

高中数学

小题为王[®]做

全程提优

必修第一册RA

主 编 恩波教育研究中心
编 委 闫秀香 崔华梅 陈恕祥
朱万良 孙续桂

 南京大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高中数学小题狂做全程提优：必修·第一册 RA /
恩波教育研究中心主编. — 南京：南京大学出版社，
2025. 6. — ISBN 978-7-305-29391-7

I. G634.603

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2025D6C186 号

出版发行 南京大学出版社
社 址 南京市汉口路 22 号 邮 编 210093

GAOZHONG SHUXUE XIAOTI KUANGZUO QUANCHENG TIYOU • BIXIU • DI-YI CE RA

书 名 高中数学小题狂做全程提优·必修·第一册 RA

主 编 恩波教育研究中心

责任编辑 刘 琦 编辑热线 025-83530763

印 刷 南京地海印刷有限公司

开 本 880 mm×1230 mm 1/16 开 印张 21.5 字数 680 千

版 次 2025 年 6 月第 1 版 2025 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-305-29391-7

定 价 69.80 元

网 址 <http://www.njupco.com>

官方微博 <http://weibo.com/njupco>

官方微信 njupress

销售咨询热线 025-83594756

-
- * 版权所有,侵权必究
 - * 凡购买南大版图书,如有印装质量问题,请与所购图书销售部门联系调换

Contents 目录

第一章 集合与常用逻辑用语

►见答案

课时提优 1	集合的概念	1
课时提优 2	集合间的基本关系	3
课时提优 3	集合的基本运算	5
课时提优 4	充分条件与必要条件	7
课时提优 5	充要条件	9
课时提优 6	全称量词与存在量词	11
单元综合练 1	集合与常用逻辑用语	13
章末提优		15
感悟真题		16

易错 忽视方程有两个相等的实数根/1

易错 忽视对二次项系数的讨论/1

第二章 一元二次函数、方程和不等式

课时提优 7	等式性质与不等式性质	17
课时提优 8	基本不等式的证明	19
课时提优 9	基本不等式的应用	21
课时提优 10	二次函数与一元二次方程、不等式(1)	23
课时提优 11	二次函数与一元二次方程、不等式(2)	25
单元综合练 2	不等式及其应用	27
培优突破练 1	利用基本不等式求最值问题	29
培优突破练 2	含参的不等式恒成立与有解问题	31
章末提优		33
感悟真题		35
阶段滚动(第一章)		35

易错 利用基本不等式求最值的三个条件/12

第三章 函数的概念与性质

课时提优 12	函数的概念	36
课时提优 13	函数的表示方法	38
课时提优 14	函数的单调性	40
课时提优 15	函数的最大(小)值	42
课时提优 16	函数的奇偶性	44
课时提优 17	幂函数	46
单元综合练 3	函数概念与性质的综合应用	48
课时提优 18	函数的应用(一)	50

方法 判断同一函数的方法/24

方法 简单函数定义域的求法/25

方法 判断一个对应关系是函数的方法/25

方法 已知函数定义域及值域求参数问题的方法/25

方法 利用方程组求解析式的方法/26

培优突破练 3	分段函数的有关问题	53
培优突破练 4	函数 $y=mx+\frac{n}{x}$ 的图象与性质	56
培优突破练 5	抽象函数的性质	58
章末提优		60
感悟真题		65
阶段滚动(第一章—第二章)		62

易错 研究分段函数的单调性, 忽视端点处函数值的大小/28

方法 判断函数单调性常用的方法/29

方法 函数的轴对称性和中心对称性/38

第四章 指数函数与对数函数

课时提优 19	指数	63
课时提优 20	指数函数的概念	65
课时提优 21	指数函数的图象与性质	67
课时提优 22	对数	69
课时提优 23	对数函数的概念	71
课时提优 24	对数函数的图象与性质	73
课时提优 25	不同函数增长的差异	75
单元综合练 4	指数函数与对数函数综合应用	78
课时提优 26	函数的零点与方程的解	80
课时提优 27	用二分法求方程的近似解	82
课时提优 28	函数模型的应用(1)	84
课时提优 29	函数模型的应用(2)	87
培优突破练 6	与指数、对数函数有关的复合函数问题	91
章末提优		93
感悟真题		95
阶段滚动(第一章—第三章)		95

方法 比较指数式大小的方法/53

方法 探究函数零点的两种方法/62

方法 确定函数零点所在区间的常用方法/62

第五章 三角函数

课时提优 30	任意角	96
课时提优 31	弧度制	98
课时提优 32	三角函数的概念	101
课时提优 33	同角三角函数关系	103
课时提优 34	诱导公式	105
单元综合练 5	三角函数有关概念及其应用	107
课时提优 35	正弦函数、余弦函数的图象	108
课时提优 36	正弦函数、余弦函数的性质(1)	111
课时提优 37	正弦函数、余弦函数的性质(2)	113
课时提优 38	正切函数的性质与图象	116
课时提优 39	两角差的余弦公式	118
课时提优 40	两角和与差的正弦、余弦、正切公式	120

方法 找与给定角终边相同的角的方法/74

方法 判断一个角在第几象限(或者坐标轴)的方法/74

方法 三角函数值在各个象限内符号的口诀记忆/77

方法 已知单调区间求参数取值范围的3种方法/85

方法 求三角函数周期的两种方法/87

方法 三角函数式化简、证明的常用技巧/94

方法 求三角函数表达式的方法/100

课时提优 41	二倍角的正弦、余弦、正切公式	122
课时提优 42	简单的三角恒等变换	124
课时提优 43	函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ (1)	126
课时提优 44	函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ (2)	129
单元综合练 6	三角函数的图象和性质	132
课时提优 45	三角函数的应用	134
培优突破练 7	三角函数的化简与求值问题	138
培优突破练 8	三角函数的最值与范围问题	140
章末提优		142
感悟真题		145
阶段滚动(第一章—第四章)		146

答案全解精析(另册)

小帮手——思维导图+专题突破(另册)

第一章 集合与常用逻辑用语

课时提优 1 集合的概念

答案见 P1

题型索引

题型 1 集合元素的确定性(题 1)

题型 3 新定义问题(题 11,15)

题型 5 集合元素的互异性(题 3,4,6)

题型 2 常见数集的符号(题 5)

题型 4 集合的表示方法(题 2,7)

题型 6 集合相等(题 4,8)

基础强化

1. (2024 河北衡水中学月考)下列对象能构成集合的是 ()

- A. 本班成绩较好的同学全体
- B. 与 10 接近的实数全体
- C. 绝对值小于 5 的整数全体
- D. 本班兴趣广泛的学生

2. 若用列举法表示集合 $A = \{(x, y) | \begin{cases} 2y - x = 7, \\ x + y = 2 \end{cases}\}$,

则下列表示正确的是 ()

- A. $\{x = -1, y = 3\}$
- B. $\{(-1, 3)\}$
- C. $\{3, -1\}$
- D. $\{-1, 3\}$

3. 下列说法正确的是 ()

- A. 1 与 $\{1\}$ 表示同一个集合
- B. 由 1, 2, 3 组成的集合可表示为 $\{1, 2, 3\}$ 或 $\{3, 2, 1\}$
- C. 方程 $(x-1)^2(x-2)=0$ 的所有解的集合可表示为 $\{1, 1, 2\}$
- D. 集合 $\{x | 4 < x < 5\}$ 可以用列举法表示

4. (多选题, 2025 广西开学考试)已知集合 $A = \{0, 1, -a\}$, $B = \{1, b+2, b\}$. 若 $A = B$, 则 $a+b$ 的值可能是 ()

- A. -4
- B. -2
- C. 0
- D. 2

5. (2024 山西运城月考)有下列各组关系或说法:

- ① $0 \in \mathbf{N}^*$; ② $3\sqrt{5} \notin \mathbf{Q}$; ③ $\pi \in \mathbf{Q}$; ④ $3 + \sqrt{7} \notin \mathbf{R}$;
- ⑤ 若集合 E 是由所有平行四边形构成的集合, 则某个正方形 $ABCD$ 是集合 E 的元素. 其中正确的个数是_____.

6. (2025 四川成都期中)已知集合 $A = \{12, a^2 + 4a, a+10\}$, $5 \in A$, 则实数 $a =$ _____.

综合提升

7. (2025 上海普陀期中改编)已知 $A = \{x | x = \frac{6}{a-1} \in \mathbf{Z}, a \in \mathbf{N}\}$, 用列举法表示 A 为 ()

- A. $\{2, 3, 4, 7\}$
- B. $\{-5, -2, -1, 0, 2, 3, 4, 7\}$
- C. $\{-6, 1, 2, 3, 6\}$
- D. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

8. 已知集合 $A = \{0, a+b, \frac{a}{b}\}$, $B = \{0, 1-b, 1\}$, $a, b \in \mathbf{R}$. 若 $A = B$, 则 $a+2b =$ ()

- A. -2
- B. 2
- C. -1
- D. 1

9. (多选题)已知集合 $A = \{y | y = x^2 + 1\}$, 集合 $B = \{(x, y) | y = x^2 + 1\}$, 且在 A, B 中, $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$, 则下列选项的元素与集合的关系正确的是 ()

- A. $2 \in A$, 且 $2 \notin B$
- B. $(1, 2) \in A$, 且 $(1, 2) \in B$
- C. $2 \in A$, 且 $(3, 10) \in B$
- D. $(3, 10) \in A$, 且 $2 \in B$

10. (多选题)已知 $A = \{x | x^2 + px + q = x\}$, $B = \{x | (x-1)^2 + p(x-1) + q = x+1\}$, 当 $A = \{2\}$ 时, 则集合 B 中实数 x 的可能取值为 ()

- A. $4 - \sqrt{2}$
- B. $3 - \sqrt{2}$
- C. $3 + \sqrt{2}$
- D. $4 + \sqrt{2}$

11. (2025 重庆月考) 定义集合运算 $A \odot B = \{z \mid z = (x + y)^2, x \in A, y \in B\}$. 若集合 $A = \{-1, 1\}, B = \{2, 3\}$, 则集合 $A \odot B$ 中所有元素之和为_____.

12. 式子 $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{a^2}{|a^2|} + \frac{\sqrt{-b}}{|\sqrt{-b}|}$ 的所有可能取值组成的集合为_____.

13. 已知集合 $A = \{x \mid ax^2 + 2x + 1 = 0, a \in \mathbf{R}\}$.

- (1) 若集合 A 中只有一个元素, 求 a 的值;
- (2) 若集合 A 中至少有一个元素, 求 a 的取值范围;
- (3) 若集合 A 中至多有一个元素, 求 a 的取值范围.

14. (2024 江苏常州中学期中) 设集合 $A = \{x \mid x = a^2 + b^2, a, b \in \mathbf{N}\}$.

- (1) 将集合 A 中的元素进行从小到大的排列, 求最小的六个元素组成的子集 B ;
- (2) 对任意的 $x_1, x_2 \in A$, 判定 $x_1 + x_2$ 和 $x_1 x_2$ 是不是集合 A 中的元素? 并证明你的结论.

应用·创新

15. (2025 广东广州月考) 已知有限集 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} (n \geqslant 2, n \in \mathbf{N})$, 若 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 a_2 \cdots a_n$, 则称 A 为“完全集”.

- (1) 判断集合 $\{-1, -\sqrt{2}, \sqrt{2} - 1, 2\sqrt{2} + 2\}$ 是否为“完全集”, 并说明理由;
- (2) 若集合 $\{a, b\}$ 为“完全集”, 且 a, b 均大于 0, 求证: a, b 中至少有一个大于 2.

单元综合练 1 集合与常用逻辑用语

答案见 P7

综合提升

- (2025 浙江温州中学期中)“ $\forall x \in [1, 2], 1 \leq x^2 \leq 4$ ”的否定是 ()
 A. $\forall x \notin [1, 2], 1 \leq x^2 \leq 4$
 B. $\exists x \notin [1, 2], 1 \leq x^2 \leq 4$
 C. $\exists x \in [1, 2], x^2 > 4$ 或 $x^2 < 1$
 D. $\exists x \in [1, 2], x^2 > 4$ 且 $x^2 < 1$
- (2025 山东淄博期中)已知命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, (m+1)(x^2+1) \leq 0$, 命题 $q: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 - mx + 1 > 0$ 恒成立. 若命题 p 和 q 至多有一个为真命题, 则实数 m 的取值范围是 ()
 A. $[2, +\infty)$
 B. $(-1, 2]$
 C. $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
 D. $(-\infty, -2] \cup (-1, +\infty)$
- (多选题, 2024 江西宜春月考)设集合 $M = \{x | (x-a)(x-3)=0\}$, $N = \{x | (x-4)(x-1)=0\}$, 则下列说法错误的是 ()
 A. 若 $M \cup N$ 有 4 个元素, 则 $M \cap N \neq \emptyset$
 B. 若 $M \cap N \neq \emptyset$, 则 $M \cup N$ 有 4 个元素
 C. 若 $M \cup N = \{1, 3, 4\}$, 则 $M \cap N \neq \emptyset$
 D. 若 $M \cap N \neq \emptyset$, 则 $M \cup N = \{1, 3, 4\}$
- (多选题, 2024 江苏苏州中学月考)下列结论正确的是 ()
 A. “ $x > 1$ ”是“ $|x| > 1$ ”的充分不必要条件
 B. “ $a \in P \cap Q$ ”是“ $a \in P$ ”的必要不充分条件
 C. “ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 \geq 0$ ”的否定是“ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 < 0$ ”
 D. “ $x=1$ 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的实数根”的充要条件是“ $a+b+c=0$ ”
- (2025 山东淄博期中改编)已知 x, y 为非零实数, 则代数式 $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{|xy|}{xy}$ 的值所组成的集合 $M =$ _____.
- (2025 广东肇庆阶段练习)已知“ $x < a-1$ 或 $x > a+1$ ”是“ $x > 2$ 或 $x < -1$ ”的必要不充分条件, 则实数 a 的取值范围是 _____.
- 已知集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x | m+1 \leq x \leq 2m-1\}$.
 (1) 若命题 $p: \forall x \in B, x \in A$ 是真命题, 求实数 m 的取值范围;
 (2) 若命题 $q: \exists x \in A, x \in B$ 是假命题, 求实数 m 的取值范围.
- 已知命题 $q: \exists x$ 满足 $-2 < x < 2$, 使 $x^2 - 2x - a = 0$.
 (1) 命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 + (a-1)x + 4 < 0$, 若命题 p, q 中至少一个为真, 求实数 a 的取值范围;
 (2) 命题 $p: 2a < x < a+1$, 若 p 是 q 的充分不必要条件, 求实数 a 的取值范围.

应用·创新

9. (2025 安徽阶段练习) 若存在集合 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 是集合 S 的非空子集(其中 $S \neq \emptyset$), 且满足 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = S, A_i \cap A_j = \emptyset (1 \leq i \neq j \leq k)$, 则称 $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ 为 S 的一个 k 分划.
- (1) 当 $k=2$ 时, $A_1 = \{x \mid x=2m, m \in \mathbf{N}^*\}$, $A_2 = \{x \mid x=2m-1, m \in \mathbf{N}^*\}$, $A_3 = \{x \mid x=2m+1, m \in \mathbf{N}^*\}$, 试判断 (A_1, A_2) 是否为 $\mathbf{N}^*$ 的一个 2 分划, 试判断 (A_1, A_3) 是否为 $\mathbf{N}^*$ 的一个 2 分划;
- (2) 若 $S = \{1, 2, 3, 4\}$, 规定 (A_1, A_2) 和 (A_2, A_1) 是 S 的同一种 2 分划, 请写出 S 的所有 2 分划;
- (3) 若 $S = \{1, 2, \dots, 25, 26\}$, 集合 B 是 S 的非空子集, 且集合 B 中任意两个不同元素之和不被 5 整除, 求集合 B 中元素个数的最大值.

章末提优

答案见 P8

- (2024 河南商丘月考)下列命题是全称量词命题且是真命题的为 ()
 A. 有些四边形的内角和不等 360°
 B. $\forall n \in \mathbf{N}^*, \frac{1}{n} < 1$
 C. $\exists m \in \mathbf{R}$, 使得 $|m| > 0$
 D. 所有能被 4 整除的数都是偶数
- (2023 全国乙卷理)设集合 $U = \mathbf{R}$, 集合 $M = \{x | x < 1\}$, $N = \{x | -1 < x < 2\}$, 则 $\{x | x \geq 2\} =$ ()
 A. $\complement_U(M \cup N)$ B. $N \cup \complement_U M$
 C. $\complement_U(M \cap N)$ D. $M \cup \complement_U N$
- 下列说法正确的是 ()
 A. “对任意一个无理数 x , x^2 也是无理数”是真命题
 B. “ $xy > 0$ ”是“ $x + y > 0$ ”的充要条件
 C. 命题“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $x_0^2 + 1 > 0$ ”的否定是“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 < 0$ ”
 D. 若“ $1 < x < 3$ ”的一个必要不充分条件是“ $m - 2 < x < m + 2$ ”, 则实数 m 的取值范围是 $[1, 3]$
- (2024 湖北武汉期末)设 $a, b \in \mathbf{R}$, 则“ $ab + 1 \neq a + b$ ”的充要条件是 ()
 A. a, b 不都为 1
 B. a, b 都不为 0
 C. a, b 中至多有一个是 1
 D. a, b 都不为 1
- (2024 河北冀州中学期中)定义集合 A, B 的运算 $A * B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B, \text{ 且 } x \notin A \cap B\}$, 则 $(A * B) * A =$ ()
 A. $A \cap B$ B. $A \cup B$
 C. A D. B
- (2023 北京卷)若 $xy \neq 0$, 则“ $x + y = 0$ ”是“ $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = -2$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件
- (多选题, 2024 广东广州月考)命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 + bx + 1 \leq 0$ 是假命题, 则实数 b 的值可能是 ()
 A. $-\frac{7}{4}$ B. $-\frac{3}{2}$
 C. 2 D. $\frac{5}{2}$
- (多选题, 2024 江苏宿迁月考)已知集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 7\}$, $B = \{x | m + 1 < x < 2m - 1\}$, 则使得 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = \emptyset$ 成立的实数 m 的取值范围可以是 ()
 A. $\{m | -3 \leq m \leq 4\}$
 B. $\{m | m > 2\}$
 C. $\{m | 2 < m < 4\}$
 D. $\{m | m \leq 4\}$
- (多选题 2025 广东期中)下列说法正确的是 ()
 A. 命题“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 \leq 2$ ”的否定是“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 > 2$ ”
 B. 命题“ $\exists x_0 \in \mathbf{Q}, 2x_0^2 + x_0 + 1 = 0$ ”是真命题
 C. 若命题“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, 4x_0^2 + 2x_0 + n = 0$ ”为假命题, 则实数 n 的取值范围是 $(\frac{1}{4}, +\infty)$
 D. 已知集合 $A = \{0, 1, 3, 4\}$, 则满足条件 $A \cup B = B$ 的集合 B 的个数为 15
- (2024 江苏常州月考)命题“10 个整数 $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ 中至多有 6 个为正数”的否定形式为_____.
- (2025 河北邢台期中)已知命题“ $\exists x \in (1, +\infty), 2x - m + 1 = 0$ ”是假命题, 则实数 m 的取值范围是_____.

12. 已知 $p: -4 < x - a < 4, q: 2 < x < 3$. 若 q 是 p 的充分条件, 则实数 a 的取值范围是_____.
13. (2025 吉林长春阶段练习) 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | 0 \leq x \leq 3\}, B = \{x | m - 1 \leq x \leq 2m\}$.
- (1) 当 $m = 3$ 时, 求 $A \cup B, A \cap B$ 及 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$;
- (2) 若“ $x \in B$ ”是“ $x \in A$ ”的充分不必要条件, 求实数 m 的取值范围.
14. (2025 陕西西安阶段练习) 设命题 $p: \forall x \geq 1, x^2 - x + 1 - m > 0$, 命题 $q: \forall x \in \mathbf{R}, 4x^2 + (4m - 2)x + 1 \neq 0$.
- (1) 若 q 为真命题, 求实数 m 的取值范围;
- (2) 若 p 为假命题, q 为真命题, 求实数 m 的取值范围.

15. (2024 江苏海门中学期中) 已知非空集合 $A \subseteq \mathbf{R}$. 用 $|A|$ 表示集合 A 中元素的个数. 设 $S = \{a | a = x + y, x \in A, y \in A, \text{且 } x \neq y\}, T = \{a | a = x - y, x \in A, y \in A, \text{且 } x > y\}$.
- (1) 若 $A = \{1, 2, 3\}$, 直接写出 S, T 以及 $|A|, |S|, |T|$ 的值.
- (2) 若 $|A| = 4$, 求 $|S| + |T|$ 的最小值.

感悟真题

答案见 P9

1. (2024 全国甲卷文, 2) 若集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}, B = \{x | x + 1 \in A\}$, 则 $A \cap B =$ ()
- A. $\{1, 3, 4\}$ B. $\{2, 3, 4\}$
C. $\{1, 2, 3, 4\}$ D. $\{0, 1, 2, 3, 4, 9\}$
2. (2023 新课标 II 卷, 2) 设集合 $A = \{0, -a\}, B = \{1, a - 2, 2a - 2\}$, 若 $A \subseteq B$, 则 $a =$ ()
- A. 2 B. 1 C. $\frac{2}{3}$ D. -1
3. (2023 天津卷, 2) 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, “ $a^2 = b^2$ ”是“ $a^2 + b^2 = 2ab$ ”的 ()
- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件
4. (2023 北京卷, 1) 已知集合 $M = \{x | x + 2 \geq 0\}, N = \{x | x - 1 < 0\}$, 则 $M \cap N =$ ()
- A. $\{x | -2 \leq x < 1\}$ B. $\{x | -2 < x \leq 1\}$
C. $\{x | x \geq -2\}$ D. $\{x | x < 1\}$
5. (2023 全国甲卷理, 1) 设全集 $U = \mathbf{Z}$, 集合 $M = \{x | x = 3k + 1, k \in \mathbf{Z}\}, N = \{x | x = 3k + 2, k \in \mathbf{Z}\}$, $\complement_U(M \cup N) =$ ()
- A. $\{x | x = 3k, k \in \mathbf{Z}\}$
B. $\{x | x = 3k - 1, k \in \mathbf{Z}\}$
C. $\{x | x = 3k - 2, k \in \mathbf{Z}\}$
D. $\emptyset$

第二章 一元二次函数、方程和不等式

课时提优7 等式性质与不等式性质

答案见 P9

题型索引

题型1 利用不等式的性质判断不等关系(题7,9)

题型2 作差法比较大小(题1,4,6,11,13)

题型3 作商法比较大小(题14)

题型4 利用不等式的性质求取值范围(题5,12)

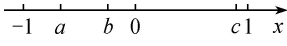
题型5 不等式模型的实际问题(题3,10,15)

基础强化

- 已知 $a+b>0, b<0$, 那么 $a, b, -a, -b$ 的大小关系是 ()
A. $a>b>-b>-a$
B. $a>-b>-a>b$
C. $a>-b>b>-a$
D. $a>b>-a>-b$
- 设 $a>b>1, y_1=\frac{b+1}{a+1}, y_2=\frac{b}{a}, y_3=\frac{b-1}{a-1}$, 则 y_1, y_2, y_3 的大小关系是 ()
A. $y_1<y_2<y_3$ B. $y_2<y_1<y_3$
C. $y_3<y_2<y_1$ D. $y_2<y_3<y_1$
- (2025 湖南湘潭期中)两次购买同一种物品, 不考虑物品价格的升降, 有以下两种方案: 甲方案是每次购买这种物品的数量一定; 乙方案是每次购买这种物品所花的钱数一定. 对于以上两种购物方案的优惠程度的说法正确的是 ()
A. 甲方案更优惠 B. 乙方案更优惠
C. 甲、乙一样优惠 D. 无法确定
- (多选题, 2025 安徽阶段练习)下列选项正确的是 ()
A. 若 $a>b>0$, 则 $\frac{1}{ab^2}>\frac{1}{a^2b}$
B. 若 $a>b>0$, 则 $a+\frac{1}{b}>b+\frac{1}{a}$
C. 若 $a>b, c>d$, 则 $ac>bd$
D. 若 $a>b, c>d$, 则 $ac+bd>ad+bc$
- (1)(2025 浙江嘉兴阶段练习)已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $-5<a<2, 1<b<4$, 则 $a-b$ 的取值范围是

- _____.
- (2)(2025 江苏苏州阶段练习)已知实数 a, b 满足 $1<a<2, 2<b<6$, 则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是_____.
- (3)(2025 全国专题练习)设 x, y 为实数, 满足 $2 \leq xy^2 \leq 3, 3 \leq \frac{x^2}{y} \leq 4$, 则 $\frac{x^5}{y^5}$ 的最大值是_____.
6. (2025 黑龙江哈尔滨阶段练习)若 $x<y<0$, 设 $M=(x^2+y^2)(x-y), N=x^2y-xy^2$, 则 M, N 的大小关系是_____.

综合提升

- (2024 四川乐山期末)已知 $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, 下列命题为真命题的是 ()
A. 若 $a>b$, 则 $ac>bc$
B. 若 $a>b, c>d$, 则 $ac>bd$
C. 若 $\frac{1}{|a|}<\frac{1}{|b|}$, 则 $|a|>|b|$
D. 若 $a>b$, 则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$
- (2024 北京海淀人大附中校考期中)如图, 数轴上给出了表示实数 a, b, c 的三个点, 下列判断正确的是 ()

A. $ab>c$ B. $abc>\frac{1}{2}$
C. $c+2b<a$ D. $a+c>2b$
- (多选题, 2025 海南海口阶段练习)下列命题为假命题的是 ()
A. 若 $a>b$, 则 $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$

B. 若 $a^2x > a^2y$, 则 $x > y$

C. 若 $a > b, c > d$, 则 $a - d > b - c$

D. 若 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0$, 则 $ab > b^2$

10. (多选题, 2024 安徽芜湖期中) 甲、乙两名同学同时从教室步行到学校食堂就餐(路程相等), 甲前一半时间步行速度是 v_1 , 后一半时间步行速度是 v_2 ; 乙前一半路程步行速度是 v_1 , 后一半路程步行速度是 v_2 . 则 ()

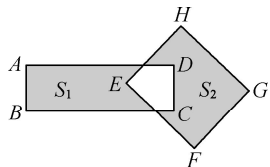
A. 若 $v_1 = v_2$, 则两人同时到食堂

B. 若 $v_1 > v_2$, 则甲先到食堂

C. 若 $v_1 < v_2$, 则甲先到食堂

D. 若 $v_1 < v_2$, 则乙先到食堂

11. (2024 安徽合肥期中) 矩形 $ABCD$ 的一组邻边长为 $a, b - c$, 矩形 $EFGH$ 的一组邻边长为 $b, a - c$ ($a > b > c > 0$). 按如图所示的方式重叠后两阴影部分的面积分别为 S_1, S_2 , 则 S_1 _____ S_2 (填“>”“<”“=”).



12. (2025 四川德阳阶段练习) 已知实数 x, y 满足 $-4 \leq x - y \leq -1$, $-1 \leq 4x - y \leq 5$, 则 $11x - 5y$ 的取值范围是 _____.

13. (1) 已知 $a \geq b > 0$, 求证: $3a^3 + 2b^3 \geq 3a^2b + 2ab^2$;

(2) 已知 $a \in \mathbf{R}$, 且 $a \neq 1$, 比较 $a + 2$ 与 $\frac{3}{1-a}$ 的大小.

14. (1) 已知 $a > b > c > d > 0, ad = bc$, 求证: $a + d > b + c$;

(2) 当 $a > 0, b > 0$ 且 $a \neq b$ 时, 比较 $a^a b^b$ 与 $a^b b^a$ 的大小.

应用·创新

15. (2025 四川成都阶段练习) 如果向一杯糖水里加糖, 糖水就变甜了, 这当中蕴含着著名的糖水不等式: $\frac{y}{x} < \frac{y+m}{x+m}$ ($x > y > 0, m > 0$).

(1) 证明糖水不等式;

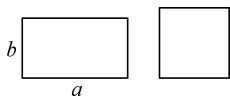
(2) 已知 a, b, c 是三角形的三边, 求证: $1 <$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

培优突破练 1 利用基本不等式求最值问题

答案见 P18

1. (2023 福建三明期中) 已知长为 a , 宽为 b 的长方形, 如果该长方形的面积与边长为 k_1 的正方形面积相等; 该长方形周长与边长为 k_2 的正方形周长相等; 该长方形的对角线与边长为 k_3 的正方形对角线相等; 该长方形的面积和周长的比与边长为 k_4 的正方形面积和周长的比相等, 那么 k_1, k_2, k_3, k_4 的大小关系为 ()



- A. $k_1 \leq k_4 \leq k_2 \leq k_3$ B. $k_3 \leq k_1 \leq k_2 \leq k_4$
C. $k_4 \leq k_1 \leq k_3 \leq k_2$ D. $k_4 \leq k_1 \leq k_2 \leq k_3$
2. (2024 广东深圳月考) 下列推导过程正确的为 ()

A. $\forall a \in \mathbf{R}, \frac{4}{a} + a \geq 4$, 当且仅当 $\frac{4}{a} = a$ 时等号成立

B. 若 $ab > 0$, 则 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$, 当且仅当 $\frac{b}{a} = \frac{a}{b}$ 时等号成立

C. 若 $a < 0$, 则 $a + \frac{1}{a} \geq -2$, 当且仅当 $a = \frac{1}{a}$ 时等号成立

D. $\forall x \in \mathbf{R}, \sqrt{x^2+4} + \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \geq 2$, 当且仅当 $\sqrt{x^2+4} = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ 时等号成立

3. (2024 湖北黄冈一模) 若 $m > 0, n > 0$, 且 $3m + 2n - 1 = 0$, 则 $\frac{3}{m} + \frac{2}{n}$ 的最小值为 ()
A. 20 B. 12 C. 16 D. 25

4. 已知实数 x 满足 $0 < x < \frac{1}{3}$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{12}{1-3x}$ 的最小值为 ()
A. 9 B. 18 C. 27 D. 36

5. (2025 安徽期中) 已知 $a > 0, b > 0, ab + a + 2b = 3$, 则 $a + b$ ()

A. 有最大值 3

B. 有最小值 $\frac{3}{2}$

C. 有最大值 $2\sqrt{5} - 3$

D. 有最小值 $2\sqrt{5} - 3$

6. (2025 天津期中) 若实数 $x > 0, y > 0$, 且 $x + 3y = 1$, 则 $\frac{y}{x+y} + \frac{1}{4y}$ 的最小值为 ()
A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

7. (多选题, 2024 江西抚州第一中学校考) 已知正数 m, n 满足 $2m + 2n + 5 = mn$, 则 ()

A. $\forall m, n \in (0, +\infty), mn \geq 25$

B. $\forall m, n \in (0, +\infty), m + n \geq 10$

C. $\exists m, n \in (0, +\infty), 4m + n = 20$

D. $\exists m, n \in (0, +\infty), 4m + n < 25$

8. (多选题, 2025 江苏常州期中) 下列说法正确的是 ()

A. 若 $0 < x < \frac{1}{2}$, 则 $x(1-2x)$ 的最大值为 $\frac{1}{8}$

B. 函数 $y = \frac{x^2+3x+3}{x+1} (x > -1)$ 的最小值为 2

C. 已知 $x > 0, y > 0$, 且 $x + 2y = 2$, 则 $3^x + 9^y$ 的最小值为 6

D. 若正数 x, y 满足 $x^2 + xy - 2 = 0$, 则 $3x + y$ 的最小值是 4

9. (多选题, 2025 辽宁丹东期中) 已知实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 + xy = 1$, 则 ()

A. $x + y$ 有最小值 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

B. xy 有最大值 $\frac{2}{3}$

C. $x^2 + y^2$ 有最小值 $\frac{2}{3}$

D. $x^2 + y^2$ 有最大值 1

10. 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, $4x^2y^2 + y^4 = 1$, 则 $x^2 + y^2$ 的最小值为_____.

11. (2024 江苏宿迁期中) 设 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, 利用直角三角形的边角关系, 结合不等式知识可求得 $\sin \alpha + \cos \alpha$ 的最大值为_____.

12. (2024 重庆期中) 已知 $a > \frac{1}{2}$, $b > 1$, 且 $2ab - 2a - b = 1$, 则 $\frac{1}{2a-1} + \frac{2}{b-1}$ 的最小值是_____.

13. 已知 x, y 都是正数, 且 $x + y = 1$.

(1) 求 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y}$ 的最小值;

(2) 求 $\frac{1}{x} + \frac{x}{y}$ 的最小值.

14. (2025 山东枣庄期中) (1) 已知 $x < \frac{5}{4}$, 求函数

$y = 4x - 1 + \frac{1}{4x-5}$ 的最大值, 并求出此时 x 的值;

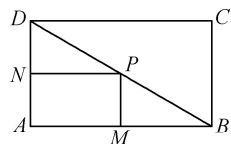
(2) 已知 $x > 0, y > 0$, 且 $\frac{1}{x} + \frac{9}{y} = 1$, 求 $x + y$ 的最小值, 并求出此时 x, y 的值;

(3) 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $a^2 + \frac{b^2}{2} = 1$, 求 $a\sqrt{1+b^2}$ 的最大值, 并求出此时 a, b 的值.

15. (2024 江苏无锡期中) 如图, P 是矩形 $ABCD$ 对角线 BD 上一点, 过点 P 作 $PM \perp AB$, $PN \perp AD$, 分别交 AB, AD 于 M, N 两点.

(1) 当 $AB = 3, AD = 2$ 时, 设 $PM = x, PN = y$, 找出 x, y 的关系式, 求四边形 $AMPN$ 面积的最大值, 并指出此时点 P 的位置.

(2) 当矩形 $ABCD$ 的面积为 6 时, 四边形 $AMPN$ 的面积是否有最大值? 若有, 求出最大值; 若没有, 请说明理由.



章末提优

答案见 P22

1. (2024 浙江杭州期中)若
- $a > b$
- , 则 ()

A. $a^2 > b^2$ B. $\frac{a}{b} < \frac{a+2\ 023}{b+2\ 024}$

C. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ D. $a|a| > b|b|$

2. (2025 福建莆田阶段练习)不等式
- $(x-3)(5-x) < 0$
- 的解集为 ()

A. $\{x | 3 < x < 5\}$

B. $\{x | x < 3 \text{ 或 } x > 5\}$

C. $\{x | -5 < x < -3\}$

D. $\{x | x < -5 \text{ 或 } x > -3\}$

3. (2025 山西期中)若命题“
- $\forall x \in [1, 4], x^2 - 6x - a \leq 0$
- ”为假命题, 则
- a
- 的取值范围是 ()

A. $[-5, +\infty)$

B. $(-5, +\infty)$

C. $(-\infty, -5)$

D. $(-\infty, -5]$

4. 要建造一个容积为
- 300 m^3
- , 深为
- 3 m
- 的长方体无盖蓄水池, 池壁的造价为
- 100 元/m^2
- , 池底的造价为
- 150 元/m^2
- , 则该蓄水池的最低造价为 ()

A. 2.5 万元

B. 2.6 万元

C. 2.7 万元

D. 2.8 万元

5. (2025 浙江温州期中)若
- $a < 0$
- , 则关于
- x
- 的不等式
- $a(x+2)\left(x+\frac{1}{a}\right) < 0$
- 的解集为 ()

A. $\left\{x \mid \frac{1}{a} < x < 2\right\}$

B. $\left\{x \mid -2 < x < \frac{1}{a}\right\}$

C. $\left\{x \mid x > -\frac{1}{a} \text{ 或 } x < -2\right\}$

D. $\left\{x \mid x > -2 \text{ 或 } x < -\frac{1}{a}\right\}$

6. (2024 广东广州第五中学期中)基本不等式是均值不等式“链”
- $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq$

$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} (a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0)$ 中的一环

 $(n=2 \text{ 时})$, 而利用该不等式链我们可以解决某些函数的最值问题, 例如: 求 $y = \frac{4}{x^2} + x (x >$ $0)$ 的最小值我们可以这样处理: $y = \frac{4}{x^2} + x =$

$\frac{4}{x^2} + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{4}{x^2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}} = 3$, 即 $y_{\min} = 3$,

当且仅当 $\frac{4}{x^2} = \frac{x}{2}$ 时等号成立. 那么函数

$f(x) = x^2 + \frac{16}{x} + 1 (x \in [1, 3])$ 的最小值为

()

A. 18

B. 13

C. $\frac{46}{3}$

D. $3\sqrt[3]{16} + 1$

7. (多选题, 2025 江苏阶段练习)下列说法正确的是 ()

A. 不等式 $\frac{1+2x}{3x+1} > 1$ 的解集为 $\left\{x \mid -\frac{1}{3} < x < 0\right\}$

B. 若 $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$, 则 $a+b$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$

C. 若 $0 \leq x+y \leq 2, -1 \leq x-y \leq 1$, 则 $-\frac{3}{2} \leq$

$2x+y \leq \frac{9}{2}$

D. 已知正数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 则 $\frac{1}{a-1} +$

$\frac{1}{b-1}$ 的最小值为 2

8. (多选题, 2025 山西朔州期中)已知不等式

$2kx^2 + kx - \frac{3}{8} < 0$, 下列说法正确的是 ()

A. 若 $k=1$, 则不等式的解集为 $\left\{x \mid -\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}\right\}$

B. 若不等式对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则整数 k 的取值集合为 $\{-2, -1, 0\}$

C. 若不等式对 $0 \leq k \leq 1$ 恒成立, 则实数 x 的取值范围是 $\left\{x \mid -\frac{3}{4} < x < \frac{1}{4}\right\}$

D. 若恰有一个整数 x 使得不等式成立, 则实

数 k 的取值范围是 $\left\{k \mid k \geq \frac{3}{8}\right\}$

9. (多选题, 2024 河北保定月考) 以数学家约翰·卡尔·弗里德里希·高斯的名字命名的“高斯函数”为 $y=[x]$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 例如 $[2.6]=2, [-1.5]=-2$, 则 ()

A. $\forall x \in \mathbf{R}, [x+1]=[x]+1$

B. $x=\sqrt{15}$ 是方程 $x^2=4[x]+3$ 的一个解

C. 当 $|x| \geq 1$ 时, $[|x|]+\frac{3}{[|x|]}$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$

D. 不等式 $[x]^2-[x]<6$ 的解集为 $\{x \mid -1 \leq x < 3\}$

10. (2024 广东佛山月考) 已知 $m, n \in \mathbf{R}$, 设 $a=(m^2+1)(n^2+4), b=(mn+2)^2$, 则 a _____ b (填“ $<$ ”“ $\leq$ ”“ $\geq$ ”“ $>$ ”其中一种).

11. (2025 江苏常州期中) 当 $x > 1$ 时, 不等式 $\frac{m-1}{m} \leq x + \frac{4}{x-1}$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是 _____.

12. (2025 云南期中) 已知命题“ $\exists x \in [-2, 1], x^2-x-a > 0$ ”为假命题, 则实数 a 的取值范围是 _____.

13. (2025 山东淄博阶段练习) 设命题 $p: \forall x < 0$, 不等式 $x^2+mx+2 \geq 0$ 恒成立; 命题 $q: \exists x \in [0, 1]$, 使不等式 $2x-2 \geq m^2-3m$ 成立.

(1) 若 p 为真命题, 求实数 m 的取值范围;

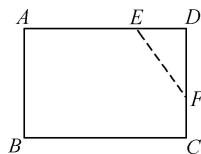
(2) 若命题 p, q 有且只有一个是真命题, 求实数 m 的取值范围.

14. (2024 北京清华附中朝阳学校期中) 如图, 长为 6 m, 宽为 4 m 的长方形 $(ABCD)$ 草坪, 截去一个三角形 (DEF) 区域, 得到一个五边形

$(ABCFE)$ 区域, 设 $DE=a$ m, $DF=b$ m.

(1) 用 a, b 表示 $\triangle DEF$ 的周长 L , 并写出 a, b 的取值范围;

(2) 当 $\triangle DEF$ 的周长 $L=4+2\sqrt{2}$ m 时, 求五边形 $ABCFE$ 的面积 S 的最小值, 并求此时 a, b 的值.



15. (2025 河北张家口阶段练习) 已知函数 $f(x)=2x^2-2ax+2-a^2, g(x)=x^2+3x-a^2-4(a \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a=1$ 时, 解不等式 $f(x) > g(x)$;

(2) 若任意 $x > 0$, 都有 $f(x) > g(x)$ 成立, 求实数 a 的取值范围;

(3) 若 $\forall x_1 \in [0, 1], \exists x_2 \in [0, 1]$, 使得不等式 $f(x_1) > g(x_2)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

感悟真题

└答案见 P23

1. (多选题, 2022 新课标 II 卷, 12) 对任意 x, y , $x^2 + y^2 - xy = 1$, 则 ()
- A. $x + y \leq 1$
 B. $x + y \geq -2$
 C. $x^2 + y^2 \leq 2$
 D. $x^2 + y^2 \geq 1$
2. (2024 上海卷, 3) 不等式 $x^2 - 2x - 3 < 0$ 的解集为_____.
3. (2024 全国甲卷理, 23) 已知实数 a, b 满足 $a + b \geq 3$. 求证:
- (1) $2a^2 + 2b^2 > a + b$;
 (2) $|a - 2b^2| + |b - 2a^2| \geq 6$.

阶段滚动(第一章)

└答案见 P24

1. (2024 浙江温州月考) 已知 $a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}$, 若集合 $\left\{a, \frac{b}{a}, 1\right\} = \{a^2, a - b, 0\}$, 则 $a^{2019} + b^{2020}$ 的值为 ()
- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2
2. (2024 四川成都月考) 设集合 $A = \{-1, 0, 1\}$, 集合 $B = \{x | x > t\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 则实数 t 的取值范围是 ()
- A. $\{t | t \leq 1\}$ B. $\{t | t \geq 1\}$
 C. $\{t | t < 1\}$ D. $\{t | t > 1\}$
3. (2025 上海阶段练习) 已知 $\alpha: x < -m$ 或 $x > 3m - 1$, $\beta: x \leq 2$ 或 $x > 4$, 若 α 是 β 的必要不充分条件, 则实数 m 的取值范围是_____.
4. (2024 河北衡水中学期中) 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - ax + a - 1 = 0\}$, $C = \{x | x^2 - mx + 2 = 0\}$.
- (1) 命题 $p: \forall x \in B$, 都有 $x \in A$, 若命题 p 为真命题, 求实数 a 的值;
 (2) 若 $A \cap C = C$, 求实数 m 的取值范围.
5. (2025 福建福州期中) 在① $A \cup B = B$, ② “ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充分条件, ③ $A \cap B = \emptyset$, 这三个条件中任选一个, 补充到本题第(2)问的横线处, 并求解.
- 已知集合 $A = \{x | a - 2 \leq x \leq a + 2\}$, $B = \left\{x \mid -1 \leq x \leq \frac{7}{2}\right\}$
- (1) 当 $a = 2$ 时, 求 $A \cap B$;
 (2) 若_____, 求实数 a 的取值范围.