可将充分性和必要性的证明合一, 用  $\Leftrightarrow$  符号表示.

#### 题型十 全称量词命题与存在量词命题真假的判断

**例 23** (多选题) 下列存在量词命题为真命题的是 ( )

- A.  $\exists x \in \mathbf{Z}, x^2 - 2x - 3 = 0$
- B. 至少有一个  $x \in \mathbf{Z}$ , 使  $x$  能同时被 2 和 3 整除
- C.  $\exists x \in \mathbf{R}, |x| < 0$
- D. 有些自然数是偶数

**答案** ABD

**解析** 对于 A, 当  $x = -1$  时, 满足  $x^2 - 2x - 3 = 0$ , 所以

A 是真命题;

对于 B, 6 能同时被 2 和 3 整除, 所以 B 是真命题;

对于 C, 因为所有实数的绝对值都为非负数, 即  $|x| \geq 0$ , 所以 C 是假命题;

对于 D, 2 既是自然数又是偶数, 所以 D 是真命题.

**例 24** 若命题  $p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + m \neq 0$  是真命题, 则实数  $m$  的取值范围是 ( )

- A.  $[1, +\infty)$
- B.  $(1, +\infty)$
- C.  $(-\infty, 1)$
- D.  $(-\infty, 1]$

**答案** B

**解析** 命题  $p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 2x + m \neq 0$  是真命题, 则  $\Delta < 0$ , 即  $4 - 4m < 0$ , 解得  $m > 1$ .

**方法总结** 对于全称量词命题和存在量词命题真假的判断, 可以直接判断, 但如果其表达内容比较难以理解, 则可以先判断其否定的真假, 再判断其真假. 判断命题的真假要注意: 全称量词命题为真需证明, 为假举反例即可; 存在量词命题为真只需举一个例子, 为假则要证明它的否定(全称量词命题)为真.

#### 题型十一 含有一个量词命题的否定

**例 25** 命题“ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2 \leq 0$ ”的否定是 ( )

- A.  $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2 > 0$
- B.  $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2 \leq 0$
- C.  $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2 > 0$
- D.  $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2 \geq 0$

**答案** A

**例 26** 命题“ $\forall x \geq 2, x^2 - 4 < 0$ ”的否定是 ( )

- A.  $\exists x \geq 2, x^2 - 4 \geq 0$
- B.  $\exists x < 2, x^2 - 4 \geq 0$
- C.  $\forall x < 2, x^2 - 4 \geq 0$
- D.  $\forall x < 2, x^2 - 4 < 0$

**答案** A

**解析** 全称量词命题“ $\forall x \in M, p(x)$ ”的否定是存在量词命题“ $\exists x \in M, \neg p(x)$ ”.