第一章　集合与常用逻辑用语

课时提优 1　集合的概念

1. C　对于 A,成绩较好的同学全体不是一个确定的概念,不能构成集合,故 A 不符合;对于 B,与 10 接近的实数全体不是一个确定的概念,不能构成集合,故 B 不符合;对于 C,绝对值小于 5 的整数全体是个明确的概念,并且给定一个元素能确定是否属于这个整体,故能构成集合,故 C 符合;对于 D,本班兴趣广泛的学生不是一个确定的概念,不能构成集合,故 D 不符合.

2. B　由$\begin{cases}2y-x=7,\\x+y=2\end{cases}$得$\begin{cases}x=-1,\\y=3.\end{cases}$所以集合 A 用列举法表示为$\{(-1,3)\}$.

3. B　对于 A,1 不能表示一个集合,故 A 错误;对于 B,因为集合中的元素具有无序性,所以 B 正确;对于 C,因为集合中的元素具有互异性,而$\{1,1,2\}$中有相同的元素,所以 C 错误;对于 D,因为集合$\{x|4<x<5\}$中有无数个元素,所以无法用列举法表示,故 D 错误.

4. BC　因为 $A=B$,所以$\begin{cases}b+2=0,\\b=-a\end{cases}$或$\begin{cases}b=0,\\b+2=-a,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\b=-2\end{cases}$或$\begin{cases}a=-2,\\b=0,\end{cases}$则 $a+b=0$ 或 $a+b=-2$.

5. 2　$\mathbf{N}^*$ 表示正整数集,故①错误;$\mathbf{Q}$ 表示有理数集,故②正确,③错误;$\mathbf{R}$ 表示实数集,$3+\sqrt{7}$ 为实数,故④错误;所有正方形都是平行四边形,所以某个正方形 $ABCD$ 可以作为集合 E 的元素,故⑤正确.

6. 1　由题知 $a+10=5$ 或 $a^2+4a=5$,解得 $a=-5$ 或 $a=1$. 当 $a=-5$ 时,$a+10=5$,$a^2+4a=5$,不符合集合元素的互异性;当 $a=1$ 时,集合 $A=\{12,5,11\}$,符合题意.

7. C　因为 $A=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{6}{a-1}\in\mathbf{Z},a\in\mathbf{N}\right\}$,所以 $a-1\geqslant-1$,且 $a-1\in\mathbf{Z}$,则 $A=\{-6,6,3,2,1\}$.

8. D　**分析**:两个集合相等,就是两个集合中的元素完全相同. 同时还要注意集合中元素的互异性.

由题得 $a+b=1-b$,$\dfrac{a}{b}=1$,或 $a+b=1$,$\dfrac{a}{b}=1-b$. 先考虑 $a+b=1-b$,$\dfrac{a}{b}=1$,解得 $a=b=\dfrac{1}{3}$,此时 $A=\left\{0,\dfrac{2}{3},1\right\}$,$B=\left\{0,\dfrac{2}{3},1\right\}$,满足题意,所以 $a+2b=1$. 再考虑 $a+b=1$,$\dfrac{a}{b}=1-b$,解得 $a=0$,$b=1$,此时 $A=\{0,1,0\}$,$B=\{0,0,1\}$,不满足题意. 综上,$a+2b=1$.

9. AC　集合 A 中的元素 y 是实数,不是点,故选项 B,D 错误;集合 B 中的元素(x,y)是点而不是实数,$2\in A$,且 $2\notin B$ 正确,$2\in A$,且$(3,10)\in B$ 正确,故选项 A,C 正确.

10. BC　由 $A=\{2\}$,得方程 $x^2+px+q=x$ 有两个相等的实根,且 $x=2$. 从而有$\begin{cases}4+2p+q=2,\\(p-1)^2-4q=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}p=-3,\\q=4.\end{cases}$从而 $B=\{x|(x-1)^2-3(x-1)+4=x+1\}$. 由$(x-1)^2-3(x-1)+4=x+1$,解得 $x=3\pm\sqrt{2}$.

易错警示　由 $A=\{2\}$,若只考虑到方程有一个根是 2,则无法解决问题,应得到方程有两个相等的实数根.

11. 30　z 的取值分别为$(-1+2)^2=1$,$(-1+3)^2=4$,$(1+2)^2=9$,$(1+3)^2=16$,故 $A\odot B=\{1,4,9,16\}$,所以集合 $A\odot B$ 中所有元素之和为 $1+4+9+16=30$.

12. $\{2,0\}$　因为$\sqrt{-b}$有意义,所以 $b<0$. 当 $a>0$ 时,$\dfrac{a}{|a|}+\dfrac{b}{|b|}+\dfrac{a^2}{|a^2|}+\dfrac{\sqrt{-b}}{|\sqrt{-b}|}=2$;当 $a<0$ 时,$\dfrac{a}{|a|}+\dfrac{b}{|b|}+\dfrac{a^2}{|a^2|}+\dfrac{\sqrt{-b}}{|\sqrt{-b}|}=0$. 所以式子$\dfrac{a}{|a|}+\dfrac{b}{|b|}+\dfrac{a^2}{|a^2|}+\dfrac{\sqrt{-b}}{|\sqrt{-b}|}$的所有可能取值组成的集合为$\{2,0\}$.

13. **解**:(1) 若 A 中只有一个元素,则当 $a=0$ 时,原方程变为 $2x+1=0$,此时 $x=-\dfrac{1}{2}$符合题意;当 $a\neq0$ 时,方程 $ax^2+2x+1=0$ 为一元二次方程,$\Delta=4-4a=0$,即 $a=1$. 故当 $a=0$ 或 $a=1$ 时,集合 A 只有一个元素.

(2) A 中至少有一个元素,即 A 中有一个或两个元素. 由 $\Delta>0$,得 $a<1$,结合(1)知当 $a\leqslant1$ 时,A 中至少有一个元素.

(3) A 中至多有一个元素,即 A 中有一个或没有元素. 当 $\Delta=4-4a<0$,即 $a>1$ 时,原方程无实数解. 结合(1)知当 $a=0$ 或 $a\geqslant1$ 时,A 中至多有一个元素.

易错警示　集合 A 中只有一个元素,要注意方程是一元一次方程的情形,即 $a=0$ 的情况.

14. **解**:(1) 当 $a=b=0$ 时,$x=0$;当 $a=1$,$b=0$ 或 $a=0$,$b=1$ 时,$x=1$;当 $a=b=1$ 时,$x=2$;当 $a=b=2$ 时,$x=4$;当 $a=1$,$b=2$ 或 $a=2$,$b=1$ 时,$x=5$;当 $a=b=2$ 时,$x=8$. 所以最小的六个元素组成的子集 $B=\{0,1,2,4,5,8\}$.

(2) 对任意的 $x_1,x_2\in A$,x_1+x_2 可能是集合 A 中的元素,也可能不是集合 A 中的元素,x_1x_2 一定是集合 A 中的元素. 证明如下:因为 $1=1^2+0^2$,$2=1^2+1^2$,所以 $1,2\in A$,但 $1+1=2\in A$,$1+2=3\notin A$,故对任意的 $x_1,x_2\in A$,x_1+x_2 可能是集合 A 中的元素,也可能不是集合 A 中的元素. 设任意 $x_1,x_2\in A$,则存在 $a,b,c,d\in\mathbf{N}$,使 $x_1=a^2+b^2$,$x_2=c^2+d^2$,则 $x_1x_2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$,且 $ac+bd\in\mathbf{N}$,$bc-ad$ 与 $ad-bc$ 中至少有一个是自然数,所以 x_1x_2 一定是集合 A 中的元素.

15. (1)**解**:对于集合$\{-1,-\sqrt{2},\sqrt{2}-1,2\sqrt{2}+2\}$,因为$-1+(-\sqrt{2})+\sqrt{2}-1+2\sqrt{2}+2=2\sqrt{2}$,$-1\times(-\sqrt{2})\times(\sqrt{2}-1)\times(2\sqrt{2}+2)=2\sqrt{2}$,所以由"完全集"的定义知,集合$\{-1,-\sqrt{2},\sqrt{2}-1,2\sqrt{2}+2\}$为"完全集".

(2)**证明**:设 $a+b=ab=t>0$,由一元二次方程根与系数的关系知,a,b 相当于一元二次方程 $x^2-tx+t=0$ 的两个实数根,由 $\Delta=t^2-4t>0$,解得 $t>4$ 或 $t<0$(舍),所以 $ab>4$. 又因为 a,b 都是正数,若 a,b 都不大于 2,则 $ab\leqslant 4$,矛盾,所以 a,b 中至少有一个大于 2.

课时提优 2　集合间的基本关系

1. A　$\{0\}$不是空集,故①错误;因为$\left\{x\,\middle|\,\frac{6}{x}\in\mathbf{N},x\in\mathbf{Q}\right\}$,若 x 是分子为 1,分母为正整数的分数,则 $x\in\mathbf{Q}$,$\frac{6}{x}\in\mathbf{N}$,所以$\left\{x\,\middle|\,\frac{6}{x}\in\mathbf{N},x\in\mathbf{Q}\right\}$为无限集,故②错误;空集的子集是它本身,故③错误;因为$\{x\mid x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$表示由奇数组成的集合,$\{x\mid x=2k-1,k\in\mathbf{Z}\}$也表示由奇数组成的集合,所以$\{x\mid x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}=\{x\mid x=2k-1,k\in\mathbf{Z}\}$,故④正确.

2. D　$P=\{y\mid y=x^2+1\}=\{y\mid y\geqslant 1\}$,$M=\{x\mid y=x^2+1\}=\mathbf{R}$,所以 $P\subseteq M$.

3. B　$N=\{x\mid x^2-2x=0\}=\{0,2\}$. 又 $M=\{0,1,2\}$,所以 $N\subsetneqq M$,选项 B 符合.

4. ABD　当 $m=0$ 时,$A=\varnothing$,符合题意;当 $m\neq 0$ 时,$A=\left\{-\frac{1}{m}\right\}$,由题意可知$-\frac{1}{m}=1$ 或$-\frac{1}{m}=-1$,解得 $m=1$ 或 $m=-1$. 综上,m 的值可以是$-1,0,1$.

5. $\{a\mid -5\leqslant a\leqslant -4\}$　由题意知 $B=\{y\mid y=-2x+a,x\in A\}=\{y\mid a+2\leqslant y\leqslant a+4\}$. 又 $A\subseteq B$,则$\begin{cases}a+2\leqslant -2,\\a+4\geqslant -1,\end{cases}$解得$-5\leqslant a\leqslant -4$. 故实数 a 的取值范围是$\{a\mid -5\leqslant a\leqslant -4\}$.

6. $B\subsetneqq A$　因为 $B=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{y}{x}=1\right\}=\{(x,y)\mid y=x$ 且 $x\neq 0\}$,而 $A=\{(x,y)\mid y=x\}$,所以 $B\subsetneqq A$.

7. A　当 $a=0$ 时,$0\leqslant 4$ 恒成立,此时 $A=\mathbf{R}$,满足 $B\subseteq A$;当 $a>0$ 时,$A=\left\{x\,\middle|\,x\leqslant\frac{4}{a}\right\}$,因为 $B\subseteq A$,$B=\{4,\sqrt{2}\}$,所以 $4\in A$ 且$\sqrt{2}\in A$,所以$\begin{cases}\frac{4}{a}\geqslant 4,\\a>0,\end{cases}$解得 $0<a\leqslant 1$;当 $a<0$ 时,由 $A=\left\{x\,\middle|\,x\geqslant\frac{4}{a}\right\}$,因为 $B\subseteq A$,$B=\{4,\sqrt{2}\}$,所以 $4\in A$ 且$\sqrt{2}\in A$,所以$\begin{cases}\frac{4}{a}\leqslant\sqrt{2},\\a<0,\end{cases}$解得 $a<0$. 综上,实数 a 的取值范围是$\{a\mid a\leqslant 1\}$.

8. A　①当 $B=\varnothing$时,$1-m>1+m$,解得 $m<0$;②当 $B\neq\varnothing$时,$\begin{cases}1-m\leqslant 1+m,\\1-m\geqslant -1,\\1+m\leqslant 3,\end{cases}$解得 $0\leqslant m\leqslant 2$. 综上,实数 m 的取值范围是$\{m\mid m\leqslant 2\}$.

9. AC　因为 $M=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{2m+1}{2},m\in\mathbf{Z}\right\}$,$P=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{p}{2},p\in\mathbf{Z}\right\}$,$N=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{4n-3}{2}=\frac{4(n-1)+1}{2},n\in\mathbf{Z}\right\}=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{4k+1}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{2\times 2k+1}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$,所以 $N\subsetneqq M\subsetneqq P$,结合选项,可得 A,C 正确,B,D 错误.

10. BD　$\varnothing$是个集合,所以$\varnothing\subseteq P$,A 错误;$\{x\mid x>1\}$是$\{y\mid y\geqslant 1\}$的一个子集,所以$\{x\mid x>1\}\subseteq\{y\mid y\geqslant 1\}$,B 正确;$M$ 是点集,N 是数集,所以集合 M 与集合 N 没有关系,C 错误;$\{2,4\}$的非空子集有$\{2\}$,$\{4\}$与$\{2,4\}$,共 3 个,D 正确.

11. ②③　$\{0\}\subseteq\{0,1,2\}$,故①错误;$\{0,1,2\}\subseteq\{2,1,0\}$,故②正确;$\varnothing\subseteq\{0,1,2\}$,故③正确;$\varnothing\subseteq\{0\}$,故④错误;$\{0,1\}$是数集,$\{(0,1)\}$是点集,故⑤错误;$0\in\{0\}$,故⑥错误.

12. 8　$A=\{x\mid x^2-3x+2=0,x\in\mathbf{R}\}=\{1,2\}$,$B=\{x\mid 0<x<6,x\in\mathbf{N}\}=\{1,2,3,4,5\}$. 由 $A\subseteq C\subseteq B$,知集合 C 中必含有元素 1,2,而元素 3,4,5 可以没有,可以有 1 个,或 2 个,或 3 个. 因此满足条件的集合 C 有$\{1,2\}$,$\{1,2,3\}$,$\{1,2,4\}$,$\{1,2,5\}$,$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,4,5\}$,$\{1,2,3,5\}$,$\{1,2,3,4,5\}$,共 8 个.

13. 解:(1)因为 $A\subseteq\varnothing$,所以 $A=\varnothing$. 当 $a=0$ 时,则 $A=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$,与题意矛盾;当 $a\neq 0$ 时,则 $\Delta=36-12a<0$,解得 $a>3$. 综上所述,实数 a 的取值集合为$\{a\mid a>3\}$.

(2)因为集合 A 的子集有两个,所以集合 A 中只有一个元素. 当 $a=0$ 时,则 $A=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$,符合题意;当 $a\neq 0$ 时,则 $\Delta=36-12a=0$,解得 $a=3$. 综上所述,实数 a 的取值集合为$\{0,3\}$.

(3)因为 $1\in A$,所以 $a+6+3=0$,解得 $a=-9$,所以 $A=\{x\mid -9x^2+6x+3=0\}=\left\{-\frac{1}{3},1\right\}$. 当 $b=0$ 时,$B=\varnothing\subseteq A$,符合题意;当 $b\neq 0$ 时,$B=\left\{-\frac{1}{b}\right\}$,因为 $B\subseteq A$,所以$-\frac{1}{b}=-\frac{1}{3}$或$-\frac{1}{b}=1$,解得 $b=3$ 或 $b=-1$. 综上所述,实数 b 的取值集合为$\{0,-1,3\}$.

14. 解:(1) $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$,$B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$. 因为 $B\subseteq A$,所以当 $B=\varnothing$时,$m+1>2m-1$,解得 $m<2$,满足 $B\subseteq A$;当 $B\neq\varnothing$时,$\begin{cases}m+1\leqslant 2m-1,\\m+1\geqslant -2,\\2m-1\leqslant 5,\end{cases}$解得 $2\leqslant m\leqslant 3$. 综上所述,实数 m 的取值范围是$\{m\mid m\leqslant 3\}$.

(2) 若 $A\subseteq B$,则$\begin{cases}2m-1>m-6,\\m-6\leqslant -2,\\2m-1\geqslant 5,\end{cases}$解得$\begin{cases}m>-5,\\m\leqslant 4,\\m\geqslant 3,\end{cases}$即 $3\leqslant m\leqslant 4$. 所以实数 m 的取值范围是$\{m\mid 3\leqslant m\leqslant 4\}$.

15. 1 365　如果满足条件的子集中的最小元素和最大元素分别是 1 和 12,那么其个数相当于在集合$\{1,12\}$中,将$\{2,3,\cdots,11\}$的元素部分或全部添加的方法数,而$\{2,3,\cdots,11\}$子集的个数为 2^{10},同理,当满足条件的子集中的最小元素和最大元素分别是 2 和 11,3 和 10,4 和 9,5 和 8,6 和 7 时,子集的个数分别为 $2^8,2^6,2^4,2^2,2^0$,故所求集合的个数为 $2^{10}+2^8+2^6+2^4+2^2+2^0=1\,365$.

课时提优 3　集合的基本运算

1. C　由题设，得 $\complement_{\mathbf{R}}B=\{x\mid x<1\}$，所以 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{-3,-2,-1,0\}$.

2. C　由题意得 $M\cup N=\{x\mid -3<x<4\}$.

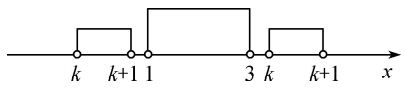
3. D　由题意易得 $B=\{1,4,9,16,25,81\}$，所以 $A\cap B=\{1,4,9\}$，所以 $\complement_A(A\cap B)=\{2,3,5\}$.

4. AC　由图可知，S 是 T 的子集，故 A 正确；T 不是 $\complement_U S$ 的子集，故 B 错误；F 是 $\complement_U S$ 的子集，故 C 正确；T 不是 $\complement_U F$ 的子集，故 D 错误.

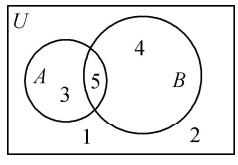
5. $\{(2,0),(-3,5)\}$　由 $\begin{cases}x+y=2,\\ y=x^2-4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\ y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-3,\\ y=5,\end{cases}$ 则 $M\cap N=\{(2,0),(-3,5)\}$.

6. $\{p\mid p>-2\}$　当 $A=\varnothing$ 时，$\Delta=p^2-4<0$，所以 $-2<p<2$. 当 $A\neq\varnothing$ 时，此时 $p\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$. 若方程有两个相同实数根，则 $p=\pm2$，显然当 $p=-2$ 时，方程的根为 $x=1$，此时不满足 $A\cap M=\varnothing$；当 $p=2$ 时，方程的根为 $x=-1$，此时满足 $A\cap M=\varnothing$. 若方程有两个不同实数根 x_1,x_2，此时 $x_1x_2>0$，所以 x_1,x_2 同号，且 $A\cap M=\varnothing$，所以 $x_1+x_2=-p\leqslant0$ 且 $\Delta=p^2-4>0$，所以 $p>2$. 综上可知，实数 p 的取值范围是 $\{p\mid p>-2\}$.

7. C　因为 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid x\leqslant1$ 或 $x\geqslant3\}$，所以 $\complement_U A=\{x\mid 1<x<3\}$. 因为 $B=\{x\mid k<x<k+1,k<2\}$，所以当 $B\cap(\complement_U A)=\varnothing$ 时，有 $k+1\leqslant1$ 或 $k\geqslant3$（不合题意，舍去），如图所示，所以 $k\leqslant0$，所以当 $B\cap(\complement_U A)\neq\varnothing$ 时，$0<k<2$.

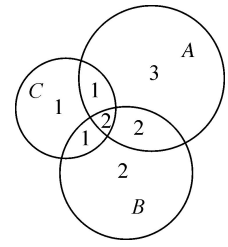


8. D　因为集合 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$A\cap B=\{5\}$，$(\complement_U A)\cap B=\{4\}$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{1,2\}$，画出 Venn 图如图所示，所以 $A=\{5,3\}$，$B=\{5,4\}$，则 $3\in A$ 且 $3\notin B$.



9. AD　$n=10k+8=5\times2k+5\times2-2=5(2k+2)-2$，由 $k\in\mathbf{Z}$，则 $2k+2\in\mathbf{Z}$，即 N 中元素都是 M 中元素，有 $N\subseteq M$；而对于集合 M，当 $k=1$ 时，$m=3$，故 $3\in M$，但 $3\notin N$，所以 $M\cup N=M$，A 选项正确；$M\cap N=N$，B 选项错误；由 $N\cup M=M$，得 $\complement_{\mathbf{Z}}M\subseteq\complement_{\mathbf{Z}}N$，所以 $(\complement_{\mathbf{Z}}N)\cup N=\mathbf{Z}$，$(\complement_{\mathbf{Z}}M)\cup N\neq\mathbf{Z}$，C 选项错误，D 选项正确.

10. BC　画出 Venn 图如图. 设 $A=\{$参加拔河的同学$\}$，$B=\{$参加 4 人足球的同学$\}$，$C=\{$参加羽毛球的同学$\}$，则 $\mathrm{card}(A)=8$，$\mathrm{card}(B)=7$，$\mathrm{card}(C)=5$，$\mathrm{card}(A\cap B)=4$，$\mathrm{card}(A\cap C)=\mathrm{card}(B\cap C)=3$，所以 $\mathrm{card}(A\cap B\cap C)=12-[(8+7+5)-(4+3+3)]=2$，所以三项比赛都参加的有 2 人，只参加拔河的有 3 人，只参加 4 人足球的有 2 人，只参加羽毛球的有 1 人. 结合选项，B，C 正确.



11. 5　由于若 $x\in A$，则 $x+2\in B$，故集合 A 中最大的元素只能出现 3，且 1，3 不能同时出现，故 A 中最多有两个元素. (1) A 中只有一个元素：$A=\{1\}$，$B=\{2,3,4,5\}$；$A=\{2\}$，$B=\{1,3,4,5\}$；$A=\{3\}$，$B=\{1,2,4,5\}$；(2) A 中有两个元素：$A=\{1,2\}$，$B=\{3,4,5\}$；$A=\{2,3\}$，$B=\{1,4,5\}$. 因此，共有 5 种不同的选法.

12. $m\leqslant4$　因为 $A\cup B=A$，所以 $B\subseteq A$. 当 $B=\varnothing$ 时，$m+1>2m-1$，即 $m<2$，满足题意；当 $B\neq\varnothing$ 时，由 $B\subseteq A$ 可得 $\begin{cases}m+1\leqslant2m-1,\\ m+1\geqslant-2,\\ 2m-1\leqslant7,\end{cases}$ 解得 $2\leqslant m\leqslant4$. 综上，实数 m 的取值范围是 $m\leqslant4$.

13. **解**：(1) 因为 $A\cap B=\{2\}$，所以 $2\in B$，即 $2^2-2(a+1)\cdot2+a^2-5=0$，解得 $a=-1$ 或 $a=5$. 当 $a=-1$ 时，$B=\{x\mid x^2-4=0\}=\{2,-2\}$，$A=\{1,2\}$，满足 $A\cap B=\{2\}$. 当 $a=5$ 时，$B=\{x\mid x^2-12x+20=0\}=\{2,10\}$，满足 $A\cap B=\{2\}$，所以所求实数 a 的值是 -1 或 5.

(2) 因为 $A\cap B=B$，所以 $B\subseteq A$，即 B 可能为 $\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{1,2\}$. 当 $B=\varnothing$ 时，$\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-5)<0$，解得 $a<-3$. 当集合 B 中只有一个元素时，$\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-5)=0$，解得 $a=-3$，此时 $B=\{x\mid x^2+4x+4=0\}=\{-2\}$，即集合 B 不可能为 $\{1\}$ 或 $\{2\}$. 当 $B=\{1,2\}$ 时，由根与系数的关系可知 $\begin{cases}2(a+1)=3,\\ a^2-5=2,\end{cases}$ 方程组无解，则集合 B 不可能为 $\{1,2\}$. 所以实数 a 的取值范围是 $\{a\mid a<-3\}$.

易错警示　(2) 中容易漏掉 B 为空集的情况.

14. **解**：(1) 由 $m=-1$ 得 $B=\{x\mid -2<x<2\}$，$A=\{x\mid 1<x<3\}$，所以 $A\cup B=\{x\mid -2<x<3\}$.

(2) 由 $A\cup B=B$ 可得 $A\subseteq B$，得 $\begin{cases}2m\leqslant1,\\ 1-m\geqslant3,\end{cases}$ 解得 $m\leqslant-2$，故实数 m 的取值范围是 $\{m\mid m\leqslant-2\}$.

(3) 由 $A\cap B=B$ 可得 $B\subseteq A$. 当 $B=\varnothing$ 时，$2m\geqslant1-m$，解得 $m\geqslant\frac{1}{3}$；当 $B\neq\varnothing$ 时，得 $\begin{cases}2m<1-m,\\ 2m\geqslant1,\\ 1-m\leqslant3,\end{cases}$ 无解. 综上，实数 m 的取值范围是 $\left\{m\,\middle|\,m\geqslant\frac{1}{3}\right\}$.

(4) 当 $B=\varnothing$ 时，$2m\geqslant1-m$，解得 $m\geqslant\frac{1}{3}$，满足 $A\cap B=\varnothing$；当 $B\neq\varnothing$ 时，由 $A\cap B=\varnothing$，得 $\begin{cases}2m<1-m,\\ 1-m\leqslant1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2m<1-m,\\ 2m\geqslant3,\end{cases}$ 解得

$0\leqslant m<\frac{1}{3}$. 综上,实数 m 的取值范围是$\{m|m\geqslant 0\}$.

(5)由(4)知,当$A\cap B\neq\varnothing$时,实数 m 的取值范围是$\{m|m<0\}$.

15. (1) **解**:集合 A 中任意两个奇数(两个数相等也可以)的和是偶数,而偶数都不属于集合 A. 因此集合 A 是无和集. 因为 $5\in B$,且 $5+5=10\in B$,所以 B 不是无和集.

(2) **证明**:假设 A,B 都是无和集. 由题意,$A\cup B=\{1,2,\cdots,n\}$,且 $A\cap B=\varnothing$,因为 $1+1=2$,所以 1 和 2 不能属于同一集合,不妨设 $1\in A,2\in B$,又 $2+2=4$,所以 $4\notin B$,则 $4\in A$,$1+4=5$,所以 $5\notin A,5\in B$,此时若 $3\in A$,则 $1+3=4$,A 不是无和集. 若 $3\in B$,则 $2+3=5$,B 不是无和集,矛盾. 所以集合 A,B 不可能都是无和集.

课时提优 4　充分条件与必要条件

1. D　四边形的对角线相等且平分才是矩形,故 A 错误;四边形的两组对边分别相等为平行四边形,故 B 错误;四边形有三个内角都为直角才是矩形,故 C 错误;四边形两组对分别平行为平行四边形,则相邻两角互补,又有一组对角互补,所以相邻两角相等,又相邻两角之和为 180°,所以相邻两角均为直角,故该平行四边形是矩形,故 D 正确.

2. C　由 $p:x<1,q:x<a$,p 是 q 的充分条件,所以$\{x|x<1\}\subseteq\{x|x<a\}$,所以 $a\geqslant 1$.

3. D　设集合 $A=\{x|2k-1\leqslant x\leqslant 3\}$,$B=\{x|-5\leqslant x\leqslant 3\}$. 因为 p 是 q 的必要条件,所以 $B\subseteq A$,所以 $2k-1\leqslant -5$,解得 $k\leqslant -2$.

4. AD　由$-\frac{11}{2}<5x-3<12$,得$-\frac{1}{2}<x<3$. 当$-\frac{1}{2}<x<3$ 时,必满足$-\frac{1}{2}<x<4$ 和$-1<x<6$,而不一定满足$-\frac{1}{2}<x<2$ 和$-3<x<\frac{1}{2}$.

5. ②③④　①若 $a=2,b=1,a+b=3\notin C$,①错误;②$a+b=2k_1+4k_2+1=2(k_1+2k_2)+1\in B$,②正确;③$a+b=2k_1+1+4k_2+1=2(k_1+2k_2+1)\in A$,③正确;④$a-b=4k_1+1-4k_2-1=2(2k_1-2k_2)\in A$,④正确;⑤若 $a=3,b=1,a\cdot b=3\notin C$,⑤错误.

6. ①③④　①已知 $a>b$,当 $c<0$ 时,$ac<bc$,故①错误;②已知 $a=b$,两边同乘 c,可得 $ac=bc$,故"$ac=bc$"是"$a=b$"的必要条件;③已知 $ac>bc$,当 $c<0$ 时,$a<b$,故③错误;④不妨设 $a=1,b=2,c=0$,满足 $ac=bc$,但不满足 $a=b$,④错误.

7. B　对于选项 A,当 $x=1,y=1$ 时,满足 $x+y=2$,但 p 不成立,排除 A;对于选项 C,D,当 $x=-2,y=-3$ 时,满足 $x^2+y^2>2,xy>1$,但 p 不成立,排除 C,D.

8. D　**解法 1**　$\{x|x^2+x-6=0\}=\{2,-3\}$. 因为 p 是 q 的必要条件,所以$\{x|mx+1=0\}\subsetneqq\{2,-3\}$. 当$\{x|mx+1=0\}=\varnothing$,即 $m=0$ 时,符合题意;当$\{x|mx+1=0\}\neq\varnothing$时,由$\{x|mx+1=0\}\subsetneqq\{2,-3\}$,得$-\frac{1}{m}=2$ 或$-\frac{1}{m}=-3$,解得 $m=-\frac{1}{2}$或 $m=\frac{1}{3}$. 综上所述,m 的值为 0 或$-\frac{1}{2}$或$\frac{1}{3}$.

解法 2(代入法)　$\{x|x^2+x-6=0\}=\{2,-3\}$. 当 $m=0$ 时,$\{x|mx+1=0\}=\varnothing$,符合题意;当 $m=-\frac{1}{2}$时,$\{x|mx+1=0\}=\{2\}$;当 $m=\frac{1}{3}$时,$\{x|mx+1=0\}=\{-3\}$. 均满足题意.

9. ABD　对于 A,当 $ac=bc$ 时,不一定有 $a=b$ 成立,必要性不成立,假命题;对于 B,当 $a=1>b=-2$ 时,$a^2<b^2$,充分性不成立,假命题;对于 C,$a<5$ 不一定有 $a<3$,但 $a<3$ 必有 $a<5$,故"$a<5$"是"$a<3$"的必要条件,真命题;对于 D,若 $a+5$ 是无理数,则 a 是无理数,若 a 是无理数,则 $a+5$ 是无理数,故"$a+5$ 是无理数"是"a 是无理数"充要条件,假命题.

10. AC　对于 A,因为由 $a\in M\cap N$ 可推出 $a\in M$,所以 p 是 q 的充分条件,A 正确. 对于 B,因为 $a\in M\cup N$ 不能推出 $a\in M$,所以 p 不是 q 的充分条件,B 错误. 对于 C,若 $\complement_{\mathbf{R}}M\subseteq N$,则 $\complement_{\mathbf{R}}N\subseteq M$,则 $M\cup(\complement_{\mathbf{R}}N)=M$,所以 p 是 q 的充分条件,C 正确. 对于 D,若 $M\cap(\complement_{\mathbf{R}}N)=M$,则 $M\subseteq\complement_{\mathbf{R}}N$,所以 $N\subseteq\complement_{\mathbf{R}}M$,所以 p 不是 q 的充分条件,D 错误.

11. $\left\{x\middle|-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}\right\}$　由题意得$\left\{x\middle|-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}\right\}\subseteq\{x|m-1<x<m+1\}$,所以$\begin{cases}m-1\leqslant-\frac{1}{3},\\ m+1\geqslant\frac{1}{2},\end{cases}$解得$-\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant\frac{2}{3}$.

12. 甲　若甲、乙两命题均正确,且 $1\times 3>0,1+3\neq 2$,则丙、丁均为假命题,与题意不符,故甲、乙必有一个是假命题. 若甲为真命题,由丙命题为真可知,方程的另一根为 1,这样方程两根同号,与丁命题矛盾,故甲命题为假命题,则乙为真命题,可知方程的另一根为-1,此时丁命题也为真命题,符合题意.

13. **解**:(1)由 $a=-1$,得 $B=\{x|-2\leqslant x<4\}$. 又 $A=\{x|1\leqslant x<5\}$,$U=\mathbf{R}$,所以 $A\cup B=\{x|-2\leqslant x<5\}$,$\complement_U A=\{x|x<1$ 或 $x\geqslant 5\}$,则$(\complement_U A)\cap B=\{x|-2\leqslant x<1\}$.

(2)因为"$x\in B$"是"$x\in A$"的充分条件,所以 $B\subseteq A$. 当 $B=\varnothing$ 时,$2a\geqslant 3-a$,解得 $a\geqslant 1$,此时满足题意;当 $B\neq\varnothing$ 时,$\begin{cases}2a<3-a,\\ 2a\geqslant 1,\\ 3-a\leqslant 5,\end{cases}$解得 $\frac{1}{2}\leqslant a<1$. 综上,实数 a 的取值范围是$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

14. **解**:(1)当 $a=5$ 时,$B=\{x|4\leqslant x\leqslant 11\}$,$\complement_U A=\{x|-5<x<8\}$,故$(\complement_U A)\cap B=\{x|4\leqslant x<8\}$.

(2)因为命题 p 是命题 q 的必要条件,所以 $B\subseteq A$. 当 $B=\varnothing$,即 $a-1>2a+1$,即 $a<-2$ 时,满足题意. 当 $B\neq\varnothing$,即 $a-1\leqslant 2a+1$,即 $a\geqslant -2$ 时,只需 $2a+1\leqslant -5$ 或 $a-1\geqslant 8$,即 $a\leqslant -3$ 或 $a\geqslant 9$,又 $a\geqslant -2$,所以 $a\geqslant 9$. 综上,实数 a 的取值范围是$(-\infty,-2)\cup[9,+\infty)$.

15. (1)**解**:因为$-1=0^2-1^2$,$0=1^2-(-1)^2$,$1=1^2-0^2$,所以$-1,0,1$ 都属于集合 A.

(2)**解**:$A=\{x|x=m^2-n^2,m,n\in\mathbf{Z}\}$,$m^2-n^2=(m-n)(m+n)$.①若 m,n 同奇或同偶时,$m+n,m-n$ 均为偶数,$(m-n)(m+n)$为 4 的倍数;②当 m,n 为一奇一偶时,$m+n,m-n$ 均为奇数,$(m-n)(m+n)$为奇数.综上,所有满足集合 A 的偶数为 $4k(k\in\mathbf{Z})$.因此,满足集合 A 的不超过 15 的正偶数有 4,8,12.

(3)**证明**:集合 $B=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$,则恒有 $2k+1=(k+1)^2-k^2$,所以 $2k+1\in A$,即一切奇数都属于 A.故"$x\in B$"是"$x\in A$"的充分条件.

方法总结 解题关键在于根据集合的性质,应用因式分解、恒等转化、代数式的奇偶性讨论,判断元素与集合的关系,证明条件间的充分、必要关系,确定满足条件的数集.

课时提优 5 充要条件

1. A 由题得 $A\cup B=\{0,1,2\}$,所以 $m=\pm\sqrt{2}$或 $m=\pm1$,所以"$m=1$"是"$A\cup B=\{0,1,2\}$"的充分不必要条件.

2. A 使 $x>1$ 成立的一个必要不充分条件,满足不等式的解集包含 $x>1$,但不完全一致,A 选项解集为 $x>1$ 或 $x<-1$,成立,A 选项正确;B 选项解集为 $x>1$,为充要条件,B 选项错误;C 选项解集为 $0<x<1$,不成立,C 选项错误;D 选项错误.

3. D 因为 p 是 q 的必要不充分条件,q 是 r 的充要条件,所以 p 是 r 的必要不充分条件,即 $r\Rightarrow p$ 成立.因为 r 是 s 的充分不必要条件,所以 $r\Rightarrow s$ 成立,则 p 是 s 的既不充分也不必要条件.

4. AD 对于 A,由于"$x>4$"与"$x<5$"互相不能推出,所以 A 正确;对于 B,正三角形一定是等腰三角形,等腰三角形不一定是正三角形,即"三角形为正三角形"是"三角形为等腰三角形"的充分不必要条件,所以 B 错误;对于 C,"关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$有实数根"的充要条件是"$b^2-4ac\geqslant0$",所以 C 错误;对于 D,因为 b 可以为零,所以由 $a\neq0$ 不能推出 $ab\neq0$,故充分性不成立,由 $ab\neq0$ 可得 $a\neq0$ 且 $b\neq0$,即必要性成立,所以"$a\neq0$"是"$ab\neq0$"的必要不充分条件,所以 D 正确.

5. ③④ 因为$\begin{cases}x-y=2,\\x+y=6,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=4,\\y=2,\end{cases}$所以解集为$\{(4,2)\}$,故①错误.当 $a=0$ 时,$x=-1$,此时 $A=\{-1\}$,满足题意.当 $a\neq0$ 时,需满足 $\Delta=1-4a=0$,可得 $a=\frac{1}{4}$,因此 $a=0$ 或 $a=\frac{1}{4}$,故②错误.由 $ac<0$ 得 $\Delta=b^2-4ac>0$,即该方程有两个实数根,且两根之积$\frac{c}{a}<0$,即两根异号,所以充分性成立;若 $ax^2+bx+c=0$ 有一正根一负根,可知两根之积为负,即$\frac{c}{a}<0$,即 $ac<0$,所以必要性成立,故③正确.由 $M\cup N=M$,知 $N\subseteq M$,又因为 $M=\{0,4\}$,所以 N 可以是$\varnothing,\{0\},\{4\},\{0,4\}$,共 4 个,故④正确.

6. $\{a|a\leqslant-1$ 或 $1\leqslant a<2\}$ $\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|x<0$ 或 $x>1\}$.因为 $x\in A$,所以集合 $A=\{x|2a-1<x<a+1\}$不是空集,即 $2a-1<a+1$,解得 $a<2$.由题意知集合 A 是集合 $\complement_{\mathbf{R}}B$ 的真子集,即 $a+1\leqslant0$ 或 $2a-1\geqslant1$,解得 $a\leqslant-1$ 或 $a\geqslant1$.综上所述,实数 a 的取值范围是$\{a|a\leqslant-1$ 或 $1\leqslant a<2\}$.

7. B 取 $a=1,b=-2$,满足 $a>b$,而 $\sqrt{b+1}$ 无意义,即 $a>b$ 不能推出 $\sqrt{a+1}>\sqrt{b+1}$;若 $\sqrt{a+1}>\sqrt{b+1}$,则必有 $a+1>b+1\geqslant0$,即 $a>b$ 成立.所以"$a>b$"是"$\sqrt{a+1}>\sqrt{b+1}$"的必要不充分条件.

8. B 当 $a=5,b=4,c=3$ 时,易知$\triangle ABC$ 是直角三角形,但 $a^2+b^2\neq c^2$,所以充分性不满足;根据勾股定理,由 $a^2+b^2=c^2$,可得$\triangle ABC$ 是直角三角形,所以必要性成立.故"$\triangle ABC$ 为直角三角形"是"$a^2+b^2=c^2$"的必要不充分条件.

9. BC 由"$x<3$"能推出"$x\leqslant3$",反之不成立,所以"$x<3$"是"$x\leqslant3$"的充分不必要条件,故 A 错误;由$\frac{b}{a}<1$ 得$\begin{cases}a>0,\\b<a\end{cases}$或$\begin{cases}a<0,\\b>a,\end{cases}$所以由"$a>b>0$"可得"$\frac{b}{a}<1$",反之不成立,故"$\frac{b}{a}<1$"的一个充分不必要条件是"$a>b>0$",故 B 正确;若 $x^2+2x+a=0$ 有两个负实数根,则$\begin{cases}2^2-4a\geqslant0,\\a>0,\\-2<0,\end{cases}$得 $0<a\leqslant1$,故 C 正确;$\frac{1}{x}<1$ 等价于 $x>1$ 或 $x<0$,所以"$x>1$"是"$\frac{1}{x}<1$"的充分不必要条件,故 D 错误.

10. BC 当 $m=3$ 时,$x^2+4=0$ 无实数根,故 A 错误;方程 $x^2+(m-3)x+4=0$ 无实数根,则 $\Delta=(m-3)^2-16<0$,解得 $-1<m<7$,又由$\{m|-1<m<7\}\subseteq\{m|m>-1\}$,知方程无实根的一个必要条件是 $m>-1$,故 B 正确;方程 $x^2+(m-3)\cdot x+4=0$ 有两个正实数根的充要条件是$\begin{cases}\Delta=(m-3)^2-16\geqslant0,\\3-m>0,\end{cases}$解得 $m\leqslant-1$,故 C 正确,D 错误.

11. 充分不必要 当 $-4<k<0$ 时,$k<0$ 且 $\Delta=k^2+4k=k(k+4)<0$,所以函数 $y=kx^2-kx-1$ 的值恒为负;反过来,函数 $y=kx^2-kx-1$ 的值恒为负不一定有 $-4<k<0$,如当 $k=0$ 时,函数 $y=kx^2-kx-1$ 的值恒为负.所以 p 是 q 的充分不必要条件.

12. $\{m|-2\leqslant m\leqslant0\}$ 由已知得 $A\subsetneqq B$,即 m 需满足不等式组$\begin{cases}2m-1\leqslant-1,\\m+5\geqslant3\end{cases}$且等号不同时成立,解得 $-2\leqslant m\leqslant0$.

13. **解**:若选择①,即"$x\in P$"是"$x\in S$"的充分不必要条件,则 $P\subsetneqq S$,则$\begin{cases}1-m\leqslant1,\\1+m>4,\end{cases}$解得 $m>3$,即实数 m 的取值范围是$\{m|m>3\}$.

若选择②,即"$x\in P$"是"$x\in S$"的必要不充分条件,则 $S\subsetneqq P$.当 $S=\varnothing$时,$1-m\geqslant1+m$,解得 $m\leqslant0$;当 $S\neq\varnothing$时,$1-m<1+m$,解得 $m>0$,则$\begin{cases}1-m\geqslant1,\\1+m\leqslant4,\end{cases}$解得 $m\leqslant0$,此时解集为$\varnothing$.综上所述,实数 m 的取值范围是$\{m|m\leqslant0\}$.

若选择③,即“$x\in P$”是“$x\in S$”的充要条件,则 $P=S$,不成立,则不存在实数 m,使“$x\in P$”是“$x\in S$”的充要条件.

14. 证明:充分性,若 $m<0$,则关于 x 的方程 $x^2-2x+m=0$ 有一正一负根.证明如下:当 $m<0$ 时,$\Delta=(-2)^2-4m=4-4m>0$,所以方程 $x^2-2x+m=0$ 有两个不相等的实根,设两根分别为 x_1,x_2,则 $x_1x_2=m<0$,所以方程 $x^2-2x+m=0$ 有一正一负根,故充分性成立.必要性:若关于 x 的方程 $x^2-2x+m=0$ 有一正一负根,则 $m<0$.证明如下:设方程 $x^2-2x+m=0$ 一正一负根分别为 x_1,x_2,则 $\begin{cases}\Delta=(-2)^2-4m=4-4m>0,\\x_1x_2=m<0,\end{cases}$ 所以 $m<0$,故必要性成立.所以“$m<0$”是“关于 x 的方程 $x^2-2x+m=0$ 有一正一负根”的充要条件.

15. 解:(1) 因为 $32=6^2-2^2$,所以 $32\in M$.

假设 $33\in M$,则 $33=m^2-n^2=(m+n)(m-n)$.因为 $m,n\in\mathbf{Z}$,所以 $m+n$ 与 $m-n$ 有相同的奇偶性.因为 33 为奇数,所以 $m+n$ 与 $m-n$ 一个为奇数一个为偶数,则此与 $m+n$ 和 $m-n$ 有相同奇偶性相矛盾,所以假设不成立,所以 $33\notin M$.

假设 $34\in M$,同上可得 $34=m^2-n^2=(m+n)(m-n)$.因为 $m,n\in\mathbf{Z}$,所以 $m+n$ 与 $m-n$ 有相同的奇偶性.因为 34 为偶数,所以 $m+n$ 与 $m-n$ 均为偶数,所以 $(m+n)(m-n)$ 应为 4 的倍数.而 34 不是 4 的倍数,所以假设不成立,所以 $34\notin M$.

(2)“偶数 $2k(k\in\mathbf{Z})$ 属于 M”的一个充要条件是 k 为偶数.

证明:充分性:因为 k 为偶数,设 $k=2a(a\in\mathbf{Z})$,所以 $2k=4a$.而 $(a+1)^2-(a-1)^2=4a$,所以 $2k=(a+1)^2-(a-1)^2$ 满足集合 $M=\{t\mid t=m^2-n^2,m,n\in\mathbf{Z}\}$,所以偶数 $2k(k\in\mathbf{Z})$ 属于 M.

必要性:因为偶数 $2k(k\in\mathbf{Z})$ 属于 M,所以 $2k=m^2-n^2=(m+n)\cdot(m-n)$.因为 $m,n\in\mathbf{Z}$,所以 $m+n$ 与 $m-n$ 有相同的奇偶性.因为 $2k(k\in\mathbf{Z})$ 为偶数,所以 $m+n$ 与 $m-n$ 均为偶数,所以 $(m+n)\cdot(m-n)$ 应为 4 的倍数,$2k$ 必为 4 的倍数,即 k 必为 2 的倍数,所以 k 为偶数.

综上,“偶数 $2k(k\in\mathbf{Z})$ 属于 M”的一个充要条件是 k 为偶数.

课时提优 6　全称量词与存在量词

1. D　对于 A 选项,命题“对任意 $a,b\in\mathbf{R}$,都有 $a^2+b^2-2a-2b+2<0$”为全称量词命题,但 $a^2+b^2-2a-2b+2=(a-1)^2+(b-1)^2\geqslant0$,该命题为假命题;对于 B 选项,命题“菱形的两条对角线相等”为全称量词命题,该命题为假命题;对于 C 选项,命题“$\forall x\in\mathbf{R}$,$\sqrt{x^2}=x$”为全称量词命题,当 $x<0$ 时,$\sqrt{x^2}=-x$,该命题为假命题;对于 D 选项,命题“正方形是矩形”为全称量词命题,该命题为真命题.

解后反思　判断一个全称量词命题为真,需要给出证明,而判断其为假,只需举一个反例.

2. D　因为“任意 $x\in\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$,$x\leqslant m$”是真命题,所以 $m\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以实数 m 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. A　命题 p:$\exists x_0\in\mathbf{R}$,$x_0^2-3x_0+1<0$,由含有一个量词的命题的否定方法:先改变量词,然后否定结论,则 $\neg p$ 为 $\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2-3x+1\geqslant0$.

4. CD　当 $x=0$ 时,$x+2\leqslant0$ 不成立,故 p 是假命题,故 A 错误;p:$\forall x\in\mathbf{R}$,$x+2\leqslant0$ 的否定为 $\neg p$:$\exists x\in\mathbf{R}$,$x+2>0$,故 D 正确,B 错误;由题 A 分析知 $\neg p$ 是真命题,故 C 正确.

5. $(1,+\infty)$　命题 p:$\exists x\in\mathbf{R}$,使得方程 $x^2+2x+m=0$ 有实数解为假命题,即 $\forall x\in\mathbf{R}$,使得方程 $x^2+2x+m=0$ 无实数解为真命题,即 $\Delta=4-4m<0$,所以 $m>1$,即实数 m 的取值范围是 $(1,+\infty)$.

6. $(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$　命题“$\forall x\in\mathbf{R}$,$4x^2+(a-2)x+\frac{1}{4}>0$”是假命题,故 $\Delta=(a-2)^2-4\times4\times\frac{1}{4}\geqslant0$,解得 $a\geqslant4$ 或 $a\leqslant0$,即实数 a 的取值范围是 $(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$.

7. B　对于 p,取 $x=-1$,则有 $|x+1|=0<1$,故 p 是假命题,$\neg p$ 是真命题;对于 q,取 $x=1$,则有 $x^3=1^3=1=x$,故 q 是真命题,$\neg q$ 是假命题.综上,$\neg p$ 和 q 都是真命题.

8. B　因为命题 p 为假命题,则命题 p 的否定为真命题,即 $\forall x\in\mathbf{R}$,$mx^2+1>0$ 为真命题,解得 $m\geqslant0$.同理,命题 q 为假命题,则命题 q 的否定为真命题,即 $\exists\in\mathbf{R}$,$x^2+mx+1\leqslant0$ 为真命题,所以 $\Delta=m^2-4\geqslant0$,解得 $m\geqslant2$ 或 $m\leqslant-2$.综上,$m\geqslant2$.

9. AD　对于 A,根据全称量词命题的否定是存在量词命题,可知 A 正确;对于 B,易知命题“$\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2-2x-a\geqslant0$”为真命题,即 $\Delta=(-2)^2+4a\leqslant0$,解得 $a\leqslant-1$,故 B 错误;对于 C,$a>b$ 不能推出 $a^2>b^2$,如 $a=1,b=-2$,反过来,$a^2>b^2$ 也不能推出 $a>b$,如 $a=-2,b=1$,所以“$a>b$”是“$a^2>b^2$”的既不充分也不必要条件,故 C 错误;对于 D,$x=\sqrt[4]{2}$ 是无理数,$x^2=\sqrt{2}$ 也是无理数,故 D 正确.

10. ABC　对于 A,“$\exists x\in\mathbf{R}$,使得 $x^2-x+1\leqslant0$”的否定是“$\forall x\in\mathbf{R}$,都有 $x^2-x+1>0$”,故 A 正确;对于 B,由 $|x|\geqslant x$ 恒成立,知命题“$\forall x\in\mathbf{R}$,$|x|\geqslant x$”是真命题,故 B 正确;对于 C,若命题“$\exists x\in\mathbf{R}$,$x^2+4x+m=0$”为假命题,则方程 $x^2+4x+m=0$ 无实数根,所以 $\Delta=16-4m<0$,解得 $m>4$,则实数 m 的取值范围是 $(4,+\infty)$,故 C 正确;对于 D,命题 $\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2-2x+m>0$ 为真命题,又二次函数 $y=x^2-2x+m$ 的图象开口向上,则 $x^2-2x+m=0$ 无实数根,则 $\Delta=4-4m<0$,解得 $m>1$,则实数 m 的取值范围是 $(1,+\infty)$,故 D 错误.

11. $(-2,2)$　因为“$\exists x\in(-1,1)$,$2x+a=0$”是真命题,所以 $a=-2x$ 在 $x\in(-1,1)$ 时有解.因为 $2x\in(-2,2)$,所以 $-2x\in(-2,2)$,所以 $a\in(-2,2)$.

12. $\{m\mid m\geqslant3$ 或 $m\leqslant-3\}$　由“$\forall x\in[1,3]$,$mx+3-2m>0$”是假命题,得“$\exists x\in[1,3]$,$mx+3-2m\leqslant0$”是真命题,则 $m+3-2m\leqslant0$ 或 $3m+3-2m\leqslant0$,解得 $m\geqslant3$ 或 $m\leqslant-3$.

13. 解:(1)若命题 p 为真命题,则关于 x 的方程 $mx^2+2x-1=0$ 有实数根.当 $m=0$ 时,$2x-1=0$ 有实数根,符合题意;当 $m\neq0$ 时,$\Delta=4+4m\geqslant0$,解得 $m\geqslant-1$ 且 $m\neq0$.综上,实数 m

的取值范围是$[-1,+\infty)$.

(2)若命题 q 为真命题,则$\forall x\in[1,4]$,不等式$-x^2+4x-3\geqslant m$ 恒成立,当 $x\in[1,4]$时,$-x^2+4x-3=-(x-2)^2+1\in[-3,1]$,则 $m\leqslant-3$. 当 p 真 q 假时,有$\begin{cases}m\geqslant-1,\\m>-3,\end{cases}$则 $m\geqslant-1$;当 p 假 q 真时,有$\begin{cases}m<-1,\\m\leqslant-3,\end{cases}$则 $m\leqslant-3$. 综上,实数 m 的取值范围是$\{m\mid m\leqslant-3$ 或 $m\geqslant-1\}$.

14. 解:(1)若 p 为真命题,则 $A\cap B\neq\varnothing$,所以 $2a\geqslant6$,解得 $a\geqslant3$. 即实数 m 的取值范围是$\{a\mid a\geqslant3\}$.

(2)当 q 为假命题时,即"$\exists x\in\mathbf{R}$,$x^2+2x-a\leqslant0$"为真命题,所以 $\Delta=4+4a\geqslant0$,所以实数 a 的取值范围是$\{a\mid a\geqslant-1\}$. 由(1)知当命题 p 为假命题时,实数 a 的取值范围是$\{a\mid a<3\}$. 所以当 p,q 均为假命题时,实数 a 的取值范围是$\{a\mid-1\leqslant a<3\}$,所以当命题 p 和命题 q 至少有一个为真命题时,实数 a 的取值范围是$\{a\mid a<-1$ 或 $a\geqslant3\}$.

15. B　由题意得 p 为真命题,则 $m<-1$. 又 p,q 至少有一个是假命题,所以 q 为假命题,则"$\exists x\in\mathbf{R}$,使得 $x^2+mx+1\leqslant0$"是真命题,等价于抛物线 $y=x^2+mx+1=\left(x+\frac{m}{2}\right)^2+1-\frac{m^2}{4}\leqslant0$ 恒成立,即 $1-\frac{m^2}{4}\leqslant0$,解得 $m\leqslant-2$ 或 $m\geqslant2$. 综上可得 $m\leqslant-2$.

单元综合练 1　集合与常用逻辑用语

1. C　"$\forall x\in[1,2]$,$1\leqslant x^2\leqslant4$"的否定是"$\exists x\in[1,2]$,$x^2>4$ 或 $x^2<1$".

2. D　(补集思想)若命题 p 为真命题,则 $m+1\leqslant0$,即 $m\leqslant-1$;若命题 q 为真命题,则 $\Delta=m^2-4<0$,即 $-2<m<2$. 所以当命题 p 和命题 q 同时为真命题时,有$\begin{cases}m\leqslant-1,\\-2<m<2,\end{cases}$即 $-2<m\leqslant-1$. 又命题 p 和命题 q 至多有一个为真命题,所以 $m\leqslant-2$ 或 $m>-1$.

3. ABC　当 $a=3$ 时,$M=\{3\}$,$M\cap N=\varnothing$,$M\cup N=\{1,3,4\}$;当 $a=1$ 时,$M=\{1,3\}$,$M\cap N=\{1\}$,$M\cup N=\{1,3,4\}$;当 $a=4$ 时,$M=\{3,4\}$,$M\cap N=\{4\}$,$M\cup N=\{1,3,4\}$;当 $a\neq1,3,4$ 时,$M=\{3,a\}$,$M\cap N=\varnothing$,$M\cup N=\{1,3,4,a\}$. 故 A,B,C 错误,D 正确.

4. ACD　对于 A,因为$|x|>1$,所以 $x>1$ 或 $x<-1$,所以当 $x>1$ 时,$|x|>1$ 成立,反之不成立,故"$x>1$"是"$|x|>1$"的充分不必要条件,A 正确;对于 B,"$a\in P\cap Q$"一定有"$a\in P$"成立,反之不成立,故"$a\in P\cap Q$"是"$a\in P$"的充分不必要条件,B 错误;对于 C,命题"$\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2+x+1\geqslant0$"是全称量词命题,其否定是存在量词命题,即"$\exists x\in\mathbf{R}$,$x^2+x+1<0$",C 正确;对于 D,当 $a+b+c=0$ 时,1 为方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根,故充分性成立,当方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根为 1 时,代入得 $a+b+c=0$,故必要性成立,D 正确.

5. $\{-1,3\}$　(分类讨论)当 x,y 均为正数时,$\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{|xy|}{xy}=3$;当 x,y 均为负数时,$\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{|xy|}{xy}=-1$;当 x,y 一正一负时,$\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{|xy|}{xy}=-1$. 故 $M=\{-1,3\}$.

6. $\{a\mid0\leqslant a\leqslant1\}$　(等价转化、数形结合)由题意知,$\{x\mid x>2$ 或 $x<-1\}\subsetneqq\{x\mid x<a-1$ 或 $x>a+1\}$,则$\begin{cases}a+1\leqslant2,\\a-1\geqslant-1\end{cases}$(等号不同时成立),解得 $0\leqslant a\leqslant1$,所以实数 a 的取值范围是$\{a\mid0\leqslant a\leqslant1\}$.

7. 解:(1) 因为命题 p:$\forall x\in B$,$x\in A$ 是真命题,所以 $B\subseteq A$. 当 $B=\varnothing$时,$m+1>2m-1$,解得 $m<2$;当 $B\neq\varnothing$时,则$\begin{cases}m+1\leqslant2m-1,\\m+1\geqslant-2,\\2m-1\leqslant5,\end{cases}$解得 $2\leqslant m\leqslant3$. 综上,实数 m 的取值范围是$(-\infty,3]$.

(2) 因为"命题 q:$\exists x\in A$,$x\in B$"是假命题,所以 $A\cap B=\varnothing$. 当 $B=\varnothing$时,$m+1>2m-1$,解得 $m<2$;当 $B\neq\varnothing$时,则$\begin{cases}m+1\leqslant2m-1,\\m+1>5\end{cases}$或$\begin{cases}m+1\leqslant2m-1,\\2m-1<-2,\end{cases}$解得 $m>4$. 综上,实数 m 的取值范围是$(-\infty,2)\cup(4,+\infty)$.

8. 解:(1) 当命题 q:"$\exists x$ 满足$-2<x<2$,使 $x^2-2x-a=0$"为真命题时,$a=x^2-2x$. 令 $f(x)=x^2-2x(-2<x<2)$,则$-1\leqslant f(x)<8$,所以$-1\leqslant a<8$,所以命题 q 为假时,$a<-1$ 或 $a\geqslant8$. 当命题 p:"$\exists x\in\mathbf{R}$,$x^2+(a-1)x+4<0$"为真命题时,$\Delta=(a-1)^2-4\times4>0$,解得 $a<-3$ 或 $a>5$,所以命题 q 为假时,$-3\leqslant a\leqslant5$. 当命题 p,q 都为假命题时,$\begin{cases}-3\leqslant a\leqslant5,\\a<-1\text{ 或 }a\geqslant8,\end{cases}$即$-3\leqslant a<-1$,所以命题 p,q 中至少一个为真时,实数 a 的取值范围是$\{a\mid a<-3$ 或 $a\geqslant-1\}$.

(2) 由(1)可知,命题 q 为真命题时,$-1\leqslant a<8$,记 $A=[-1,8)$,$B=(2a,a+1)$. 因为 p 是 q 的充分不必要条件,所以 $B\subsetneqq A$,当 $B=\varnothing$,即 $2a\geqslant a+1$,也即 $a\geqslant1$ 时,满足条件;当 $B\neq\varnothing$时,$\begin{cases}2a<a+1,\\2a\geqslant-1,\\a+1\leqslant8,\end{cases}$解得$-\frac{1}{2}\leqslant a<1$. 综上可知,实数 a 的取值范围是$\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

9. 解:(1)根据定义,$A_1\cup A_2=\mathbf{N}^*$,$A_1\cap A_2=\varnothing$,所以(A_1,A_2)是 $\mathbf{N}^*$ 的一个 2 分划. $A_1\cup A_3=\{2,3,4,\cdots\}$,$1\notin A_1\cup A_3$,即 $A_1\cup A_3\neq\mathbf{N}^*$,所以$(A_1,A_3)$不是 $\mathbf{N}^*$ 的一个 2 分划.

(2)由题意,可按 A_1,A_2 中元素个数,分成一元集,三元集,或者二元集,二元集. 则 S 的所有 2 分划有$(\{1\},\{2,3,4\})$,$(\{2\},\{1,3,4\})$,$(\{3\},\{1,2,4\})$,$(\{4\},\{1,2,3\})$,$(\{1,2\},\{3,4\})$,$(\{1,3\},\{2,4\})$,$(\{1,4\},\{2,3\})$.

(3)由题意,集合 S 中的元素按被 5 除所得的余数进行分类,记 $A_1=\{1,6,11,16,21,26\}$,$A_2=\{2,7,12,17,22\}$,$A_3=\{3,8,13,18,23\}$,$A_4=\{4,9,14,19,24\}$,$A_5=\{5,10,15,20,25\}$,显然满足 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_5=S$,$A_i\cap A_j=\varnothing(1\leqslant i\neq j\leqslant5)$,则

$(A_1,A_2,\cdots,A_5)$为 S 的一个 5 分划. 若 A_1,A_4 中各取一元素,之和必能被 5 整除,故集合 B 不能同时选取 A_1,A_4 中元素;若 A_2,A_3 中各取一元素,之和必能被 5 整除,故集合 B 不能同时选取 A_2,A_3 中元素;若 A_1 中任取两个元素,之和必不能被 5 整除,A_2,A_3,A_4 亦然;若 A_5 中任取两个元素,之和必能被 5 整除,故集合 B 至多在 A_5 中选取一个元素. 综上,要使集合 B 中的元素个数最大,则集合 B 可选 A_1 中的所有元素,A_2(或 A_3)中的所有元素,A_5 中的 1 个元素,即集合 B 中元素个数的最大值为 $6+5+1=12$.

章末提优

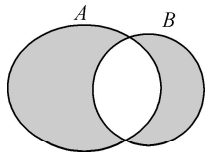
1. D　A,C 都是存在量词命题,B 是全称量词命题,但该命题是假命题,当 $n=1$ 时,$\frac{1}{n}=1$;D 为全称量词命题且为真命题.

2. A　由题意可得 $M\cup N=\{x\mid x<2\}$,则 $\complement_U(M\cup N)=\{x\mid x\geqslant 2\}$,选项 A 正确;$\complement_U M=\{x\mid x\geqslant 1\}$,则 $N\cup\complement_U M=\{x\mid x>-1\}$,选项 B 错误;$M\cap N=\{x\mid -1<x<1\}$,则 $\complement_U(M\cap N)=\{x\mid x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 1\}$,选项 C 错误;$\complement_U N=\{x\mid x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 2\}$,则 $M\cup\complement_U N=\{x\mid x<1$ 或 $x\geqslant 2\}$,选项 D 错误.

3. D　$x=\sqrt{2}$ 是无理数,$x^2=2$ 是有理数,A 错误;当 $x=-2$,$y=-1$ 时,$xy>0$,但 $x+y=-3<0$,B 错误;命题"$\exists x_0\in\mathbf{R}$,使得 $x_0^2+1>0$"的否定是"$\forall x\in\mathbf{R},x^2+1\leqslant 0$",C 错误;"$1<x<3$"的必要不充分条件是"$m-2<x<m+2$",则 $\begin{cases}m-2\leqslant 1,\\ m+2\geqslant 3,\end{cases}$ 两个等号不同时取得,解得 $1\leqslant m\leqslant 3$,D 正确.

4. D　由 $ab+1\neq a+b$,可得 $(a-1)(b-1)\neq 0$,所以 $a\neq 1$ 且 $b\neq 1$,所以"$ab+1\neq a+b$"的充要条件是"a,b 都不为 1".

5. D　如图,由题意可得 $A*B$ 表示的是阴影部分. 设 $A*B=C$,则 $C*A=\{x\mid x\in C$ 或 $x\in A$,且 $x\notin A\cap C\}=B$,所以 $(A*B)*A=B$.



6. C　充分性:因为 $xy\neq 0$,且 $x+y=0$,所以 $x=-y$,所以 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{-y}{y}+\frac{y}{-y}=-2$,所以充分性成立. 必要性:因为 $xy\neq 0$,且 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$,所以 $x^2+y^2=-2xy$,即 $x^2+y^2+2xy=0$,即 $(x+y)^2=0$,所以 $x+y=0$,所以必要性成立. 故"$x+y=0$"是"$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$"的充要条件.

7. AB　因为命题 p:$\exists x\in\mathbf{R},x^2+bx+1\leqslant 0$ 是假命题,所以命题 $\neg p$:$\forall x\in\mathbf{R},x^2+bx+1>0$ 是真命题,即 $\forall x\in\mathbf{R},x^2+bx+1>0$ 恒成立,则 $\Delta=b^2-4<0$,解得 $-2<b<2$. 由此可判断选项 A,B 符合题意.

8. ACD　因为 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\varnothing$,所以 $B\subseteq A$;当 $m+1\geqslant 2m-1$,即 $m\leqslant 2$ 时,$B=\varnothing$,满足 $B\subseteq A$;当 $m+1<2m-1$,即 $m>2$ 时,由 $B\subseteq A$ 得 $\begin{cases}m+1\geqslant -2,\\ 2m-1\leqslant 7,\end{cases}$ 解得 $-3\leqslant m\leqslant 4$,故 $2<m\leqslant 4$. 综上所述,实数 m 的取值范围是 $\{m\mid m\leqslant 4\}$. 则符合题意的集合为 $\{m\mid m\leqslant 4\}$ 的子集,A,C,D 满足题意.

9. AC　对于 A,命题"$\exists x_0\in\mathbf{R},x_0^2\leqslant 2$"的否定是"$\forall x\in\mathbf{R},x^2>2$",故 A 正确;对于 B,因为 $\Delta=1-8=-7<0$,即方程 $2x^2+x+1=0$ 无实数解,即无有理数解,即命题"$\exists x_0\in\mathbf{Q},2x_0^2+x_0+1=0$"是假命题,故 B 错误;对于 C,若命题"$\exists x_0\in\mathbf{R},4x_0^2+2x_0+n=0$"为假命题,则命题"$\forall x\in\mathbf{R},4x^2+2x+n\neq 0$"为真命题,即方程 $4x^2+2x+n=0$ 无实数解,则 $\Delta=4-16n<0$,解得 $n>\frac{1}{4}$,故 C 正确;对于 D,因为 $A\cup B=B$,所以 $A\subseteq B$,又因为 $A=\{0,1,3,4\}$,所以满足条件的集合 B 有无数个,集合 B 至少包含 0,1,3,4 这四个元素都符合题意,故 D 错误.

10. 10 个整数 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$ 中至少有 7 个为正数

11. $(-\infty,3]$　由题意得"$\forall x\in(1,+\infty),2x-m+1\neq 0$"是真命题,故 $m\neq 2x+1$. 因为 $2x+1\in(3,+\infty)$,所以实数 m 的取值范围是 $(-\infty,3]$.

12. $[-1,6]$　因为 p:$-4<x-a<4$,即 $a-4<x<a+4$,q:$2<x<3$. 若 q 是 p 的充分条件,则 $(2,3)\subseteq(a-4,a+4)$,则 $\begin{cases}a-4\leqslant 2,\\ a+4\geqslant 3,\end{cases}$ 即 $-1\leqslant a\leqslant 6$. 所以实数 a 的取值范围是 $[-1,6]$.

13. 分析:(1)根据集合的并集、交集、补集运算,以及数形结合思想解题.
(2)等价转化思想——B 是 A 的真子集,分类讨论思想——集合 B 是否为空集,数形结合思想——列出相应不等式组,得出参数的取值范围.

解:(1)当 $m=3$ 时,$B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 6\}$,$\complement_U B=\{x\mid x<2$ 或 $x>6\}$,而 $A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 3\}$,故 $A\cup B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 6\}$,$A\cap B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3\}$,$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)=\{x>6$ 或 $x<0\}$.
(2)由"$x\in B$"是"$x\in A$"的充分不必要条件,可知 $B\subsetneqq A$. 当 $B=\varnothing$ 时,$m-1>2m$,解得 $m<-1$,符合题意;当 $B\neq\varnothing$ 时,需满足 $\begin{cases}0\leqslant m-1,\\ 2m\leqslant 3,\\ m-1\leqslant 2m\end{cases}$ (等号不能同时取),解得 $1\leqslant m\leqslant\frac{3}{2}$. 综上,实数 m 的取值范围是 $\left\{m\,\middle|\,m<-1 \text{ 或 } 1\leqslant m\leqslant\frac{3}{2}\right\}$.

14. 分析:(1)恒成立问题、等价转化思想. 用一元二次方程无实根求出实数 m 的取值范围即得. (2)等价转化思想.

解:(1)由 $\forall x\in\mathbf{R},4x^2+(4m-2)x+1\neq 0$,所以关于 x 的方程 $4x^2+(4m-2)x+1=0$ 无实数根. 因此 $\Delta=(4m-2)^2-16<0$,解得 $-\frac{1}{2}<m<\frac{3}{2}$,所以实数 m 的取值范围是 $\left\{m\,\middle|\,-\frac{1}{2}<m<\frac{3}{2}\right\}$.
(2)由 p 为假命题,得 $\neg p$:$\exists x\geqslant 1,x^2-x+1-m\leqslant 0$,为真命

题，即$\exists x\geqslant 1, m\geqslant x^2-x+1$，即$m\geqslant(x^2-x+1)_{\min}$. 又$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$，由二次函数图象可知，当$x=1$时，$(x^2-x+1)_{\min}=1$，所以$m\geqslant 1$. 由(1)知，$-\frac{1}{2}<m<\frac{3}{2}$，则$1\leqslant m<\frac{3}{2}$，所以实数$m$的取值范围是$\left\{m\,\middle|\,1\leqslant m<\frac{3}{2}\right\}$.

15. 解：(1) 根据题意可得$S=\{3,4,5\}$，$T=\{1,2\}$，所以$|A|=3$，$|S|=3$，$|T|=2$.

(2) 令$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，且$a_1<a_2<a_3<a_4$，任取两个元素求和，可得a_4+a_1，a_3+a_1，a_2+a_1，a_4+a_3，a_3+a_2，a_4+a_2，共6个，任取两个元素作差，可得a_4-a_1，a_3-a_1，a_2-a_1，a_4-a_3，a_3-a_2，a_4-a_2，共6个. 由$a_4+a_3>a_4+a_2>a_4+a_1>a_3+a_1>a_2+a_1$，知集合$S$中至少有5个元素，又$a_1+a_3<a_2+a_3<a_2+a_4$，所以当且仅当$a_4+a_1=a_3+a_2$时，$|S|=5$，显然$a_4-a_1>a_3-a_1>a_2-a_1$，故集合$T$中至少有3个元素，又$a_4-a_3<a_4-a_2<a_4-a_1$，$a_3-a_2<a_3-a_1$，$a_3-a_2<a_4-a_2$，所以将它们适当排序后可知，当满足$a_4-a_3=a_3-a_2=a_2-a_1$时(此时可得$a_4-a_2=a_3-a_1$)，集合$T$中只有3个元素，比如取$A=\{1,2,3,4\}$，可使$|S|=5$，$|T|=3$，所以$|S|+|T|$的最小值为8.

感悟真题

1. C　依题意得$B=\{0,1,2,3,4,8\}$，所以$A\cap B=\{1,2,3,4\}$.

2. B　因为$A\subseteq B$，则$a-2=0$或$2a-2=0$. 若$a-2=0$，解得$a=2$，此时$A=\{0,-2\}$，$B=\{1,0,2\}$，不符合题意；若$2a-2=0$，解得$a=1$，此时$A=\{0,-1\}$，$B=\{1,-1,0\}$，符合题意. 综上所述，$a=1$.

3. B　由$a^2=b^2$，得$a=\pm b$. 当$a=-b\neq 0$时，$a^2+b^2=2ab$不成立，充分性不成立；由$a^2+b^2=2ab$，得$(a-b)^2=0$，即$a=b$，显然$a^2=b^2$成立，必要性成立. 故“$a^2=b^2$”是“$a^2+b^2=2ab$”的必要不充分条件.

4. A　$M=\{x\,|\,x+2\geqslant 0\}=\{x\,|\,x\geqslant -2\}$，$N=\{x\,|\,x-1<0\}=\{x\,|\,x<1\}$，根据交集的运算可知，$M\cap N=\{x\,|\,-2\leqslant x<1\}$.

5. A　因为整数集$\mathbf{Z}=\{x\,|\,x=3k,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{x\,|\,x=3k+1,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{x\,|\,x=3k+2,k\in\mathbf{Z}\}$，$U=\mathbf{Z}$，所以$\complement_U(M\cup N)=\{x\,|\,x=3k,k\in\mathbf{Z}\}$.

第二章　一元二次函数、方程和不等式

课时提优7　等式性质与不等式性质

1. C　由$a+b>0$，$b<0$，则$a>-b>0$，所以$-a<b<0$，所以$a>-b>b>-a$.

2. C　由$a>b>1$，得$y_1-y_2=\frac{b+1}{a+1}-\frac{b}{a}=\frac{ab+a-ab-b}{(a+1)a}=\frac{a-b}{(a+1)a}>0$，即$y_1>y_2$. 由$a>b>1$，得$y_2-y_3=\frac{b}{a}-\frac{b-1}{a-1}=\frac{ab-b-ab+a}{a(a-1)}=\frac{a-b}{a(a-1)}>0$，即$y_2>y_3$，所以$y_1>y_2>y_3$.

3. B　设两次物品价格分别为$x_1,x_2(x_1\neq x_2)$，甲方案每次购买物品数量为y，乙方案每次购买物品所花的钱为z，其中$x_1,x_2,y,z>0$. 甲方案购买物品的平均价格为$\frac{x_1y+x_2y}{2y}=\frac{x_1+x_2}{2}$；乙方案购买物品的平均价格为$\frac{2z}{\frac{z}{x_1}+\frac{z}{x_2}}=\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}$. 注意到$\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}=\frac{(x_1-x_2)^2}{2(x_1+x_2)}>0$，则乙方案更优惠.

4. ABD　对于A，由$a>b>0$，则$\frac{1}{ab^2}-\frac{1}{a^2b}=\frac{a-b}{a^2b^2}>0$，即$\frac{1}{ab^2}>\frac{1}{a^2b}$，故A正确；对于B，由$a>b>0$，则$\left(a+\frac{1}{b}\right)-\left(b+\frac{1}{a}\right)=(a-b)+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=(a-b)+\frac{a-b}{ab}=(a-b)\cdot\left(1+\frac{1}{ab}\right)>0$，即$a+\frac{1}{b}>b+\frac{1}{a}$，故B正确；对于C，当$a=1$，$b=0$，$c=0$，$d=-1$时，满足$a>b$，$c>d$，而$ac=bd$，故C错误；对于D，由$a>b$，$c>d$，则$(ac+bd)-(ad+bc)=(a-b)(c-d)>0$，即$ac+bd>ad+bc$，故D正确.

5. (1)$(-9,1)$　(2)$(1,6)$　(3)32　(1)因为$1<b<4$，所以$-4<-b<-1$. 又$-5<a<2$，所以$-9<a-b<1$.

(2)因为$1<a<2$，所以$\frac{1}{2}<\frac{1}{a}<1$. 又$2<b<6$，所以$1<\frac{b}{a}<6$.

(3)由题知$\frac{1}{3}\leqslant\frac{1}{xy^2}\leqslant\frac{1}{2}$，$27\leqslant\left(\frac{x^2}{y}\right)^3\leqslant 64$，则$9\leqslant\frac{x^5}{y^5}=\frac{1}{xy^2}\cdot\left(\frac{x^2}{y}\right)^3\leqslant 32$，所以$\frac{x^5}{y^5}$的最大值是32.

6. $M<N$　$M-N=(x^2+y^2)(x-y)-(x^2y-xy^2)=(x-y)(x^2+y^2-xy)=(x-y)\left[\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}\right]$. 因为$x<y<0$，所以$x-y<0$，$\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}>0$，所以$(x-y)\left[\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}\right]<0$，所以$M<N$.

7. C　对于A，当$c<0$时，$ac<bc$，A错误；对于B，当$a=1$，$b=-2$，$c=0$，$d=-1$时，$ac<bd$，B错误；对于C，由$0<\frac{1}{|a|}<\frac{1}{|b|}$，得$|a|>|b|>0$，即$|a|>|b|$，C正确；对于D，当$a=1$，$b=-2$时，$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，D错误.

8. D　由数轴可得$-1<a<-\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}<b<0$，$\frac{1}{2}<c<1$，所以$\frac{1}{2}<-a<1$，$0<-b<\frac{1}{2}$，则$0<ab<\frac{1}{2}<c$，故选项A错误. $0<abc<\frac{1}{2}$，故选项B错误. 因为$-\frac{1}{2}<b<0$，所以$-1<2b<0$. 又$\frac{1}{2}<c<1$，所以$-\frac{1}{2}<c+2b<1$，又$-1<a<-\frac{1}{2}$，所以$c+2b>a$，故选项C错误. 因为$-1<a<-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<c<1$，且由图可知$|a|<|c|$，即$-a<c$，所以$0<a+c<\frac{1}{2}$. 又$-1<$

$2b<0$,所以 $a+c>2b$,故选项 D 正确.

9. AD　对于 A,令 $a>0,b=0$,则$\frac{1}{a-b}=\frac{1}{a}$,选项 A 错误. 对于 B,由 $a^2>0,a^2x>a^2y$,得 $x>y$,选项 B 正确. 对于 C,由 $c>d$ 得 $-d>-c$,因为 $a>b$,所以 $a-d>b-c$,选项 C 正确. 对于 D,由$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$,得$\frac{1}{-a}>\frac{1}{-b}>0$,则 $-b>-a>0$,故 $b<a<0$,所以 $b^2>ab$,选项 D 错误.

10. ABC　设路程为 s,甲用的时间为 t_1,则 $s=v_1\cdot\frac{t_1}{2}+v_2\cdot\frac{t_1}{2}=\frac{v_1+v_2}{2}t_1$,则 $t_1=s\cdot\frac{2}{v_1+v_2}$,设乙用的时间为 t_2,则 $t_2=\frac{\frac{1}{2}s}{v_1}+\frac{\frac{1}{2}s}{v_2}=s\cdot\left(\frac{1}{2v_1}+\frac{1}{2v_2}\right)=s\cdot\frac{v_1+v_2}{2v_1v_2}$,则 $\frac{2}{v_1+v_2}-\frac{v_1+v_2}{2v_1v_2}=\frac{4v_1v_2-(v_1+v_2)^2}{(v_1+v_2)\cdot 2v_1v_2}=\frac{-(v_1-v_2)^2}{(v_1+v_2)\cdot 2v_1v_2}\leqslant 0$,所以 $t_1\leqslant t_2$,当且仅当 $v_1=v_2$ 时等号成立,所以 A,B,C 正确,D 错误.

11. $<$　设空白处面积为 S,$S_1=a(b-c)-S$,$S_2=b(a-c)-S$,$b-c>0$,因为 $S_1-S_2=a(b-c)-S-b(a-c)+S=ab-ac-ab+bc=c(b-a)<0$,所以 $S_1<S_2$.

12. $[-14,7]$　设 $11x-5y=m(x-y)+n(4x-y)$,即 $11x-5y=(m+4n)x-(m+n)y$,所以$\begin{cases}m+4n=11,\\m+n=5,\end{cases}$则$\begin{cases}m=3,\\n=2,\end{cases}$即 $11x-5y=3(x-y)+2(4x-y)$. 因为 $-4\leqslant x-y\leqslant -1$,$-1\leqslant 4x-y\leqslant 5$,所以 $-12\leqslant 3(x-y)\leqslant -3$,$-2\leqslant 2(4x-y)\leqslant 10$,所以 $-14\leqslant 3(x-y)+2(4x-y)\leqslant 7$,即 $-14\leqslant 11x-5y\leqslant 7$,所以 $11x-5y$ 的取值范围是$[-14,7]$.

13. (1) **证明**:$(3a^3+2b^3)-(3a^2b+2ab^2)=3a^2(a-b)+2b^2(b-a)=(a-b)(3a^2-2b^2)$,因为 $a\geqslant b>0$,所以 $a-b\geqslant 0$,$3a^2-2b^2>0$,所以 $(a-b)(3a^2-2b^2)\geqslant 0$,故 $3a^3+2b^2\geqslant 3a^2b+2ab^2$.

(2) **解**:$(a+2)-\frac{3}{1-a}=\frac{(a+2)(1-a)-3}{1-a}=\frac{a^2+a+1}{a-1}$. 因为 $a^2+a+1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}>0$,所以当 $a>1$ 时,$\frac{a^2+a+1}{a-1}>0$,即 $a+2>\frac{3}{1-a}$;当 $a<1$ 时,$\frac{a^2+a+1}{a-1}<0$,即 $a+2<\frac{3}{1-a}$.

14. (1) **证明**:由 $a>b>c>d>0$,得 $a-d>b-c>0$,即$(a-d)^2>(b-c)^2$.

由 $ad=bc$,得$(a-d)^2+4ad>(b-c)^2+4bc$,即$(a+d)^2>(b+c)^2$,故 $a+d>b+c$.

(2) **解**:$\frac{a^ab^b}{a^bb^a}=a^{a-b}b^{b-a}=a^{a-b}\left(\frac{1}{b}\right)^{a-b}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}$.

①当 $a>b>0$ 时,即 $a-b>0$,$\frac{a}{b}>1$ 时,$\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>\left(\frac{a}{b}\right)^0=1$,所以 $a^ab^b>a^bb^a$;

②当 $b>a>0$ 时,即 $a-b<0$,$0<\frac{a}{b}<1$ 时,$\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>\left(\frac{a}{b}\right)^0=1$,所以 $a^ab^b>a^bb^a$.

综上所述,当 $a>0,b>0$ 且 $a\neq b$ 时,$a^ab^b>a^bb^a$.

15. **证明**:(1) $\frac{y+m}{x+m}-\frac{y}{x}=\frac{x(y+m)-y(x+m)}{x(x+m)}=\frac{m(x-y)}{x(x+m)}$. 因为 $x>y>0,m>0$,所以 $x+m>0,x-y>0$,所以$\frac{m(x-y)}{x(x+m)}>0$,即$\frac{y}{x}<\frac{y+m}{x+m}$.

(2)因为 a,b,c 是三角形的三边,所以 $b+c>a>0$,由(1)知 $\frac{a}{b+c}<\frac{a+a}{b+c+a}=\frac{2a}{a+b+c}$,同理 $\frac{b}{a+c}<\frac{2b}{a+b+c}$,$\frac{c}{a+b}<\frac{2c}{a+b+c}$,所以 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}<\frac{2a}{a+b+c}+\frac{2b}{a+b+c}+\frac{2c}{a+b+c}=\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2$. 又 $\frac{a}{b+c}>\frac{a}{b+c+a}$,$\frac{b}{a+c}>\frac{b}{a+b+c}$,$\frac{c}{a+b}>\frac{c}{a+b+c}$,所以 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}>\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$,所以原不等式成立.

课时提优 8　基本不等式的证明

1. B　由已知 $0<a<b$,利用基本不等式得 $\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$. 因为 $0<a<b$,所以 $a^2<ab<b^2$,$a+b<2b$,所以 $a<\sqrt{ab}<b$,$\frac{a+b}{2}<b$,所以 $a<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<b$.

2. A　对于 A,符合基本不等式中的"一正二定三相等",故 A 的运算方法正确;对于 B,当 $x>1$ 时,$x+\frac{2}{x-1}=x-1+\frac{2}{x-1}+1\geqslant 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{2}{x-1}}+1=2\sqrt{2}+1$,当且仅当 $x-1=\frac{2}{x-1}$,即 $x=\sqrt{2}+1$ 时,等号成立,故 B 的运算方法错误;对于 C,取等号的条件是 $x^2+4=\frac{9}{x^2+4}$,即 $x^2+4=\pm 3$,显然均不成立,故 C 的运算方法错误;对于 D,第一次使用基本不等式的取等号的条件为 $x=4y$,而第二次使用基本不等式的取等号的条件为 $x=y$,两者不能同时成立,故 D 的运算方法错误.

3. D　因为 $x>0$,所以 $y=\frac{(2x+1)^2}{x}=\frac{4x^2+4x+1}{x}=4x+\frac{1}{x}+4$. 由基本不等式,得 $y=4x+\frac{1}{x}+4\geqslant 2\sqrt{4x\cdot\frac{1}{x}}+4=4+4=8$,当且仅当 $4x=\frac{1}{x}$,即 $x=\frac{1}{2}$时,等号成立,则 y 的最小值为 8.

4. BD　因为$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)(2a+b)=5+\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}\geqslant 5+2\sqrt{2\times 2}=9$,当且仅当$\frac{2b}{a}=\frac{2a}{b}$,即 $a=b=\frac{1}{3}$时,等号成立,又不等式$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\geqslant m$ 恒成立,所以 $m\leqslant 9$.

5. 8　因为 $a>0,b>0$,所以 $2a+b\geqslant 2\sqrt{2ab}$,当且仅当 $2a=b$ 时取等号. 又 $2a+b=ab$,所以 $ab\geqslant 2\sqrt{2ab}$,解得 $\sqrt{ab}\geqslant 2\sqrt{2}$,即

$ab\geqslant 8$，当且仅当 $a=2,b=4$ 时取等号. 所以 ab 的最小值为 8.

6. $2-4\sqrt{3}$　$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　$y=2-3x-\frac{4}{x}(x>0)=2-\left(3x+\frac{4}{x}\right)\leqslant 2-2\sqrt{3x\cdot\frac{4}{x}}=2-4\sqrt{3}$，当且仅当 $3x=\frac{4}{x}$，即 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时，等号成立，所以 $y=2-3x-\frac{4}{x}(x>0)$ 的最大值是 $2-4\sqrt{3}$.

7. C　因为 $\frac{a-1+b-2}{2}\geqslant\sqrt{(a-1)(b-2)}=\sqrt{2}$，所以 $a+b\geqslant 3+2\sqrt{2}$，当且仅当 $a-1=b-2$，即 $a=1+\sqrt{2},b=2+\sqrt{2}$ 时取等号，所以 $a+b$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$.

8. C　因为 $\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}=\frac{2xy+x+2y+1}{\sqrt{xy}}$，因为 $x>0,y>0$，$x+2y=5,xy>0$，所以 $\frac{2xy+6}{\sqrt{xy}}\geqslant\frac{2\times 2\sqrt{3}\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}=4\sqrt{3}$，当且仅当 $xy=3$，即 $x=3,y=1$ 时，等号成立，故所求的最小值为 $4\sqrt{3}$.

9. ABD　对于 A，$y=x^2+\frac{4}{x^2}\geqslant 2\sqrt{x^2\times\frac{4}{x^2}}=4$，当且仅当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时等号成立，$y_{\min}=4$，故 A 正确. 对于 B，$y=\frac{1}{x-1}+x-1+2\geqslant 2+2=4$，当且仅当 $x-1=1$ 即 $x=2$ 时等号成立，故 B 正确. 对于 C，$y=\frac{x^2+10}{\sqrt{x^2+6}}=\frac{(x^2+6)+4}{\sqrt{x^2+6}}=\sqrt{x^2+6}+\frac{4}{\sqrt{x^2+6}}\geqslant 4$，因为 $x^2+6=4$ 无解，所以等号不成立，故 $y_{\min}$ 不是 4，故 C 错误. 对于 D，由于 $x<0$，所以 $y=2-x-\frac{1}{x}=2+\left[(-x)+\frac{1}{(-x)}\right]\geqslant 2+2\sqrt{(-x)\cdot\frac{1}{(-x)}}=4$，当且仅当 $-x=\frac{1}{(-x)}$，即 $x=-1$ 时等号成立，故 D 正确.

10. BCD　对于 A，$a+b=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)=3+\frac{2a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 3+2\sqrt{2}$，当且仅当 $a=1+\sqrt{2},b=\sqrt{2}+2$ 时取等号，即 $a+b$ 的最小值是 $3+2\sqrt{2}$，故 A 错误. 对于 B，由 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$ 得 $ab=2a+b\geqslant 2\sqrt{2ab}$，当且仅当 $2a=b$ 时取等号，则 $ab-2\sqrt{2ab}\geqslant 0$，$\sqrt{ab}(\sqrt{ab}-2\sqrt{2})\geqslant 0$. 因为 $a>0,b>0$，所以 $\sqrt{ab}\geqslant 2\sqrt{2}$，所以 $ab\geqslant 8$，故 ab 的最小值是 8，故 B 正确. 对于 C，

解法 1　$a(b-1)=ab-a=2a+b-a=a+b$，由 A 知 $a+b$ 的最小值是 $3+2\sqrt{2}$，故 C 正确.

解法 2　因为 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$，所以 $a=\frac{b}{b-2}$. 因为 $a>0,b>0$，所以 $b-2>0$，所以 $a(b-1)=\frac{b(b-1)}{b-2}=(b-2)+\frac{2}{b-2}+3\geqslant 3+2\sqrt{2}$，当且仅当 $b=2+\sqrt{2}$ 时取等号，故 C 正确. 对于 D，

解法 1　$4a^2+b^2\geqslant 2\times 2a\times b$，当且仅当 $2a=b$ 时取等号，又 $ab\geqslant 8$，也是当且仅当 $2a=b$ 时取等号，即 $4a^2+b^2\geqslant 4ab\geqslant 32$，当且仅当 $2a=b$ 时取等号，故 $4a^2+b^2$ 的最小值是 32，故 D 正确.

解法 2　因为 $ab\geqslant 8$，所以 $4a^2+b^2=(2a+b)^2-4ab=(ab)^2-4ab=(ab-2)^2-4\geqslant 32$，故 D 正确.

11. $\frac{5}{2}$　因为 $0<x<\sqrt{5}$，所以 $x\sqrt{5-x^2}=\sqrt{x^2(5-x^2)}\leqslant\frac{x^2+(5-x^2)}{2}=\frac{5}{2}$，当且仅当 $x^2=5-x^2$，即 $x=\frac{\sqrt{10}}{2}$ 时等号成立，所以 $x\sqrt{5-x^2}$ 的最大值是 $\frac{5}{2}$.

12. 9　因为 $3x>y>0$，所以 $3x-y>0$，所以 $\frac{1}{3x-y}+\frac{2}{2x+3y}=\frac{1}{3x-y}+\frac{4}{4x+6y}=\left(\frac{1}{3x-y}+\frac{4}{4x+6y}\right)(3x-y+4x+6y)=5+\frac{4x+6y}{3x-y}+\frac{4(3x-y)}{4x+6y}\geqslant 5+2\sqrt{\frac{4x+6y}{3x-y}\cdot\frac{4(3x-y)}{4x+6y}}=9$，当且仅当 $2(3x-y)=4x+6y$，即 $x=\frac{4}{33},y=\frac{1}{33}$ 时取等号.

13. **解：**(1) $x+\frac{4}{x-3}=x-3+\frac{4}{x-3}+3\geqslant 2\sqrt{(x-3)\cdot\frac{4}{x-3}}+3=7$，当且仅当 $x-3=\frac{4}{x-3}$，即 $x=5$ 时，等号成立.

(2)①因为 $xy=9x+y\geqslant 2\sqrt{9xy}=6\sqrt{xy}$，所以 $\sqrt{xy}(\sqrt{xy}-6)\geqslant 0$. 又 x,y 为正数，所以 $\sqrt{xy}\geqslant 6$，则 $xy\geqslant 36$，当且仅当 $9x=y$，即 $x=2,y=18$ 时，等号成立.

②由 $9x+y=xy$ 可得 $\frac{9}{y}+\frac{1}{x}=1$，则 $2x+3y=\left(\frac{9}{y}+\frac{1}{x}\right)\cdot(2x+3y)=29+\frac{18x}{y}+\frac{3y}{x}\geqslant 29+2\sqrt{\frac{18x}{y}\cdot\frac{3y}{x}}=29+6\sqrt{6}$，当且仅当 $\frac{18x}{y}=\frac{3y}{x}$，即 $\sqrt{6}x=y$，又 $9x+y=xy$，即 $x=\frac{3\sqrt{6}}{2}+1$，$y=9+\sqrt{6}$ 时，等号成立.

14. **证法 1(分析法)**　因为 $a>0,b>0$，要证 $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4$，只要证 $(a+1)(b+1)\geqslant 4ab$，即证 $a+b+1\geqslant 3ab$. 因为 $a+b=2$，所以只要证 $ab\leqslant 1$. 因为 $a>0,b>0$，所以 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=1$，当且仅当 $a=b=1$ 时取等号. 故原不等式成立.

证法 2　因为 $a>0,b>0,a+b=2$，所以 $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=\left(1+\frac{a+b}{2a}\right)\left(1+\frac{a+b}{2b}\right)=\left(\frac{3}{2}+\frac{b}{2a}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{a}{2b}\right)=\frac{5}{2}+\frac{3}{4}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geqslant\frac{5}{2}+\frac{3}{4}\times 2=4$，当且仅当 $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$，即 $a=b=1$ 时取等号.

证法 3　因为 $a>0,b>0,a+b=2$，所以 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=1$，所以 $\frac{1}{ab}\geqslant 1$. 因为 $1+\frac{1}{a}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{a}}$，当且仅当 $a=1$ 时取等号，$1+\frac{1}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{b}}$，当且仅当 $b=1$ 时取等号，所以 $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\right.$

$\frac{1}{b}\Big)\geqslant 4\sqrt{\frac{1}{ab}}\geqslant 4$，当且仅当 $a=b=1$ 时取等号.

15. 分析：(1)将 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}$ 与 $a+b+c$ 相乘，展开后利用基本不等式求 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}$ 的最小值；(2)将 a^2-b^2 与 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ 相乘，展开后利用基本不等式可证得；(3)分析可得 $T>0$，利用(2)中的结论可得出 $T^2\geqslant 1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2$，可求得 T 的最小值和对应的 t 的值.

(1)**解**：$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\right)=\left(1+\frac{4a}{b}+\frac{9a}{c}\right)+\left(\frac{b}{a}+4+\frac{9b}{c}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{4c}{b}+9\right)=14+\left(\frac{4a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{9a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{9b}{c}+\frac{4c}{b}\right)\geqslant 14+2\sqrt{\frac{4a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+2\sqrt{\frac{9a}{c}\cdot\frac{c}{a}}+2\sqrt{\frac{9b}{c}\cdot\frac{4c}{b}}=14+4+6+12=36$，当且仅当 $\begin{cases}\frac{4a}{b}=\frac{b}{a},\\ \frac{9a}{c}=\frac{c}{a},\\ \frac{9b}{c}=\frac{4c}{b},\\ a+b+c=1,\\ a>0,b>0,c>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=\frac{1}{6},\\ b=\frac{1}{3},\\ c=\frac{1}{2}\end{cases}$ 时，取等号，所以 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}$ 的最小值为 36.

(2)**证明**：$a^2-b^2=(a^2-b^2)\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)=x^2+y^2-\left(\frac{b^2}{a^2}x^2+\frac{a^2}{b^2}y^2\right)\leqslant x^2+y^2-2\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2\cdot\frac{a^2}{b^2}y^2}=x^2+y^2-2xy=(x-y)^2$，当且仅当 $\frac{b^2}{a^2}x^2=\frac{a^2}{b^2}y^2$，即 $\frac{x}{y}=\frac{a^2}{b^2}$ 时取等号，故 $a^2-b^2\leqslant(x-y)^2$.

(3)**解**：$T=\sqrt{5t-9}-\sqrt{t-2}$，则 $\begin{cases}5t-9\geqslant 0,\\ t-2\geqslant 0,\end{cases}$ 即 $t\geqslant 2$，$(5t-9)-(t-2)=4t-7>0$，则 $5t-9>t-2$，所以 $T>0$. 又 $\frac{(\sqrt{5t-9})^2}{1^2}-\frac{(\sqrt{t-2})^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=1$，所以由(2)中的结论可得 $T^2=(\sqrt{5t-9}-\sqrt{t-2})^2\geqslant 1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2=\frac{4}{5}$，所以 $T\geqslant\frac{2\sqrt{5}}{5}$，当且仅当 $\frac{\sqrt{5t-9}}{\sqrt{t-2}}=5$，即 $t=\frac{41}{20}$ 时，T 取最小值 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

易错警示 利用基本不等式求最值时，要注意其必须满足的三个条件：

(1)“一正”就是各项必须为正数.

(2)“二定”就是要求和的最小值，必须把构成和的二项之积转化成定值；要求积的最大值，则必须把构成积的因式的和转化成定值.

(3)“三相等”是利用基本不等式求最值时，必须验证等号成立的条件，若不能取等号，则这个定值就不是所求的最值，这也是最容易产生错误的地方.

课时提优 9　基本不等式的应用

1. A　对于 A，令 $a=-\frac{1}{s}$，$b=-\frac{1}{t}$，则 $\frac{1}{s}+\frac{1}{t}=-a-b=-(a+b)\leqslant -2\sqrt{ab}=-\frac{2}{\sqrt{st}}$，当且仅当 $s=t$ 时取等号，不成立；对于 B，$\frac{s}{t}>0$，$\frac{t}{s}>0$，所以 $\frac{s}{t}+\frac{t}{s}\geqslant 2$，当且仅当 $s=t$ 时取等号，成立；对于 C，$st=(-s)(-t)\leqslant\left(\frac{-s-t}{2}\right)^2=\left(\frac{s+t}{2}\right)^2$，当且仅当 $s=t$ 时取等号，成立；对于 D，$\left(\frac{s+t}{2}\right)^2=\frac{s^2+t^2+2st}{4}=\frac{s^2+t^2}{4}+\frac{1}{2}st\leqslant\frac{s^2+t^2}{2}$，当且仅当 $s=t$ 时取等号，成立.

2. C　因为 $x\in[1,3)$，所以 $x>0$，$3-x>0$，所以 $\frac{4}{x}+\frac{1}{3-x}=\frac{1}{3}[x+(3-x)]\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{3-x}\right)=\frac{1}{3}\left[5+\frac{x}{3-x}+\frac{4(3-x)}{x}\right]\geqslant\frac{1}{3}\left[5+2\sqrt{\frac{x}{3-x}\cdot\frac{4(3-x)}{x}}\right]=3$，当且仅当 $\frac{x}{3-x}=\frac{4(3-x)}{x}$，即 $x=2$ 时等号成立，所以 $\frac{4}{x}+\frac{1}{3-x}$ 的最小值为 3.

3. D　设草坪的长(东西方向)为 x m，则宽为 $\frac{2\,400}{x}$ m，则道路占用面积为 $S=6\times\left(\frac{2\,400}{x}+4\right)+4x=\frac{14\,400}{x}+4x+24\geqslant 2\sqrt{\frac{14\,400}{x}\times 4x}+24=504$，当且仅当 $\frac{14\,400}{x}=4x$，即 $x=60$ 时，等号成立. 所以道路占地最小面积为 504 m^2.

4. ABC　对于 A，当 $x<0$ 时，$y<0$，故 A 错误；对于 B，$y=\frac{49(x^2+1)}{4}+\frac{1}{x^2+1}\geqslant 2\sqrt{\frac{49}{4}}=7$，当且仅当 $\frac{49(x^2+1)}{4}=\frac{1}{x^2+1}$，即 $x^2+1=\frac{2}{7}$ 时，等号成立，但 $x^2+1\geqslant 1$，故 B 错误；对于 C，$y=x^2+1+\frac{9}{x^2+1}-1\geqslant 2\sqrt{9}-1=5$，当且仅当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，等号成立，故 C 错误；对于 D，$y=\left(\frac{7x}{4}+\frac{1}{4x}\right)\left(7x+\frac{1}{x}\right)=\frac{7}{2}+\frac{49x^2}{4}+\frac{1}{4x^2}\geqslant\frac{7}{2}+2\sqrt{\frac{49}{16}}=7$，当且仅当 $\frac{49x^2}{4}=\frac{1}{4x^2}$，即 $x=\pm\frac{\sqrt{7}}{7}$ 时，等号成立，故 D 正确.

5. $(4,+\infty)$　不等式 $x+\frac{y}{4}<m$ 有解，即 $m>\left(x+\frac{y}{4}\right)_{\min}$，$x+\frac{y}{4}=\left(x+\frac{y}{4}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)=1+\frac{4x}{y}+\frac{y}{4x}+1\geqslant 2+2\sqrt{\frac{4x}{y}\cdot\frac{y}{4x}}=4$，当且仅当 $\frac{4x}{y}=\frac{y}{4x}$，即 $x=2$，$y=8$ 时，等号成立，所以 $\left(x+\frac{y}{4}\right)_{\min}=4$，则 $m>4$，所以实数 m 的取值范围是 $(4,+\infty)$.

6. 10　因为 $x+y=1$，所以 $2x+2y=2$，所以 $\frac{2}{x}+\frac{8x}{y}=\frac{2x+2y}{x}+\frac{8x}{y}=2+\frac{2y}{x}+\frac{8x}{y}$. 又因为 $x>0,y>0$，所以 $\frac{2y}{x}>0$，$\frac{8x}{y}>0$，由基本不等式得 $2+\frac{2y}{x}+\frac{8x}{y}\geqslant 2+2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{8x}{y}}=10$，当且仅当 $\frac{2y}{x}=\frac{8x}{y}$，即 $x=\frac{1}{3},y=\frac{2}{3}$ 时等号成立，所以 $\frac{2}{x}+\frac{8x}{y}$ 的最小值为 10.

7. C　对于 A，当 $a<0$ 时，$a+\frac{1}{a}<0$，故 A 错误；对于 B，当 $a<0$ 时，$(-a)+\left(-\frac{1}{a}\right)>0$，故 B 错误；对于 C，因为 $a^2>0$，所以 $a^2+\frac{1}{a^2}\geqslant 2$，当且仅当 $a=\pm 1$ 时等号成立，故 C 正确；对于 D，因为 $a^2>0$，所以 $(-a)^2+\left(-\frac{1}{a}\right)^2=a^2+\frac{1}{a^2}\geqslant 2$，当且仅当 $a=\pm 1$ 时等号成立，故 D 错误.

8. C　因为正数 x,y 满足 $x+y=xy$，所以 $\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=1$，所以 $x+2y=(x+2y)\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{y}+\frac{2y}{x}+3\geqslant 2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{2y}{x}}+3=2\sqrt{2}+3$，当且仅当 $\frac{x}{y}=\frac{2y}{x}$，即 $x=\sqrt{2}+1$，$y=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立，所以 $x+2y$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$.

9. CD　因为 $x>1$，所以 $\frac{x}{x^2+3x+1}=\frac{1}{x+\frac{1}{x}+3}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}+3}=\frac{1}{5}$，当且仅当 $x=\frac{1}{x}$，即 $x=1$ 时，等号成立，但 $x>1$，则等号取不到，所以 $\frac{x}{x^2+3x+1}<\frac{1}{5}$. 对于任意 $x>1$，$\frac{x}{x^2+3x+1}<a$ 恒成立，所以 $a>\frac{1}{5}$，所以符合条件的实数 a 有 $\frac{1}{2},\frac{1}{3}$.

10. AC　因为 $2x+y=1\geqslant 2\sqrt{2x\cdot y}$，则 $xy\leqslant\frac{1}{8}$，当且仅当 $2x=y$，即 $x=\frac{1}{4},y=\frac{1}{2}$ 时，等号成立，故 A 正确；$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)(2x+y)=6+\frac{8x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 6+2\sqrt{\frac{8x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=6+4\sqrt{2}$，当且仅当 $\frac{8x}{y}=\frac{y}{x}$，即 $x=\frac{\sqrt{2}-1}{2},y=2-\sqrt{2}$ 时，等号成立，故 B 错误；由 A 知 $xy\leqslant\frac{1}{8}$，所以 $4x^2+y^2=(2x+y)^2-4xy\geqslant 1-4\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$，当且仅当 $2x=y$，即 $x=\frac{1}{4},y=\frac{1}{2}$ 时，等号成立，故 C 正确；因为 $x(y+1)=\frac{1}{2}\cdot 2x(y+1)\leqslant\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{2x+(y+1)}{2}\right]^2=\frac{1}{2}$，当且仅当 $2x=y+1$，即 $x=\frac{1}{2},y=0$ 时，等号成立，而 x,y 均为正数，则等号取不到，故 $x(y+1)<\frac{1}{2}$，故 D 错误.

11. $\frac{3}{2}$　设 $DE=x$，则由 $S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}DE\cdot DF$，得 $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}x\cdot DF$，故 $DF=\frac{1}{x}$，所以办公区域△BEF 的面积 $S_{\triangle BEF}=S_{ABCD}-S_{\triangle ABE}-S_{\triangle BCF}-S_{\triangle DEF}=2\times 2-\frac{1}{2}\times 2\times(2-x)-\frac{1}{2}\times 2\times\left(2-\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2}=x+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，当且仅当 $x=\frac{1}{x}$，即 $x=1$ 时，等号成立，所以 $S_{\triangle BEF}\geqslant\frac{3}{2}$，即△$BEF$ 面积的最小值为 $\frac{3}{2}$.

12. $3+2\sqrt{6}$　由 $ab=a+2b+4$，得 $ab-a-2b=4$，即 $(a-2)\cdot(b-1)=6$，显然 $b=1+\frac{6}{a-2}=\frac{a+4}{a-2}$，而 $a,b>0$，于是 $a>2$，$b>1$，因此 $6=(a-2)(b-1)\leqslant\left(\frac{a-2+b-1}{2}\right)^2$，解得 $a+b\geqslant 3+2\sqrt{6}$，当且仅当 $a-2=b-1$，即 $a=2+\sqrt{6},b=1+\sqrt{6}$ 时取等号，所以 $a+b$ 的最小值为 $3+2\sqrt{6}$.

13. **解**：(1)依题意，三个栏目的文字宣传区域拼在一起，相当于长、宽分别为 $a-6,b-4$ 的矩形，所以 $S=(a-6)(b-4)$.

(2)依题意，$ab=60$，由(1)知 $S=(a-6)(b-4)=ab-(4a+6b)+24=84-(4a+6b)\leqslant 84-2\sqrt{24ab}=84-24\sqrt{10}$，当且仅当 $4a=6b$ 时取等号. 由 $\begin{cases}4a=6b,\\ ab=60,\end{cases}$ 解得 $a=3\sqrt{10},b=2\sqrt{10}$，所以纸张的长和宽分别为 $3\sqrt{10}$ cm，$2\sqrt{10}$ cm 时，面积 S 取得最大值 $(84-24\sqrt{10})\text{cm}^2$.

14. **解**：(1)因为 $ab=a+2b\geqslant 2\sqrt{2}\sqrt{ab}$，即 $\sqrt{ab}\geqslant 2\sqrt{2}$，$ab\geqslant 8$，当且仅当 $a=2b=4$，即 $a=4,b=2$ 时，等号成立，所以 ab 的最小值为 8.

(2)因为 $a>0,b>0$，且 $a+2b=ab$，所以 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$，可得 $a+b=(a+b)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)=3+\frac{2b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 3+2\sqrt{\frac{2b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=3+2\sqrt{2}$，当且仅当 $\frac{2b}{a}=\frac{a}{b}$，即 $a=\sqrt{2}b$，即 $a=2+\sqrt{2},b=\sqrt{2}+1$ 时，等号成立，所以 $a+b$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$.

(3)因为 $a>0,b>0$，且 $a+2b=ab$，所以 $(a-2)(b-1)=2$，易知 $a>2,b>1$，可得 $\frac{2a}{a-2}+\frac{8b}{b-1}=\frac{2(a-2)+4}{a-2}+\frac{8(b-1)+8}{b-1}=10+\frac{4}{a-2}+\frac{8}{b-1}\geqslant 10+2\sqrt{\frac{4}{a-2}\cdot\frac{8}{b-1}}=18$，当且仅当 $\frac{4}{a-2}=\frac{8}{b-1}$，即 $a=b=3$ 时，等号成立，所以 $\frac{2a}{a-2}+\frac{8b}{b-1}$ 的最小值为 18.

15. (1) **解**：因为 $a+b+c=1$，所以 $y=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=(a+b+$

$c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=3+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)\geqslant 3+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}=9$，当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时取等号，即 $y=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 的最小值为 9.

(2) **解**：$y=\frac{2}{2x}+\frac{8}{1-2x}=\left(\frac{2}{2x}+\frac{8}{1-2x}\right)(2x+1-2x)=10+2\cdot\frac{1-2x}{2x}+8\cdot\frac{2x}{1-2x}$，而 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，所以 $2\cdot\frac{1-2x}{2x}+8\cdot\frac{2x}{1-2x}\geqslant 2\sqrt{\frac{2(1-2x)}{2x}\cdot\frac{8\times 2x}{1-2x}}=8$，当且仅当 $\frac{2(1-2x)}{2x}=\frac{8\times 2x}{1-2x}$，即 $x=\frac{1}{6}$ 时取等号，所以函数 $y=\frac{1}{x}+\frac{8}{1-2x}$ 的最小值为 18.

(3) **证明**：令 $S=\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\frac{a_3^2}{a_3+a_4}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}$. 因为 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=1$，所以 $2S=\left(\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\frac{a_3^2}{a_3+a_4}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\right)[(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\cdots+(a_n+a_1)]=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)+\left[\frac{a_2^2}{a_2+a_3}(a_1+a_2)+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}(a_1+a_2)+\frac{a_1^2}{a_1+a_2}(a_2+a_3)+\frac{a_3^2}{a_3+a_4}(a_2+a_3)+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}(a_2+a_3)+\cdots+\frac{a_1^2}{a_1+a_2}(a_n+a_1)+\cdots+\frac{a_{n+1}^2}{a_{n-1}+a_n}(a_n+a_1)\right]\geqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)+(2a_1a_2+2a_2a_3+\cdots+2a_na_1)=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=1$. 当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ 时取等号，则 $S\geqslant\frac{1}{2}$.

课时提优 10　二次函数与一元二次方程、不等式(1)

1. C　由于判别式 $\Delta=(-k)^2-4\times 1\times(-1)=k^2+4>0$，故其图象与 x 轴的交点个数是 2.

2. C　因为函数 $y=ax+b$ 经过点 $(2,0)$，所以 $2a+b=0$，即 $b=-2a$，所以 $y=bx^2-ax=-2ax^2-ax$. 令 $-2ax^2-ax=0$，则 $x_1=0$，$x_2=-\frac{1}{2}$，所以函数 $y=bx^2-ax$ 的零点是 0 和 $-\frac{1}{2}$.

3. D　因为一元二次方程 $2x^2+px+q=0$ 的解集为 $\{-1,2\}$，所以 $2x^2+px+q=2(x+1)(x-2)=0$，所以 $2x^2+px+q$ 可分解为 $2(x+1)(x-2)$.

4. BCD　由图知，当 $x=0$ 时，$y=c>0$，A 错误；$x=-3$ 和 $x=1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两实根，则 $\begin{cases}-\frac{b}{a}=-3+1,\\ \frac{c}{a}=-3\times 1,\end{cases}$ 所以 $b=2a$，$c=-3a$，B 正确；因为二次函数的图象开口向下，所以 $a<0$，则 $2a+b+c=2a+2a-3a=a<0$，C 正确；不等式 $cx^2+bx+a<0$ 为 $-3ax^2+2ax+a<0$，即 $3x^2-2x-1<0$，所以 $(3x+1)(x-1)<0$，解得 $-\frac{1}{3}<x<1$，D 正确.

5. 3，-2　根据题意，因为二次函数 $y=ax^2-bx+c=0(a>0)$ 的两个零点分别为 $-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，所以 $-\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$ 是方程 $ax^2-bx+c=0$ 的两根且 $a>0$，则有 $\begin{cases}\frac{b}{a}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2},\\ \frac{c}{a}=-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2},\end{cases}$ 可得 $b=\frac{a}{6}$，$c=-\frac{a}{6}$，方程 $bx^2+cx-a=0$，即 $ax^2-ax-6a=0(a>0)$，所以 $x^2-x-6=0$，所以 $(x-3)(x+2)=0$，解得 $x=3$ 或 $x=-2$，故所求方程的解是 3，-2.

6. 2 023　由题设得 $x_1+x_2=-1$ 且 $x_1^2+x_1-2\ 024=0$，即 $x_1^2+x_1=2\ 024$，所以 $x_1^2+2x_1+x_2=(x_1^2+x_1)+(x_1+x_2)=2\ 023$.

7. B　因为 $|5x-x^2|<6$，所以 $-6<5x-x^2<6$，所以 $\begin{cases}x^2-5x-6<0,\\ x^2-5x+6>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-1<x<6,\\ x<2\text{ 或 }x>3,\end{cases}$ 解得 $-1<x<2$ 或 $3<x<6$.

8. A　由题可知 $-x^2+4ax-3a^2=0$ 的两根为 x_1，x_2，则 $x_1+x_2=4a$，$x_1x_2=3a^2$，$a>0$，故 $x_1+x_2+\frac{3a}{x_1x_2}=4a+\frac{3a}{3a^2}=4a+\frac{1}{a}\geqslant 2\sqrt{4a\times\frac{1}{a}}=4$（当且仅当 $a=\frac{1}{2}$ 时取“=”）.

9. ABD　对于 A，二次函数 $f(x)=x^2+(a^2-1)x+a-2$ 的图象开口向上，若关于 x 的方程 $x^2+(a^2-1)x+a-2=0$ 的一根比 1 大且另一根比 1 小，则 $f(1)=1+(a^2-1)+a-2=a^2+a-2<0$，解得 $-2<a<1$，故 A 正确；对于 B，$ax-b>0$ 的解集是 $(1,+\infty)$，则 $a>0$，$a=b$，所以 $\frac{ax+b}{x-2}>0$，即 $\frac{x+1}{x-2}>0$，解得 $x<-1$ 或 $x>2$，故 B 正确；对于 C，$x^2-kx+k-1<0$ 在 $(1,2)$ 上恒成立，则只需 $k(x-1)>x^2-1$，即 $k>x+1$ 在 $(1,2)$ 上恒成立即可，则 $k\geqslant 3$，故 C 错误；对于 D，$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{ab}}$，解得 $\frac{4}{ab}\leqslant\frac{1}{2}$，当且仅当 $a=2$，$b=4$ 时，等号成立，所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}=\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)^2-\frac{4}{ab}=1-\frac{4}{ab}\geqslant 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，当且仅当 $a=2$，$b=4$ 时，等号成立，故 D 正确.

10. CD　对于 A，根据图象，可知 $a>0$，$c<0$，又对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}$，$-\frac{b}{2a}<0$，所以 $b>0$，则 $abc<0$，故 A 错误；对于 B，当 $x=1$ 时，$y=a+b+c$，不能说明 y 的值是否大于 0，故 B 错误；对于 C，设 $A(x_1,0)(x_1<0)$，$B(x_2,0)(x_2>0)$，因为 $|OC|=2|OB|$，所以 $-2x_2=c$，所以 $x_2=-\frac{1}{2}c$，所以

$B\left(-\frac{1}{2}c,0\right)$，将点 B 代入函数，得 $\frac{1}{4}ac^2-\frac{1}{2}bc+c=0$，故 $ac-2b+4=0$，故 C 正确；对于 D，当 $y=0$ 时，$ax^2+bx+c=0$，方程的两个根分别为 $x_1,x_2(x_1<0,x_2>0)$，所以 $|OA|\cdot|OB|=-x_1x_2=-\frac{c}{a}$，故 D 正确.

11. 0 或 $-\frac{1}{3}$　当 $a=0$ 时，由 $y=0$ 得 $-2x-1=0$，即 $x=-\frac{1}{2}$，符合题意；当 $a\neq0$ 时，$ax^2-2(a+1)x+a-1=0$ 为一元二次方程，且有两个相等的实数根，所以 $\Delta=4(a+1)^2-4a(a-1)=12a+4=0$，所以 $a=-\frac{1}{3}$. 综上，实数 a 的值为 0 或 $-\frac{1}{3}$.

12. $(3+2\sqrt{2},+\infty)$　令 $f(x)=mx^2-(m-1)x+1$，图象恒过点 $(0,1)$，因为方程 $mx^2-(m-1)x+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内有两个不同的根，所以 $\begin{cases}m>0,\\0<\frac{m-1}{2m}<1,\\f(1)>0,\\\Delta>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m>0,\\m>1,\\(m-1)^2-4m>0,\end{cases}$ 解得 $m>3+2\sqrt{2}$.

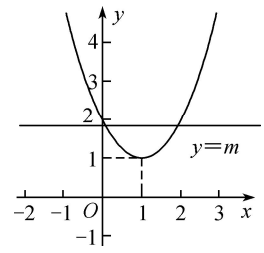
13. 解：(1) 因为 $\frac{5x+3}{2x-3}\leqslant1$，所以 $\frac{5x+3-2x+3}{2x-3}\leqslant0$，即 $\begin{cases}(3x+6)(2x-3)\leqslant0,\\2x-3\neq0,\end{cases}$ 解得 $-2\leqslant x<\frac{3}{2}$，所以 $A=\left\{x\,\middle|\,-2\leqslant x<\frac{3}{2}\right\}$.

(2) 若“$x\in A$”是“$x\in B$”的必要条件，则 $B\subseteq A$，$B=\{x\mid x^2-2mx+m^2-1\leqslant0,m\in\mathbf{R}\}=\{x\mid[x-(m-1)][x-(m+1)]\leqslant0,m\in\mathbf{R}\}=[m-1,m+1]$，所以 $\begin{cases}m-1\geqslant-2,\\m+1<\frac{3}{2},\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant m<\frac{1}{2}$. 所以实数 m 的取值范围是 $\left[-1,\frac{1}{2}\right)$.

14. 解：(1) 令 $x^2+(1-2a)x-2a=0$，则 $(x-2a)(x+1)=0$，所以 $x=-1$ 或 $x=2a$. 当 $2a<-1$，即 $a<-\frac{1}{2}$ 时，不等式的解集为 $\{x\mid x<2a$ 或 $x>-1\}$；当 $2a=-1$，即 $a=-\frac{1}{2}$ 时，不等式的解集为 $\{x\mid x\neq-1\}$；当 $2a>-1$，即 $a>-\frac{1}{2}$ 时，不等式的解集为 $\{x\mid x<-1$ 或 $x>2a\}$. 综上所述，当 $a<-\frac{1}{2}$ 时，不等式的解集为 $\{x\mid x<2a$ 或 $x>-1\}$；当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，不等式的解集为 $\{x\mid x\neq-1\}$；当 $a>-\frac{1}{2}$ 时，不等式的解集为 $\{x\mid x<-1$ 或 $x>2a\}$.

(2) 当 $b^2-1=0$，即 $b=\pm1$ 时，若 $b=1$，则 $-1\leqslant0$，满足题意；若 $b=-1$，则 $4x-1\leqslant0$，不合题意. 当 $b^2-1\neq0$ 时，由题意得 $\begin{cases}b^2-1<0,\\\Delta=4(b-1)^2+4(b^2-1)\leqslant0,\end{cases}$ 解得 $0\leqslant b<1$. 综上，实数 b 的取值范围是 $\{b\mid0\leqslant b\leqslant1\}$.

15. 2　(1,2)　设 $t=|x|$，考虑关于 t 的方程 $t^2-2t+2=m$ 的解的情况：当且仅当方程 $t^2-2t+2=m$ 有两个不同的正数解时，原方程有 4 个解；当且仅当方程 $t^2-2t+2=m$ 有一个正数解，另一个解为 0 时，原方程有 3 个解. 如图，由函数 $y=t^2-2t+2$ 的图象可知，



当 $m=2$ 时，方程 $t^2-2t+2=m$ 有一个正数解，另一个解为 0；当 $1<m<2$ 时，方程 $t^2-2t+2=m$ 有两个正数解.

课时提优 11　二次函数与一元二次方程、不等式(2)

1. B　不等式可化为 $x^2+x-6<0$，解得 $-3<x<2$，所以该不等式的解集为 $\{x\mid-3<x<2\}$.

2. A　设 x_1,x_2 是方程 $x^2-ax-b=0$ 的两个根，由题意知，$\begin{cases}x_1+x_2=2+3=a,\\x_1x_2=2\times3=-b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=5,\\b=-6,\end{cases}$ 所以不等式 $bx^2-ax-1>0$ 可变为 $-6x^2-5x-1>0$，即 $6x^2+5x+1<0$，解得 $-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{3}$.

3. D　因为关于 x 的不等式 $ax>b$ 的解集为 $\{x\mid x<2\}$，所以 $a<0$，$2a-b=0$，所以 $(ax+b)(x-1)>0$ 可化为 $a(x+2)\cdot(x-1)>0$，所以 $-2<x<1$，所以关于 x 的不等式 $(ax+b)\cdot(x-1)>0$ 的解集是 $(-2,1)$.

4. BC　对于 A，由 $\frac{x+2}{2x+1}>1$，可得 $\frac{x+2}{2x+1}-1>0$，即 $\frac{x+2-2x-1}{2x+1}>0$，整理得 $(2x+1)(x-1)<0$，解得 $-\frac{1}{2}<x<1$，A 错误；对于 B，因为 $a>-1$ 推不出 $a>2$，$a>2$ 能推出 $a>-1$，所以“$a>-1$”是“$a>2$”成立的必要不充分条件，B 正确；对于 C，因为命题 p：$\forall x\in[-1,3]$，$x^2-3x\leqslant0$，所以 $\neg p$：$\exists x_0\in[-1,3]$，$x_0^2-3x_0>0$，C 正确；对于 D，由 $a^2-3a+2=0$，得 $a=1$ 或 $a=2$，所以 $a^2-3a+2=0$ 推不出 $a=1$，$a=1$ 能推出 $a^2-3a+2=0$，所以“$a^2-3a+2=0$”是“$a=1$”成立的必要不充分条件，D 错误.

5. 16　因为关于 x 的不等式 $2x^2-ax+b<0$ 的解集为 $(-1,2)$，所以 $-1,2$ 是方程 $2x^2-ax+b=0$ 的两根，则有

$\begin{cases}-1+2=\dfrac{a}{2},\\-1\times2=\dfrac{b}{2},\end{cases}$ 解得 $a=2,b=-4$,所以 $b^a=(-4)^2=16$.

6. $\left\{a\,\middle|\,-\dfrac{3}{5}<a\leqslant1\right\}$ ①当 $a^2-1\neq0$,即 $a\neq\pm1$ 时,$\begin{cases}a^2-1<0,\\\Delta=(a-1)^2+4(a^2-1)<0,\end{cases}$ 解得 $-\dfrac{3}{5}<a<1$. ②当 $a^2-1=0$,即 $a=\pm1$ 时,若 $a=1$,则原不等式为 $-1<0$,恒成立;若 $a=-1$,则原不等式为 $2x-1<0$,$x<\dfrac{1}{2}$,不符合题目要求,舍去. 综上所述,实数 a 的取值范围是 $\left\{a\,\middle|\,-\dfrac{3}{5}<a\leqslant1\right\}$.

7. C 设 $f(x)=x^2+(a-2)x+5-a$,则由题意可知 $\begin{cases}f(2)=4+2(a-2)+5-a<0,\\f(3)=9+3(a-2)+5-a<0,\\\Delta=(a-2)^2-4(5-a)>0,\end{cases}$ 解得 $a<-5$,故实数 a 的取值范围是 $\{a\mid a<-5\}$.

8. C 不等式 $x^2-(m+3)x+3m<0$,即 $(x-3)(x-m)<0$,当 $m>3$ 时,不等式的解集为 $(3,m)$,此时要使解集中恰有 3 个整数,这 3 个整数只能是 4,5,6,故 $6<m\leqslant7$;当 $m=3$ 时,不等式的解集为 $\varnothing$,此时不符合题意;当 $m<3$ 时,不等式的解集为 $(m,3)$,此时要使解集中恰有 3 个整数,这 3 个整数只能是 0,1,2,故 $-1\leqslant m<0$. 故实数 m 的取值范围为 $[-1,0)\cup(6,7]$.

9. ABD 由题意,不等式 $x^2+ax+b>0(a>0)$ 的解集是 $\{x\mid x\neq d\}$,所以 $\Delta=a^2-4b=0$,所以 $b=\dfrac{a^2}{4}$,所以 A 正确;对于 B,$x^2+ax+b<c$ 变形为 $x^2+ax+b-c<0$,其解集为 $(-3,1)$,所以 $\begin{cases}-3+1=-a,\\-3\times1=b-c,\\a^2=4b,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=2,\\b=1,\\c=4,\end{cases}$ 故 $a+b+c=7$ 成立,所以 B 正确;对于 C,若不等式 $x^2+ax-b<0$ 的解集为 (x_1,x_2),由根与系数的关系知 $x_1x_2=-b=-\dfrac{a^2}{4}<0$,所以 C 错误;对于 D,若不等式 $x^2+ax+b<c$ 的解集为 (x_1,x_2),即 $x^2+ax+b-c<0$ 的解集为 (x_1,x_2),由根与系数的关系知 $x_1+x_2=-a$,$x_1x_2=b-c=\dfrac{a^2}{4}-c$,则 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{a^2-4\left(\dfrac{a^2}{4}-c\right)}=2\sqrt{c}=4$,解得 $c=4$,所以 D 正确.

10. BC 从图象上看,$0\leqslant ax^2+bx+c\leqslant1$ 表示抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 夹在两直线 $y=0$,$y=1$ 之间的部分,由不等式的解集为 $[-1,2]$,知 $0\leqslant ax^2+bx+c$ 恒成立,否则解集形式上不可能是个闭区间,故 $ax^2+bx+c\leqslant1$ 的解集是 $[-1,2]$,$ax^2+bx+c=1$ 的两个根为 $-1,2$,由根与系数关系知 $-\dfrac{b}{a}=1$,$\dfrac{c-1}{a}=-2$,所以 $b=-a$,$c=-2a+1$,将其代入 $b^2-4ac\leqslant0$,得 $b^2-4ac=a^2-4a(1-2a)=9a^2-4a\leqslant0$,解得 $0\leqslant a\leqslant\dfrac{4}{9}$,因为 $a>0$,所以 $0<a\leqslant\dfrac{4}{9}$,又 $4a+5b+c=4a-5a+1-2a=1-3a$,所以 $(1-3a)\in\left[-\dfrac{1}{3},1\right)$,所以 $-\dfrac{1}{2}$,1 不满足题意,$-\dfrac{1}{4}$,$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 满足题意.

11. $(-2,3)$ 依题意,$c=-3\times2=-6$,$-b=-3+4=1$,即 $b=-1$,因此不等式 $x^2+bx+c<0$ 为 $x^2-x-6<0$,解得 $-2<x<3$,所以原不等式的解集为 $(-2,3)$.

12. $(0,10]$ 设矩形花卉的宽为 $x(x>0)$ 米,因为三块花卉的面积均为 150 平方米,则长为 $\dfrac{150}{x}$ 米. 又矩形花卉的长比宽至少多 5 米,所以 $\dfrac{150}{x}\geqslant x+5$,即 $x^2+5x-150\leqslant0$,即 $(x-10)(x+15)\leqslant0$,解得 $0<x\leqslant10$,所以花卉宽的取值范围是 $(0,10]$.

13. **解**:(1)设 $y=kx+b$,由图知过点 $(30,100)$,$(45,70)$,所以 $\begin{cases}30k+b=100,\\45k+b=70,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=160,\end{cases}$ 所以 $y=-2x+160$,由 $\begin{cases}x>0,\\-2x+160>0,\end{cases}$ 得 $0<x<80$. 故 $y=-2x+160(0<x<80)$.

(2)若单价不低于成本价 24 元,且不高于 50 元销售,则 $y=-2x+160(24\leqslant x\leqslant50)$,利润 $W=(-2x+160)\times(x-24)=-2x^2+208x-3\,840(24\leqslant x\leqslant50)$,其开口向下,对称轴为 $x=-\dfrac{208}{2\times(-2)}=52$,所以当 $x=50$ 时,利润取得最大值,为 $-2\times50^2+208\times50-3\,840=1\,560$,所以当单价为 50 元时,取得最大利润 1 560 元.

(3)由(2)得利润 $W=-2x^2+208x-3\,840$,要使销售该商品每天获得的利润不低于 1 280 元,则 $-2x^2+208x-3\,840\geqslant1\,280$,整理得 $x^2-104x+2\,560\leqslant0$,即 $(x-40)(x-64)\leqslant0$,解得 $40\leqslant x\leqslant64$,销售量 $y=-2x+160$,所以当 $x=64$ 时,销售量最少,且最小值为 $-2\times64+160=32$(件).

14. **解**:(1)由题意可得,关于 x 的方程 $(a-1)x^2-2bx-2=0$ 的两根为 -1 和 2,所以 $\begin{cases}(a-1)+2b-2=0,\\4(a-1)-4b-2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

(2)由(1)知,$amx^2+(m-a)x-1\geqslant0$ 可化为 $2mx^2+(m-2)x-1\geqslant0$,即 $(2x+1)(mx-1)\geqslant0$. 若 $m=0$,不等式为 $2x+1\leqslant0$,得 $x\leqslant-\dfrac{1}{2}$;若 $m\neq0$,$(2x+1)(mx-1)=0$ 的两根为 $-\dfrac{1}{2}$ 和 $\dfrac{1}{m}$. 若 $m<0$ 时,①当 $-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{m}$,即 $m=-2$ 时,不等式 $(2x+1)(mx-1)\geqslant0$ 的解集为 $\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$;②当 $-\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{m}$,即 $m<-2$ 时,不等式 $(2x+1)(mx-1)\geqslant0$ 的解集为 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{m}\right]$;③当 $-\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{m}$,即 $-2<m<0$ 时,不等式 $(2x+1)(mx-1)\geqslant0$ 的解集为 $\left[\dfrac{1}{m},-\dfrac{1}{2}\right]$. 综上,当 $m=0$ 时,不等式的解集为 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$;当 $m=-2$ 时,不等式的解集为

$\left\{-\frac{1}{2}\right\}$；当 $m<-2$ 时，不等式的解集为 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{m}\right]$；当 $-2<m<0$ 时，不等式的解集为 $\left[\frac{1}{m},-\frac{1}{2}\right]$.

(3)由(1)知 $amx^2+(m-a)x-1\geqslant mx$ 可化为 $2mx^2-2x-1\geqslant 0$，即 $m\geqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}$ 对任意 $1\leqslant x\leqslant 2$ 恒成立. 令 $t=\frac{1}{x}\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，可得 $m\geqslant\frac{1}{2}t^2+t$，易知 $y=\frac{1}{2}t^2+t$ 的对称轴为 $t=-1$，所以当 $t=1$ 时，$y_{\max}=\frac{3}{2}$，所以 $m\geqslant\frac{3}{2}$. 所以实数 m 的取值范围是 $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$.

15. $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$ **分析**：根据题意，用 $-\frac{1}{x}$ 替换 x 可得所求的不等式，并且可知 $-\frac{1}{x}\in(-2,-1)\cup(2,3)$，从而求出 x 的解集.

关于 x 的不等式 $\frac{k}{x+a}+\frac{x+b}{x+c}<0$ 的解集为 $(-2,-1)\cup(2,3)$，用 $-\frac{1}{x}$ 替换 x，不等式可以化为 $\frac{k}{\left(-\frac{1}{x}\right)+a}+\frac{\left(-\frac{1}{x}\right)+b}{\left(-\frac{1}{x}\right)+c}=\frac{kx}{ax-1}+\frac{bx-1}{cx-1}<0$，因为 $-\frac{1}{x}\in(-2,-1)\cup(2,3)$，所以 $\frac{1}{2}<x<1$ 或 $-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{3}$，即不等式 $\frac{kx}{ax-1}+\frac{bx-1}{cx-1}<0$ 的解集为 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$.

解后反思 本题考查整体代换的思想，理解题意，将方程问题和不等式问题进行转化是解题的关键，本题属于中档题.

单元综合练 2　不等式及其应用

1. B　因为命题"$\exists x\in\mathbf{R}$，使 $2x^2+(a-1)x+\frac{1}{2}\leqslant 0$"是假命题，所以 $\forall x\in\mathbf{R}$，$2x^2+(a-1)x+\frac{1}{2}>0$ 恒成立，所以 $\Delta=(a-1)^2-4\times 2\times\frac{1}{2}<0$，解得 $-1<a<3$，故实数 a 的取值范围是 $(-1,3)$.

2. B　由 $v>10$，得 $v-10>0$，$\frac{2\,500}{v-10}>0$，$f(v)=\frac{200(v-10)}{v^2-20v+2\,600}=\frac{200(v-10)}{(v-10)^2+2\,500}=\frac{200}{(v-10)+\frac{2\,500}{v-10}}\leqslant\frac{200}{2\sqrt{(v-10)\cdot\frac{2\,500}{v-10}}}=2$，当且仅当 $v-10=\frac{2\,500}{v-10}$，即 $v=60$ 时，等号成立，所以当汽车的速度为 60 km/h 时，车流量最大.

3. BD　对于 A，当 $a=0$ 时，$-2<0$ 恒成立；当 $a\neq 0$ 时，由 $\begin{cases}a<0,\\ \Delta=4a^2+8a<0,\end{cases}$ 得 $-2<a<0$. 综上，实数 a 的取值范围是 $(-2,0]$，所以 A 错误. 对于 B，由于 $x^2-4x+5=(x-2)^2+1>0$，所以不等式 $x^2-4x+5>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，所以 B 正确. 对于 C，由 $x(2x+7)\geqslant -3$，得 $2x^2+7x+3\geqslant 0$，得 $x\leqslant -3$ 或 $x\geqslant -\frac{1}{2}$，所以不等式的解集为 $(-\infty,-3]\cup\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$，所以 C 错误. 对于 D，由 $x^2-(a+1)x+a>0$，得 $(x-1)(x-a)>0$，因为 $a<1$，所以 $x<a$ 或 $x>1$，所以不等式的解集为 $\{x|x<a$ 或 $x>1\}$，所以 D 正确.

4. AD　对于选项 A，由 $x^2-2x-3<0$，解得 $-1<x<3$，A 正确；对于选项 B，取 $x=y=2$，满足 $x+y=4$，此时 $xy=4$，B 错误；对于选项 C，取 $x=0$，得 $x+\frac{3}{x-1}=-3<2\sqrt{3}+1$，C 错误；对于选项 D，若 $c>a>b>0$，则 $\frac{1}{c-a}-\frac{1}{c-b}=\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}>0$，D 正确.

5. 10　设 $P(x,y)$，$x>0$，$y>0$，则 $|OH|=x$，$|PH|=y$，所以 $|OH|+|PH|=x+y=x+\frac{25}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{25}{x}}=10$，当且仅当 $x=\frac{25}{x}$，即 $x=5$ 时等号成立，所以 $|OH|+|PH|$ 的最小值为 10.

6. 4　因为 $mx^2-x+1<0$ 的解集为 $\{x|a<x<b\}$，所以关于 x 的方程 $mx^2-x+1=0$ 的解为 a，b，且 $m>0$，则 $a+b=\frac{1}{m}$，$ab=\frac{1}{m}$. 因为 $m>0$，所以 $a>0$，$b>0$，所以 $a+b=ab$，则 $b=1+\frac{1}{a-1}=\frac{a}{a-1}>0$，所以 $a-1>0$，则 $\frac{1}{a-1}+\frac{4}{b-1}=\frac{1}{a-1}+4(a-1)\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{a-1}\cdot 4(a-1)}=4$，当且仅当 $\frac{1}{a-1}=4(a-1)$，即 $a=\frac{3}{2}$ 时，等号成立，所以 $\frac{1}{a-1}+\frac{4}{b-1}$ 的最小值为 4.

7. 解：(1) 因为矩形 $ABCD$ 的面积为 800 m^2，$AB=x$ m，所以 $AD=\frac{800}{x}$ m，两个形状、大小完全相同的直角梯形可合并成一个小矩形，则 $\begin{cases}x-15>0,\\ \frac{800}{x}-10>0,\end{cases}$ 解得 $15<x<80$，则绿化带面积 $S=(x-15)\left(\frac{800}{x}-10\right)(15<x<80)$.

(2) 由(1)知 $S=(x-15)\left(\frac{800}{x}-10\right)=950-\left(10x+\frac{12\,000}{x}\right)\leqslant 950-2\sqrt{10x\cdot\frac{12\,000}{x}}=950-400\sqrt{3}$，当且仅当 $10x=\frac{12\,000}{x}$，即 $x=20\sqrt{3}$ 时等号成立，所以绿化带面积的最大值为 $(950-400\sqrt{3})\mathrm{m}^2$.

8. 解：(1) 因为 $a+2b=2$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}(a+2b)\cdot$

$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{2b}{a}+3\right)\geqslant\frac{1}{2}\left(2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{2b}{a}}+3\right)=\frac{2\sqrt{2}+3}{2}$，当且仅当$\begin{cases}\frac{a}{b}=\frac{2b}{a},\\a+2b=2,\end{cases}$即$\begin{cases}a=2\sqrt{2}-2,\\b=2-\sqrt{2}\end{cases}$时，等号成立，所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的最小值为$\frac{2\sqrt{2}+3}{2}$.

(2)因为$a+2b=2$，即$a=2-2b$，又$a>0,b>0$，所以$0<b<1$，所以$a-\frac{4}{b+1}=2-2b-\frac{4}{b+1}=2-\left[2(b+1)+\frac{4}{b+1}-2\right]=4-\left[2(b+1)+\frac{4}{b+1}\right]\leqslant4-2\sqrt{2(b+1)\cdot\frac{4}{b+1}}=4-4\sqrt{2}$，当且仅当$\begin{cases}2(b+1)=\frac{4}{b+1},\\a+2b=2,\end{cases}$即$\begin{cases}a=4-2\sqrt{2},\\b=\sqrt{2}-1\end{cases}$时，等号成立，所以$a-\frac{4}{b+1}$的最大值为$4-4\sqrt{2}$.

(3)因为$a+2b=2$，所以$a=2-2b$. 因为$a>0,b>0$，所以$0<b<1$，所以$\frac{ab}{a^2-2b+4}=\frac{(2-2b)b}{(2-2b)^2-2b+4}=\frac{b-b^2}{2b^2-5b+4}=\frac{-\frac{1}{2}(2b^2-5b+4)-\frac{5}{2}b+2+b}{2b^2-5b+4}=-\frac{1}{2}+\frac{-\frac{3}{2}b+2}{2b^2-5b+4}$. 令$-\frac{3}{2}b+2=t$，则$b=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}t$. 因为$0<b<1$，所以$\frac{1}{2}<t<2$，则原式化为$-\frac{1}{2}+\frac{t}{2\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}t\right)^2-5\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}t\right)+4}=-\frac{1}{2}+\frac{t}{\frac{8}{9}t^2-\frac{2}{9}t+\frac{8}{9}}$. 因为$t\neq0$，分子分母同时除以$t$，得$-\frac{1}{2}+\frac{1}{\frac{8}{9}t+\frac{8}{9t}-\frac{2}{9}}\leqslant-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{\frac{8}{9}t\cdot\frac{8}{9t}}-\frac{2}{9}}=\frac{1}{7}$，所以$\frac{ab}{a^2-2b+4}\leqslant\frac{1}{7}$，当且仅当$\frac{8}{9}t=\frac{8}{9t}$时，即$t=1$时，等号成立，此时$\begin{cases}a=\frac{2}{3},\\b=\frac{2}{3},\end{cases}$故$\frac{ab}{a^2-2b+4}$的最大值为$\frac{1}{7}$.

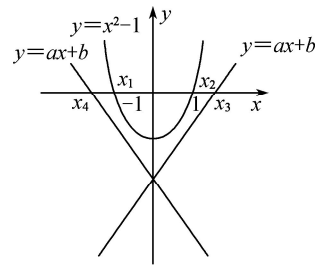
9. 解：(1) **解法1** 由$x^2-1\geqslant ax+b$，得$x^2-ax-(b+1)\geqslant0$，所以$\Delta\leqslant0$，即$a^2+4(b+1)\leqslant0$，得$b\leqslant\frac{-a^2-4}{4}$.

①当$a>0$时，$\frac{b}{a}\leqslant\frac{\frac{-a^2-4}{4}}{a}=-\frac{a}{4}-\frac{1}{a}=-\left(\frac{a}{4}+\frac{1}{a}\right)$，又因为$\frac{a}{4}+\frac{1}{a}\geqslant2\sqrt{\frac{1}{4}}=1$，所以$\frac{b}{a}\leqslant-1$.

②当$a<0$时，$\frac{b}{a}\geqslant\frac{\frac{-a^2-4}{4}}{a}=-\frac{a}{4}-\frac{1}{a}\geqslant2\sqrt{\left(-\frac{a}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)}=1$，所以$\frac{b}{a}\geqslant1$.

综上，当$a>0$时，$\frac{b}{a}$的取值范围是$(-\infty,-1]$；当$a<0$时，$\frac{b}{a}$的取值范围是$[1,+\infty)$.

解法2 若$x^2-1\geqslant ax+b$，如图：



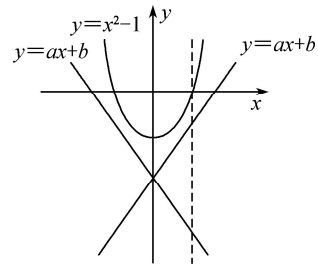
①当$a>0$时，令$ax+b=0$得，$x_3=-\frac{b}{a}$，可知$x_1\geqslant x_2$，即$-\frac{b}{a}\geqslant1$，所以$\frac{b}{a}\leqslant-1$.

②当$a<0$时，令$ax+b=0$得$x_4=-\frac{b}{a}$，可知$x_4\leqslant x_1=1$，所以$-\frac{b}{a}\leqslant-1$，即$\frac{b}{a}\geqslant1$.

综上，当$a>0$时，$\frac{b}{a}$的取值范围为$(-\infty,-1]$；当$a<0$时，$\frac{b}{a}$的取值范围为$[1,+\infty)$.

(2) **解法1** 由(1)知$b\geqslant\frac{-a^2-4}{4}$，所以$a+b\leqslant a-\frac{a^2}{4}-1$. 令$h(a)=a-\frac{a^2}{4}-4=-\frac{1}{4}(a^2-4a+4)=-\frac{1}{4}(a-2)^2$，所以$h(a)\leqslant0$，所以$a+b\leqslant0$，即$a+b$的取值范围为$(-\infty,0]$.

解法2 如图：



当$x=1$时，设$y=ax+b$的值为y_1，则$y_1=a+b$. 当$x=1$时，$y=x^2-1$的值为y_2，则$y_2=0$. 故当$x^2-1\geqslant ax+b$时，$y_2\geqslant y_1$，所以$y_1\leqslant0$，所以$a+b\leqslant0$，即$a+b$的取值范围是$(-\infty,0]$.

培优突破练1 利用基本不等式求最值问题

1. D 由题意可得$ab=k_1^2$ ①，$a+b=2k_2$ ②，$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}k_3$ ③，$\frac{ab}{a+b}=\frac{{k_4}^2}{2k_4}$ ④，且$a,b>0$. 由基本不等式的关系可知$a+b\geqslant2\sqrt{ab}$，当且仅当$a=b$时等号成立，由①②得$2k_2\geqslant2k_1$，所以$k_2\geqslant k_1$ ⑤. 因为$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\leqslant2(a^2+b^2)$，所以$a^2+b^2\geqslant\frac{(a+b)^2}{2}$，当且仅当$a=b$时等号成立，由②③得$2k_3^2\geqslant\frac{4k_2^2}{2}$，所以$k_3\geqslant k_2$ ⑥. 又$\frac{ab}{a+b}\leqslant\frac{ab}{2\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{ab}}{2}$，当且仅当$a=b$时等号成立，由①④得$\frac{k_4^2}{2k_4}\leqslant\frac{k_1}{2}$，所以$k_4\leqslant k_1$ ⑦. 综合⑤⑥⑦可得$k_4\leqslant k_1\leqslant k_2\leqslant k_3$.

2. B　对于选项 A,因为 $a\in\mathbf{R}$,所以不满足基本不等式的“一正”条件,例如 $a=-1$,则 $\frac{4}{a}+a=-5<4$,故 A 错误;对于选项 B,若 $ab>0$,则 $\frac{b}{a},\frac{a}{b}>0$,所以 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$,当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$ 时等号成立,故 B 正确;对于选项 C,因为 $a<0$,所以不满足基本不等式的“一正”条件,例如 $a=-2$,则 $a+\frac{1}{a}=-\frac{5}{2}<-2$,故 C 错误;对于选项 D,若 $\sqrt{x^2+4}=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$,整理得 $x^2=-3$,无解,即不满足基本不等式的“三相等”条件,故 D 错误.

3. D　因为 $3m+2n=1$,所以 $\frac{3}{m}+\frac{2}{n}=(3m+2n)\left(\frac{3}{m}+\frac{2}{n}\right)=13+\frac{6n}{m}+\frac{6m}{n}\geqslant 13+2\sqrt{\frac{6n}{m}\times\frac{6m}{n}}=25$,当且仅当 $\frac{6n}{m}=\frac{6m}{n}$,即 $m=n=\frac{1}{5}$ 时,等号成立,所以 $\frac{3}{m}+\frac{2}{n}$ 的最小值为 25.

4. C　因为 $0<x<\frac{1}{3}$,所以 $1-3x>0$,所以 $\frac{1}{x}+\frac{12}{1-3x}=\left(\frac{1}{x}+\frac{12}{1-3x}\right)[3x+(1-3x)]=15+\frac{1-3x}{x}+\frac{36x}{1-3x}\geqslant 2\sqrt{\frac{1-3x}{x}\times\frac{36x}{1-3x}}+15=27$,当且仅当 $\frac{1-3x}{x}=\frac{36x}{1-3x}$,即 $x=\frac{1}{9}$ 时,等号成立.

5. D　**解法 1(消元)**　$a=\frac{3-2b}{b+1}>0$,则 $0<b<\frac{3}{2}$,所以 $a+b=\frac{3-2b}{b+1}+b=\frac{5}{b+1}+(b+1)-3\geqslant 2\sqrt{5}-3$,当且仅当 $\frac{5}{b+1}=b+1$,即 $b=\sqrt{5}-1$ 时,等号成立,所以 $(a+b)_{\min}=2\sqrt{5}-3$,无最大值.

解法 2　因为 $a>0,b>0,(a+2)(b+1)=ab+a+2b+2=5$,$(a+2)(b+1)\leqslant\left[\frac{(a+2)+(b+1)}{2}\right]^2$,解得 $a+b\geqslant 2\sqrt{5}-3$,当且仅当 $a=\sqrt{5}-2,b=\sqrt{5}-1$ 时,等号成立.

6. C　因为 $x>0,y>0,x+3y=1$,所以 $\frac{y}{x+y}+\frac{1}{4y}=\frac{y}{x+y}+\frac{x+3y}{4y}=\frac{y}{x+y}+\frac{x+y+2y}{4y}=\frac{y}{x+y}+\frac{x+y}{4y}+\frac{1}{2}\geqslant 2\sqrt{\frac{y}{x+y}\cdot\frac{x+y}{4y}}+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$,当且仅当 $\frac{y}{x+y}=\frac{x+y}{4y}$,即 $x=y=\frac{1}{4}$ 时,等号成立,所以 $\frac{y}{x+y}+\frac{1}{4y}$ 的最小值为 $\frac{3}{2}$.

7. ABD　$mn=2m+2n+5\geqslant 4\sqrt{mn}+5$,则 $(\sqrt{mn}-5)\cdot(\sqrt{mn}+1)\geqslant 0$,解得 $mn\geqslant 25$,当且仅当 $m=n=5$ 时等号成立,故 A 正确;$2m+2n+5=mn\leqslant\frac{(m+n)^2}{4}$,则 $(m+n-10)\cdot(m+n+2)\geqslant 0$,解得 $m+n\geqslant 10$,当且仅当 $m=n=5$ 时等号成立,故 B 正确;显然 $m\neq 2$,则 $n=\frac{2m+5}{m-2}=2+\frac{9}{m-2}$,$m>2$,故 $4m+n=4m+\frac{9}{m-2}+2=4(m-2)+\frac{9}{m-2}+10\geqslant 2\sqrt{4(m-2)\cdot\frac{9}{m-2}}+10=22$,当且仅当 $m=\frac{7}{2}$,$n=8$ 时等号成立,则 $4m+n\in[22,+\infty)$,故 C 错误,D 正确.

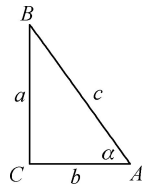
8. ACD　对于 A,由 $0<x<\frac{1}{2}$,得 $1-2x>0$,$x(1-2x)=\frac{1}{2}\times 2x(1-2x)\leqslant\frac{1}{2}\times\left(\frac{2x+1-2x}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$,当且仅当 $2x=1-2x$,即 $x=\frac{1}{4}$ 时,等号成立,故 $x(1-2x)$ 的最大值为 $\frac{1}{8}$,故 A 正确;对于 B,由 $x>-1$,得 $x+1>0$,$y=\frac{x^2+3x+3}{x+1}=\frac{(x+1)^2+(x+1)+1}{x+1}=x+1+\frac{1}{x+1}+1\geqslant 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}}+1=3$,当且仅当 $x+1=\frac{1}{x+1}$,即 $x=0$ 时,等号成立,所以 $y=\frac{x^2+3x+3}{x+1}$ 的最小值为 3,故 B 错误;对于 C,$3^x+9^y\geqslant 2\sqrt{3^x\cdot 9^y}=2\sqrt{3^{x+2y}}=6$,当且仅当 $\begin{cases}3^x=9^y,\\x+2y=2,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=1,\\y=\frac{1}{2}\end{cases}$ 时,等号成立,所以 3^x+9^y 的最小值为 6,故 C 正确;对于 D,因为 $x^2+xy-2=0,x>0,y>0$,所以 $y=\frac{2}{x}-x$,则 $3x+y=3x-x+\frac{2}{x}=2x+\frac{2}{x}\geqslant 2\sqrt{2x\cdot\frac{2}{x}}=4$,当且仅当 $2x=\frac{2}{x}$,即 $x=1$ 时,等号成立,此时 $y=1$,所以 $3x+y$ 的最小值为 4,故 D 正确.

9. AC　对于 A,由 $x^2+y^2+xy=1$ 可得 $xy=(x+y)^2-1$,当 $xy>0$ 时,因为 $xy\leqslant\frac{(x+y)^2}{4}$,所以 $(x+y)^2-1\leqslant\frac{(x+y)^2}{4}$,即 $(x+y)^2\leqslant\frac{4}{3}$,得 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}\leqslant x+y\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$,当且仅当 $x=y=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时,$x+y$ 有最小值 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$;当 $xy<0$ 时,显然有 $xy<\frac{(x+y)^2}{4}$,即得 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}<x+y<\frac{2\sqrt{3}}{3}$;当 x,y 中有一个为 0 时,$x+y=1$ 或 $x+y=-1$. 综上可得 $x+y$ 有最小值 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$,故 A 正确. 对于 B,由 $x^2+y^2+xy=1$ 可得 $x^2+y^2=1-xy\geqslant 2xy$,解得 $xy\leqslant\frac{1}{3}$,当 $x=y=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $x=y=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立,即 xy 有最大值 $\frac{1}{3}$,故 B 错误. 对于 C,由 $x^2+y^2+xy=1$ 可得 $2xy=2-2(x^2+y^2)$,因为 $2xy\leqslant x^2+y^2$,所以 $2-2(x^2+y^2)\leqslant x^2+y^2$,解得 $x^2+y^2\geqslant\frac{2}{3}$,当 $x=y=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $x=y=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时,等号成立,即 x^2+y^2 有最小值 $\frac{2}{3}$,故 C 正确. 对于 D,当 $x=-1,y=1$ 时,满足 $x^2+y^2+xy=1$,但 $x^2+y^2=2$,故 D 错误.

10. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　因为 $4x^2y^2+y^4=1$,则 $y\neq 0$,所以 $4x^2y^2=1-y^4$,所

以 $x^2=\frac{1-y^4}{4y^2}=\frac{1}{4y^2}-\frac{y^2}{4}$，所以 $x^2+y^2=\frac{1}{4y^2}-\frac{y^2}{4}+y^2=\frac{1}{4y^2}+\frac{3}{4}y^2\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{4y^2}\times\frac{3}{4}y^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，当且仅当 $\frac{1}{4y^2}=\frac{3}{4}y^2$，即 $y^2=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$x^2=\frac{\sqrt{3}}{6}$ 时等号成立，故 x^2+y^2 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

11. $\sqrt{2}$　如图所示，在 Rt△ABC 中，$\sin\alpha=\frac{a}{c}$，$\cos\alpha=\frac{b}{c}$，且 $a^2+b^2=c^2$，所以 $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)^2=\frac{a^2+b^2+2ab}{c^2}=\frac{c^2+2ab}{c^2}=1+\frac{2ab}{a^2+b^2}$. 因为 $\frac{2ab}{a^2+b^2}\leqslant\frac{2ab}{2ab}=1$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立，所以 $1+\frac{2ab}{a^2+b^2}\leqslant 2$，即 $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2\leqslant 2$，所以 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 的最大值为 $\sqrt{2}$.



12. 2　因为 $a>\frac{1}{2}$，$b>1$，所以 $2a-1>0$，$b-1>0$. 又 $2ab-2a-b=1$，所以 $(2a-1)(b-1)=2$，所以 $\frac{1}{2a-1}+\frac{2}{b-1}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{2a-1}\times\frac{2}{b-1}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(2a-1)(b-1)}}=2$，当且仅当 $\frac{1}{2a-1}=\frac{2}{b-1}$，即 $a=1$，$b=3$ 时，等号成立，所以 $\frac{1}{2a-1}+\frac{2}{b-1}$ 的最小值是 2.

13. 解：(1) $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)=5+\frac{4x}{y}+\frac{y}{x}$. 因为 x，y 都是正数，所以由基本不等式得 $\frac{4x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2\sqrt{\frac{4x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=4$. 所以 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\geqslant 9$，当且仅当 $x=\frac{1}{3}$，$y=\frac{2}{3}$ 时等号成立. 所以 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$ 的最小值为 9.

(2) $\frac{1}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x+y}{x}+\frac{x}{y}=1+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$. 因为 x，y 都是正数，所以由基本不等式得 $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+\geqslant 2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=2$. 所以 $\frac{1}{x}+\frac{y}{x}\geqslant 3$，当且仅当 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$ 时等号成立. 所以 $\frac{1}{x}+\frac{x}{y}$ 的最小值为 3.

14. 解：(1) 由题知 $5-4x>0$，则 $y=4x-5+\frac{1}{4x-5}+4=-\left[(5-4x)+\frac{1}{5-4x}\right]+4\leqslant -2\sqrt{(5-4x)\cdot\frac{1}{5-4x}}+4=2$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立，所以 $x=1$ 时，y 取最大值 2.

(2) $x+y=(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{9}{y}\right)=10+\frac{y}{x}+\frac{9x}{y}\geqslant 10+2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{9x}{y}}=16$，当且仅当 $y=3x$，即 $x=4$，$y=12$ 时，等号成立. 所以 $x=4$，$y=12$ 时，$x+y$ 取得最小值 16.

(3) 由 $b^2=2(1-a^2)$，得 $0<a<1$，所以 $a\sqrt{1+b^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}a\cdot\sqrt{3-2a^2}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2a^2+3-2a^2}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，当且仅当 $\sqrt{2}a=\sqrt{3-2a^2}$，即 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立. 所以 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$a\sqrt{1+b^2}$ 取得最大值 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

15. 解：(1) 在矩形 $ABCD$ 中，$PM\perp AB$，$PN\perp AD$，所以 $PM/\!/AD$，$PN/\!/AB$. 因为 $AB=3$，$AD=2$，所以 $\frac{x}{2}=\frac{BP}{BD}$，$\frac{y}{3}=\frac{DP}{BD}$，所以 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$. 因为 x，$y>0$，所以 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1\geqslant 2\sqrt{\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{3}}=2\sqrt{\frac{xy}{6}}$，所以 $xy\leqslant\frac{3}{2}$，当且仅当 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{1}{2}$ 取等号，此时 $x=1$，$y=\frac{3}{2}$，点 P 在 BD 的中点处，即点 P 在 BD 的中点时，四边形 $AMPN$ 的面积 S 取最大值 $\frac{3}{2}$.

(2) 由(1)可知 $\frac{x}{AD}+\frac{y}{AB}=1$，因为 x，$y>0$，所以 $\frac{x}{AD}+\frac{y}{AB}=1\geqslant 2\sqrt{\frac{x}{AD}\cdot\frac{y}{AB}}=2\sqrt{\frac{xy}{6}}$，所以 $xy\leqslant\frac{3}{2}$，当且仅当 $\frac{x}{AD}=\frac{y}{AB}=\frac{1}{2}$ 时取等号，此时 $x=\frac{AD}{2}$，$y=\frac{AB}{2}$，点 P 在 BD 的中点处，即点 P 在 BD 的中点时，四边形 $AMPN$ 的面积 S 取最大值 $\frac{3}{2}$.

培优突破练 2　含参的不等式恒成立与有解问题

1. A　$y=-x^2+mx-1$ 是开口向下的抛物线，若存在 x 使 $y>0$，则 $\Delta=m^2-4\times(-1)\times(-1)>0$，解得 $m>2$ 或 $m<-2$.

2. B　由题意得 $x+\frac{y}{4}=\left(x+\frac{y}{4}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)=1+\frac{4x}{y}+\frac{y}{4x}+1=2+\frac{4x}{y}+\frac{y}{4x}\geqslant 2+2\sqrt{\frac{4x}{y}\cdot\frac{y}{4x}}=4$，当且仅当 $\frac{4x}{y}=\frac{y}{4x}$，即 $x=2$，$y=8$ 时，等号成立，即 $x+\frac{y}{4}\geqslant 4$ 恒成立，故 $4<3m^2-m$，即 $3m^2-m-4=(3m-4)(m+1)>0$，解得 $m<-1$ 或 $m>\frac{4}{3}$.

3. A　由题意得一元二次方程 $ax^2-6x+a+2=0$ 的两根分别为 1，2，由根与系数的关系可得 $\frac{6}{a}=1+2=3$，解得 $a=2$，则不等式 $(m^2-5m-6)x^2+(m+1)x+a>0$，即 $(m^2-5m-6)x^2+(m+1)x+2>0$ 对于任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，等价于 $\begin{cases}m^2-5m-6=0,\\ m+1=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m^2-5m-6>0,\\ (m+1)^2-4\times 2(m^2-5m-6)<0,\end{cases}$ 解得 $m\leqslant -1$ 或 $m>7$，即实数 m 的取值范围是 $\{m\mid m\leqslant -1$ 或 $m>7\}$.

4. B　由题可得 $f(x)=x^2+mx-1<0$ 对于 $x\in[m,m+1]$ 恒成立，即 $\begin{cases}f(m)=2m^2-1<0,\\f(m+1)=2m^2+3m<0,\end{cases}$ 解得 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<m<0$. 所以实数 m 的取值范围是 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$

5. B　由于 $1-x+x^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$，则不等式 $\frac{2-ax-x^2}{1-x+x^2}<3$ 等价于 $4x^2+(a-3)x+1>0$. 依题意，不等式 $4x^2+(a-3)x+1>0$ 对任意实数 x 恒成立，则 $\Delta=(a-3)^2-16<0$，解得 $-1<a<7$，所以 $t_1=-1,t_2=7$，所以 $t_1+t_2=6$.

6. B　由命题 p："$\exists x\in[-1,2],x^2-a\leqslant 0$"是真命题，可得 $a\geqslant(x^2)_{\min}$，又 $x\in[-1,2]$，所以 $a\geqslant 0$；由命题 q："$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+ax+16\neq 0$"为真命题，可得 $a^2-4\times 16<0$，解得 $-8<a<8$. 因为命题 p,q 均为真命题，所以可得 $0\leqslant a<8$.

7. BCD　当 $k<0$ 时，二次函数 $y=16kx^2+8kx-3$ 的图象开口向下，所以不等式的解集不可能为 $\mathbf{R}$，所以 A 错误；当 $k=0$ 时，则 $-3\geqslant 0$，解集为 $\varnothing$，所以 B 正确；当 $k>0$ 时，$\Delta=64k^2+192k>0$，方程 $16kx^2+8kx-3=0$ 一定有两个不等实根，所以原不等式的解集不可能为 $\mathbf{R}$，也不可能为 $\varnothing$，所以 C，D 正确.

8. AB　不等式 $x^2-x+m>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，所以 $\Delta=(-1)^2-4m<0$，即 $m>\frac{1}{4}$. 因为 $m>1$，所以 $m>\frac{1}{4}$，但 $m>\frac{1}{4}$ 不能推出 $m>1$ 成立，故"$m>1$"是不等式"$x^2-x+m>0$"在 $\mathbf{R}$ 上恒成立的充分不必要条件. 同理，"$1<m<3$"也是不等式"$x^2-x+m>0$"在 $\mathbf{R}$ 上恒成立的充分不必要条件.

9. BD　因为函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 中的 x 可以取负值，此时无最小值，故 A 错误；因为正数 x,y 满足 $4x^2+9y^2+3xy=30$，所以 $30+9xy=(2x+3y)^2\geqslant 24xy$，所以 $15xy\leqslant 30$，解得 $xy\leqslant 2$，当且仅当 $2x=3y=2\sqrt{3}$，即 $x=\sqrt{3}$，$y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时取等号，故 xy 的最大值是 2，故 B 正确；设 $2x-3y=\lambda(x+y)+\mu(x-y)$，所以 $\begin{cases}\lambda+\mu=2,\\\lambda-\mu=-3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=-\frac{1}{2},\\\mu=\frac{5}{2},\end{cases}$ 即 $2x-3y=-\frac{1}{2}(x+y)+\frac{5}{2}(x-y)$，因为 $-1<x+y<4$ 且 $2<x-y<3$，所以 $-2<-\frac{1}{2}(x+y)<\frac{1}{2}$，$5<\frac{5}{2}(x-y)<\frac{15}{2}$，所以 $3<2x-3y<8$，故 C 错误；对任意 $x\in[1,+\infty)$，$\frac{x^2+2x+a}{x}>0$ 恒成立，分离参数得 $a>-(x^2+2x)$ 对任意 $x\in[1,+\infty)$ 恒成立，令 $y=-(x^2+2x)=-(x+1)^2+1$，$y_{\max}=-3$，即 $a>-3$，故 D 正确.

10. $(-\infty,0]$　因为存在 $x\in[0,1]$，使得不等式 $x^2\geqslant m+2x$ 成立，所以 $m\leqslant x^2-2x$ 在 $x\in[0,1]$ 上有解，所以 $m\leqslant(x^2-2x)_{\max}$. 令 $y=x^2-2x=(x-1)^2-1$，$x\in[0,1]$，则 $y_{\max}=(0-1)^2-1=0$，所以 $m\leqslant 0$，即实数 m 的取值范围是 $(-\infty,0]$.

11. 充分不必要　不等式 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\geqslant a^2-2a$ 恒成立，即 $a^2-2a\leqslant\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)_{\min}$，因为 $2x+y=1$，且 $xy>0$，所以 $x>0,y>0$，所以 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)(2x+y)=4+\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\geqslant 4+2\sqrt{4}=8$，当且仅当 $\frac{y}{x}=\frac{4x}{y}$，即 $x=\frac{1}{4}$，$y=\frac{1}{2}$ 时等号成立，所以 $a^2-2a\leqslant 8$，解得 $-2\leqslant a\leqslant 4$，可得命题 p：$-2\leqslant a\leqslant 4$，命题 q：$-4<a<5$. 因为 $[-2,4]\subsetneqq(-4,5)$，所以命题 p 是 q 的充分不必要条件.

12. $(-\infty,4]$　对于任意 $1<x\leqslant 4$，不等式 $x^2-(a+2)x+4\geqslant -a-1$，即 $(x-1)a\leqslant x^2-2x+5$，即 $a\leqslant\frac{x^2-2x+5}{x-1}=(x-1)+\frac{4}{x-1}$，因此，对于任意 $1<x\leqslant 4$，$a\leqslant\frac{x^2-2x+5}{x-1}=(x-1)+\frac{4}{x-1}$ 恒成立. 当 $1<x\leqslant 4$ 时，$0<x-1\leqslant 3$，则 $(x-1)+\frac{4}{x-1}\geqslant 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{4}{x-1}}=4$，当且仅当 $x-1=\frac{4}{x-1}$，即 $x=3$ 时取"="，即当 $x=3$ 时，$(x-1)+\frac{4}{x-1}$ 取得最小值 4，则 $a\leqslant 4$，所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,4]$.

13. **解**：(1)命题 p：$\forall x\in[1,3]$，$x^2-ax+1>0$ 为真，则 $a<x+\frac{1}{x}$ 恒成立，所以 $a<\left(x+\frac{1}{x}\right)_{\min}$ $(1\leqslant x\leqslant 3)$. 又 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立，即 $\left(x+\frac{1}{x}\right)_{\min}=2$，所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,2)$.

(2)若命题 q：$\exists x\in\mathbf{R}$，$2x^2+(a-2)x+2<0$ 为真命题，则 $\Delta=(a-2)^2-16>0$，解得 $a>6$ 或 $a<-2$. 由于 p 与 q 有且只有一个为假命题，故①若 p 真 q 假，则 $\begin{cases}a<2,\\-2\leqslant a\leqslant 6,\end{cases}$ 所以 $a\in[-2,2)$；②若 p 假 q 真，则 $\begin{cases}a\geqslant 2,\\a>6\text{ 或 }a<-2,\end{cases}$ 所以 $a\in(6,+\infty)$. 故实数 a 的取值范围是 $[-2,2)\cup(6,+\infty)$.

14. **解**：(1)原不等式等价于 $mx^2-2x+1-m<0$，当 $m=0$ 时，$-2x+1<0$，即 $x>\frac{1}{2}$，不恒成立；当 $m\neq 0$ 时，若不等式对于任意实数 x 恒成立，则 $m<0$ 且 $\Delta=4-4m(1-m)<0$，无解. 综上，不存在实数 m，使不等式对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

(2)设 $f(m)=(x^2-1)m-(2x-1)$，当 $m\in[-2,2]$ 时，$f(m)<0$ 恒成立，所以 $\begin{cases}f(2)<0,\\f(-2)<0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x^2-2x-1<0,\\-2x^2-2x+3<0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\frac{1-\sqrt{3}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{3}}{2},\\x<\frac{-1-\sqrt{7}}{2}\text{ 或 }x>\frac{-1+\sqrt{7}}{2},\end{cases}$ 即 $\frac{-1+\sqrt{7}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$，所以 x 的取值范围是 $\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{2},\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

(3)由题知，当 $x\in[2,+\infty)$ 时，$mx^2-2x+1-m<0$ 有解. 令 $g(x)=mx^2-2x+1-m$，当 $m=0$ 时，$-2x+1<0$，即 $x>\frac{1}{2}$，此时在 $x\in[2,+\infty)$ 上有解；当 $m<0$ 时，$x\in[2,+\infty)$，结合一元二次函数的图象，$mx^2-2x+(1-m)<0$ 显然有解；当 $m>0$ 时，$y=g(x)$ 的对称轴为 $x=\frac{1}{m}$，$\Delta=4-4m(1-m)=4m^2-4m+4=(2m-1)^2+3>0$，因为当 $x\in[2,+\infty)$ 时，$mx^2-2x+1-m<0$ 有解，所以结合一元二次函数的图象，易得 $g(2)<0$ 或 $\begin{cases}g(2)\geqslant 0,\\ \frac{1}{m}>2,\end{cases}$ 解得 $m<1$ 或 $\begin{cases}m\geqslant 1,\\ m<\frac{1}{2}\end{cases}$（舍去）. 又因为 $m>0$，所以 $0<m<1$. 综上所述，实数 m 的取值范围是 $(-\infty,1)$.

15. 解：(1) 因为不等式 $ax^2-3x+2>0$ 的解集为 $\{x\mid x<1$ 或 $x>b\}$，所以 1 和 b 是方程 $ax^2-3x+2=0$ 的两个实数根，且 $a>0$，所以 $\begin{cases}1+b=\frac{3}{a},\\ 1\cdot b=\frac{2}{a},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=2.\end{cases}$

(2) 由(1)知 $\begin{cases}a=1,\\ b=2,\end{cases}$ 于是有 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=1$，故 $2x+y=(2x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)=4+\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\geqslant 4+2\sqrt{4}=8$，当且仅当 $\frac{y}{x}=\frac{4x}{y}$，即 $x=2,y=4$ 时等号成立. 依题意有 $(2x+y)_{\min}\geqslant k^2+k+2$，即 $8\geqslant k^2+k+2$，得 $k^2+k-6\leqslant 0$，解得 $-3\leqslant k\leqslant 2$，所以 k 的取值范围是 $[-3,2]$.

章末提优

1. D　若 $a=0,b=-1$，满足 $a>b$，但 $a^2>b^2$ 不成立，故 A 错误；若 $a=-2\ 023,b=-2\ 024$，满足 $a>b$，但 $\frac{a}{b}=\frac{2\ 023}{2\ 024}$，$\frac{a+2\ 023}{b+2\ 024}=0$，$\frac{a}{b}<\frac{a+2\ 023}{b+2\ 024}$ 不成立，故 B 错误；当 $a>0>b$ 时，$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 不成立，故 C 错误；当 $a>b\geqslant 0$ 时，$a|a|=a^2$，$b|b|=b^2$，显然 $a|a|>b|b|$ 成立，当 $0\geqslant a>b$ 时，$a^2<b^2$，又 $a|a|=-a^2$，$b|b|=-b^2$，所以 $a|a|>b|b|$ 成立，当 $a>0>b$ 时，$a|a|>0$，$b|b|<0$，显然 $a|a|>b|b|$ 成立，所以当 $a>b$ 时，$a|a|>b|b|$，故 D 正确.

2. B　由 $(x-3)(5-x)<0$，得 $(x-3)(x-5)>0$，解得 $x<3$ 或 $x>5$，则不等式 $(x-3)(5-x)<0$ 的解集为 $\{x\mid x<3$ 或 $x>5\}$.

3. C　因为“$\forall x\in[1,4]$，$x^2-6x-a\leqslant 0$”为假命题，所以“$\exists x\in[1,4]$，$x^2-6x-a>0$”为真命题，则 $a<x^2-6x$ 在区间 $[1,4]$ 上有解，即 $a<(x^2-6x)_{\max}$. $y=x^2-6x$ 的对称轴为 $x=3$，且 $x\in[1,4]$，则当 $x=1$ 时，$y=x^2-6x$ 取得最大值 -5，所以 $a<-5$，即实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-5)$.

4. C　设水池底面的长、宽分别为 x m，y m，则 $xy=\frac{300}{3}=100$，设总造价为 M 元，则 $M=6(x+y)\times 100+xy\times 150=600(x+y)+15\ 000\geqslant 600\times 2\sqrt{xy}+15\ 000=600\times 2\times 10+15\ 000=27\ 000$（元）$=2.7$（万元），当且仅当 $x=y$，且 $xy=100$，即 $x=10,y=10$ 时等号成立.

5. C　因为 $a<0$，$a(x+2)\left(x+\frac{1}{a}\right)<0$，所以 $(x+2)\cdot\left(x+\frac{1}{a}\right)>0$. 又 $-\frac{1}{a}>0$，所以不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x<-2$ 或 $x>-\frac{1}{a}\right\}$.

6. B　因为 $x\in[1,3]$，所以 $f(x)=x^2+\frac{16}{x}+1=x^2+\frac{8}{x}+\frac{8}{x}+1\geqslant 3\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{8}{x}\cdot\frac{8}{x}}+1=13$，当且仅当 $x^2=\frac{8}{x}$，即 $x=2$ 时，等号成立，所以 $f(x)=x^2+\frac{16}{x}+1(x\in[1,3])$ 的最小值为 13.

7. ABD　对于 A，不等式 $\frac{1-2x}{3x+1}>1$，即 $\frac{5x}{3x+1}<0$，解得 $-\frac{1}{3}<x<0$，故解集为 $\left\{x\,\middle|\,-\frac{1}{3}<x<0\right\}$，故 A 正确；对于 B，因为 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$，所以 $a+b=(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2\geqslant\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{2}=\frac{1}{2}$，当且仅当 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$，即 $a=b=\frac{1}{4}$ 时，等号成立，所以 $a+b$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$，故 B 正确；对于 C，令 $2x+y=m(x+y)+n(x-y)=(m+n)x+(m-n)y$，所以 $\begin{cases}m+n=2,\\ m-n=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=\frac{3}{2},\\ n=\frac{1}{2},\end{cases}$ 所以 $2x+y=\frac{3}{2}(x+y)+\frac{1}{2}(x-y)$，因为 $0\leqslant x+y\leqslant 2$，$-1\leqslant x-y\leqslant 1$，所以 $0\leqslant\frac{3}{2}(x+y)\leqslant 3$，$-\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}(x-y)\leqslant\frac{1}{2}$，所以 $-\frac{1}{2}\leqslant\frac{3}{2}(x+y)+\frac{1}{2}(x-y)\leqslant\frac{7}{2}$，即 $-\frac{1}{2}\leqslant 2x+y\leqslant\frac{7}{2}$，故 C 错误；对于 D，因为正数 a,b 满足 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，所以 $a+b=ab$，即 $(a-1)(b-1)=1$，且 $a>1,b>1$，所以 $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{a-1}\cdot\frac{1}{b-1}}=2$，当且仅当 $\frac{1}{a-1}=\frac{1}{b-1}$，即 $a=b=2$ 时取等号，所以 $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}$ 的最小值为 2，故 D 正确.

8. BCD　当 $k=1$ 时，$2kx^2+kx-\frac{3}{8}=2x^2+x-\frac{3}{8}<0$，解得 $-\frac{3}{4}<x<\frac{1}{4}$，故 A 错误. 若不等式对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则当 $k=0$ 时，$-\frac{3}{8}<0$ 恒成立；当 $k\neq 0$ 时，$2k<0$，且 $\Delta=k^2-4\times 2k\times\left(-\frac{3}{8}\right)<0$，解得 $-3<k<0$. 综上，$-3<k\leqslant 0$，则整数 k 的取值集合为 $\{-2,-1,0\}$，故 B 正确. 若不等式对 $0\leqslant k\leqslant 1$ 恒成立，则

$g(k)=(2x^2+x)k-\frac{3}{8}<0$，即$\begin{cases}g(1)=(2x^2+x)\times1-\frac{3}{8}<0,\\g(0)=(2x^2+x)\times0-\frac{3}{8}<0,\end{cases}$解得$-\frac{3}{4}<x<\frac{1}{4}$，故C正确. 设 $f(x)=2kx^2+kx-\frac{3}{8}$，若恰有一个整数 x 使得不等式成立，则 $k>0$，又因为 $f(0)=-\frac{3}{8}<0$，且对称轴为 $x=-\frac{k}{4k}=-\frac{1}{4}$，所以该整数解为 $x=0$，结合二次函数 $f(x)$ 的图象，可得$\begin{cases}f(1)\geqslant0,\\f(-1)\geqslant0,\end{cases}$即$\begin{cases}3k-\frac{3}{8}\geqslant0,\\k-\frac{3}{8}\geqslant0,\end{cases}$解得 $k\geqslant\frac{3}{8}$，故D正确.

9. ABD　由高斯函数定义知A正确；当 $x=\sqrt{15}$ 时，$[x]=3$，$x^2=4[x]+3$ 成立，故B正确；当 $|x|\geqslant1$ 时，$[|x|]\geqslant1$，$[|x|]+\frac{3}{[|x|]}\geqslant2\sqrt{[|x|]\cdot\frac{3}{[|x|]}}=2\sqrt{3}$，当且仅当$[|x|]=\frac{3}{[|x|]}$，即$[|x|]=\sqrt{3}$时等号成立，这与$[|x|]\in\mathbf{N}^*$ 矛盾，故C错误；由$[x]^2-[x]<6$，解得$-2<[x]<3$，所以$-1\leqslant x<3$，故D正确.

10. $\geqslant$　由于 $a-b=(m^2+1)(n^2+4)-(mn+2)^2=4m^2+n^2-4mn=(2m-n)^2\geqslant0$，故 $a\geqslant b$.

11. $(0,+\infty)\cup\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right]$　因为$\frac{m-1}{m}\leqslant x+\frac{4}{x-1}$恒成立，所以$\frac{m-1}{m}\leqslant\left(x+\frac{4}{x-1}\right)_{\min}$. 由 $x>1$，得 $x-1>0$，$\frac{4}{x-1}>0$，$x+\frac{4}{x-1}=(x-1)+\frac{4}{x-1}+1\geqslant2\sqrt{(x-1)\times\frac{4}{x-1}}+1=5$，当且仅当 $x-1=\frac{4}{x-1}$，即 $x=3$ 时，等号成立，所以$\frac{m-1}{m}\leqslant5$，所以$\frac{4m+1}{m}\geqslant0$，解得 $m>0$ 或 $m\leqslant-\frac{1}{4}$.

12. $[6,+\infty)$　若“$\exists x\in[-2,1]$，$x^2-x-a>0$”为假命题，则“$\forall x\in[-2,1]$，$x^2-x-a\leqslant0$”为真命题，即 $a\geqslant x^2-x$，$x\in[-2,1]$恒成立，即 $a\geqslant(x^2-x)_{\max}$，$x\in[-2,1]$. $y=x^2-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，$x\in[-2,1]$，当 $x=-2$ 时，y 取得最大值6，所以 $a\geqslant6$.

13. 分析：(1)分离参数可得 $m\leqslant-\frac{x^2+2}{x}$在$(-\infty,0)$上恒成立，再由基本不等式求出$-\frac{x^2+2}{x}$的最小值，即可得解；(2)若 q 为真命题，即转化为 $x\in[0,1]$时，$(2x-2)_{\max}\geqslant m^2-3m$，求出 m 的取值范围，再分类讨论 p,q 的真假即可解出.

解：(1)因为命题 p：$\forall x<0$，不等式 $x^2+mx+2\geqslant0$ 恒成立为真命题，所以 $m\leqslant-\frac{x^2+2}{x}$在$(-\infty,0)$上恒成立，即 $m\leqslant\left(-\frac{x^2+2}{x}\right)_{\min}$，$x\in(-\infty,0)$. 又$-\frac{x^2+2}{x}=(-x)+\frac{2}{-x}\geqslant2\sqrt{(-x)\cdot\frac{2}{-x}}=2\sqrt{2}$，当且仅当$-x=\frac{2}{-x}$，即 $x=-\sqrt{2}$时，等号成立，所以 $m\leqslant2\sqrt{2}$，即实数 m 的取值范围是$(-\infty,2\sqrt{2}]$.

(2)若 q 为真命题，即 $\exists x\in[0,1]$，使不等式 $2x-2\geqslant m^2-3m$ 成立，则对于 $x\in[0,1]$，$(2x-2)_{\max}\geqslant m^2-3m$ 即可. 由于 $x\in[0,1]$，$2x-2\in[-2,0]$，所以 $m^2-3m\leqslant0$，解得 $0\leqslant m\leqslant3$，即当命题 q 为真命题时，$m\in[0,3]$. 因为命题 p,q 有且只有一个是真命题，则$\begin{cases}m\leqslant2\sqrt{2},\\m<0\text{ 或 }m>3\end{cases}$或$\begin{cases}m>2\sqrt{2},\\0\leqslant m\leqslant3,\end{cases}$解得 $m<0$ 或 $2\sqrt{2}<m\leqslant3$，所以实数 m 的取值范围是$(-\infty,0)\cup(2\sqrt{2},3]$.

14. 解：(1) 由题意得 $L=a+b+\sqrt{a^2+b^2}$ $(0<a<6,0<b<4)$.

(2) 由(1)知 $a+b+\sqrt{a^2+b^2}=4+2\sqrt{2}$，由基本不等式得 $a+b\geqslant2\sqrt{ab}$，$\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\sqrt{2ab}$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立，故 $4+2\sqrt{2}\geqslant(2+\sqrt{2})\sqrt{ab}$，得 $ab\leqslant4$，$S=24-\frac{1}{2}ab$，故 S 的最小值为 22 m^2，此时 $a=b=2$.

15. 解：(1)当 $a=1$ 时，$f(x)>g(x)$，即 $2x^2-2x+1>x^2+3x-5$，所以 $x^2-5x+6>0$，所以$(x-3)(x-2)>0$，所以 $x>3$ 或 $x<2$，所以不等式 $f(x)>g(x)$的解集为$\{x|x>3$ 或 $x<2\}$.

(2)“任意 $x>0$，都有 $f(x)>g(x)$成立”等价于“对任意 $x>0$，都有 $x+\frac{6}{x}-3>2a$ 恒成立”，即 $2a<\left(x+\frac{6}{x}-3\right)_{\min}$. 因为 $x>0$ 时，$x+\frac{6}{x}-3\geqslant2\sqrt{x\cdot\frac{6}{x}}-3=2\sqrt{6}-3$，当且仅当 $x=\sqrt{6}$时，等号成立，所以 $2a<2\sqrt{6}-3$，即 $a<\sqrt{6}-\frac{3}{2}$，所以实数 a 的取值范围是$\left(-\infty,\sqrt{6}-\frac{3}{2}\right)$.

(3)因为 $\forall x_1\in[0,1]$，$\exists x_2\in[0,1]$，使得不等式 $f(x_1)>g(x_2)$成立，所以不等式 $f(x)_{\min}>g(x)_{\min}$ 成立. 因为 $g(x)=x^2+3x-a^2-4=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-a^2-\frac{25}{4}$，所以 $g(x)$在$[0,1]$上单调递增，所以 $g(x)_{\min}=g(0)=-a^2-4$. 因为 $f(x)=2x^2-2ax+2-a^2=2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+2-\frac{3a^2}{2}$，当$\frac{a}{2}<0$，即 $a<0$ 时，$f(x)$在$[0,1]$上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(0)=2-a^2$，则 $2-a^2>-a^2-4$ 成立，故 $a<0$；当 $0\leqslant\frac{a}{2}\leqslant1$，即 $0\leqslant a\leqslant2$ 时，$f(x)_{\min}=f\left(\frac{a}{2}\right)=2-\frac{3a^2}{2}$，由 $2-\frac{3a^2}{2}>-a^2-4$，得$-2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$，所以 $0\leqslant a\leqslant2$；当$\frac{a}{2}>1$，即 $a>2$ 时，$f(x)_{\min}=f(1)=-a^2-2a+4$，由$-a^2-2a+4>-a^2-4$，得 $a<4$，所以 $2<a<4$. 综上所述，实数 a 的取值范围是$(-\infty,4)$.

感悟真题

1. BC　由 $x^2+y^2-xy=1$ 可变形为$(x+y)^2-1=3xy\leqslant$

$3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$，解得$-2\leqslant x+y\leqslant 2$，当且仅当$x=y=-1$时，$x+y=-2$，当且仅当$x=y=1$时，$x+y=2$，所以A错误，B正确；由$x^2+y^2-xy=1$可变形为$(x^2+y^2)-1=xy\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}$，解得$x^2+y^2\leqslant 2$，当且仅当$x=y=\pm 1$时取等号，所以C正确；取$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，满足$x^2+y^2-xy=1$，但$x^2+y^2=\frac{2}{3}<1$，故D错误.

2. $\{x|-1<x<3\}$　$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)<0$，解得$-1<x<3$.

3. 证明：(1)因为$2a^2+2b^2-(a+b)^2=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2\geqslant 0$，当$a=b$时等号成立，则$2a^2+2b^2\geqslant(a+b)^2$. 因为$a+b\geqslant 3$，所以$2a^2+2b^2\geqslant(a+b)^2>a+b$.

(2)$|a-2b^2|+|b-2a^2|\geqslant|a-2b^2+b-2a^2|=|2a^2+2b^2-(a+b)|=2a^2+2b^2-(a+b)\geqslant(a+b)^2-(a+b)=(a+b)\cdot(a+b-1)\geqslant 3\times 2=6$，当且仅当$a=b$时，等号成立.

阶段滚动(第一章)

1. B　因为集合$\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}=\{a^2,a-b,0\}$，分母$a\neq 0$，所以$b=0$，$a^2=1$，且$a^2\neq a-b=a$，解得$a=-1$，所以$a^{2019}+b^{2020}=-1$.

2. B　集合$A=\{-1,0,1\}$，集合$B=\{x|x>t\}$，若$A\cap B=\varnothing$，则$t\geqslant 1$，故实数t的取值范围是$\{t|t\geqslant 1\}$.

3. $\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)$　因为α是β的必要不充分条件，设集合$B=\{x|x\leqslant 2$或$x>4\}$，$A=\{x|x<-m$或$x>3m-1\}$，则$B\subsetneqq A$. 当$-m>3m-1$，即$m<\frac{1}{4}$时，$A=\mathbf{R}$，此时成立；当$-m\leqslant 3m-1$，即$m\geqslant\frac{1}{4}$时，需满足$\begin{cases}-m>2,\\3m-1\leqslant 4,\end{cases}$得$m<-2$，此时$m$无解. 综上，$m$的取值范围是$\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)$.

4. 解：(1)$A=\{x|x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$. 因为命题$p$：$\forall x\in B$，都有$x\in A$是真命题，所以$B\subseteq A$. 因为$x^2-ax+a-1=(x+1-a)(x-1)=0$，所以当$a\neq 2$时，$B=\{1,a-1\}$，则$a-1=2$，解得$a=3$；当$a=2$时，$B=\{1\}$，显然$B$是$A$的真子集. 综上，$a=2$或$a=3$.

(2)由$A\cap C=C$可得$C\subseteq A$. 当$C=\{1,2\}$时，$\begin{cases}\Delta=m^2-8>0,\\1+2=m,\end{cases}$解得$m=3$；当$C=\{1\}$时，$\begin{cases}\Delta=m^2-8=0,\\1+1=m,\end{cases}$无解；当$C=\{2\}$时，$\begin{cases}\Delta=m^2-8=0,\\2+2=m,\end{cases}$无解；当$C=\varnothing$时，$\Delta=m^2-8<0$，解得$-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$. 综上，$m$的取值范围是$\{m|m=3$或$-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}\}$.

5. 解：(1)当$a=2$时，$A=\{x|0\leqslant x\leqslant 4\}$，故$A\cap B=\{x|0\leqslant x\leqslant 4\}\cap\left\{x\middle|-1\leqslant x\leqslant\frac{7}{2}\right\}=\left\{x\middle|0\leqslant x\leqslant\frac{7}{2}\right\}$.

(2)若选①，由$A\cup B=B$，得$A\subseteq B$，显然$A\neq\varnothing$，要想满足$A\subseteq B$，则$\begin{cases}a-2\geqslant -1,\\a+2\leqslant\frac{7}{2},\end{cases}$解得$1\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}$，故实数$a$的取值范围是$\left[1,\frac{3}{2}\right]$.

若选②，因为“$x\in A$”是“$x\in B$”的充分条件，所以$A\subseteq B$，显然$A\neq\varnothing$，要想满足$A\subseteq B$，则$\begin{cases}a-2\geqslant -1,\\a+2\leqslant\frac{7}{2},\end{cases}$解得$1\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}$，故实数$a$的取值范围是$\left[1,\frac{3}{2}\right]$.

若选③，$A\cap B=\varnothing$，需满足$a+2<-1$或$a-2>\frac{7}{2}$，解得$a<-3$或$a>\frac{11}{2}$，故实数a的取值范围是$(-\infty,-3)\cup\left(\frac{11}{2},+\infty\right)$.

第三章　函数的概念与性质

课时提优12　函数的概念

1. C　对于①，$y=3$，定义域为$\mathbf{R}$，定义域内每个值按对应法则都有唯一实数3与之对应，属于多对一情形，故①是函数；对于②，$y=\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}$，定义域为$\begin{cases}x-2\geqslant 0,\\1-x\geqslant 0,\end{cases}$解得$x\in\varnothing$，故②不是函数；对于③，$y=\begin{cases}x-1,x\leqslant 0,\\x+1,x\geqslant 0,\end{cases}$定义域为$\mathbf{R}$，但当$x=0$时，$y$有两个值$-1$，1与之对应，故③不是函数；对于④，$y=\begin{cases}1,x\text{为有理数},\\0,x\text{为无理数},\end{cases}$定义域为$\mathbf{R}$，对于定义域内每一个值都有唯一实数与之对应，属于多对一情形，故④是函数.

2. A　函数$y=x-1$的定义域为$\mathbf{R}$. 对于A，函数$y=\sqrt[3]{x^3}-1=x-1$的定义域为$\mathbf{R}$，且对应关系与函数$y=x-1$相同，故A正确；对于B，函数$y=\sqrt{(x-1)^2}$的定义域为$\mathbf{R}$，但是$y=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$，对应关系与函数$y=x-1$不相同，故B错误；对于C，函数$y=\frac{x^2-1}{x+1}$的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，定义域不同，则不是同一函数，故C错误；对于D，函数$y=\sqrt{x^2}-1$的定义域为$\mathbf{R}$，但是$y=|x|-1$，对应关系与函数$y=x-1$不相同，故D错误.

方法总结　同一函数的判断方法：若两个函数的定义域和对应法则相同，则两个函数是同一个函数.

3. B　由题意，函数$f(x)=\frac{\sqrt{4+3x-x^2}}{x}$有意义，则满足分母不为零，即$x\neq 0$　①. 负数不能开偶次方根，即$4+3x-x^2\geqslant 0$，即$(-x+4)(x+1)\geqslant 0$，解得$-1\leqslant x\leqslant 4$　②. 由①②得$f(x)$的定义域为$[-1,0)\cup(0,4]$.

4. CD　当$x\leqslant 0$时，由$f(x)=2x^2+2=20$，解得$x=-3$；当$x>0$时，由$f(x)=4x=20$，解得$x=5$.

5. $(-2,0]$　若函数$y=f(x)$的定义域为$[-2,1]$，则函数$y=\frac{f(x+1)}{\sqrt{x+2}}$的定义域需要满足$\begin{cases}-2\leqslant x+1\leqslant 1,\\x+2>0,\end{cases}$解得$-2<x\leqslant 0$，

所以 $y=\frac{f(x+1)}{\sqrt{x+2}}$ 的定义域为 $(-2,0]$.

方法总结 简单函数的定义域的求法：

(1) 已知函数的解析式，则构造使解析式有意义的不等式(组)求解.

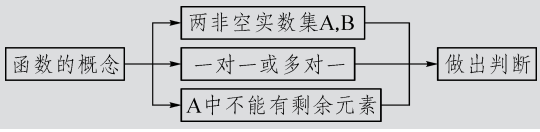
(2) 抽象函数：①若已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$，则函数 $f(g(x))$ 的定义域由不等式 $a\leqslant g(x)\leqslant b$ 求出；②若已知函数 $f(g(x))$ 的定义域为 $[a,b]$，则 $f(x)$ 的定义域为 $g(x)$ 在 $x\in[a,b]$ 时的值域.

6. $(-\infty,1]$　令 $\sqrt{1-x}=t$，则 $t\geqslant 0$，$x=1-t^2$，所以 $y=-t^2-2t+1$. 因为该函数在 $[0,+\infty)$ 上随 t 的增大而减小，所以当 $t=0$ 时，$y_{\max}=1$，所以 $y=-t^2-2t+1\leqslant 1$，故 $f(x)=x-2\sqrt{1-x}$ 的值域为 $(-\infty,1]$.

解题突破 根据换元法得到有关 t 的函数，根据取值得到值域是解题关键.

7. D　集合 A 中，当 $x=0$ 时，由对应关系 $y=x$ 可得 $y=0$，集合 B 中无对应元素，故 A 错误. 集合 A 中，当 $x=0$ 时，由对应关系 $y=x^2$ 可得 $y=0$，集合 B 中无对应元素，故 B 错误. 集合 A 中，当 $x=0$ 时，由对应关系 $y=2x$ 可得 $y=0$，集合 B 中无对应元素，故 C 错误. 集合 A 中，当 $x=0$ 时，由对应关系 $y=2x-1$ 可得 $y=-1$；当 $x=1$ 时，由对应关系 $y=2x-1$ 可得 $y=1$；当 $x=2$ 时，由对应关系 $y=2x-1$ 可得 $y=3$，一一对应关系成立，故 D 正确.

方法总结 **判断一个对应关系是否为函数的方法**



8. A　因为 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+a=\frac{1}{2}(x-1)^2+a-\frac{1}{2}$，所以当 $x\in[1,b](b>1)$ 时，$f(x)_{\min}=f(1)=a-\frac{1}{2}$，$f(x)_{\max}=f(b)=\frac{1}{2}b^2-b+a$. 又 $f(x)$ 在 $[1,b](b>1)$ 上的值域为 $[1,b](b>1)$，所以 $\begin{cases}a-\frac{1}{2}=1,\\ \frac{1}{2}b^2-b+a=b,\end{cases}$ 解得 $a=\frac{3}{2}$，$b=3$ 或 $b=1$(舍去)，所以 $a+b=\frac{3}{2}+3=\frac{9}{2}$.

9. AB　①当 $a>0$ 时，由 $\frac{a}{x}+1\geqslant 0$，得 $x\leqslant -a$ 或 $x>0$. 因为 $f(x)$ 在 $[-2,-1]$ 上有意义，所以 $-a\geqslant -1$，所以 $a\leqslant 1$，所以 a 可以取 1；②当 $a<0$ 时，由 $\frac{a}{x}+1\geqslant 0$，得 $x<0$ 或 $x\geqslant -a$，满足 $f(x)$ 在 $[-2,-1]$ 上有意义，所以 a 可以取 -1. 综上，实数 a 的可能取值是 $-1,1$.

方法总结 已知函数定义域及值域求参数问题的解题思路：(1) 注意调整思维方向，根据定义域及值域的含义，将给出的定义域及值域转化为方程的解或不等式的解集的问题. (2) 根据方程的解或不等式的解集情况来确定参数的值或取值范围. (3) 已知函数的定义域求函数中参数的取值，需运用分类讨论以及转化与化归的思想方法. 转化与化归即通过某种转化过程，将一个难以解决的问题转化为一个已经解决或者比较容易解决的问题，从而获解.

10. ABD　因为 $f(0)=0$，所以 $f_2(0)=f[f(0)]=f(0)=0,\cdots$，所以 $f_n(0)=0$，故 A 正确；因为 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，所以 $f(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $f_2(1)=f[f(1)]=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $f_3(1)=f[f_2(1)]=f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}}=\frac{\sqrt{4}}{4},\cdots$，所以 $f_n(1)=\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$，从而 $f_9(1)=\frac{\sqrt{10}}{10}$，故 B 正确；由于 $f_{n+1}(1)=\frac{\sqrt{n+2}}{n+2}=\frac{1}{\sqrt{n+2}}<\frac{1}{\sqrt{n+1}}=f_n(1)$，故 C 错误；因为 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，所以 $f_2(x)=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$，所以 $f_3(x)=f[f_2(x)]=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},\cdots$，故 $f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$，故 D 正确.

11. $[2,+\infty)$　$[0,2]$　因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，所以 $mx^2-8x+m+6\geqslant 0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立. 当 $m=0$ 时，$-8x+6\geqslant 0$ 不恒成立，不合题意. 当 $m\neq 0$ 时，由题意可得 $\begin{cases}m>0,\\ \Delta=64-4m(m+6)\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $m\geqslant 2$. 综上可知，m 的取值范围是 $[2,+\infty)$. 设函数 $y=mx^2-8x+m+6$ 的值域为 D，因为 $f(x)$ 的值域为 $[0,+\infty)$，所以 $[0,+\infty)\subseteq D$. 当 $m=0$ 时，$f(x)=\sqrt{-8x+6}$ 的值域为 $[0,+\infty)$，满足题意；当 $m\neq 0$ 时，由题意知 $\begin{cases}m>0,\\ \Delta=64-4m(m+6)\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $0<m\leqslant 2$. 综上可知，m 的取值范围是 $[0,2]$.

12. $\frac{7}{3}$　令 $x=1$，$f(1)-2f(2)=-2$；令 $x=2$，$f(2)-2f(1)=-3$. 由此解得 $f(2)=\frac{7}{3}$.

方法总结 解决抽象函数的问题时，常用特殊化的手段，即根据题意将问题中的变量进行特殊化来进行求解.

13. **解**：(1) 因为 $x\in[0,3]$，所以 $f(x)=-x^2+2x+m=$

$-(x-1)^2+m+1\in[m-3,m+1]$. 因为 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上是限定值为 8 的受限函数，所以 $m+1\leqslant 8$，解得 $m\leqslant 7$，则 m 的最大值为 7.

(2)由题意可得 $9-x^2\geqslant 0$，解得 $-3\leqslant x\leqslant 3$，当 $-3\leqslant x\leqslant 3$ 时，$0\leqslant 9-x^2\leqslant 9$，所以 $0\leqslant\sqrt{9-x^2}\leqslant 3$，所以 $4\leqslant\sqrt{9-x^2}+4\leqslant 7$，即 $4\leqslant f(x)\leqslant 7$，所以 $f(x)$ 是 $[-3,3]$ 上的受限函数，且 $f(x)$ 的限定值 M 满足 $M\geqslant 7$，故 $f(x)$ 的限定值 M 的最小值为 7.

(3)因为 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},3\right]$ 上是限定值为 11 的受限函数，所以 $f(x)\leqslant 11$ 在 $\left[\frac{1}{2},3\right]$ 上恒成立，即 $ax+\frac{a}{x}-x^2-\frac{1}{x^2}\leqslant 11$ 在 $\left[\frac{1}{2},3\right]$ 上恒成立，所以 $a\leqslant\frac{x^2+\frac{1}{x^2}+11}{x+\frac{1}{x}}$ 在 $\left[\frac{1}{2},3\right]$ 上恒成立，即 $a\leqslant x+\frac{1}{x}+\frac{9}{x+\frac{1}{x}}$ 在 $\left[\frac{1}{2},3\right]$ 上恒成立. 因为 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 3$，所以 $x+\frac{1}{x}>0$，所以 $x+\frac{1}{x}+\frac{9}{x+\frac{1}{x}}\geqslant 6$，当且仅当 $x+\frac{1}{x}=\frac{9}{x+\frac{1}{x}}$，即 $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 时，等号成立. 因为 $a\leqslant x+\frac{1}{x}+\frac{9}{x+\frac{1}{x}}$，所以 $a\leqslant 6$，即实数 a 的取值范围是 $(-\infty,6]$.

14. 解：(1)因为函数 $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$，所以 $f\left(\frac{1}{3}\right)+f(3)=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2+1}+\frac{3^2}{3^2+1}=\frac{1^2}{3^2+1}+\frac{3^2}{3^2+1}=1$，$f\left(\frac{1}{2}\right)+f(2)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}+\frac{2^2}{2^2+1}=\frac{1^2}{2^2+1}+\frac{2^2}{2^2+1}=1$.

(2)由函数 $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$，可得 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}=\frac{1}{x^2+1}$，所以 $f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=\frac{1}{x^2+1}+\frac{x^2}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{x^2+1}=1$.

(3)由函数 $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ 可得 $f(0)=0$，$f(1)=\frac{1}{2}$，根据(2)中的结论知 $f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=1$，所以 $f\left(\frac{1}{2\,024}\right)+f\left(\frac{1}{2\,023}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(2\,023)+f(2\,024)=\left[f\left(\frac{1}{2\,024}\right)+f(2\,024)\right]+\left[f\left(\frac{1}{2\,023}\right)+f(2\,023)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{1}{2}\right)+f(2)\right]+f(0)+f(1)=2\,023\left[f\left(\frac{1}{2}\right)+f(2)\right]+0+\frac{1}{2}=\frac{4\,047}{2}$.

15. C　分析：求得 $f(0)=\frac{1}{2}$ → 当 $x\neq 0$ 时，函数化简变形得 $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{x+\frac{1}{x}}$ → 令 $t=x+\frac{1}{x}$ → 分 $x>0$ 和 $x<0$ 两种情况并结合基本不等式求出 t 的取值范围 → 求出 $f(x)$ 的值域 → 由高斯函数的定义求出 $y=[f(x)]$ 的值域.

显然，$f(0)=\frac{1}{2}$. 当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}-\frac{1}{2}=\frac{2(x+1)^2-(x^2+1)}{2(x^2+1)}=\frac{x^2+4x+1}{2(x^2+1)}=\frac{1}{2}+\frac{2}{x+\frac{1}{x}}$. 令 $t=x+\frac{1}{x}$，当 $x>0$ 时，$t=x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立，则 $0<\frac{1}{t}\leqslant\frac{1}{2}$，所以 $\frac{1}{2}<f(x)\leqslant\frac{3}{2}$；当 $x<0$ 时，$t=x+\frac{1}{x}\leqslant -2\cdot\sqrt{(-x)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)}=-2$，当且仅当 $x=-1$ 时，等号成立，则 $-\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{t}<0$，所以 $-\frac{1}{2}\leqslant f(x)<\frac{1}{2}$. 综上所述，$f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$，所以根据高斯函数的定义知，函数 $y=[f(x)]$ 的值域为 $\{-1,0,1\}$，

课时提优 13　函数的表示方法

1. C　由于 $f(1-2x)=\frac{1-x^2}{x^2}(x\neq 0)$，当 $x=\frac{1}{4}$ 时，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1-\frac{1}{16}}{\frac{1}{16}}=15$.

2. B　设一次函数 $f(x)=ax+b(a\neq 0)$，则 $f[f(x)]=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$. 因为 $f[f(x)]=4x-3$，所以 $\begin{cases}a^2=4,\\ ab+b=-3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=-1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2,\\ b=3,\end{cases}$ 所以 $f(x)=2x-1$ 或 $f(x)=-2x+3$，所以 $f(1)=2\times 1-1=1$ 或 $f(1)=-2\times 1+3=1$.

3. C　设小明从 1 600 处到终点的速度为 m m/s，小刚从 1 450 m 处到终点的速度为 n m/s. 根据题意，得 $\begin{cases}1\,600+100m=1\,450+100n,\\ 1\,600+300m=1\,450+200n,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=1.5,\\ n=3.\end{cases}$ 故这次越野跑的全程为 $1\,600+300\times 1.5=1\,600+450=2\,050$(m)，即 $b=2\,050$.

4. ACD　由题意知，$f(6)=3$，选项 A 正确；若 $f(x)=3$，则 $5\leqslant x<10$，选项 B 错误；函数的定义域为 $(0,20]$，选项 C 正确；函数的值域为 $\{2,3,4,5\}$，选项 D 正确.

5. $x+1$　因为 $3f(x)-f(2-x)=4x$　①，以 $2-x$ 代替 x，得 $3f(2-x)-f(x)=4(2-x)$　②，②+①×3，得 $8f(x)=8+8x$，所以 $f(x)=1+x$.

方法总结　解方程组法求解析式：已知 $f(x)$ 与 $f\left(\frac{1}{x}\right)$，$f(-x)$ 等之间的关系式，可根据已知条件构造出另外一个等式组成方程组，通过解方程组求出 $f(x)$.

6. $f(x)=2\cdot 4^x$（答案不唯一）　由题意，$\frac{f(0.5)}{f(0)}=2$，$\frac{f(1)}{f(0.5)}=2$，…，$\frac{f(0.5n)}{f[0.5(n-1)]}=2$，$n\in\mathbf{N}^*$，累乘可得 $\frac{f(0.5n)}{f(0)}=2^n$，即 $f(0.5n)=2\cdot 2^n$，令 $x=0.5n$，则 $n=2x$，所以 $f(x)=2\cdot 2^{2x}=2\cdot 4^x$.

7. D　由 $f(x+1)=x^2+x=(x+1)^2-(x+1)$，则 $f(x)=x^2-x$. 又函数 $f(x+1)$ 的定义域为 $[-1,1]$，即 $-1\leqslant x\leqslant 1$，所以 $0\leqslant x+1\leqslant 2$，所以函数 $f(x)=x^2-x$ 的定义域为 $[0,2]$.

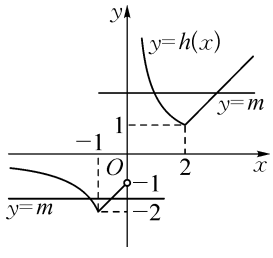
8. A　因为 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x,x\geqslant 0,\\-x^2+2x,x<0,\end{cases}$ 令 $f(a)=t$，则 $f[f(a)]\geqslant 3$ 可化为 $f(t)\geqslant 3$. 当 $t\geqslant 0$ 时，$t^2+2t\geqslant 3$，解得 $t\geqslant 1$（负值舍去），即 $f(a)\geqslant 1$；当 $t<0$ 时，$-t^2+2t\geqslant 3$，即 $t^2-2t+3\leqslant 0$，而 $t^2-2t+3=(t-1)^2+2>0$，故上述不等式无解. 综上，$f(a)\geqslant 1$. 若 $a\geqslant 0$，则 $a^2+2a\geqslant 1$，解得 $a\geqslant\sqrt{2}-1$（负值舍去）；若 $a<0$，则 $-a^2+2a\geqslant 1$，解得 $a=1$（舍去）. 综上，$a\geqslant\sqrt{2}-1$.

9. BCD　当 $m=0$ 时，函数 $f(x)=x|x|=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\-x^2, & x<0,\end{cases}$ 故选项 D 符合；当 $m>0$ 时，函数 $f(x)=x|x+m|=\begin{cases}x^2+mx, & x\geqslant -m,\\-x^2-mx, & x<-m,\end{cases}$ 故选项 C 符合；当 $m<0$ 时，函数 $f(x)=x|x+m|=\begin{cases}x^2+mx, & x\geqslant -m,\\-x^2-mx, & x<-m,\end{cases}$ 故选项 B 符合.

10. AC　由题意可知，在 0 点到 3 点这段时间，每小时进水量为 2，即 2 个进水口同时进水且不出水，故 A 正确；从丙图可知 3 点到 4 点水量减少了 1，所以应该是有一个进水口进水，同时出水口也出水，故 B 错误，C 正确；当两个进水口同时进水，出水口也同时出水时，水量保持不变，故 D 错误.

易错警示　本题易忽略题目条件“至少打开一个水口”而选 D 致错.

11. $(-2,-1)\cup(1,+\infty)$　由 $x-1-\frac{2}{x}\geqslant 0$，得 $\frac{(x+1)(x-2)}{x}\geqslant 0$，则 $\begin{cases}x<0,\\(x+1)(x-2)\leqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>0,\\(x+1)(x-2)\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant x<0$ 或 $x\geqslant 2$；由 $x-1-\frac{2}{x}<0$，解得 $x<-1$ 或 $0<x<2$. 令 $h(x)=\max\{f(x),g(x)\}(x\neq 0)$，则 $h(x)=\begin{cases}x-1, & x\in[-1,0)\cup[2,+\infty)\\\frac{2}{x}, & x\in(-\infty,-1)\cup(0,2).\end{cases}$ 在同一平面直角坐标系内作出直线 $y=m$ 与函数 $y=h(x)$ 的图象，如图：



观察图象知，当 $-2<m<-1$ 或 $m>1$ 时，直线 $y=m$ 与函数 $y=h(x)$ 的图象有 2 个交点，所以实数 m 的取值范围是 $\{m\mid -2<m<-1$ 或 $m>1\}$.

方法总结　根据题目新定义，得出 $h(x)=\begin{cases}x-1, & x\in[-1,0)\cup[2,+\infty),\\\frac{2}{x}, & x\in(-\infty,-1)\cup(0,2),\end{cases}$ 进而画出其图象是解决本题的关键.

12. $\begin{cases}\frac{2}{1-x}, & x\neq 1,\\1, & x=1\end{cases}$　由 $f(x)+xf(2-x)=2$　①，得 $f(2-x)+(2-x)f(x)=2$　②. 由①②两式解得 $f(x)=\frac{2}{1-x}(x\neq 1)$. 当 $x=1$ 时，$f(2-1)+(2-1)f(1)=2$，解得 $f(1)=1$. 综上，$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{1-x}, & x\neq 1,\\1, & x=1.\end{cases}$

易错警示　本题易忽略对 x 是否等于 1 进行讨论而出错.

13. 解：(1) 设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，由 $f(0)=1$，得 $c=1$. 由 $f(x+1)=f(x)+2x$，得 $a(x+1)^2+b(x+1)+1=ax^2+bx+1+2x$. 整理，得 $(2a-2)x+(a+b)=0$，所以 $\begin{cases}2a-2=0,\\a+b=0,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}a=1,\\b=-1,\end{cases}$ 所以 $f(x)=x^2-x+1$.

(2) 因为 $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\right]$，所以 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$. 令 $t=x+\frac{1}{x}$，由双勾函数的性质可得 $t\leqslant -2$ 或 $t\geqslant 2$，所以 $f(t)=t^3-3t$，所以 $f(x)=x^3-3x(x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant -2)$.

(3) 因为 $f(x-y)=f(x)-y(2x-y+1)$ 对一切实数 x,y 都成立，且 $f(0)=1$. 令 $x=y$，则 $f(0)=f(x)-x(2x-x+1)$. 又因为 $f(0)=1$，所以 $f(0)=f(x)-x(x+1)=1$，即 $f(x)=x^2+x+1$.

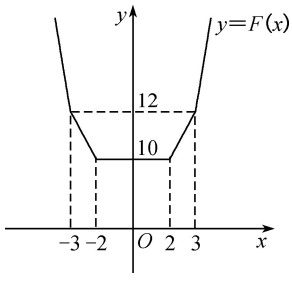
(4) 在等式 $2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$ 中，以 $\frac{1}{x}$ 代替 x，得 $2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=\frac{3}{x}$. 联立 $\begin{cases}2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=3x,\\f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{x},\end{cases}$ 变形，得 $\begin{cases}4f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=6x,\\f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{x},\end{cases}$ 解得 $f(x)=2x-\frac{1}{x}(x\neq 0)$.

方法总结　根据条件求函数的解析式，常用的方法：(1) 已知函数的类型，用待定系数法求解，如题(1)；(2) 由复合函数 $f(g(x))$ 的解析式，求 $f(x)$ 的解析式，可用配凑法或换元法求解，如题(2)；(3) 已知函数方程，求函数的解析式，用构造函数方程组法或用赋值法进行求解，如题(3)(4).

14. 解：(1) 当 $x\leqslant -2$ 时，$f(x)=2-x-2-x=-2x$，所以

$-2x\geqslant x+3$，解得 $x\leqslant -1$，所以 $x\leqslant -2$；当 $-2<x\leqslant 2$ 时，$f(x)=2-x+x+2=4$，所以 $4\geqslant x+3$，解得 $x\leqslant 1$，所以 $-2<x\leqslant 1$；当 $x>2$ 时，$f(x)=x-2+x+2=2x$，所以 $2x\geqslant x+3$，解得 $x\geqslant 3$，所以 $x\geqslant 3$. 综上，不等式 $f(x)\geqslant x+3$ 的解集为 $(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$.

(2) 当 $x\leqslant -3$ 时，$F(x)=-2x+3-x-x-3=-4x$. 当 $-3<x<-2$ 时，$F(x)=-2x+3-x+x+3=-2x+6$. 当 $-2\leqslant x<2$ 时，$F(x)=4+3-x+x+3=10$. 当 $2\leqslant x<3$ 时，$F(x)=2x+3-x+x+3=2x+6$. 当 $x\geqslant 3$ 时，$F(x)=2x+x-3+x+3=4x$. 作出函数图象如图所示，若 $F(a^2-3a+2)=F(a-2)$，则① $a^2-3a+2=a-2$，解得 $a=2$；② $a^2-3a+2=-(a-2)$，解得 $a=0$ 或 $a=2$；③ $-2\leqslant a^2-3a+2\leqslant 2$，$-2\leqslant a-2\leqslant 2$，所以 $0\leqslant a\leqslant 3$. 综上，整数 a 的取值为 0，1，2，3，故和为 6.



解后反思 根据函数的图象来寻找解题的突破口，是常见的破题方法，由函数图象的直观性，可以有效地寻找问题的突破方向，从而解决问题.

15. AC　对于选项 A，将 $f(x+1)-f(x-1)\geqslant x$ 中的 x 替换为 $x+2$，得 $f[(x+2)+1]-f[(x+2)-1]=f(x+3)-f(x+1)\geqslant x+2$，故 A 正确. 对于选项 B，设 $f(x)=ax+b$，则 $f(x+1)-f(x-1)=2a\geqslant x$. 由于 x 可无限大，$2a\geqslant x$ 无法对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，故一次函数不存在，故 B 错误. 对于选项 C，设 $f(x)=ax^2+bx+c$. 由 $f(x+1)-f(x-1)=4ax+2b\geqslant x$，得 $4a=1$，$2b\geqslant 0$，即 $a=\frac{1}{4}$，$b\geqslant 0$. 由 $f(x+3)-f(x-3)=12ax+6b\leqslant 3x$，代入 $a=\frac{1}{4}$，得 $3x+6b\leqslant 3x$，则 $b\leqslant 0$. 故 $b=0$. 由 $f(1)=1$，得 $\frac{1}{4}+c=1$，即 $c=\frac{3}{4}$. 因此 $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}$，存在且唯一，故 C 正确，对于选项 D，由 C 中 $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}$，得 $f(11)=\frac{1}{4}\times 121+\frac{3}{4}=31\neq 30$，故 D 错误.

课时提优 14　函数的单调性

1. C　$f(x)=x|x-2|=\begin{cases}x^2-2x, & x\geqslant 2,\\ -x^2+2x, & x<2.\end{cases}$ 由二次函数的图象可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,1]$，$[2,+\infty)$ 上单调递增.

2. C　对选项 A，取 $a=0$，则 $f(a)=f(2a)$，不成立；对选项 B，取 $a=0$，则 $f(a^2)=f(a)$，不成立；对选项 C，$a^2+2-2a=(a-1)^2+1>0$，故 $a^2+2>2a$，函数单调递减，故 $f(a^2+2)<f(2a)$，成立；对选项 D，取 $a=0$，则 $f(1)=f(a^2+1)<f(0)=f(a)$，不成立.

3. A　由 $|f(x-1)|>1$，得 $f(x-1)>1$ 或 $f(x-1)<-1$. 因为函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，$f(-1)=1$，$f(3)=-1$，所以 $x-1<-1$ 或 $x-1>3$，解得 $x<0$ 或 $x>4$.

4. BC　因为当 $x\leqslant -1$ 时，函数 $f(x)=-x^2+2a$ 单调递增，又函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以需满足 $\begin{cases}a>0,\\ -1+2a\leqslant -a+4,\end{cases}$ 解得 $0<a\leqslant\frac{5}{3}$，所以实数 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{5}{3}\right]$，所以实数 a 的取值可以是 1 或 $\frac{3}{2}$.

易错警示 研究分段函数的单调性问题，不仅要考虑函数在每一段上的单调性，同时，也不能忽略函数在每一段端点处的函数值的大小，否则，就会导致解题失误.

5. $[-3,+\infty)$　函数 $f(x)=x^2+(a-1)x+a$ 图象开口向上，对称轴为直线 $x=-\frac{a-1}{2}$，由函数 $f(x)$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上单调递增，可得 $-\frac{a-1}{2}\leqslant 2$，解得 $a\geqslant -3$. 所以 a 的取值范围是 $[-3,+\infty)$.

6. $g(x)=x$（答案不唯一）　令 $h(x)=x|x|$. 因为 $h(x)=x|x|=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ -x^2, & x<0\end{cases}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上为增函数，所以只要函数 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上为增函数即可，从而可取 $g(x)=x$.

方法总结 如果一个函数是由几个简单的函数四则运算得到的，它的单调性可以由下列结论来判断. 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 D 上都具有单调性，则

①$f(x)$ 与 $f(x)+C$ 具有相同的单调性（C 为常数）.

②当 $a>0$ 时，$f(x)$ 与 $af(x)$ 具有相同的单调性；当 $a<0$ 时，$f(x)$ 与 $af(x)$ 具有相反的单调性.

③当 $f(x)$ 恒不等于零时，$f(x)$ 与 $\frac{1}{f(x)}$ 具有相反的单调性.

④当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是增（减）函数时，$f(x)+g(x)$ 是增（减）函数.

⑤若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是增（减）函数，则当两者都恒大于零时，$f(x)\cdot g(x)$ 是增（减）函数；当两者都恒小于零时，$f(x)\cdot g(x)$ 是减（增）函数.

7. D　依题意，函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，由 $f(3-x)=f(3+x)$，知 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称，则 $f(0)=f(6)=3$. $\forall x_1,x_2\in(-\infty,3]$，当 $x_1\neq x_2$ 时，$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,3]$ 上单调递增，则 $f(x)$ 在区间 $(3,+\infty)$ 上单调递减. 对于不等式 $f(x)+6x-3>x^2$，即 $f(x)>(x-3)^2-6$，设 $g(x)=(x-3)^2-6$，$g(x)$ 的图象开口向上，对称轴为直线 $x=3$，$g(0)=g(6)=3$，由 $f(x)$，$g(x)$ 的图象可知 $f(x)>g(x)$ 的解集为 $\{x|0<x<6\}$.

方法总结 $\forall x_1,x_2\in D$ 且 $x_1\neq x_2$，有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0(<0)$ 或 $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0(<0)\Leftrightarrow f(x)$ 在区间 D 上单调递增（减）.

8. D　因为函数 $y=f(x)$，$x\in\mathbf{R}$ 且 $f(1)<f(2)$ 成立，所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不可能是减函数，可能是增函数，也可能不是增函数，如 $f(x)=x^2$，满足 $f(1)<f(2)$，但是 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不具有单调性，故 D 正确，A，B，C 错误.

9. ABD　设 $x_1>x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)<-(x_1-x_2)$，即 $f(x_1)+x_1<f(x_2)+x_2$，令 $g(x)=f(x)+x$，则 $g(x_1)<g(x_2)$，所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，所以 $g(-2)>g(2)$，即 $f(-2)-2>f(2)+2$，即 $f(-2)>f(2)+4$，A 正确；因为 $x<x+1$，所以 $g(x)=f(x)+x>g(x+1)=f(x+1)+x+1$，即 $f(x)>f(x+1)+1$，B 正确；因为 $\sqrt{x}\geqslant 0$，所以 $g(\sqrt{x})=f(\sqrt{x})+\sqrt{x}\leqslant g(0)=f(0)$，C 错误；因为 $|a|+\frac{1}{|a|}\geqslant 2$（当且仅当 $|a|=\frac{1}{|a|}$，即 $a=\pm 1$ 时，等号成立），所以 $g\left(|a|+\frac{1}{|a|}\right)=f\left(|a|+\frac{1}{|a|}\right)+|a|+\frac{1}{|a|}\leqslant g(2)=f(2)+2<f(2)+3$，D 正确.

10. ABD　选项 A，令 $x=y=1$，得 $f(1)=f(1)+f(1)$，所以 $f(1)=0$，A 正确；选项 B，任选 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1>x_2$，在 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 中，令 $x=x_2$，$y=\frac{x_1}{x_2}$ 得 $f(x_1)-f(x_2)=f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$，因为当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，又 $\frac{x_1}{x_2}>1$，所以 $f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)>0$，故 $f(x_1)-f(x_2)=f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)>0$，所以 $f(x)$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上单调递增，B 正确；选项 C，在 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 中，令 $y=\frac{1}{x}$，得 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=f(1)=0$，故 $f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)=f(3)+f\left(\frac{1}{3}\right)=\cdots=f(2\ 024)+f\left(\frac{1}{2\ 024}\right)=0$，故 $f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(3)+f\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+f(2\ 024)+f\left(\frac{1}{2\ 024}\right)=0$，C 错误；选项 D，因为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$，所以 $f(2)=1$，在 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 中，令 $x=y=2$，得 $f(4)=2f(2)=2$，因为 $f(x)-f(x-2)\geqslant 2$，所以 $f(x)\geqslant 2+f(x-2)=f(4)+f(x-2)=f(4x-8)$，由于 $f(x)$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $\begin{cases}x\geqslant 4x-8,\\x>0,\\4x-8>0,\end{cases}$ 解得 $x\in\left(2,\frac{8}{3}\right]$，D 正确.

11. $(-\infty,4]$　若 $k<0$，则 $y=x$，$y=\frac{k}{x}$ 在 $(-\infty,-2]$ 上都单调递增，所以函数 $f(x)=x+\frac{k}{x}$ 在 $(-\infty,-2]$ 上单调递增，符合题意；若 $k=0$，则函数 $f(x)=x$ 在 $(-\infty,-2]$ 上单调递增，符合题意；若 $k>0$，则 $y=x+\frac{k}{x}$ 在 $(-\sqrt{k},0)$ 上单调递减，在 $(-\infty,-\sqrt{k}]$ 上单调递增，则 $-\sqrt{k}\geqslant -2$，解得 $0<k\leqslant 4$. 综上所述，k 的取值范围是 $(-\infty,4]$.

12. ①$\frac{4}{3}$　②$[\sqrt{11}-\sqrt{7},2)\cup[2\sqrt{3},4]$　①依题意，$t=0$，当 $f(x)=3x$ 时，$f(t)=0$. 因为存在 $a>0$，$b>0$，满足对任意 $x\in[-a,b]$，都有 $|f(x)-f(t)|\leqslant 2$，即 $|f(x)|\leqslant 2$，则 $-2\leqslant 3x\leqslant 2$，解得 $-\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}$. 由 $a>0$，$b>0$，得 $-\frac{2}{3}\leqslant -a\leqslant b\leqslant\frac{2}{3}$，解得 $0<a\leqslant\frac{2}{3}$，$0<b\leqslant\frac{2}{3}$，则 $a+b\leqslant\frac{4}{3}$，所以 $H(0)=\frac{4}{3}$.

②当 $f(x)=x^2$ 且 $t\in[1,3]$ 时，$|x^2-t^2|\leqslant 2$，则 $t^2-2\leqslant x^2\leqslant t^2+2$，当 $t\in[1,\sqrt{2}]$ 时，$-\sqrt{t^2+2}\leqslant x\leqslant\sqrt{t^2+2}$，依题意，$\begin{cases}-\sqrt{t^2+2}\leqslant t-a,\\\sqrt{t^2+2}\geqslant t+b,\end{cases}$ 整理得 $\begin{cases}a\leqslant t+\sqrt{t^2+2},\\b\leqslant\sqrt{t^2+2}-t,\end{cases}$ 则 $H(t)=2\sqrt{t^2+2}$，而函数 $H(t)$ 在 $[1,\sqrt{2}]$ 上单调递增，$H(t)\in[2\sqrt{3},4]$；当 $t\in(\sqrt{2},3]$ 时，$\sqrt{t^2-2}\leqslant x\leqslant\sqrt{t^2+2}$，则 $\begin{cases}\sqrt{t^2-2}\leqslant t-a,\\\sqrt{t^2+2}\geqslant t+b,\end{cases}$ 整理得 $\begin{cases}a\leqslant t-\sqrt{t^2-2},\\b\leqslant\sqrt{t^2+2}-t,\end{cases}$ 所以 $H(t)=\sqrt{t^2+2}-\sqrt{t^2-2}=\frac{4}{\sqrt{t^2+2}+\sqrt{t^2-2}}$，因为函数 $y=\sqrt{t^2+2}$，$y=\sqrt{t^2-2}$ 在 $(\sqrt{2},3]$ 上单调递增，所以函数 $H(t)$ 在 $(\sqrt{2},3]$ 上单调递减，所以 $H(t)\in[\sqrt{11}-\sqrt{7},2)$，所以函数 $H(t)=\begin{cases}2\sqrt{t^2+2}, & t\in[1,\sqrt{2}],\\\sqrt{t^2+2}-\sqrt{t^2-2}, & t\in(\sqrt{2},3]\end{cases}$ 的值域为 $[\sqrt{11}-\sqrt{7},2)\cup[2\sqrt{3},4]$.

方法总结　判断函数单调性的常用方法

定义法	一般步骤为设元→作差→变形→判断符号→得出结论
图象法	若函数 $f(x)$ 是以图象形式所给出的，或者 $f(x)$ 的图象易作出，则可由图象的上升或下降的情况确定函数的单调区间
性质法	对于由基本初等函数的和、差构成的函数，根据各基本初等函数的增减性及“增＋增＝增，增－减＝增，－增＝减，减＋减＝减，减－增＝减，－减＝增”来判断
复合法	对于复合函数，先将函数 $f(g(x))$ 分解成 $y=f(t)$ 和 $t=g(x)$，然后分别讨论（判断）这两个函数的单调性，再根据复合函数“同增异减”的规则进行判断

13. (1) **证明**：任取 $x_1,x_2\in(-2,2)$，且 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{x_1^2+4}-\frac{x_2}{x_2^2+4}=\frac{(x_2-x_1)(x_1x_2-4)}{(x_1^2+4)(x_2^2+4)}$，

因为 $-2<x_1<x_2<2$，所以 $x_2-x_1>0$，$x_1x_2-4<0$，所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-2,2)$ 上为增函数.

(2) **解**：由(1)知 $f(x)$ 在 $(-2,2)$ 上为增函数.

又 $f(a+2)>f(2a-1)$，所以 $\begin{cases}-2<a+2<2,\\-2<2a-1<2,\\a+2>2a-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}-4<a<0,\\-\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2},\\a<3,\end{cases}$ 即 $-\frac{1}{2}<a<0$.

所以实数 a 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$.

方法总结 判断或证明函数的单调性的方法：

(1) 定义法. 根据增函数、减函数的定义，按照“取值→作差→变形→判断符号→下结论”进行判断.

(2) 图象法. 根据函数图象的升降情况进行判断.

(3) 直接法. 运用已知结论，直接得到函数的单调性，如一次函数、二次函数、反比例函数的单调性均可直接得出.

(4) 利用单调函数的运算性质判断函数的单调性.

函数的单调性具有以下性质，灵活运用它们能迅速解决某些函数的单调性问题. 若函数 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 I 上具有单调性. 则：①函数 $y=-f(x)$ 与 $y=f(x)$ 的单调性相反. ②当函数 $y=f(x)$ 恒为正或恒为负时，函数 $y=\frac{1}{f(x)}$ 与 $y=f(x)$ 的单调性相反. ③函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f(x)+C$（C 为常数）的单调性相同. ④当 $C>0$（C 为常数）时，$y=f(x)$ 与 $y=C\cdot f(x)$ 的单调性相同；当 $C<0$（C 为常数）时，$y=f(x)$ 与 $y=C\cdot f(x)$ 的单调性相反. ⑤若 $f(x)>0$，$g(x)>0$，函数 $f(x)$，$g(x)$ 都单调递增（减），则 $f(x)\cdot g(x)$ 也单调递增（减）；若 $f(x)<0$，$g(x)<0$ 且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都单调递增（减），则 $f(x)\cdot g(x)$ 单调递增（减）.

(5) 复合函数单调性判断方法：函数 $y=f(g(x))$ 的单调性由函数 $y=f(t)$，$t=g(x)$ 的单调性决定，当两个函数的单调性相同时，函数 $y=f(g(x))$ 单调递增，当两个函数的单调性不同时，函数 $y=f(g(x))$ 单调递减，即“同增异减”.

14. (1) **证明**：设 $x_1<x_2$，则 $x_2-x_1>0$，当 $x>0$ 时，$f(x)<0$ 恒成立，则 $f(x_2-x_1)<0$. 因为 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1+x_1)-f(x_1)=f(x_2-x_1)<0$，所以 $f(x_2)<f(x_1)$，所以函数 $y=f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数.

(2) **解**：易知 $f(0)=2f(0)$，则 $f(0)=0$. 由 $f(x^2-2)+f(x)<0$，可得 $f(x^2-2+x)<f(0)$，所以 $x^2+x-2>0$，解得 $x>1$ 或 $x<-2$. 故 x 的取值范围是 $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$.

15. (1)**解**：由已知 $f(xy)=f(x)+f(y)$，令 $y=1$，得 $f(x)=f(x)+f(1)$，解得 $f(1)=0$.

(2)**证明**：由已知 $f(xy)=f(x)+f(y)$，可得 $f(xy)-f(x)=f(y)$. 任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，即 $0<\frac{x_1}{x_2}<1$，所以 $f(x_1)-f(x_2)=f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，即函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

(3)**解**：由已知 $f(2\ 023^2)=f(2\ 023)+f(2\ 023)=1$，即 $f(2\ 023)=\frac{1}{2}$. 又 $f(x)+f(x-2\ 022)=f[x(x-2\ 022)]$，所以 $f(x)+f(x-2\ 022)<\frac{1}{2}$ 即为 $f[x(x-2\ 022)]<f(2\ 023)$. 又函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\begin{cases}x>0,\\x-2\ 022>0,\\x(x-2\ 022)<2\ 023,\end{cases}$ 解得 $2\ 022<x<2\ 023$.

课时提优 15　函数的最大(小)值

1. C　函数 $f(x)=|x-2|-|x+1|=\begin{cases}-3, & x\geqslant 2,\\1-2x, & -1<x<2,\\3, & x\leqslant -1.\end{cases}$ 当 $-1<x<2$ 时，$-3<1-2x<3$，此时 $f(x)\in(-3,3)$，故 $f(x)\in[-3,3]$，所以 $f(x)$ 的最小值为 -3，最大值为 3.

2. C　当 $a>0$ 时，由题意得 $2a+1-(a+1)=2$，则 $a=2$；当 $a<0$ 时，$a+1-(2a+1)=2$，则 $a=-2$. 综上，$a=\pm 2$.

3. C　由 $y=\frac{3x+2}{x-1}=\frac{3(x-1)+5}{x-1}=3+\frac{5}{x-1}$，而函数 $y=\frac{5}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以函数 $y=3+\frac{5}{x-1}$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，又该函数在 $(1,m]$ 上的最小值为 8，所以 $y_{\min}=y\Big|_{x=m}=3+\frac{5}{m-1}=8$，解得 $m=2$.

4. BCD　当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(x)\in[0,1)$. 当 $x<0$ 时，$f(x)=-x^2+ax=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}$，且图象开口向下，若 $a\geqslant 0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增且 $f(x)<0$ 恒成立，在 $x=0$ 处 $f(x)$ 连续，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，不存在最大值；若 $a<0$，则 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{a}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{a}{2},0\right)$ 上单调递减，若 $f(x)$ 的最大值为 1，则 $f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}=1$，解得 $a=-2$ 或 2（舍去），A 错误；当 $a>-2$ 时，$f(x)<1$ 恒成立，D 正确；若 $f(x)<0$ 的解集为 $(-\infty,0)$，则实数 a 的取值范围是 $[0,+\infty)$，B 正确；若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是 $[0,+\infty)$，C 正确.

方法总结 **求二次函数在给定区间上最值的方法**

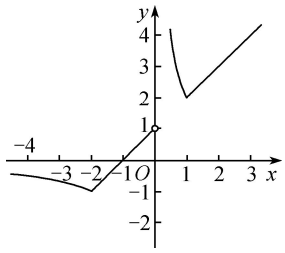
求二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$ 在区间 $[m,n]$ 上的最值一般分为以下几种情况：

(1) 若对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$ 在区间 $[m,n]$ 内，则最小值为 $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$，最大值为 $f(m)$，$f(n)$ 中的较大者（或区间端点 m，n 中与直线 $x=-\frac{b}{2a}$ 距离较远的一个对应的函数值为最大值）；

(2) 若对称轴 $x=-\frac{b}{2a}<m$，则 $f(x)$ 在区间 $[m,n]$ 上单调递增，最大值为 $f(n)$，最小值为 $f(m)$；

(3) 若对称轴 $x=-\frac{b}{2a}>n$，则 $f(x)$ 在区间 $[m,n]$ 上单调递减，最大值为 $f(m)$，最小值为 $f(n)$.

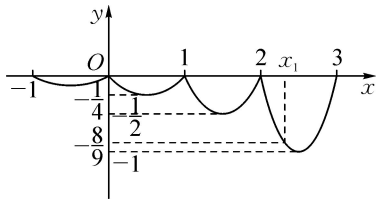
5. -1　在同一平面直角坐标系中作出函数 $f(x)=x+1$ 和 $g(x)=\frac{2}{x}$ 的图象，由函数 $F(x)$ 的定义，得 $F(x)$ 的图象如图所示，结合图象可知，函数 $F(x)$ 的最小值为 -1.



6. $(-\infty,5]$　由题意知，对于任意的 $x_1\in[1,2]$，存在 $x_2\in[-1,3]$，使得 $f(x_1)\geqslant g(x_2)$，即需满足 $f(x)_{\min}\geqslant g(x)_{\min}$. 函数 $f(x)=x+\frac{4}{x}$ 在 $[1,2]$ 上单调递减，所以 $f(x)_{\min}=f(2)=4$. 当 $a>0$ 时，$g(x)=ax+2a-1$ 在区间 $[-1,3]$ 上单调递增，$g(x)_{\min}=a-1$，所以 $4\geqslant a-1$，解得 $a\leqslant 5$，所以 $0<a\leqslant 5$；当 $a<0$ 时，$g(x)=ax+2a-1$ 在区间 $[-1,3]$ 上单调递减，$g(x)_{\min}=5a-1$，所以 $4\geqslant 5a-1$，解得 $a\leqslant 1$，所以 $a<0$；当 $a=0$ 时，$g(x)=-1<4$，符合题意. 综上，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,5]$.

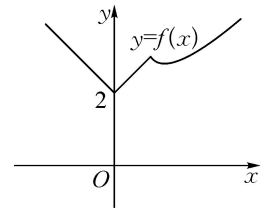
7. D　因为 $f(x)=x+\frac{4}{x}(x>0)$ 在 $(0,2]$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增. 当 $\begin{cases}t-1>0,\\ t\leqslant 2,\end{cases}$ 即 $1<t\leqslant 2$ 时，$f(x)$ 在 $[t-1,t]$ 上单调递减，所以 $g(t)=f(t-1)-f(t)=\frac{4}{t(t-1)}-1$，此时 $g(t)$ 的最小值为 1. 当 $t-1\geqslant 2$，即 $t\geqslant 3$ 时，$f(x)$ 在 $[t-1,t]$ 上单调递增，所以 $g(t)=f(t)-f(t-1)=1-\frac{4}{t(t-1)}$，此时 $g(t)$ 的最小值为 $\frac{1}{3}$. 当 $t>2$ 且 $f(t-1)\geqslant f(t)$，即 $2<t\leqslant\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $[t-1,2]$ 上单调递减，在 $[2,t]$ 上单调递增，所以 $g(t)=f(t-1)-f(2)=t-5+\frac{4}{t-1}$，此时 $g(t)$ 的最小值为 $\sqrt{17}-4$. 当 $t<3$ 且 $f(t)\geqslant f(t-1)$，即 $\frac{1+\sqrt{17}}{2}\leqslant t<3$ 时，$f(x)$ 在 $[t-1,2]$ 上单调递减，在 $[2,t]$ 上单调递增，所以 $g(t)=f(t)-f(2)=t+\frac{4}{t}-4$，此时 $g(t)$ 的最小值为 $\sqrt{17}-4$. 综上，$g(t)$ 的最小值为 $\sqrt{17}-4$.

8. B　当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=x(x-1)$，由 $f(x+1)=2f(x)$，得 $f(x)=2f(x-1)$，即函数 $f(x)$ 的图象每向右平移 1 个单位长度，图象上对应点的纵坐标变为原来的 2 倍，如图：



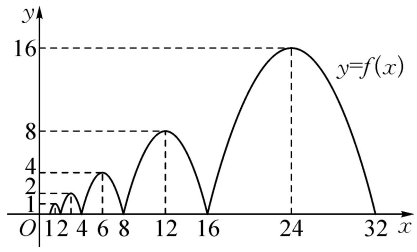
当 $2<x\leqslant 3$ 时，$f(x)=4f(x-2)=4(x-2)(x-3)$，令 $4(x-2)(x-3)=-\frac{8}{9}$，整理得 $9x^2-45x+56=0$，解得 $x_1=\frac{7}{3}$，$x_2=\frac{8}{3}$. 观察图象知，当 $m\leqslant\frac{7}{3}$ 时，对任意 $x\in(-\infty,m]$，$f(x)\geqslant-\frac{8}{9}$ 恒成立，所以实数 m 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{7}{3}\right]$.

9. ABD　画出函数 $f(x)$ 的图象，如图：



对于 A，$f(0)=2$，$f[f(0)]=f(2)=3$，故 A 正确. 对于 B，由图象易知，值域为 $[2,+\infty)$，故 B 正确. 对于 C，由图象易知，函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上不单调，故 C 错误. 对于 D，当 $x\geqslant 1$ 时，$x+\frac{2}{x}\geqslant\left|\frac{x}{2}+a\right|$ 恒成立，所以 $-x-\frac{2}{x}\leqslant\frac{x}{2}+a\leqslant x+\frac{2}{x}$，即 $-\frac{3}{2}x-\frac{2}{x}\leqslant a\leqslant\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，由基本不等式可得 $\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\geqslant 2$，当且仅当 $x=2$ 时，等号成立，$\frac{3x}{2}+\frac{2}{x}\geqslant 2\sqrt{3}$，当且仅当 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时，等号成立，所以 $-2\sqrt{3}\leqslant a\leqslant 2$. 当 $x<1$ 时，$|x|+2\geqslant\left|\frac{x}{2}+a\right|$ 恒成立，所以 $-|x|-2\leqslant\frac{x}{2}+a\leqslant|x|+2$ 在 $(-\infty,1)$ 上恒成立，即 $-|x|-2-\frac{x}{2}\leqslant a\leqslant|x|+2-\frac{x}{2}$ 在 $(-\infty,1)$ 上恒成立. 令 $g(x)=|x|+2-\frac{x}{2}=\begin{cases}-\frac{3}{2}x+2, & x\leqslant 0,\\ \frac{x}{2}+2, & 0<x<1,\end{cases}$ 当 $x\leqslant 0$ 时，$g(x)\geqslant 2$，当 $0<x<1$ 时，$2<g(x)<\frac{5}{2}$，故 $g(x)_{\min}=2$；令 $h(x)=-|x|-2-\frac{x}{2}=\begin{cases}\frac{1}{2}x-2, & x\leqslant 0,\\ -\frac{3x}{2}-2, & 0<x<1,\end{cases}$ 当 $x\leqslant 0$ 时，$h(x)\leqslant -2$，当 $0<x<1$ 时，$-\frac{7}{2}<h(x)<-2$，故 $h(x)_{\max}=-2$. 综上，$-2\leqslant a\leqslant 2$，故 D 正确.

10. AC　因为当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$f(x)=-4(x-1)(x-2)$，所以当 $2\leqslant x\leqslant 4$ 时，$1\leqslant\frac{x}{2}\leqslant 2$，$f(x)=2f\left(\frac{x}{2}\right)=-8\left(\frac{x}{2}-1\right)\left(\frac{x}{2}-2\right)=-2(x-2)(x-4)$；当 $4\leqslant x\leqslant 8$ 时，$2\leqslant\frac{x}{2}\leqslant 4$，$f(x)=2f\left(\frac{x}{2}\right)=-4\left(\frac{x}{2}-2\right)\left(\frac{x}{2}-4\right)=-(x-4)(x-8)$；当 $8\leqslant x\leqslant 16$ 时，$4\leqslant\frac{x}{2}\leqslant 8$，$f(x)=2f\left(\frac{x}{2}\right)=-2\left(\frac{x}{2}-4\right)\left(\frac{x}{2}-8\right)=-\frac{1}{2}(x-8)(x-16)$；当 $16\leqslant x\leqslant 32$ 时，$8\leqslant\frac{x}{2}\leqslant 16$，$f(x)=2f\left(\frac{x}{2}\right)=-\left(\frac{x}{2}-8\right)\left(\frac{x}{2}-16\right)=-\frac{1}{4}(x-16)(x-32)$……以此类推，可作出函数 $f(x)$ 的图象，如图所示.



对于 A,由图可知,函数 $f(x)$ 的值域为 $[0,+\infty)$,故 A 正确;对于 B,$f(24)=-\frac{1}{4}\times 8\times(-8)=16$,故 B 错误;对于 C,由图知,当 $x\in[4,6]$ 时,函数 $f(x)$ 单调递增,当 $x\in[6,8]$ 时,函数 $f(x)$ 单调递减,故当 $x=6$ 时,函数 $f(x)$ 取得最大值 $f(6)=4$,故 C 正确;对于 D,由图可知,函数 $f(x)$ 在 $[10,16]$ 上先增后减,故 D 错误.

11. 1　$(-\infty,0]$　若 $a=0$,则 $f(x)=\begin{cases}-x^2+1, & x\leqslant 1,\\ 0, & x>1,\end{cases}$ 当 $x\leqslant 1$ 时,$f(x)=-x^2+1$,所以 $f(x)\in(-\infty,1]$,则 $f(x)$ 的最大值是 1. 当 $a\neq 0$ 时,若 $f(x)$ 存在最大值,则 $f(x)=ax$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,所以 $a<0$,且当 $x>1$ 时,$f(x)=ax<a<0$,无最大值;当 $x\leqslant 1$ 时,$f(x)=-x^2+ax+1=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+1$,则 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{a}{2}\right)$ 上单调递增,在 $\left(\frac{a}{2},1\right]$ 上单调递减,所以 $f(x)$ 存在最大值为 $f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}+1>a$,故 a 的取值范围是 $(-\infty,0]$.

12. $[-4,2]$　对任意 $x_1\in[1,2]$,总存在 $x_2\in\left[-\frac{6}{7},0\right]$,使得 $g(x_2)=f(x_1)$,则 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上的值域是 $g(x)$ 在 $\left[-\frac{6}{7},0\right]$ 上的值域的子集. 因为 $g(x)=\frac{4x+3}{x+1}=4-\frac{1}{x+1}$,所以 $g(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增,当 $x_2\in\left[-\frac{6}{7},0\right]$ 时,$g(x_2)$ 的值域为 $[-3,3]$. 当 $a<0$ 时,$f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增,所以 $f(x)$ 的值域为 $\left[1+a,2+\frac{a}{2}\right]$. 由 $\left[1+a,2+\frac{a}{2}\right]\subseteq[-3,3]$,可得 $\begin{cases}1+a\geqslant -3,\\ 2+\frac{a}{2}\leqslant 3,\\ 2+\frac{a}{2}\geqslant 1+a,\end{cases}$ 解得 $-4\leqslant a<0$;当 $a=0$ 时,$f(x)=x\in[1,2]\subseteq[-3,3]$,满足题意;当 $a>0$ 时,由 $f(x)=x+\frac{a}{x}$ 在 $x\in[1,2]$ 时,$f(x)>0$,由对勾函数性质可知,只需 $f(1)=1+a\leqslant 3$ 且 $f(2)=2+\frac{a}{2}\leqslant 3$,解得 $0<a\leqslant 2$. 综上可得,a 的取值范围是 $[-4,2]$.

13. 解:(1) 不等式 $f(x)\geqslant g(x)$,即 $x+1\geqslant(x-1)^2$,解得 $0\leqslant x\leqslant 3$,所以不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 的解集为 $[0,3]$.

(2) 由 $f(x)=g(x)$ 解得 $x=0$ 或 $x=3$,画出 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象如图 1 所示,而 $M(x)=\max\{f(x),g(x)\}$,由图可知

$$M(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<0,\\ x+1, & 0\leqslant x\leqslant 3,\\ (x-1)^2, & x>3.\end{cases}$$

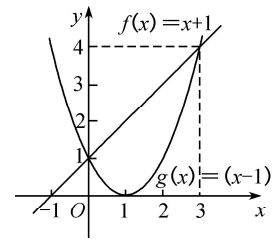


图 1

(3) 画出 $M(x)$ 的图象如图 2 所示.

当 $t+1\leqslant 0$,即 $t\leqslant -1$ 时,$h(t)=M(t+1)=(t+1-1)^2=t^2$;

当 $t<0<t+1$,即 $-1<t<0$ 时,$h(t)=M(0)=1$;

当 $0\leqslant t\leqslant 3$ 时,$h(t)=M(t)=t+1$;

当 $t>3$ 时,$h(t)=M(t)=(t-1)^2$.

综上,$h(t)=\begin{cases}t^2, & t\leqslant -1,\\ 1, & -1<t<0,\\ t+1, & 0\leqslant t\leqslant 3,\\ (t-1)^2, & t>3,\end{cases}$

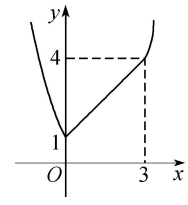


图 2

14. 解:(1)当 $a=1$ 时,函数 $f(x)$ 在 $[1,6]$ 上单调递增. 证明如下:当 $a=1$ 时,$f(x)=x-\frac{9}{x}$,在区间 $[1,6]$ 上取任意 x_1,x_2,设 $x_1<x_2$,则 $f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1-\frac{9}{x_1}\right)-\left(x_2-\frac{9}{x_2}\right)=(x_1-x_2)-\left(\frac{9}{x_1}-\frac{9}{x_2}\right)=\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2+9)}{x_1x_2}<0$,所以 $f(x_1)<f(x_2)$,即 $f(x)$ 在 $[1,6]$ 上单调递增.

(2)因为 $a\in(1,6)$,所以 $f(x)=\begin{cases}2a-\left(x+\frac{9}{x}\right), & 1\leqslant x\leqslant a,\\ x-\frac{9}{x}, & a<x\leqslant 6.\end{cases}$ ①

当 $1<a\leqslant 3$ 时,$f(x)$ 在 $[1,a]$ 上是增函数,在 $[a,6]$ 上也是增函数,所以当 $x=6$ 时,$f(x)$ 取得最大值,为 $\frac{9}{2}$. ②当 $3<a<6$ 时,$f(x)$ 在 $[1,3]$ 上是增函数,在 $[3,a]$ 上是减函数,在 $[a,6]$ 上是增函数,而 $f(3)=2a-6$,$f(6)=\frac{9}{2}$;当 $3<a\leqslant\frac{21}{4}$ 时,$2a-6\leqslant\frac{9}{2}$,此时函数 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{9}{2}$;当 $\frac{21}{4}<a<6$ 时,$2a-6>\frac{9}{2}$,此时函数 $f(x)$ 的最大值为 $2a-6$. 综上,$M(a)=\begin{cases}\frac{9}{2}, & 1<a\leqslant\frac{21}{4},\\ 2a-6, & \frac{21}{4}<a<6.\end{cases}$

15. 解:(1) 因为 $f(x)=x+\frac{1}{x}$,$x\in[1,4]$,$F(x)=f(x^2)+f(x)$,所以 $\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 4,\\1\leqslant x^2\leqslant 4,\end{cases}$ 解得 $1\leqslant x\leqslant 2$,所以 $F(x)$ 的定义域为 $[1,2]$,而 $F(x)=x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+\left(x+\frac{1}{x}\right)$. 设 $t=x+\frac{1}{x}$,由已知得 $t=x+\frac{1}{x}$ 在 $[1,2]$ 上单调递增,故 $t\in\left[2,\frac{5}{2}\right]$,则 $F(x)$ 等价于 $y=t^2+t-2$,而 $y=t^2+t-2$ 开口向上,对称轴为 $t=-\frac{1}{2}$,所以 $y=t^2+t-2$ 在 $\left[2,\frac{5}{2}\right]$ 上单调递增,所以 $F(x)$ 的值域为 $\left[4,\frac{27}{4}\right]$.

(2) 设 $t=x+\frac{1}{x}$,$t\in\left[2,\frac{5}{2}\right]$,而 $g(x)=f(x^2)-af(x)+2=x^2+\frac{1}{x^2}+2-a\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-a\left(x+\frac{1}{x}\right)=t^2-at$,$h(x)=f(x)-1=t-1$,则 $y=g(x)-h(x)=t^2-at-t+1=t^2-(a+1)t+1$. 令 $\varphi(t)=t^2-(a+1)t+1$,$\varphi(t)$ 开口向上,即对于任意的 $t_1,t_2\in\left[2,\frac{5}{2}\right]$,$t_1<t_2$,都有 $|\varphi(t_1)|<|\varphi(t_2)|$,所以 $\varphi(t)$ 在 $\left[2,\frac{5}{2}\right]$ 上必须单调. 当 $\begin{cases}\frac{a+1}{2}\leqslant 2,\\\varphi(2)=4-2(a+1)+1\geqslant 0,\end{cases}$ 即 $a\leqslant\frac{3}{2}$ 时,$\varphi(t)$ 在 $\left[2,\frac{5}{2}\right]$ 上单调递增,且 $\varphi(t_2)>\varphi(t_1)\geqslant\varphi(2)\geqslant 0$,故 $|\varphi(t_1)|<|\varphi(t_2)|$,满足题意;当 $\begin{cases}\frac{a+1}{2}\geqslant\frac{5}{2},\\\varphi(2)=4-2(a+1)+1\leqslant 0,\end{cases}$ 即 $a\geqslant 4$ 时,$\varphi(t)$ 在 $\left[2,\frac{5}{2}\right]$ 上单调递减,且 $\varphi(t_2)<\varphi(t_1)\leqslant\varphi(2)\leqslant 0$,故 $|\varphi(t_1)|<|\varphi(t_2)|$,满足题意. 综上,实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]\cup[4,+\infty)$.

课时提优 16　函数的奇偶性

1. C　对于 A,因为 $f(x)=x^2+1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1=f(x)$,所以 $f(x)=x^2+1$ 为偶函数;对于 B,因为 $f(x)=x^3-1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(-x)=(-x)^3+1=-x^3+1\neq -f(x)$,所以 $f(x)=x^3-1$ 不是奇函数;对于 C,因为 $f(x)=x^3+\frac{1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,且 $f(-x)=(-x)^3+\frac{1}{-x}=-x^3-\frac{1}{x}=-\left(x^3+\frac{1}{x}\right)=-f(x)$,所以 $f(x)=x^3+\frac{1}{x}$ 为奇函数;对于 D,因为 $f(x)=x^4+2x^2$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(-x)=(-x)^4+2(-x)^2=x^4+2x^2=f(x)$,所以 $f(x)=x^4+2x^2$ 为偶函数.

2. B　因为 $f(x)$ 是偶函数,所以 $a-1=-2a$,解得 $a=\frac{1}{3}$,且一次项系数 $b=0$,故 $a+b=\frac{1}{3}$.

方法总结　利用奇偶性求参数的常见类型及策略

(1)定义域含参数:奇、偶函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$,根据定义域关于原点对称,利用 $a+b=0$ 求参数.

(2)解析式含参数:根据 $f(-x)=-f(x)$ 或 $f(-x)=f(x)$ 列式,比较系数即可求解.

3. A　$f(x)$ 是偶函数,$g(x)$ 是奇函数,故 $y=f(x)g(x)$ 是奇函数,且在 $x=0$ 处没有意义.

方法总结　在定义域的公共部分内,两个函数和、差、积、商的奇偶性如下表所示.

	和	差	积	商
均为奇函数	奇	奇	偶	偶
均为偶函数	偶	偶	偶	偶
一奇一偶	不定	不定	奇	奇

4. AD　对于 A,因为函数 $f(x-1)$ 为偶函数,其图象关于直线 $x=0$ 对称,所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称,故 A 正确;对于 B,函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增且函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称,所以函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递减,故 B 错误;对于 C,由于函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称,且函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增,所以 $f(1)=f(-3)\neq f(-2)$,故 C 错误;对于 D,由于 $f(-3)=f(1)$,因为函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递减,且 $-\frac{1}{2}<0<1$,所以 $f\left(-\frac{1}{2}\right)>f(0)>f(1)$,即 $f\left(-\frac{1}{2}\right)>f(0)>f(-3)$,故 D 正确.

方法总结　巧用奇、偶函数的图象求解问题

(1)依据:奇函数⇔图象关于原点对称,偶函数⇔图象关于 y 轴对称.

(2)求解:根据奇、偶函数图象的对称性,可以解决诸如求函数值,画出奇、偶函数图象等问题.

5. -13　因为 $g(x)=x^5-ax^3+bx$ 是奇函数,所以 $g(-x)=-g(x)$. 因为 $f(-5)=17=g(-5)+2$,所以 $g(5)=-15$,所以 $f(5)=g(5)+2=-15+2=-13$.

6. ②③　对于函数 $f(x)=x^2$,$g(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$,定义域都是 $\mathbf{R}$,$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$,$g(-x)=\frac{e^{-x}-e^x}{2}=-\frac{e^x-e^{-x}}{2}=-g(x)$. 设 $h_1(x)=f(x)+g(x)$,$h_1(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)-g(x)\neq f(x)+g(x)$,所以 $h_1(x)=f(x)+g(x)$ 不是偶函数,选项①错误;设 $h_2(x)=f(x)\cdot g(x)$,$h_2(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=-f(x)\cdot g(x)=-h_2(x)$,所以 $h_2(x)=f(x)\cdot g(x)$ 是奇函数,选项②正确;设 $h_3(x)=f(g(x))$,$h_3(-x)=f(g(-x))=f(-g(x))=f(g(x))=h_3(x)$,所以 $h_3(x)=f(g(x))$ 是偶函数,选项③正确;设 $h_4(x)=g(f(x))$,$h_4(-x)=g(f(-x))=g(f(x))=h_4(x)$,$h_4(x)=g(f(x))$ 是偶函数,选项④错误.

7. B　因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，$f(x)$ 的图象关于点 $(0,0)$ 对称，所以 $f(x)$ 为奇函数，$f(-x)=-f(x)$. 因为 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>-1$，即 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}+1>0$，所以 $\frac{f(x_1)+x_1-[f(x_2)+x_2]}{x_1-x_2}>0$，构造函数 $g(x)=f(x)+x$，则有 $\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}>0$，所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 因为 $g(-x)=f(-x)-x=-f(x)-x=-g(x)$，所以 $g(x)$ 为奇函数，$f(a^2-1)+f(a-1)+a^2+a>2$ 变形为 $f(a^2-1)+a^2-1>-[f(a-1)+(a-1)]$，则有 $g(a^2-1)>-g(a-1)$，即 $g(a^2-1)>g(1-a)$，所以 $a^2-1>1-a$，解得 $a<-2$ 或 $a>1$.

解题突破　结合 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>-1$ 构造函数 $g(x)=f(x)+x$ 是解决本题的关键.

8. A　设 $g(x)=f(x+a)-b$，则 $g(x)=\frac{1}{x+a+1}+\frac{1}{x+a+2}+\frac{1}{x+a+3}-b$ 为奇函数，可得 $x\neq-a-1$，$x\neq-a-2$，$x\neq-a-3$. 由奇函数的定义域关于原点对称可得 $-a-1-a-3=0$，即 $a=-2$，所以 $g(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}-b$，由 $g(-x)+g(x)=0$，可得 $\frac{1}{-x-1}+\frac{1}{-x}+\frac{1}{-x+1}-b+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}-b=0$，即 $b=0$，所以 $2a+b=-4$.

9. AB　对于 A，$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$，则 $f\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]=f\left(-\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{16}$，故 A 正确；对于 B，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$-x\in(0,+\infty)$，则 $f(x)=f(-x)=x^2+x$，故 B 正确；对于 C，函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，故 C 错误；对于 D，当 $x=-2$ 时，$f(x-1)=f(-3)=f(3)=9-3=6$，故 $x=-2$ 不是不等式 $f(x-1)<6$ 的解，故 D 错误.

10. BC　因为 $g(x)+f(-x+2)=1$，所以 $g(x+1)+f(1-x)=1$. 因为 $f(x)-g(x+1)=1$，所以 $f(x)+f(1-x)=2$. 因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(1-x)=f(1+x)$，所以 $f(x)+f(1+x)=2$，所以 $f(x+1)+f(2+x)=2$，所以 $f(x)=f(2+x)$，故 C 正确；因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(x)=f(2-x)$，所以 $f(2+x)=f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，因为 $g(x)+f(-x+2)=1$，所以 $g(x)+f(x)=1$，所以 $g(-x)+f(-x)=1$，所以 $g(-x)+f(x)=1$，所以 $g(x)=g(-x)$，所以 $g(x)$ 为偶函数，故 A 错误；因为 $f(x)+f(1-x)=2$，所以 $f(x)$ 图象关于点 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 中心对称，所以存在一对最小值点与最大值点也关于 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 对称，所以 $m+M=2$，所以 $g(x)+f(x)=1=m+M-1$，故 D 错误；由 $f(x)+f(1-x)=2$ 得 $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，又 $T=2$，所以 $f\left(-\frac{3}{2}\right)=1$，由 $g(x)+f(x)=1$ 得 $g\left(-\frac{3}{2}\right)+f\left(-\frac{3}{2}\right)=1$，所以 $g\left(-\frac{3}{2}\right)=0$，故 B 正确.

方法总结　对含有 $f(x)$，$g(x)$ 混合关系的抽象函数，要探求 $f(x)$，$g(x)$ 性质首先要消去一个函数，其方法是对 x 进行合理的赋值，组成方程组消去一个函数，再考查剩余函数的性质. 这是对抽象函数的奇偶性、单调性以及图象的对称性的综合应用，解决上述问题需注意：

(1) 赋值法的使用，注意和题目条件联系起来；

(2) 转化过程要以相关定义为目的，不断转变.

11. $\{a\mid a\leqslant1\}$　**分析：**要求实数 a 的取值范围，就要通过逆用函数 $f(x)$ 的单调性来脱去“f”，从而得到关于实数 a 的不等式，为此，就需研究函数 $f(x)$ 的单调性及奇偶性.

因为函数 $g(x)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $g(x)+g(-x)=-2x^2$，又 $f(x)=g(x)+x^2$，则 $f(-x)=g(-x)+(-x)^2=-2x^2-g(x)+x^2=-x^2-g(x)=-f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为奇函数. 因为 $g(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，函数 $y=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增. 又函数 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，所以不等式 $f(a)+f(a-2)\leqslant0$，可化为 $f(a)\leqslant-f(a-2)=f(2-a)$，所以 $a\leqslant2-a$，解得 $a\leqslant1$.

12. $-8\ 094$　设函数 $f(x)=x^3-3x^2$ 图象的对称中心为 $P(a,b)$，$g(x)=f(x+a)-b=(x+a)^3-3(x+a)^2-b$，又 $g(x)$ 为奇函数，$g(-x)=f(-x+a)-b$ 且 $g(-x)=-g(x)$，所以 $f(-x+a)-b=b-f(x+a)$，即 $f(-x+a)+f(x+a)=2b$，即 $[(-x+a)^3-3(-x+a)^2]+[(x+a)^3-3(x+a)^2]=2b$，整理得 $(6a-6)x^2+2a^3-6a^2-2b=0$，所以 $\begin{cases}6a-6=0,\\2a^3-6a^2-2b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=-2,\end{cases}$ 因此函数 $f(x)=x^3-3x^2$ 图象的对称中心为 $(1,-2)$，则 $f(-x+1)+f(x+1)=-4$. 令 $S=f(-2\ 022)+f(-2\ 021)+\cdots+f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(2\ 023)+f(2\ 024)$，则 $S=f(2\ 024)+f(2\ 023)+\cdots+f(2)+f(1)+f(0)+\cdots+f(-2\ 021)+f(-2\ 022)$，所以 $2S=4\ 047\times(-4)$，解得 $S=-8\ 094$，即 $f(-2\ 022)+f(-2\ 021)+\cdots+f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(2\ 023)+f(2\ 024)=-8\ 094$.

13. **证明：**(1) 取 $x=y=1$，代入 $f(x)+f(y)=f(xy)$，得 $f(1)=0$，取 $y=\frac{1}{x}$，代入 $f(x)+f(y)=f(xy)$，得 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=f(1)=0$，故 $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$.

(2) 取 $y=-1$，代入 $f(x)+f(y)=f(xy)$，得 $f(x)+f(-1)=f(-x)$，取 $x=y=-1$，代入 $f(x)+f(y)=f(xy)$，得 $f(-1)+f(-1)=f(1)$，所以 $f(-1)=0$，所以 $f(x)=f(-x)$. 因为当 $x\in\{x\mid x\neq0\}$ 时，$-x\in\{x\mid x\neq0\}$，所以

$f(x)$为偶函数.

(3)设 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,$x_1<x_2$,则$\frac{x_2}{x_1}>1$,由题设知$f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)>0$,所以$f(x_2)-f(x_1)=f(x_2)+f\left(\frac{1}{x_1}\right)=f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)>0$,则$f(x_2)>f(x_1)$,所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.因为$f(x)$为偶函数,所以$f(-x_2)>f(-x_1)$,而$-x_1,-x_2\in(-\infty,0)$,$-x_1>-x_2$,所以$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减.

14. 解:(1)由定义在**R**上的函数$f(x)$的图象关于点$(1,1)$对称及基本事实,得$y=f(x+1)-1$是定义在**R**上的奇函数,则$f(x+1)-1=-f(-x+1)+1$,即$f(1-x)+f(x+1)=2$对$x\in\mathbf{R}$恒成立,令$x=4$,得$f(-3)+f(5)=2$.

(2)设函数$g(x)$的图象关于点(m,n)对称,根据基本事实,$y=g(x+m)-n$为奇函数,即$g(x+m)-n=(x+m)^3-\frac{1}{2}(x+m)^2-3-n=x^3+3mx^2+3m^2x+m^3-\frac{1}{2}x^2-mx-\frac{1}{2}m^2-3-n=x^3+\left(3m-\frac{1}{2}\right)x^2+(3m^2-m)x+m^3-\frac{1}{2}m^2-3-n$为奇函数,所以$\begin{cases}3m-\frac{1}{2}=0,\\ m^3-\frac{1}{2}m^2-3-n=0,\end{cases}$解得$m=\frac{1}{6}$.

(3)**分析**:证明$g(x)$的单调性,求出其值域A,由题意转化为$f(x)$的值域$B\subseteq A$,由$f(x)$的图象关于点$(1,1)$对称,则只需$B\subseteq[-1,3]$,分类讨论求$f(x)$的值域,建立不等式求解即可.

先证明$g(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-3$在$[1,2]$上单调递增.设任意$x_1,x_2\in[1,2]$,且$x_1<x_2$,则$g(x_1)-g(x_2)=x_1^3-\frac{1}{2}x_1^2-x_2^3+\frac{1}{2}x_2^2=(x_1-x_2)\left[x_2^2+x_1x_2+x_1^2-\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right]=(x_1-x_2)\left[\left(x_1-\frac{1}{4}\right)^2+\left(x_2-\frac{1}{4}\right)^2+x_1x_2-\frac{1}{8}\right]$.由$1\leqslant x_1<x_2$,可知$x_1-x_2<0$,$\left(x_1-\frac{1}{4}\right)^2>0$,$\left(x_2-\frac{1}{4}\right)^2>0$,$x_1x_2-\frac{1}{8}>0$,所以$g(x_1)-g(x_2)<0$,即$g(x_1)<g(x_2)$,则$g(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-3$在$[1,2]$上单调递增.因此$g(x)$在区间$[1,2]$上的值域为$\left[-\frac{5}{2},3\right]$.记$f(x)$在$[0,2]$上的值域为$B$,对任意$x_1\in[0,2]$,总存在$x_2\in[1,2]$,使得$f(x_1)=g(x_2)$成立知,$B\subseteq\left[-\frac{5}{2},3\right]$.由$f(x)$的图象关于点$(1,1)$对称知,只需$B\subseteq[-1,3]$即可.

①当$\frac{a}{2}\leqslant 0$,即$a\leqslant 0$时,$f(x)$在$[0,1]$上单调递增,由对称性知,$f(x)$在$[1,2]$上单调递增,故$f(x)$在$[0,2]$上单调递增,只需$f(0)=a\geqslant -1$即可,故$-1\leqslant a\leqslant 0$,满足题意;

②当$0<\frac{a}{2}<1$,即$0<a<2$时,$f(x)$在$\left[0,\frac{a}{2}\right]$上单调递减,在$\left[\frac{a}{2},1\right]$上单调递增,由对称性知,$f(x)$在$\left[1,2-\frac{a}{2}\right]$上单调递增,在$\left[2-\frac{a}{2},2\right]$上单调递减,所以$f(x)$在$\left[0,\frac{a}{2}\right]$上单调递减,在$\left[\frac{a}{2},2-\frac{a}{2}\right]$上单调递增,在$\left[2-\frac{a}{2},2\right]$上单调递减,故$B=\left[f\left(\frac{a}{2}\right),f\left(2-\frac{a}{2}\right)\right]$或$B=[f(2),f(0)]$,当$0<a<2$时,只需$\begin{cases}f\left(\frac{a}{2}\right)=-\frac{a^2}{4}+a\geqslant -1,\\ f(2)=2-f(0)=2-a\geqslant -1,\end{cases}$解得$2-2\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 3$,又$0<a<2$,所以$0<a<2$满足题意;

③当$\frac{a}{2}\geqslant 1$,即$a\geqslant 2$时,$f(x)$在$[0,1]$上单调递减,由对称性知,$f(x)$在$[1,2]$上单调递减,所以$f(x)$在$[0,2]$上单调递减,只需$f(0)=a\leqslant 3$即可,所以$2\leqslant a\leqslant 3$,满足题意.

综上所述,实数a的取值范围是$[-1,3]$.

15. ABC　因为函数$f(x+2)$是奇函数,所以$f(x)$的图象关于点$(2,0)$对称,所以$f(-x)=-f(4+x)$.因为$f(2x+1)$是偶函数,所以$f(2x+1)=f(-2x+1)$,即$f(x+1)=f(-x+1)$,所以$f(x)$的图象关于直线$x=1$对称,所以$f(-x)=f(2+x)$,所以$f(4+x)=-f(2+x)=f(x)$,所以$f(x)$周期为4,又因为$f(-x)=-f(4+x)$,所以$f(-x)=-f(x)$,即$f(x)$为奇函数.对于A,因为$f(x)$的图象关于直线$x=1$对称,故A正确.对于B,因为$f(x)$的图象关于直线$x=1$对称,$f(x)$周期为4,$x\in[2,3]$时,$f(x)=2-x$,所以$f(2\ 022)=f(505\times 4+2)=f(2)=0$;$f(2\ 023)=f(505\times 4+3)=f(3)=-1$;$f(2\ 024)=f(506\times 4)=f(0)=f(2)=0$;所以$f(2\ 022)+f(2\ 023)+f(2\ 024)=-1$,故B正确.对于C,D,$f(x)$为奇函数,图象关于点$(0,0)$对称,则$f(x-1)$的图象关于点$(1,0)$对称,$f\left(\frac{1}{2}x-1\right)$的图象关于点$(2,0)$对称,$f\left(\frac{1}{2}x-1\right)+1$的图象关于点$(2,1)$对称,故C正确,D错误.

课时提优17　幂函数

1. C　设幂函数$f(x)=x^\alpha$,由$f(2)=2^\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$,解得$\alpha=-\frac{1}{2}$,则$f(x)=x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$,选项A错误;$f(x)$的定义域是$(0,+\infty)$,选项B错误;$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,选项C正确;由定义域可知函数$f(x)$为非奇非偶函数,选项D错误.

2. A　由幂函数$y=x^\alpha$在第一象限,在$x>1$部分图象由下向上,α逐渐增大,且$\alpha>0$时,$y=x^\alpha$在第一象限单调递增,且递增速度变快和变慢以$\alpha=1$为界点,$\alpha<0$时,$y=x^\alpha$在第一象限单调递减,所以$\alpha_1>1>\alpha_2>0>\alpha_3$,故A满足.

3. A　因为函数$y=(m^3-m+1)x^{2+3m-2m^2}$是幂函数,所以$m^3-m+1=1$,解得$m=0$或$m=\pm 1$.因为函数在$(0,+\infty)$上

单调递增，所以 $2+3m-2m^2>0$，解得 $-\frac{1}{2}<m<2$，所以 $m\neq-1$. 因为函数是奇函数，所以当 $m=0$ 时，幂指数 $2+3m-2m^2=2$，不符合题意；当 $m=1$ 时，幂指数 $2+3m-2m^2=3$，$y=x^3$ 为奇函数，符合题意. 所以满足条件的 m 的值为 1.

方法总结 **判断幂函数的方法**

判断一个函数是否为幂函数的依据是该函数是否为 $y=x^\alpha$（α 为常数）的形式，即：(1) 系数为 1；(2) 指数为常数；(3) 后面不加任何项. 反之，若一个函数为幂函数，则该函数必具有这种形式.

4. ABC　当 $a=3$ 时，$f(x)=3x^3$，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(-x)=-3x^3=-f(x)$，所以 $f(x)=3x^3$ 的图象关于原点对称，故 B 正确. 当 $a=2$ 时，$f(x)=2x^2$，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(-x)=2x^2=f(x)$，所以 $f(x)=2x^2$ 的图象关于 y 轴对称，故 A 正确. 当 $a=1$ 时，$f(x)=x$，在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，故 D 错误. 当 $a=-1$ 时，$f(x)=-\frac{1}{x}$，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)<0$，且 $f(-x)=\frac{1}{x}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于原点对称，与 C 不符合；当 $a=-2$ 时，$f(x)=-\frac{2}{x^2}$，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)<0$，且 $f(-x)=-\frac{2}{x^2}=f(x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，故 C 正确.

5. 1　由题知 $A(1,0)$，$B(0,1)$，$|BM|=|MN|=|NA|$，所以 $M\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，$N\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$，所以 $\frac{1}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^n$，$\frac{2}{3}=\left(\frac{1}{3}\right)^m$，所以 $\left(\frac{1}{3}\right)^{mn}=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^m\right]^n=\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{1}{3}$，所以 $mn=1$.

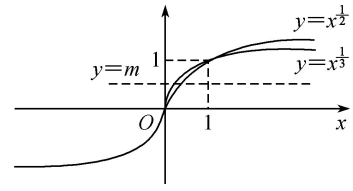
6. 2　$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup(3,+\infty)$　由题意知函数 $f(x)=x^{4m-m^2}$（$m\in\mathbf{Z}$）在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $m^2-4m<0$，解得 $0<m<4$，由 $m\in\mathbf{Z}$ 得 $m=1,2,3$，又 $f(x)=x^{4m-m^2}$ 的图象关于 y 轴对称，所以 $4m-m^2$ 为偶数，所以 $m=2$，所以 $f(x)=x^4$. 不等式 $f(a+2)<f(1-2a)$ 等价于 $|a+2|<|1-2a|$，解得 $a>3$ 或 $a<-\frac{1}{3}$.

7. D　幂函数 $y=x^{-\frac{1}{3}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，且函数值为正，在 $(-\infty,0)$ 上为减函数，且函数值为负，$(m+1)^{-\frac{1}{3}}<(3-2m)^{-\frac{1}{3}}$ 等价于 $\begin{cases}3-2m>0,\\m+1>3-2m,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m+1<0,\\m+1>3-2m,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}3-2m>0,\\m+1<0,\end{cases}$ 解得 $\frac{2}{3}<m<\frac{3}{2}$ 或 $m\in\varnothing$ 或 $m<-1$，所以不等式的解集为 $(-\infty,-1)\cup\left(\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right)$.

8. A　因为 $(m+1)^3+m=(n-1)^3+n=0$，所以 $(m+1)^3+m+1=1$，且 $(n-1)^3+n-1=-1$. 令函数 $f(x)=x^3+x$. 因为其定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=(-x)^3+(-x)=-(x^3+x)=-f(x)$，且 $y=x^3$，$y=x$ 在 $\mathbf{R}$ 上均单调递增，所以 $f(x)$ 为单调递增的奇函数，且 $f(m+1)=1$，$f(n-1)=-1$，则 $m+1=-(n-1)$，即 $m=-n$，显然 $m\neq0$，所以 $\frac{n}{m}=-1$.

9. BCD　设幂函数 $f(x)=x^\alpha$，由于图象经过点 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$，所以 $\left(\frac{1}{4}\right)^\alpha=\frac{1}{2}$，即 $\alpha=\frac{1}{2}$，所以 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$，故 $f(x)$ 在定义域 $[0,+\infty)$ 上单调递增，B 正确；$f(x)$ 为非奇非偶函数，A 不符合题意；当 $f(x)=\sqrt{x}\leqslant2$ 时，解得 $0\leqslant x\leqslant4$，故 C 正确；当 $0<x_1<x_2$ 时，$\left(\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{x_1+x_2}{2}}\right)^2=\frac{x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}}{4}-\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-(x_1+x_2)+2\sqrt{x_1x_2}}{4}=\frac{-(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2}{4}<0$，故 $\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}{2}<\sqrt{\frac{x_1+x_2}{2}}$，即 $\frac{f(x_1)+f(x_1)}{2}<f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 成立，D 正确.

10. ACD　画出 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 与 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 的图象（如图），设 $a^{\frac{1}{2}}=b^{\frac{1}{3}}=m$，作直线 $y=m$. 从图象知，若 $m=0$ 或 $m=1$，则 $a=b$；若 $0<m<1$，则 $0<b<a<1$；若 $m>1$，则 $1<a<b$. 故其中可能成立的是 A，C，D.



方法总结 函数的图象是函数的直观的体现，有效应用函数的图象将能快速准确地求解问题，此种方法被称为“数形结合法”.

11. $(-1,4)$　因为幂函数 $f(x)=x^{p^2-2p-3}$（$p\in\mathbf{N}^*$）在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $p^2-2p-3<0$，解得 $-1<p<3$. 因为 $p\in\mathbf{N}^*$，所以 $p=1$ 或 2. 当 $p=1$ 时，$f(x)=x^{-4}$，为偶函数，满足条件；当 $p=2$ 时，$f(x)=x^{-3}$，为奇函数，不满足条件. 不等式 $(a^2-1)^{\frac{p}{3}}<(3a+3)^{\frac{p}{3}}$ 等价于 $(a^2-1)^{\frac{1}{3}}<(3a+3)^{\frac{1}{3}}$. 因为 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，所以 $a^2-1<3a+3$，解得 $-1<a<4$.

易错警示 此题易忽略对函数奇偶性的验证而致错.

12. $<$　因为函数 $f(x)$ 是幂函数，所以 $m^2-m-1=1$，即 $m^2-m-2=0$，解得 $m=-1$ 或 $m=2$. 当 $m=-1$ 时，$f(x)=\frac{1}{x}$；当 $m=2$ 时，$f(x)=x^5$. 因为函数 $f(x)$ 对任意的 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$，满足 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)=x^5$. 又 $f(-x)=(-x)^5=-x^5=-f(x)$，所以函数 $f(x)=x^5$ 是奇函数，且为增函数. 由 $f(a)+f(b)<0$，得 $f(a)<-f(b)=f(-b)$，所以 $a<-b$，即 $a+b<0$.

13. **解**：(1) 因为函数 $f(x)=(m^2-m-1)x^{-m^2-5m-2}$ 为幂函数，所以 $m^2-m-1=1$，即 $m^2-m-2=0$，解得 $m=-1$ 或

$m=2$. 当 $m=-1$ 时，$f(x)=x^2$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $f(2)<f(4)$，符合题意；当 $m=2$ 时，$f(x)=x^{-16}$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，则 $f(2)>f(4)$，不符合题意. 综上所述，$m=-1$.

(2) 由(1)得 $f(x)=x^2$，当 $x\in[1,2)$ 时，$f(x)\in[1,4)$，即 $A=[1,4)$；当 $x\in[1,2)$ 时，$g(x)\in[2-k,4-k)$，即 $B=[2-k,4-k)$. 由 p 是 q 成立的必要不充分条件，则 $B\subsetneqq A$，显然 $B\neq\varnothing$，则 $\begin{cases}2-k\geqslant1,\\4-k\leqslant4,\end{cases}$ 且等号不能同时取得，解得 $0\leqslant k\leqslant1$，所以实数 k 的取值范围是 $[0,1]$.

14. 解：(1)因为 $f(x)$ 为幂函数，所以 $p^2-2p+1=1$，解得 $p=0$ 或 $p=2$. 当 $p=2$ 时，$f(x)=x^{-\frac{7}{2}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，则 $f(1)>f(2)$，不符合题意；当 $p=0$ 时，$f(x)=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $f(1)<f(2)$，符合题意. 所以 $f(x)=\sqrt{x}$.

(2)**分析**：由(1)可得 $g(x)=x+m\sqrt{x}$，令 $t=\sqrt{x}$，则 $y=t^2+mt$，$t\in[1,3]$，然后分 $-\frac{m}{2}\leqslant1$，$1<-\frac{m}{2}<3$ 和 $-\frac{m}{2}\geqslant3$ 三种情况求函数的最小值.

由(1)知，$g(x)=x+m\sqrt{x}$，令 $t=\sqrt{x}$. 因为 $x\in[1,9]$，所以 $t\in[1,3]$，所以 $y=t^2+mt$，$t\in[1,3]$.

①当 $-\frac{m}{2}\leqslant1$，即 $m\geqslant-2$ 时，$y=t^2+mt$ 在 $[1,3]$ 上单调递增，则当 $t=1$ 时，函数 y 有最小值，所以 $1+m=10$，解得 $m=9$；

②当 $1<-\frac{m}{2}<3$，即 $-6<m<-2$ 时，$y=t^2+mt$ 在 $\left(1,-\frac{m}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\frac{m}{2},3\right)$ 上单调递增，则当 $t=-\frac{m}{2}$ 时，函数 y 有最小值，所以 $-\frac{m^2}{4}=10$，无解；

③当 $-\frac{m}{2}\geqslant3$，即 $m\leqslant-6$ 时，函数 $y=t^2+mt$ 在 $[1,3]$ 上单调递减，则当 $t=3$ 时，函数 y 有最小值，所以 $9+3m=10$，解得 $m=\frac{1}{3}$(舍).

综上，当 m 的值为 9 时，$g(x)$ 的最小值为 10.

(3)**分析**：由(1)知 $h(x)=n-\sqrt{x+2}$，由题意可得 $\begin{cases}n-\sqrt{a+2}=b,\\n-\sqrt{b+2}=a.\end{cases}$ 令 $\sqrt{a+2}=s$，$\sqrt{b+2}=t$，则得 $t^2+s=s^2+t$，求得 $t=1-s$，$n=t+s^2-2$，从而求出范围.

由(1)知 $h(x)=n-\sqrt{x+2}$，易知 $h(x)$ 在定义域上单调递减，所以 $\begin{cases}h(a)=b,\\h(b)=a,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}n-\sqrt{a+2}=b,\\n-\sqrt{b+2}=a.\end{cases}$ 令 $\sqrt{a+2}=s$，$\sqrt{b+2}=t$，则 $a=s^2-2$，$b=t^2-2$，所以 $\begin{cases}n-s=t^2-2,\\n-t=s^2-2,\end{cases}$ 所以 $t^2+s=s^2+t$，所以 $(t-s)(t+s-1)=0$. 因为 $a<b$，所以 $s<t$，所以 $t+s-1=0$，所以 $t=1-s$，所以 $\sqrt{a+2}+\sqrt{b+2}=1$. 因为 $a<b$，所以 $-2\leqslant a<-\frac{7}{4}$，所以 $s\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$，所以 $n=t+s^2-2=s^2-s-1=\left(s-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$，所以 $n\in\left(-\frac{5}{4},-1\right]$.

15. $a<b<c$　**分析**：注意到 a,b,c 之间的形式具有相似性，为此，构造函数 $f(n)=\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$，通过应用它的单调性来比较大小.

$f(n)=\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=1-\frac{1}{n^2}$，由幂函数 $g(x)=\frac{1}{x^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减知 $f(n)$ 在 $\mathbf{N}^*$ 上单调递增，故 $f(2\,021)<f(2\,022)<f(2\,023)$，即 $a<b<c$.

单元综合练 3　函数概念与性质的综合应用

1. B　依题意，奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(3)=0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，且 $f(-3)=-f(3)=0$，画出 $f(x)$ 的大致图象可知，不等式 $xf(x)<0$ 的解集 $(-3,0)\cup(0,3)$.

2. A　由函数 $y=f(x-2)$ 是偶函数，得函数 $y=f(x-2)$ 的图象关于 y 轴对称，而函数 $y=f(x)$ 的图象可由函数 $y=f(x-2)$ 的图象向左平移 2 个单位长度而得，因此函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称，则 $f\left(-\frac{7}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)$. 由对任意 $x_1,x_2\in[-2,+\infty)$，当 $x_1\neq x_2$ 时，都有 $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0$，得函数 $y=f(x)$ 在 $[-2,+\infty)$ 上单调递减. 又 $-2<-1<-\frac{1}{2}<0$，所以 $f(-1)>f\left(-\frac{1}{2}\right)>f(0)$，即 $f(-1)>f\left(-\frac{7}{2}\right)>f(0)$.

3. ABD　对于 A，当 $a=1$ 时，$f(x)=|x-2\,024|+|x+2\,024|$，定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=|-x-2\,024|+|-x+2\,024|=|x-2\,024|+|x+2\,024|=f(x)$，故 $f(x)$ 是偶函数，故 A 正确；对于 B，当 $a=-1$ 时，$f(x)=|x-2024|-|x+2\,024|$，定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=|-x-2024|-|-x+2\,024|=|x+2\,024|-|x-2\,024|=-f(x)$，故 $f(x)$ 是奇函数，故 B 正确；对于 C，当 $a=2$ 时，$f(x)=\begin{cases}3x+2\,024, & x>2\,024,\\x+6\,072, & -2\,024\leqslant x\leqslant2\,024,\\-3x-2\,024, & x<-2\,024,\end{cases}$ 作出图象，如图 1 所示，

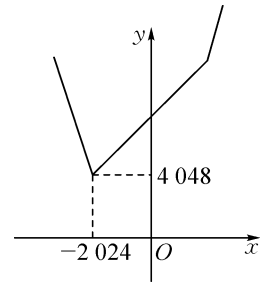


图 1

结合图象知，当 $x=-2\,024$ 时，$f(x)$ 取得最小值 4 048，故 C 错误；对于 D，当 $a=\frac{1}{2}$ 时，

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x-1\,012, & x>2\,024,\\ -\frac{1}{2}x+3\,036, & -2\,024\leqslant x\leqslant 2\,024,\\ -\frac{3}{2}x+1\,012, & x<-2\,024,\end{cases}$$

作出图象，如图2所示，

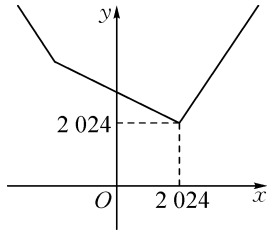


图 2

结合图象可知，当 $x=2\,024$ 时，$f(x)$ 取得最小值 2 024，故D正确.

4. BD　对于A，因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)=-\frac{x}{2+|-x|}=-\frac{x}{2+|x|}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，A正确，B错误；对于C，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\frac{x}{2+x}=1-\frac{2}{2+x}$，由 $x\geqslant 0$ 可得 $x+2\geqslant 2$，所以 $0<\frac{2}{x+2}\leqslant 1$，故 $0\leqslant f(x)<1$，根据奇函数的对称性可得 $-1<f(x)<1$，C正确；对于D，因为 $f(0)=0$，$f(1)=\frac{1}{3}$，显然 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上不是减函数，D错误.

5. (1,2)　44　因为函数 $f(x)=\frac{2(x-1)+5}{x-1}=2+\frac{5}{x-1}$，所以函数 $f(x)$ 的图象可由反比例函数 $y=\frac{5}{x}$ 的图象先向右平移1个单位长度，再向上平移2个单位长度得到. 因为函数 $y=\frac{5}{x}$ 为奇函数，其对称中心为原点，所以函数 $f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$ 的对称中心为(1,2). 故 $f(x)+f(2-x)=4$. 记 $S=f(-10)+f(-9)+f(-8)+\cdots+f(-2)+f(-1)+f(0)+f(2)+f(3)+\cdots+f(11)+f(12)$，则 $2S=[f(-10)+f(12)]+[f(-9)+f(11)]+[f(-8)+f(10)]+\cdots+[f(0)+f(2)]+[f(2)+f(0)]+\cdots+[f(10)+f(-8)]+[f(11)+f(-9)]+[f(12)+f(-10)]=4\times 22$，所以 $S=2\times 22=44$.

6. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$　因为 $f(x+1)$ 的图象是 $f(x)$ 的图象向左平移1个单位长度得到，且函数 $f(x+1)$ 的图象的对称中心是 $(-1,0)$，所以 $f(x)$ 的图象的对称中心是 $(0,0)$，故 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(-1)=-f(1)=-1$. 对任意的 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$，都有 $\frac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 成立，所以 $\frac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_1x_2(x_1-x_2)}=\frac{\frac{f(x_1)}{x_1}-\frac{f(x_2)}{x_2}}{x_1-x_2}>0$. 令 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，所以根据单调性的定义可得 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 由 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数可得 $g(x)$ 是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的偶函数，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减. 当 $x=0$ 时，由不等式 $f(x)-x>0$ 得到 $0-0>0$，矛盾；当 $x>0$ 时，$f(x)-x>0$ 转化为 $\frac{f(x)}{x}>1=\frac{f(1)}{1}$，即 $g(x)>g(1)$，所以 $x>1$；当 $x<0$ 时，$f(x)-x>0$ 转化为 $\frac{f(x)}{x}<1=\frac{f(-1)}{-1}$，即 $g(x)<g(-1)$，所以 $-1<x<0$. 综上所述，不等式 $f(x)-x>0$ 的解集为 $(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

7. 解：(1) 因为 $f(-x)+f(x)=0$，$f(-x)=f(2+x)$，所以 $f(-x)=-f(x)=f(2+x)$，所以 $f(4+x)=-f(2+x)=f(x)$，故 $f(x)$ 是奇函数，且4为其一个周期，且图象关于直线 $x=1$ 轴对称，所以 $f\left(\frac{5}{2}\right)=f\left(2+\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)=-\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]=-\frac{3}{4}$.

(2) 结合(1)的结论，令 $x\in[-1,0]$，则 $-x\in[0,1]$，所以 $f(-x)=x^2-x=-f(x)$，所以 $f(x)=-x^2+x$，$x\in[-1,0]$.

(3) 由(1)(2)可知 $f(x)=\begin{cases}x^2+x, & x\in[0,1],\\ -x^2+x, & x\in[-1,0).\end{cases}$ 由二次函数的单调性可知 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增，且 $f(x)_{\max}=2$，$f(x)_{\min}=-2$，所以 $[a,b]\subseteq[-1,1]$，则 $\begin{cases}f(a)=2a,\\ f(b)=2b.\end{cases}$

若 $a<b\leqslant 0$，则 $\begin{cases}-a^2+a=2a,\\ -b^2+b=2b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=0,\end{cases}$ 此时 $a+b=-1$；

若 $0\leqslant a<b$，则 $\begin{cases}a^2+a=2a,\\ b^2+b=2b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=0,\\ b=1,\end{cases}$ 此时 $a+b=1$；

若 $a<0<b$，则 $\begin{cases}-a^2+a=2a,\\ b^2+b=2b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=1,\end{cases}$ 此时 $a+b=0$.

综上，$a+b$ 的值为 -1 或1或0.

方法总结 1. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线对称

若函数 $f(x)$ 对定义域内任一 x，都有(1) $f(a-x)=f(a+x)\Leftrightarrow y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称；(2) $f(x)=f(a-x)\Leftrightarrow y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{a}{2}$ 对称；(3) $f(a+x)=f(b-x)\Leftrightarrow y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称.

2. 函数 $f(x)$ 的图象关于点对称

若函数 $f(x)$ 对定义域内任一 x，都有(1) $f(a-x)=-f(a+x)\Leftrightarrow y=f(x)$ 的图象关于点 $(a,0)$ 对称；(2) $f(x)=-f(a-x)\Leftrightarrow y=f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{a}{2},0\right)$ 对称；(3) $f(a+x)=-f(b-x)\Leftrightarrow y=f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{a+b}{2},0\right)$ 对称.

8. 解：(1) 由已知函数的定义域关于原点对称，且对于定义域内任意的 x，都有 $f(-x)=\frac{-x}{16-(-x)^2}=\frac{-x}{16-x^2}=-f(x)$，所以

$f(x)=\frac{x}{16-x^2}$为奇函数.

(2)$f(x)=\frac{x}{16-x^2}$在$(-4,4)$上是增函数.证明如下:取任意的x_1,x_2满足$-4<x_1<x_2<4$,则$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{16-x_1^2}-\frac{x_2}{16-x_2^2}=\frac{x_1(16-x_2^2)-x_2(16-x_1^2)}{(16-x_1^2)(16-x_2^2)}=\frac{(16+x_1x_2)(x_1-x_2)}{(16-x_1^2)(16-x_2^2)}$.由$-4<x_1<x_2<4$,可得$16+x_1x_2>0,16-x_1^2>0,16-x_2^2>0,x_1-x_2<0$,即$f(x_1)-f(x_2)=\frac{(16+x_1x_2)(x_1-x_2)}{(16-x_1^2)(16-x_2^2)}<0$,则$f(x_1)<f(x_2)$.所以$f(x)=\frac{x}{16-x^2}$在$(-4,4)$上是增函数.

(3)因为$f(t-1)+f(2t)<0$,所以$f(t-1)<-f(2t)$.由于$f(x)$是奇函数,故$f(t-1)<f(-2t)$.又因为$f(x)$是增函数,所以$t-1<-2t$,则$\begin{cases}-4<t-1<4,\\-4<-2t<4,\\t-1<-2t,\end{cases}$解得$-2<t<\frac{1}{3}$.故不等式的解集为$\left(-2,\frac{1}{3}\right)$.

9. 解:(1)令$t=2x-3$,则$f(t)$的图象关于直线$t=0$对称,所以$f(x)$是偶函数.令$m=p-1,n=q-1$,则$m,n\in[0,+\infty)$,不妨假设$m>n$,则$p>q$,所以$\frac{f(m)-f(n)}{p^2-q^2}>1$,即$f(m)-f(n)>p^2-q^2>0$,所以$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增.又$f(x)$是偶函数,所以$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减.故$f(x)$的单调递增区间为$[0,+\infty)$,单调递减区间为$(-\infty,0)$.

(2)由(1)可得$p=m+1,q=n+1$,则$m,n\in[0,+\infty)$.不妨假设$m>n$,则$p>q$.所以$f(m)-f(n)>p^2-q^2=(m+1)^2-(n+1)^2=m^2-n^2+2m-2n$,得$[f(m)-m^2]-[f(n)-n^2]>2m-2n>0$.令函数$g(x)=f(x)-x^2$,则$g(m)-g(n)>0$,所以$g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增.又$g(-x)=f(-x)-x^2=g(x)$,所以$g(x)$是偶函数,所以$g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减.由$f(2x-1)+6x<f(x+1)+3x^2$,得$f(2x-1)-f(x+1)=g(2x-1)+(2x-1)^2-g(x+1)-(x+1)^2=g(2x-1)-g(x+1)+3x^2-6x<3x^2-6x$,得$g(2x-1)<g(x+1)$,所以$|2x-1|<|x+1|$,解得$0<x<2$.故不等式$f(2x-1)+6x<f(x+1)+3x^2$的解集为$(0,2)$.

课时提优 18　函数的应用(一)

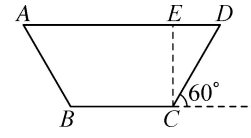
1. D　该厂每月获得的利润$y=(160-2x)\cdot x-(500+30x)=-2x^2+130x-500(0<x<80)$,由题意得$-2x^2+130x-500\geqslant 1\ 300$,解得$20\leqslant x\leqslant 45$,所以当月产量在20至45件(包括20和45)时,每月获得的利润不少于1 300元.

2. D　根据题意,设$f=\frac{k}{W^{\frac{1}{3}}}(k\neq 0)$,当$W=2,f=210$时,$k=210\times 2^{\frac{1}{3}}$.当$f=70$时,$W^{\frac{1}{3}}=\frac{210\times 2^{\frac{1}{3}}}{70}=3\times 2^{\frac{1}{3}}$,所以$W=54$.

3. A　由题意得行进的速度$v(t)$与行走的路程$S(t)$与时间t的函数关系分别为$v(t)=\begin{cases}\frac{a}{3},\ 0<t<3,\\0,\ \ 3\leqslant t\leqslant 5,\\\frac{a}{10},\ 5<t\leqslant 15,\end{cases}$ $S(t)=\begin{cases}\frac{a}{3}t,\ & 0<t<3,\\a,\ & 3\leqslant t\leqslant 5,\\a+\frac{a(t-5)}{10},\ & 5<t\leqslant 15.\end{cases}$由速度函数及路程函数的解析式可知,其图象分别为①②.

4. BC　依题意,$\begin{cases}m\left(n-\frac{x}{25}\right)\geqslant m,\\m(1+2x\%)(200-x)\geqslant m\left(n-\frac{x}{25}\right)x,\\x\geqslant 125,\end{cases}$则$\begin{cases}125\leqslant x\leqslant 25(n-1),\\x^2+50(3-n)x+10\ 000\geqslant 0,\end{cases}$由$125\leqslant x\leqslant 25(n-1)$知,$n\geqslant 6$,且$n\in\mathbf{N}^*$,由$x^2+50(3-n)x+10\ 000\geqslant 0$知,$n\leqslant\frac{x}{50}+\frac{200}{x}+3$在$x\in[125,200)$上恒成立,因为$y=\frac{x}{50}+\frac{200}{x}+3$在$x\in[125,200)$上单调递增,所以$y_{\min}=\frac{125}{50}+\frac{200}{125}+3=7.1$,即$n\leqslant 7$.综上,$6\leqslant n\leqslant 7,n\in\mathbf{N}$.

5. $S=h(l-\sqrt{3}h)\left(0<h<\frac{\sqrt{3}}{4}l\right)$　如图,过点C作AD的垂线,交AD于点E,则$\angle EDC=60^\circ$.在$\triangle CDE$中,$ED=\frac{1}{2}CD,CE=h=\frac{\sqrt{3}}{2}CD$,则$CD=AB=\frac{2}{\sqrt{3}}h$,而$AB+BC+CD=l$,所以$BC=l-\frac{4}{\sqrt{3}}h,AD=BC+2ED=l-\frac{2}{\sqrt{3}}h$,所以$S=\frac{(BC+AD)\cdot CE}{2}=h(l-\sqrt{3}h)\left(0<h<\frac{\sqrt{3}}{4}l\right)$.



易错警示　本题容易遗漏函数的定义域而致错.

6. 30　设日利润为y,则$y=(x-20)P=(x-20)\frac{10^5}{(x-10)^2}=10^5\left[\frac{1}{x-10}-\frac{10}{(x-10)^2}\right]$,令$t=\frac{1}{x-10}$,由$x\in(20,40]$,得$t\in\left[\frac{1}{30},\frac{1}{10}\right)$,设$f(t)=t-10t^2$,则二次函数$f(t)$图象的对称轴$t=\frac{1}{20}\in\left[\frac{1}{30},\frac{1}{10}\right)$,所以当$t=\frac{1}{20}$时,$f(t)_{\max}=f\left(\frac{1}{20}\right)=\frac{1}{40}$,此时日利润最大,故当$\frac{1}{x-10}=\frac{1}{20}$,即$x=30$时,日利润最大.

7. D　当甲商品的价格为6元时,该商人全部买入甲商品,可以买$6\div 6=1$(万份),在t_2时刻全部卖出,此时获利$1\times 2=2$(万

元);当乙商品的价格为 4 元时,该商人全部买入乙商品,可以买 $(6+2)\div4=2$(万份),在 t_4 时刻全部卖出,此时获利 $2\times2=4$(万元).共获利 $2+4=6$(万元).

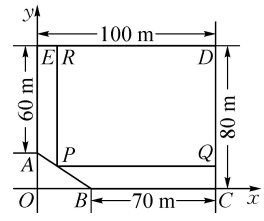
8. A　函数 $y=-\frac{1}{20}x^2+6x$ 图象的对称轴为直线 $x=-\frac{6}{2\times\left(-\frac{1}{20}\right)}=60$,所以 $y_{\max}=-\frac{1}{20}\times60^2+6\times60=180$,超出了范围,不符合题意;当 $y=\frac{1}{2}x+50$,$x\in[0,100]$时,$y\in[50,100]$,且 $y=\frac{1}{2}x+50$ 在$[0,100]$上单调递增,$y-x=-\frac{1}{2}x+50\in[0,50]$,即 $y\geqslant x$,符合题意;函数 $y=|x-1|$在$[0,1]$上单调递减,在$[1,100]$上单调递增,不符合题意;函数 $y=10\sqrt{x}$ 为增函数,且当 $x\in[0,100]$时,$y\in[0,100]$,$0\leqslant\sqrt{x}\leqslant10$,则 $x\leqslant10\sqrt{x}$,即 $y\geqslant x$,符合题意.故满足此次联合调度要求的函数解析式的序号是②④.

9. BC　当 $x\leqslant16$ 时,$p(x)=-\frac{1}{5}x^2+6x-20=-\frac{1}{5}(x-15)^2+25$,故当 $x=15$ 时,获得最大月利润,为 $p(15)=25$,故 B 正确,D 错误;$y=\frac{p(x)}{x}=-\frac{1}{5}x+6-\frac{20}{x}=-\left(\frac{1}{5}x+\frac{20}{x}\right)+6\leqslant-2\sqrt{\frac{1}{5}x\cdot\frac{20}{x}}+6=2$,当且仅当$\frac{1}{5}x=\frac{20}{x}$,即 $x=10$ 时,等号成立,此时利润率取得最大值 2,故 C 正确,A 错误.

10. AC　当 $0<x<200$ 时,甲商场的费用为 $0.84x$,乙商场的费用为 x,$x>0.84x$,故应进甲商场,所以选项 A 正确.当 $200\leqslant x<300$ 时,甲商场的费用为 $0.84x$,乙商场的费用为 $x-40$,$x-40-0.84x=0.16x-40$,当 $200\leqslant x<250$ 时,$-8\leqslant0.16x-40<0$,$x-40<0.84x$,故应进乙商场;当 $250\leqslant x<300$ 时,$x-40>0.84x$,故应进甲商场,所以选项 B 错误.当 $400\leqslant x<500$ 时,甲商场的费用为 $0.84x$,乙商场的费用为 $x-80$,$x-80-0.84x=0.16x-80$,因为 $400\leqslant x<500$,所以 $-16\leqslant0.16x-80<0$,即 $x-80<0.84x$,所以应进乙商场,所以选项 C 正确.假设消费了 600 元,则在甲商场的费用为 $600\times0.84=504$,在乙商场的费用为 $600-120=480$,乙商场费用低,所以应进乙商场购物,所以选项 D 错误.

11. (4,28)　当 $x\in[0,12]$时,设 $f_1(x)=a(x-10)^2+80$,将点(12,78)代入得,$78=a(12-10)^2+80$,解得 $a=-\frac{1}{2}$,则 $f_1(x)=-\frac{1}{2}(x-10)^2+80$,由 $f_1(x)=-\frac{1}{2}(x-10)^2+80>62$,解得 $4<x<16$,即 $4<x\leqslant12$;当 $x\in(12,40]$时,设 $f_2(x)=kx+b$,将点(12,78),(40,50)代入,解得$\begin{cases}k=-1,\\b=90,\end{cases}$则 $f_2(x)=-x+90$,由 $f_2(x)=-x+90>62$,解得 $x<28$,即 $12<x<28$.综上所述,教师在(4,28)时间段内安排核心内容,能使得学生学习效果最佳.

12. 6 017　在线段 AB 上任取一点 P,分别向 CD,DE 作垂线划出一块长方形土地,以 BC,EA 的交点为原点,BC,EA 所在直线分别为 x 轴、y 轴,建立平面直角坐标系,则 AB 的方程为$\frac{x}{30}+\frac{y}{20}=1$,设 $P\left(x,20-\frac{2x}{3}\right)$,则长方形的面积 $S=(100-x)\left[80-\left(20-\frac{2x}{3}\right)\right](0\leqslant x\leqslant30)$,化简得 $S=-\frac{2x^2}{3}+\frac{20x}{3}+6\,000=-\frac{2}{3}(x-5)^2+6\,000+\frac{50}{3}(0\leqslant x\leqslant30)$,当 $x=5$,即点 $P\left(5,\frac{50}{3}\right)$时,$S_{\max}=6\,017$.



方法总结　利用二次函数求最值的方法

二次函数模型的解析式为 $g(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$.在函数建模中,它占有重要的地位.在根据实际问题建立函数解析式模型后,可利用配方法、判别式法、换元法、函数的单调性等方法来求函数的最值,从而解决实际问题中的最值问题.二次函数求最值最好结合二次函数的图象来解答.

13. **解**:(1)设商品的利润为 Y(万元),依题意得 $Y=S-C=\begin{cases}2x+\frac{18}{x-8}+2,\ 0<x<6,\\11-x,\qquad x\geqslant6.\end{cases}$

(2)当 $0<x<6$ 时,$Y=2x+\frac{18}{x-8}+2=2(x-8)+\frac{18}{x-8}+18=-2\left[(8-x)+\frac{9}{8-x}\right]+18\leqslant-4\sqrt{(8-x)\cdot\frac{9}{8-x}}+18=6$,当且仅当 $8-x=\frac{9}{8-x}$,即 $x=5$ 时,等号成立,所以当 $0<x<6$ 时,Y 有最大值 6;当 $x\geqslant6$ 时,$Y=11-x\leqslant5$.综上,当 $x=5$ 时,Y 取得最大值 6.因此,当生产量确定为 5 千件时,商品的利润取得最大值 6 万元.

14. **解**:(1)当 $0<x\leqslant20$ 时,$W=80x-(x^2+40x-100)-300=-x^2+40x-200$;当 $x>20$ 时,$W=80x-\left(81x+\frac{1\,600}{x}-600\right)-300=-x-\frac{1\,600}{x}+300$.所以 $W=\begin{cases}-x^2+40x-200,\ 0<x\leqslant20,\\-x-\frac{1\,600}{x}+300,\ x>20,\end{cases}$ 且定义域为$(0,+\infty)$.

(2)设 2025 年该童装生产线的利润为 P 当 $0<x\leqslant20$ 时,$P=-x^2+40x+100$,易知二次函数图象开口向下,对称轴为直线 $x=20$,所以当 $x=20$ 时,$P_{\max}=500$;当 $x>20$ 时,$P=-x-\frac{1\,600}{x}+600=-\left(x+\frac{1\,600}{x}\right)+600\leqslant-2\sqrt{x\cdot\frac{1\,600}{x}}+600=520$,当且

仅当 $x=\frac{1\,600}{x}$，即 $x=40$ 时，等号成立，此时 P 的最大值为 520. 综上所述，2025 年生产 40 万套童装，该生产线的利润最大，最大利润为 520 万元.

方法总结 分段函数求最值的方法

1. 分段函数的"段"一定要分得合理，不重不漏.
2. 分段函数的定义域为对应每一段自变量取值范围的并集.
3. 分段函数的值域求法：逐段求函数值的范围，最后比较再下结论.

15. C　由题图知 $\begin{cases}4a+2b+c=50,\\9a+3b+c=80,\\16a+4b+c=70,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-20,\\b=130,\\c=-130,\end{cases}$ 所以 $p=-20t^2+130t-130$，当 $t=3.25$ 时，p 取最大值.

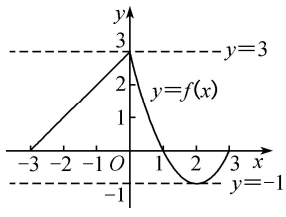
培优突破练 3　分段函数的有关问题

1. C　$f(f(-6))=f(f(-4))=f(f(-2))=f(f(0))=f(f(2))=f(2^2-3\times2+4)=f(2)=2^2-3\times2+4=2$.

方法总结 求分段函数的函数值的方法：先确定要求值的自变量的取值属于哪一段区间，然后代入该段的解析式求值. 当出现 $f[f(a)]$ 的形式时，应从内到外依次求值.

2. D　**解法 1**　因为 $y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$ 且 $0\leqslant x\leqslant3$，所以当 $x=2$ 时，$y_{\min}=-1$，当 $x=0$ 时，$y_{\max}=3$；当 $-3\leqslant x<0$ 时，$0\leqslant x+3<3$，所以函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-4x+3, & 0\leqslant x\leqslant3,\\x+3, & -3\leqslant x<0\end{cases}$ 的最小值为 -1，最大值为 3，故函数 $f(x)$ 的值域为 $[-1,3]$.

解法 2　画出 $f(x)$ 的草图如图所示，由图象可知函数 $f(x)$ 的最小值为 -1，最大值为 3，故函数 $f(x)$ 的值域为 $[-1,3]$.



3. D　因为 $\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\0, & x=0,\\-1, & x<0,\end{cases}$ 所以 $g(x)=x\operatorname{sgn} x=\begin{cases}x, & x>0,\\0, & x=0,\\-x, & x<0,\end{cases}$ 可得 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 当 $x<0$ 时，$-x>0$，则有 $g(-x)=-x=g(x)$；当 $x>0$ 时，$-x<0$，则有 $g(-x)=-(-x)=x=g(x)$；当 $x=0$ 时，$-x=0$，则有 $g(-x)=0=g(x)$. 综上所述，$g(-x)=g(x)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，所以函数 $g(x)$ 是偶函数.

4. D　因为 $f(x)=\begin{cases}(2-k)x+3, & x<1,\\x^2+2kx+1, & x\geqslant1\end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，则 $\begin{cases}2-k>0,\\-k\leqslant1,\\2-k+3\leqslant1+2k+1,\end{cases}$ 解得 $1\leqslant k<2$，所以实数 k 的取值范围是 $[1,2)$.

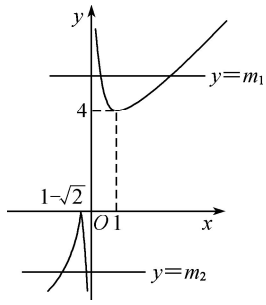
5. C　当 $x>1$ 时，$f(x)=2x+\frac{2}{x-1}+3=2\left(x-1+\frac{1}{x-1}\right)+5\geqslant4\sqrt{(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}}+5=9$，当且仅当 $x-1=\frac{1}{x-1}$，即 $x=2$ 时，等号成立. 当 $x<1$ 时，$f(x)_{\min}=f(0)=3a$，由二次函数性质可知对称轴 $x=\frac{a^2-5a+4}{2}=0$，且 $3a\leqslant9$，解得 $a=1$ 或 $a=4$（舍去）.

6. C　当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-2x+3+a=(x-1)^2+2+a$，此时函数的最小值为 $f(1)=a+2$. 若 $a<0$，则 $f(a)<f(0)$，此时 $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的最小值，不满足条件；若 $a\geqslant0$，要使 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最小值，则满足 $f(0)=a^2\leqslant a+2$，即 $a^2-a-2\leqslant0$，解得 $-1\leqslant a\leqslant2$，所以 $0\leqslant a\leqslant2$.

方法总结 求分段函数的最值，应分别求出各个部分函数的最值，最后对求出的几个值进行比较，最终确定最值.

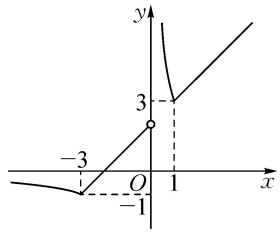
7. BCD　A 选项，$f(1)=4$，$f(-1)=-2$，即 $f(-1)\neq-f(1)$，则 $f(x)$ 不是奇函数，即 A 错误. B 选项，当 $x<0$ 时，$f(x)=-x^2+2x+1=-(x-1)^2+2$，对称轴为直线 $x=1$，开口向下，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增；当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$，对称轴为直线 $x=-1$，开口向上，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $-0^2+2\times0+1=0^2+2\times0+1$，于是得 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则 $(x_1-x_2)\cdot[f(x_1)-f(x_2)]>0$，B 正确. C 选项，当 $x>0$ 时，$-x<0$，$f(x)+f(-x)=(x^2+2x+1)+[-(-x)^2+2(-x)+1]=2$；当 $x<0$ 时，$-x>0$，$f(x)+f(-x)=(-x^2+2x+1)+[(-x)^2+2(-x)+1]=2$；当 $x=0$ 时，$f(x)+f(-x)=2f(0)=2$. 综上，对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x)+f(-x)=2$ 成立，C 正确. D 选项，因为 $|f(0)|=1$，则 0 不是 $y=|f(x)|-mx$ 的零点. 当 $x\neq0$ 时，$|f(x)|-mx=0\Leftrightarrow m=\frac{|f(x)|}{x}$，令 $g(x)=\frac{|f(x)|}{x}$，$y=m$，依题意函数 $y=g(x)$ 的图象与直线 $y=m$ 有两个公共点；当 $x<0$ 时，令 $f(x)=-x^2+2x+1\geqslant0$，解得 $x\in[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}]$，结合 $x<0$ 可得 $x\in[1-\sqrt{2},0)$；令 $f(x)=-x^2+2x+1<0$，解得 $x\in(-\infty,1-\sqrt{2})\cup(1+\sqrt{2},+\infty)$，结合 $x<0$ 可得 $x\in(-\infty,1-\sqrt{2})$. 当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2\geqslant0$ 恒成立. 综上，当 $f(x)\geqslant0$ 时，$x\geqslant1-\sqrt{2}$，当 $f(x)<0$ 时，$x<1-\sqrt{2}$，于是得 $g(x)=\begin{cases}x+\frac{1}{x}+2, & x>0,\\-x+\frac{1}{x}+2, & 1-\sqrt{2}\leqslant x<0,\\x-\frac{1}{x}-2, & x<1-\sqrt{2}.\end{cases}$ 由对勾函数知，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上递单调减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，又 $g(x)$ 在 $[1-\sqrt{2},0)$ 上单调递

减，在$(-\infty,1-\sqrt{2}]$上单调递增，如图：



直线 $y=m_1$ 与 $y=g(x)$的图象有 2 个公共点，$m_1>4$；直线 $y=m_2$ 与 $y=g(x)$的图象有 2 个公共点，$m_2<0$. 从而得函数 $y=g(x)$的图象与直线 $y=m$ 有 2 个公共点时，$m<0$ 或 $m>4$，所以实数 m 的取值范围是$(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$，D 正确.

8. ABD　根据题意，令 $f(x)=g(x)$，可得 $x=-3$ 或 $x=1$. 由题意可知函数 $F(x)=\max\{f(x),g(x)\}=\begin{cases}\dfrac{3}{x}, & x\leqslant-3,\\ x+2, & -3<x<0,\\ \dfrac{3}{x}, & 0<x\leqslant1,\\ x+2, & x>1.\end{cases}$ 作出函数 $F(x)$的图象，如图：



对于 A，当 $x\in(0,1)$时，$F(x)=\dfrac{3}{x}$，故 A 正确；对于 B，由图可知函数 $F(x)$的最小值为-1，无最大值，故 B 正确；对于 C，由图可知函数 $F(x)$在$(-3,0)$上单调递增，故 C 错误；对于 D，若关于 x 的方程 $F(x)=m$ 恰有两个不相等的实数根，则直线 $y=m$ 与函数 $F(x)$的图象有两个交点，可得$-1<m<0$ 或 $m>3$，故 D 正确.

9. ACD　对于选项 A，因为$\dfrac{2}{3}$为最简真分数，所以 $R\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{1}{3}$，所以 A 正确. 对于选项 B，当 $n=1$ 时，$x=\dfrac{1}{2}$是方程 $R(x)=\dfrac{1}{2}$的实数根，所以 B 错误. 对于选项 C，若 x 为$(0,1)$上的无理数，则 $1-x$ 也为$(0,1)$上的无理数，此时 $R(x)=0=R(1-x)$；若 $x=1$，则 $1-x=0$，此时 $R(x)=R(1-x)=0$；若 $x=0$，则 $1-x=1$，此时 $R(x)=R(1-x)=0$；若 x 为$(0,1)$上的有理数，设 $x=\dfrac{p}{q}$ $\left(\text{其中 } p,q \text{ 为正整数，}\dfrac{p}{q}\text{为最简真分数}\right)$，则 $R(x)=\dfrac{1}{q}$，此时 $1-x=\dfrac{q-1}{q}$也为有理数，且$\dfrac{q-1}{q}$为最简真分数，此时 $R(1-x)=\dfrac{1}{q}$，所以 $R(x)=R(1-x)$，所以 C 正确. 对于选项 D，①若 a 与 b 中至少一个为 0 或 1 或$(0,1)$中的无理数时，则 $R(a)R(b)=0$，而 $R(ab)\geqslant0$ 恒成立，满足 $R(ab)\geqslant R(a)R(b)$；②若 a 与 b 都为$(0,1)$内的有理数时，设 $a=\dfrac{p_1}{q_1}$，$b=\dfrac{p_2}{q_2}$（p_1,p_2,q_1,q_2 为正整数，$\dfrac{p_1}{q_1}$，$\dfrac{p_2}{q_2}$为最简真分数），所以 $R(a)=\dfrac{1}{q_1}$，$R(b)=\dfrac{1}{q_2}$. 又 $ab=\dfrac{p_1p_2}{q_1q_2}$，当$\dfrac{p_1}{q_1}\cdot\dfrac{p_2}{q_2}$能约分时，$ab$ 写成既约真分数（分子和分母互质的分数）分母小于 q_1q_2，设为 $q_0(q_0<q_1q_2)$，则 $R(ab)=\dfrac{1}{q_0}>\dfrac{1}{q_1q_2}=R(a)R(b)$；当$\dfrac{p_1}{q_1}\cdot\dfrac{p_2}{q_2}$不能约分时，$R(ab)=\dfrac{1}{q_1q_2}=\dfrac{1}{q_1}\cdot\dfrac{1}{q_2}=R(a)R(b)$. 综上可知，$R(ab)\geqslant R(a)R(b)$成立，D 正确.

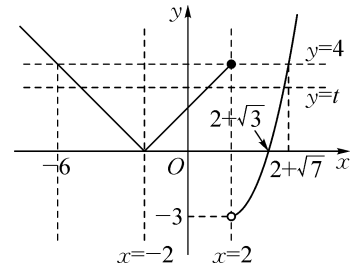
10. $[-4,-1]$　因为对任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}(x_1\neq x_2)$，都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$ 成立，所以 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，则 $\begin{cases}-a-5<0,\\ -(a-1)\geqslant2,\\ 2^2+2(a-1)\times2-3a\geqslant(-a-5)\times2-2,\end{cases}$ 解得$-4\leqslant a\leqslant-1$.

11. *love*　明文译成的密文是 *shxc*，设密文 s 对应的明文为 α，则 $f(\alpha)=19$. 若$\dfrac{\alpha+1}{2}=19$，则 $\alpha=37>26$，不符合要求；若$\dfrac{\alpha}{2}+13=19$，则 $\alpha=12$，即 s 对应的明文为 l. 同理可以确定出 h 对应的明文为 o，x 对应的明文为 v，c 对应的明文为 e，如下表：

密文	s	h	x	c
$f(x)$	19	8	24	3
明文	l	o	v	e

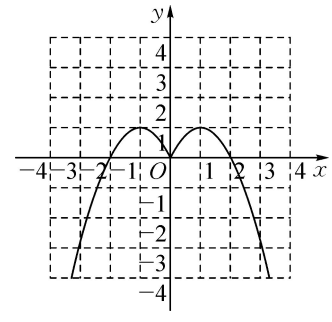
所以原来的明文是 *love*.

12. $(0,4]$　$(-2+\sqrt{3},-2+\sqrt{7}]$　因为 $f(2)=4$，令$|x+2|=4(x<2)$，解得 $x=-6$；令 $x^2-4x+1=4(x>2)$，解得 $x=2+\sqrt{7}$；令 $x^2-4x+1=0(x>2)$，解得 $x=2+\sqrt{3}$. 作出函数 $y=f(x)$的图象如图所示.



若 $f(x)=t$ 有三个不同的解 x_1,x_2,x_3，不妨令 $x_1<x_2<x_3$，等价于 $y=f(x)$的图象与直线 $y=t$ 有 3 个交点. 由图象可得 $0<t\leqslant4$，且 $x_1+x_2=-4$，$x_3\in(2+\sqrt{3},2+\sqrt{7}]$，则 $x_1+x_2+x_3\in(-2+\sqrt{3},-2+\sqrt{7}]$. 所以 t 的取值范围是$(0,4]$，$x_1+x_2+x_3$ 的取值范围是$(-2+\sqrt{3},-2+\sqrt{7}]$.

13. **解**：(1)因为函数 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，所以函数 $f(x)$的图象关于 y 轴对称，其图象如图所示.



由图象可得单调递增区间为$(-\infty,-1)$,$(0,1)$.

(2)根据题意,令$x>0$,则$-x<0$,则$f(-x)=-x^2+2x$.又由函数$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数,得$f(-x)=f(x)=-x^2+2x$,所以$f(x)=\begin{cases}-x^2-2x,x\leqslant 0,\\-x^2+2x,x>0.\end{cases}$

(3)由(2)知,当$x\in[1,2]$时,$f(x)=-x^2+2x$,则$g(x)=-x^2+2x+(2a-2)x+2=-x^2+2ax+2$,其图象对称轴为直线$x=a$,当$a<1$时,$g(x)$在$[1,2]$上为减函数,$g(x)_{\max}=g(1)=2a+1$;当$1\leqslant a<2$时,$g(x)_{\max}=g(a)=a^2+2$;当$a\geqslant 2$时,$g(x)$在$[1,2]$上为增函数,$g(x)_{\max}=g(2)=4a-2$.故

$$g(x)_{\max}=\begin{cases}2a+1,a<1,\\a^2+2,1\leqslant a<2,\\4a-2,a\geqslant 2.\end{cases}$$

14. 解:(1)由已知当$0<a<1$时,$-a<0$,所以$f(-a)=-a+3$,$f(a)=a+\frac{a^2}{a}-\sqrt{a}=2a-\sqrt{a}$,所以$f(-a)-f(a)=-a+3-2a+\sqrt{a}=3(1-a)+\sqrt{a}>0$,所以$f(-a)>f(a)$.

(2)当$x\in[-3,0]$时,$f(x)=x+3$,其值域为$A=[0,3]$;当$x\in(0,+\infty)$时,$f(x)=x+\frac{a^2}{x}-\sqrt{a}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{a^2}{x}}=2a-\sqrt{a}$,当且仅当$x=\frac{a^2}{x}$,即$x=a$时,等号成立,所以函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上的值域为$B=[2a-\sqrt{a},+\infty)$.又函数的值域为$[0,+\infty)$,即$A\cup B=[0,+\infty)$,所以$0\leqslant 2a-\sqrt{a}\leqslant 3$,解得$\frac{1}{4}\leqslant a\leqslant\frac{9}{4}$,即$a\in\left[\frac{1}{4},\frac{9}{4}\right]$.

15. 解:(1)由题知,当$10\leqslant t\leqslant 20$时,$p(t)=720$;当$2\leqslant t<10$时,$p(t)=720-k(12-t)^2$,因为发车时间间隔为3分钟时的载客减少量为324人,所以$s(3)=k(12-3)^2=324$,解得$k=4$,此时$p(t)=720-4\times(12-t)^2=-4t^2+96t+144$,所以

$$p(t)=\begin{cases}-4t^2+96t+144,\ 2\leqslant t<10,\\720,\qquad\qquad 10\leqslant t\leqslant 20.\end{cases}$$

(2)依题意$p(t)\geqslant 524$,当$10\leqslant t\leqslant 20$时,$p(t)=720>524$,满足题意;当$2\leqslant t<10$时,$p(t)=-4t^2+96t+144\geqslant 524$,即$t^2-24t+95\leqslant 0$,解得$5\leqslant t<10$,所以列车发车时间间隔至少为5分钟,列车载客量才能至少达到524人.

(3)由(1)知$Q(t)=\begin{cases}132-8t-\frac{72}{t},\ 2\leqslant t<10,\\\frac{1\,080}{t}-60,\qquad 10\leqslant t\leqslant 20.\end{cases}$当$2\leqslant t<10$时,$Q(t)\leqslant 132-2\sqrt{8t\cdot\frac{72}{t}}=84$,当且仅当$t=3$时,等号成立,$Q(t)_{\max}=Q(3)=84$;当$10\leqslant t\leqslant 20$时,$Q(t)$单调递减,则$Q(t)_{\max}=Q(10)=48$.综上,当发车时间间隔为3分钟时,每分钟的净收益最大,为84元.

培优突破练4　函数$y=mx+\frac{n}{x}$的图象与性质

1. D　当$a=0$时,$f(x)=x+\frac{0}{x}=x$,$x\neq 0$,为A中的图象;当$a>0$时,$f(x)=x+\frac{a}{x}$为对勾函数,为B中的图象;当$a<0$时,$f(x)=x+\frac{a}{x}$,函数的零点是$\pm\sqrt{-a}$,函数的单调递增区间是$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$,为C中的图象;不管a为何值,都不可能是D中的图象.

2. D　任取$1<x_1<x_2$,则$f(x_1)-f(x_2)=x_1-x_2+\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}(x_1x_2-1)$,因为$x_1-x_2<0$,$x_1x_2>1$,所以$f(x_1)-f(x_2)<0$,则$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增.又$k^2+2k+4=(k+1)^2+3\geqslant 3>2$,所以$f(2)<f(k^2+2k+4)$.

3. B　函数$f(x)=|x|+\frac{1}{x}$的定义域为$\{x|x\neq 0\}$,且$f(x)=\begin{cases}-x+\frac{1}{x},x<0,\\x+\frac{1}{x},\quad x>0.\end{cases}$当$x<0$时,因为函数$y=-x$,$y=\frac{1}{x}$都单调递减,所以函数$f(x)=-x+\frac{1}{x}$单调递减;当$x>0$时,由对勾函数的单调性可知,函数$f(x)=x+\frac{1}{x}$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增.故符合函数$f(x)$的图象为B中的图象.

4. A　**分析**:变形换元得到$y=t+\frac{a-1}{t}$,$t\in[1,+\infty)$,考虑$a-1<0$,$a-1=0$和$a-1>0$三种情况,结合对勾函数性质得到不等式,求出实数a的取值范围.

$f(x)=\frac{x^2+2x+a}{x+1}=x+1+\frac{a-1}{x+1}$,令$x+1=t\in[1,+\infty)$,则$y=t+\frac{a-1}{t}$,$t\in[1,+\infty)$.当$a-1<0$,即$a<1$时,$y=t+\frac{a-1}{t}$在$[1,+\infty)$上单调递增,符合题意;当$a-1=0$,即$a=1$时,$y=t$在$[1,+\infty)$上单调递增,符合题意;当$a-1>0$,即$a>1$时,由对勾函数性质知$y=t+\frac{a-1}{t}$在$[\sqrt{a-1},+\infty)$上单调递增,由$0<\sqrt{a-1}\leqslant 1$,解得$1<a\leqslant 2$.综上,实数$a$的取值范围是$(-\infty,2]$.

5. B　因为$x\in[1,4]$,$y=x+\frac{4}{x}$在$[1,2]$上单调递减,在$[2,4]$上单调递增,所以$x+\frac{4}{x}\in[4,5]$,当$a\geqslant 5$时,$f(x)=a-x-\frac{4}{x}+a=2a-\left(x+\frac{4}{x}\right)$,此时函数的最大值为$2a-4$,令$2a-4=5$,解得$a=\frac{9}{2}$,舍去;当$a\leqslant 4$时,$f(x)=x+\frac{4}{x}-a+a=x+\frac{4}{x}\leqslant 5$,符合题意;当$4<a<5$时,$f(x)_{\max}=\max\{|4-a|+$

a，$|5-a|+a\}$，则 $\begin{cases}|4-a|+a\geqslant|5-a|+a,\\|4-a|+a=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|4-a|+a<|5-a|+a,\\|5-a|+a=5,\end{cases}$ 解得 $a=\frac{9}{2}$ 或 $4<a<\frac{9}{2}$. 综上，a 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{9}{2}\right]$.

6. B　因为函数 $y=f(x)$ 的值域是 $\left[\frac{1}{2},4\right]$，所以函数 $f(2x+1)$ 的值域是 $\left[\frac{1}{2},4\right]$，令 $f(2x+1)=t\in\left[\frac{1}{2},4\right]$，则 $F(x)=g(t)=t+\frac{1}{t}$，由对勾函数的性质可知，函数 $g(t)=t+\frac{1}{t}$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上单调递减，在 $(1,4]$ 上单调递增，而 $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$，$g(1)=2$，$g(4)=\frac{17}{4}$，则 $g(t)\in\left[2,\frac{17}{4}\right]$，即函数 $F(x)$ 的值域是 $\left[2,\frac{17}{4}\right]$.

7. AC　当 $x>0$ 时，函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}\geqslant2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立，则 $f(x)$ 的值域为 $[2,+\infty)$. 对于 A，函数 $y=x^2-x+\frac{9}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2$，当 $x=\frac{1}{2}$ 时，y 有最小值 2，故其值域为 $[2,+\infty)$，故 A 正确；对于 B，因为 $y=\frac{1}{|x|}>0$，所以 $y=\frac{1}{|x|}+2>2$，即 $y=\frac{1}{|x|}+2$ 的值域为 $(2,+\infty)$，故 B 错误；对于 C，因为 $x>1$，所以 $x-1>0$，所以 $y=x+\frac{1}{4(x-1)}=x-1+\frac{1}{4(x-1)}+1\geqslant2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{1}{4(x-1)}}+1=2$，当且仅当 $x=\frac{3}{2}$ 时，等号成立，故 $y=x+\frac{1}{4(x-1)}(x>1)$ 的值域为 $[2,+\infty)$，故 C 正确；对于 D，当 $x>0$ 时，函数 $y=\frac{1}{2}x+2>2$，其值域为 $(2,+\infty)$，故 D 错误.

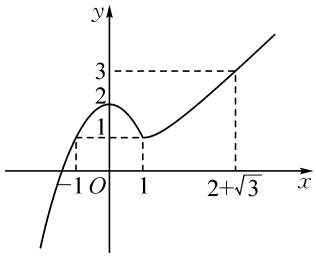
8. AD　依题意可得 $f(x)=x+\frac{a}{x}(a>0)$ 在 $(0,\sqrt{a})$ 上单调递减，在 $(\sqrt{a},+\infty)$ 上单调递增. 当 $\sqrt{a}\leqslant2$，即 $0<a\leqslant4$ 时，$f(x)$ 在 $[2,4]$ 上单调递增，所以 $f(x)_{\max}=f(4)=4+\frac{a}{4}$，$f(x)_{\min}=f(2)=2+\frac{a}{2}$，所以 $f(x)_{\max}-f(x)_{\min}=4+\frac{a}{4}-\left(2+\frac{a}{2}\right)=2-\frac{a}{4}=1$，解得 $a=4$. 当 $\sqrt{a}\geqslant4$，即 $a\geqslant16$ 时，$f(x)$ 在 $[2,4]$ 上单调递减，所以 $f(x)_{\min}=f(4)=4+\frac{a}{4}$，$f(x)_{\max}=f(2)=2+\frac{a}{2}$，所以 $f(x)_{\max}-f(x)_{\min}=2+\frac{a}{2}-\left(4+\frac{a}{4}\right)=\frac{a}{4}-2=1$，解得 $a=12$（舍去）. 当 $2<\sqrt{a}<4$，即 $4<a<16$ 时，$f(x)$ 在 $(2,\sqrt{a}]$ 上单调递减，在 $[\sqrt{a},4)$ 上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(\sqrt{a})=2\sqrt{a}$，$f(x)_{\max}=\max\{f(2),f(4)\}$，若 $4+\frac{a}{4}>2+\frac{a}{2}$，且 $4<a<16$，则 $4<a<8$，$f(x)_{\max}=f(4)=4+\frac{a}{4}$，所以 $f(x)_{\max}-f(x)_{\min}=4+\frac{a}{4}-2\sqrt{a}=1$，解得 $a=4$ 或 $a=36$（均舍去）；若 $4+\frac{a}{4}\leqslant2+\frac{a}{2}$，且 $4<a<16$，即 $8\leqslant a<16$，$f(x)_{\max}=f(2)=2+\frac{a}{2}$，所以 $f(x)_{\max}-f(x)_{\min}=2+\frac{a}{2}-2\sqrt{a}=1$，解得 $a=6+4\sqrt{2}$ 或 $a=6-4\sqrt{2}$（舍去）. 综上，$a=6+4\sqrt{2}$ 或 $a=4$.

9. ACD　对于 A，因为当 $m>0$ 时，函数的定义域为 $\mathbf{R}$；当 $m=0$ 时，函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；当 $m<0$ 时，函数的定义域为 $(-\infty,-\sqrt{-m})\cup(-\sqrt{-m},\sqrt{-m})\cup(\sqrt{-m},+\infty)$，且 $f(-x)=\frac{|-x|}{(-x)^2+m}=\frac{|x|}{x^2+m}=f(x)$，所以当 $m\in\mathbf{R}$ 时，$f(x)$ 必为偶函数，故 A 正确. 对于 B，当 $m=2$ 时，$f(x)=\frac{|x|}{x^2+2}$ 为偶函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=\frac{x}{x^2+2}=\frac{1}{x+\frac{2}{x}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$（当且仅当 $x=\frac{2}{x}$，即 $x=\sqrt{2}$ 时，取“=”），所以 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{2})$ 上单调递增，在 $(\sqrt{2},+\infty)$ 上单调递减. 又函数是偶函数，所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-\sqrt{2})$，$(0,\sqrt{2})$，故 B 错误. 对于 C，当 $m=4$ 时，$f(x)=\frac{|x|}{x^2+4}$ 为偶函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=\frac{x}{x^2+4}=\frac{1}{x+\frac{4}{x}}\leqslant\frac{1}{4}$（当且仅当 $x=\frac{4}{x}$，即 $x=2$ 时，取“=”），所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的值域为 $\left(0,\frac{1}{4}\right]$. 又 $f(0)=0$，$f(x)$ 为偶函数，所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的值域为 $\left[0,\frac{1}{4}\right]$，故 C 正确. 对于 D，当 $m<0$ 时，$f(x)=\frac{|x|}{x^2+m}$ 为偶函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=\frac{x}{x^2+m}=\frac{1}{x+\frac{m}{x}}$，设 $g(x)=x+\frac{m}{x}$，则 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$；当 $x\to0^+$ 时，$g(x)\to-\infty$；当 $x=\sqrt{-m}$ 时，$g(x)=0$，所以当 $x\in(0,\sqrt{-m})\cup(\sqrt{-m},+\infty)$ 时，$f(x)=\frac{1}{g(x)}\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 又 $f(0)=0$，$f(x)$ 为偶函数，所以函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，故 D 正确.

10. $(0,2)$　由对勾函数的性质可知，要使函数 $f(x)=x+\frac{t}{x}(t>0)$ 在正整数集内单调递增，则 $\begin{cases}t>0,\\f(1)<f(2),\end{cases}$ 即 $\begin{cases}t>0,\\1+t<2+\frac{t}{2},\end{cases}$ 解得 $0<t<2$.

11. $3+\sqrt{3}$　令 $-x^2+2=1(x\leqslant1)$，解得 $x=\pm1$；令 $x+\frac{1}{x}-$

$1=3(x>1)$，解得 $x=2+\sqrt{3}$，所以 $f(x)$ 的图象如图所示.



由图象可知 $a\in[-1,1]$，$b=2+\sqrt{3}$，所以 $(b-a)_{\max}=2+\sqrt{3}-(-1)=3+\sqrt{3}$.

12. $\left[-\frac{1}{4},+\infty\right)$　由题意可知 $\frac{2}{x^2+4}\leqslant\frac{2a+1}{x}$，即 $\frac{2}{x+\frac{4}{x}}\leqslant 2a+1$ 对任意正数 x 恒成立. 由基本不等式可知 $x+\frac{4}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4(x>0)$，当且仅当 $x=2$ 时，等号成立，则 $y=\frac{2}{x+\frac{4}{x}}$ 的最大值是 $\frac{1}{2}$，所以 $\frac{1}{2}\leqslant 2a+1$，解得 $a\geqslant-\frac{1}{4}$.

13. 解：(1) $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 证明如下：$\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，$f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1-\frac{1}{x_1}\right)-\left(x_2-\frac{1}{x_2}\right)=(x_1-x_2)-\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)=\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2+1)}{x_1x_2}$. 因为 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，所以 $x_1x_2>0$，$x_1-x_2<0$，所以 $\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2+1)}{x_1x_2}<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，故 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

(2) 由 (1) 可知 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(2)=\frac{3}{2}$，$f(x)_{\max}=f(3)=\frac{8}{3}$，所以 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上的值域为 $\left[\frac{3}{2},\frac{8}{3}\right]$.

(3) 因为 $2x^2+2|x|>0$，$x^2+3>0$，由 (1) 得 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $2x^2+2|x|>x^2+3$，即 $x^2+2|x|-3>0$，解得 $|x|<-3$（舍去）或 $|x|>1$，所以 $x>1$ 或 $x<-1$，所以不等式的解集为 $\{x|x>1$ 或 $x<-1\}$.

14. 解：(1) 要使函数 $f(x)$ 有意义，则 $x\neq0$，即函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

(2) $\forall x_1,x_2\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，令 $x_1<x_2$，则 $x_1-x_2<0$，所以 $f(x_1)-f(x_2)=x_1-x_2+\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}=\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2-1)}{x_1x_2}$. 当 $x_1,x_2\in(-\infty,-1)$ 时，$x_1x_2>1$，则 $f(x_1)-f(x_2)<0$，故函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增；当 $x_1,x_2\in(-1,0)$ 时，$0<x_1x_2<1$，则 $f(x_1)-f(x_2)>0$，故函数 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减；当 $x_1,x_2\in(0,1)$ 时，$0<x_1x_2<1$，则 $f(x_1)-f(x_2)>0$，故函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减；当 $x_1,x_2\in(1,+\infty)$ 时，$x_1x_2>1$，则 $f(x_1)-f(x_2)<0$，故函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 综上所述，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$.

(3) 由 (2) 知，函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 因此当 $x=1$ 时，函数 $f(x)$ 取得最小值为 $f(1)=1+1-2=0$.

15. 解：(1) $f(x)=\frac{4x^2-12x-3}{2x+1}=\frac{(2x+1)^2-8(2x+1)+4}{2x+1}=2x+1+\frac{4}{2x+1}-8$. 设 $u=2x+1$，$x\in[0,1]$，则 $u\in[1,3]$，所以 $y=u+\frac{4}{u}-8$，$u\in[1,3]$. 由已知性质得 $y=u+\frac{4}{u}-8$ 在 $[1,2]$ 上单调递减，在 $[2,3]$ 上单调递增，所以当 $u=2$ 时，y 取得最小值 -4. 又当 $u=1$ 时，$y=-3$，当 $u=3$ 时，$y=-\frac{11}{3}$，所以当 $u=1$ 时，y 取得最大值 -3，即 $f(x)$ 的最小值为 -4，最大值为 -3.

(2) 因为 $g(x)=-x-2a$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，所以 $g(x)\in[-1-2a,-2a]$. 由题意 $\forall x_1\in[0,1]$，$\exists x_2\in[0,1]$，使得 $g(x_2)=f(x_1)$ 成立，则 $f(x)$ 的值域是 $g(x)$ 的值域的子集. 由 (1) 知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的值域为 $[-4,-3]$，所以 $\begin{cases}-1-2a\leqslant-4,\\-2a\geqslant-3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a\geqslant\frac{3}{2},\\a\leqslant\frac{3}{2},\end{cases}$ 所以 $a=\frac{3}{2}$.

培优突破练 5　抽象函数的性质

1. C　因为函数 $f(x+2)$ 的定义域为 $(-3,4)$，则 $-3<x<4$，所以 $-1<x+2<6$，所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,6)$. 又因为 $2x-1>0$，即 $x>\frac{1}{2}$，所以函数 $g(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{2x-1}}$ 的定义域为 $\left(\frac{1}{2},6\right)$.

2. A　由已知得 $3=f(8)=f(2\times4)=f(2)+f(4)=f(2)+f(2)+f(2)=3f(2)$，故 $f(2)=1$.

3. C　对于 A，令 $h(x)=g(f(x))$，则 $h(-x)=g(f(-x))=g(f(x))=h(x)$，所以 $h(x)$ 为偶函数，即 $g(f(x))$ 是偶函数，故 A 为真命题；对于 B，令 $m(x)=f(g(x))$，则 $m(-x)=f(g(-x))=f(-g(x))=f(g(x))$，所以 $m(x)$ 是偶函数，即 $f(g(x))$ 是偶函数，故 B 为真命题；对于 C，取 $f(x)=-x$，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，则 $f(f(x))=f(-x)=x$，在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，故 C 为假命题；对于 D，因为 $f(x)$ 是增函数，任取 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $f(f(x_1))<f(f(x_2))$，所以 $f(f(x))$ 也是增函数，故 D 为真命题.

4. A　根据题意，$f(-x)=-f(x)$. 又函数 $f(x+2)$ 为偶函数，所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，则 $f(-x)=f(4+x)$，即 $f(x+4)=-f(x)$，即 $f(x+8)=-f(x+4)=f(x)$，故函数 $f(x)$ 是周期为 8 的周期函数. 对于 A，函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，故 A 错误；对于 B，$f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，则 $f(0)=0$，又函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，所以 $f(4)=0$，故 B 正确；对于 C，函数 $f(x)$ 是周期为 8 的周期函数，即 $f(x+8)=f(x)$，故 C 正确；对于 D，若 $f(-5)=-1$，则 $f(2\,019)=f(-5+2\,024)=f(-5)=-1$，

故D正确.

5. C　不妨令 $x_2>x_1\geqslant 0$,则由 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1}<1$,得 $f(x_1)+x_1<f(x_2)+x_2$,令 $g(x)=f(x)+x$,则 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.因为 $f(x)+f(-x)=0$,所以 $g(x)+g(-x)=f(x)+x+f(-x)-x=0$,所以 $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.由 $f(2x)-f(5-x)<5-3x$,得 $f(2x)+2x<f(5-x)+5-x$,即 $g(2x)<g(5-x)$,所以 $2x<5-x$,解得 $x<\frac{5}{3}$,即不等式 $f(2x)-f(5-x)<5-3x$ 的解集为 $\left(-\infty,\frac{5}{3}\right)$.

方法总结　结合 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1}<1$ 构造函数 $f(2x)+2x<f(5-x)+5-x$,即 $g(2x)<g(5-x)$ 是解决本题的关键.

6. C　对于A,在 $f(xy)+2=f(x)+f(y)$ 中,令 $x=y=1$,得 $f(1)+2=f(1)+f(1)$,解得 $f(1)=2$;令 $x=y=-1$,得 $f(1)+2=f(-1)+f(-1)$,解得 $f(-1)=2$,故A正确.对于B,令 $y=-1$,得 $f(-x)+2=f(x)+f(-1)$,所以 $f(-x)=f(x)$.又 $f(x)$ 的定义域关于原点对称,所以 $f(x)$ 是偶函数,故B正确.对于C,设 $0<x_1<x_2$,则 $t=\frac{x_2}{x_1}>1$,所以 $f(t)>2$,所以 $f(x_2)=f(tx_1)=f(t)+f(x_1)-2>f(x_1)$,所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,因为 $f(x)$ 是偶函数,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,从而 $f(-2\,025)>f(-2\,024)$,故C错误.对于D,因为 $f(x)$ 是偶函数,所以 $f(x+2)<2\Leftrightarrow f(|x+2|)<f(1)$,又 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $0<|x+2|<1$,解得 $-3<x<-1$ 且 $x\neq-2$,故D正确.

方法总结　对于抽象函数的求值,常常利用恰当的赋值解答问题,在赋值时要注意观察变量与所求问题之间的关系,把满足条件的特殊值赋给函数中的某个变量,这是解决抽象函数求值问题的常用策略.

7. ACD　对于A,令 $m=1,n=0$,得 $f(1)f(0)=2f(1)$　①,解得 $f(0)=2$.若令 $m=n=0$,解得 $f(0)=2$ 或 $f(0)=0$,当 $f(0)=0$ 时,由①式得 $f(1)=0$,与题目矛盾,故 $f(0)=2$,故A正确.对于B,若 $f(x)+f(-x)=0$,则 $f(x)$ 是奇函数,由A知 $f(0)=2$,与 $f(x)$ 是奇函数矛盾,故B错误.对于C,令 $m=0,n=x$,得 $f(0)f(x)=f(0+x)+f(0-x)$,所以 $2f(x)=f(x)+f(-x)$,即 $f(x)=f(-x)$,故C正确.对于D,令 $m=n=\frac{1}{2}$,得 $\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=f(1)+f(0)=0$,所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$.令 $m=\frac{1}{2}$,得 $f\left(\frac{1}{2}\right)f(n)=f\left(\frac{1}{2}+n\right)+f\left(\frac{1}{2}-n\right)=0$,在 $f\left(\frac{1}{2}+n\right)+f\left(\frac{1}{2}-n\right)=0$ 中,令 $n=x-\frac{1}{2}$,得 $f(x)+f(1-x)=0$,故D正确.

8. BD　对于A,令 $x=y=1$,得 $f(0)=f(1)-f(1)+1=1$,令 $x=0,y=1$,得 $f(-1)=f(0)-f(1)+1=1-0+1=2$,令 $x=1,y=-1$,得 $f(2)=f(1)-f(-1)+1=0-2+1=-1$,故A错误;对于B,由A可知 $f(0)=1$,故B正确;对于C,$\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$,令 $x_1>x_2$,则 $f(x_1-x_2)=f(x_1)-f(x_2)+1$,则 $f(x_1)-f(x_2)=f(x_1-x_2)-1$,因为 $x_1>x_2$,所以 $x_1-x_2>0$,又当 $x>0$ 时,$f(x)<1$,所以 $f(x_1-x_2)<1$,则 $f(x_1)-f(x_2)<1-1=0$,所以 $f(x_1)<f(x_2)$,所以 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数,故C错误;对于D,令 $x=0$,则 $f(-y)=f(0)-f(y)+1$,则 $f(y)+f(-y)=f(0)+1=2$,所以 $f(x)+f(-x)=2$,所以 $f(-x)-1=1-f(x)=-[f(x)-1]$,且定义域为 $\mathbf{R}$,关于原点对称,所以 $f(x)-1$ 为奇函数,故D正确.

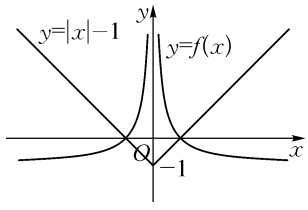
9. ACD　对于A,在 $2f(x)+f(x^2-1)=1$ 中,用 $-x$ 替换 x,得 $2f(-x)+f(x^2-1)=1$,两式相减得 $2f(x)-2f(-x)=0$,可得 $f(-x)=f(x)$,所以 $f(x)$ 为偶函数,故A正确;对于B,令 $x=\sqrt{2}$,则 $2f(\sqrt{2})+f(1)=1$,令 $x=1$,则 $2f(1)+f(0)=1$　①,令 $x=0$,则 $2f(0)+f(-1)=1$,因为 $f(x)$ 为偶函数,所以 $f(-1)=f(1)$,所以 $2f(0)+f(1)=1$　②,由①,②两式可得 $f(1)=f(0)=\frac{1}{3}$,所以 $f(\sqrt{2})=\frac{1}{3}$,故B错误;对于C,由选项B知,$f(-1)=f(1)=\frac{1}{3}$,故C正确;对于D,由B知,$f(\sqrt{2})=\frac{1}{3}$,注意到 $2f(x)+f(x^2-1)=1$ 两系数之和为3,若令 $f(x)=f(x^2-1)$,则有 $3f(x)=1$,所以 $f(x)=\frac{1}{3}$,令 $x=x^2-1$,可得 $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$,取 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\in(\sqrt{2},\sqrt{3})$,则 $3f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=1$,即 $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1}{3}$,则 $f(\sqrt{2})=f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1}{3}$,所以函数 $f(x)$ 在区间 $(\sqrt{2},\sqrt{3})$ 上不单调,故D正确.

10. $\left[-\frac{1}{2},0\right]$　由题意得,函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减,且是定义在 $[-1,1]$ 上的奇函数,所以 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递减.由 $f(x+1)<f(2x)$,得 $\begin{cases}-1\leqslant x+1\leqslant 1,\\-1\leqslant 2x\leqslant 1,\\x+1>2x,\end{cases}$ 解得 $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 0$,故不等式的解集为 $\left[-\frac{1}{2},0\right]$.

11. $\{x|x\leqslant 6\}$　令 $x=y=0$,得 $f(0)=2f(0)$,则 $f(0)=0$,令 $y=-x$,得 $f(x)+f(-x)=f(0)=0$,所以 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.因为 $f(2)=1$,令 $x=y=2$,得 $f(4)=2f(2)=2$,任取 $x_1<x_2$,则 $f(x_1)-f(x_2)=f(x_1)+f(-x_2)=f(x_1-x_2)$.因为当 $x<0$ 时,$f(x)<0$,所以当 $x_1<x_2$ 时,$f(x_1-x_2)<0$,即 $f(x_1)<f(x_2)$,所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,所以不等式 $f(x-2)\leqslant 2$,即 $f(x-2)\leqslant f(4)$,则 $x-2\leqslant 4$,解得 $x\leqslant 6$.

12. $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$　因为对任意的 $x,y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,都有 $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$,令 $x=y=1$,可得 $f(1)=2f(1)$,则 $f(1)=0$;令 $x=y=-1$,可得 $f(1)=$

$2f(-1)$，则 $f(-1)=0$；令 $y=-1$，得 $f(-x)=f(x)+f(-1)$，则 $f(-x)=f(x)$，故函数 $f(x)$ 为偶函数. 令 $g(x)=f(x)-|x|+1$，要使 $f(x)\leqslant|x|-1$，则 $g(x)\leqslant 0$，显然函数 $g(x)=f(x)-|x|+1$ 为偶函数. 因为当 $x,y>0$ 时，$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\left[f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(\frac{1}{y}\right)\right]<0$，所以当 $x>0$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减，此时 $g(x)=f(x)-x+1$ 也单调递减，$g(1)=f(1)-1+1=0$. 因为 $g(x)\leqslant 0$，所以 $x\geqslant 1$. 因为 $g(x)=f(x)-|x|+1$ 为偶函数，所以当 $x<0$ 时，由 $g(x)\leqslant 0$，得 $x\leqslant -1$，故不等式 $f(x)\leqslant|x|-1$ 的解集为 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.



13. 证明：(1)令 $x=y=1$，则 $f(1)+f(1)=f(1)$，可得 $f(1)=0$；令 $y=\frac{1}{x}$，可得 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0$，故 $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$.

(2)令 $y=-1$，得 $f(x)+f(-1)=f(-x)$，令 $x=y=-1$，得 $f(-1)+f(-1)=f(1)$，所以 $f(-1)=0$，所以 $f(x)=f(-x)$. 因为当 $x\in\{x\mid x\neq 0\}$ 时，$-x\in\{x\mid x\neq 0\}$，所以 $f(x)$ 为偶函数.

(3)设 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，$x_1<x_2$，则 $\frac{x_2}{x_1}>1$，由题设 $f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)>0$，所以 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_2)+f\left(\frac{1}{x_1}\right)=f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)>0$，即 $f(x_2)>f(x_1)$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(-x_2)>f(-x_1)$，而 $-x_1,-x_2\in(-\infty,0)$，$-x_1>-x_2$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减.

14. 证明：(1)因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，关于原点对称，不妨令 $x=y=0$，得 $f(0)=\frac{2f(0)}{1+[f(0)]^2}$，解得 $f(0)=0$ 或 $f(0)=\pm 1$. 又不存在 $x\in\mathbf{R}$，使得 $|f(x)|=1$，所以 $f(0)=0$. 令 $y=-x$，得 $f(x-x)=\frac{f(x)+f(-x)}{1+f(x)f(-x)}=f(0)=0$，则 $f(x)+f(-x)=0$，即 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数.

(2)当 $x>0$ 时，$\frac{x}{2}>0$，$f\left(\frac{x}{2}\right)>0$，则 $f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\frac{2f\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2}=\frac{2}{\frac{1}{f\left(\frac{x}{2}\right)}+f\left(\frac{x}{2}\right)}\leqslant 1$，当且仅当 $f\left(\frac{x}{2}\right)=1$ 时，等号成立. 又不存在 $x\in\mathbf{R}$，使得 $|f(x)|=1$，所以 $f\left(\frac{x}{2}\right)\neq 1$，所以当 $x>0$ 时，$0<f(x)<1$. 又 $f(x)$ 为奇函数，所以当 $x<0$ 时，$f(x)=-f(-x)\in(-1,0)$，故 $\forall x\in\mathbf{R}$，$-1<f(x)<1$. 任取 $x_1<x_2$，则 $x_2-x_1>0$，所以 $f(x_2-x_1)>0$，即 $f(x_2-x_1)=f[x_2+(-x_1)]=\frac{f(x_2)+f(-x_1)}{1+f(x_2)f(-x_1)}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{1-f(x_2)f(x_1)}>0$. 又 $f(x_1),f(x_2)\in(-1,1)$，所以 $f(x_1)f(x_2)\in(-1,1)$，所以 $1-f(x_1)f(x_2)>0$，故 $f(x_2)-f(x_1)>0$，$f(x_2)>f(x_1)$. 因此 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

解题突破 先赋值 $x=y=0$ 及 $y=-x$，结合奇函数定义可证明奇偶性；通过 $f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)\leqslant 1(x>0)$ 判定 $0<f(x)<1$，再根据单调性的定义作差证明是解题的关键.

15. 解：(1)$y=f(x)$ 是奇函数. 证明如下：

因为 $f(x+y)=f(x)+f(y)-3x^2y-3xy^2=f(x)+f(y)-3xy(x+y)$，令 $x=y=0$，得 $f(0)=0$，令 $y=-x$，得 $f(0)=f(x)+f(-x)=0$，即 $f(-x)=-f(x)$，所以 $y=f(x)$ 是奇函数.

(2)令 $x=y=2$，得 $f(4)=f(2)+f(2)-48=2f(2)-48=6-48=-42$，由(1)知，$y=f(x)$ 是奇函数，所以 $f(-4)=-f(4)=42$.

(3)**分析**：记 $h(x)=f(x)+x^3$，在 $\mathbf{R}$ 上任取 $x_1>x_2$，作差得 $h(x_1)-h(x_2)$，其中 $f(x_1)$ 化为 $f(x_1-x_2+x_2)$，再利用已知条件变形后即可根据定义证明单调性.

$y=f(x)+x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 证明如下：

在 $\mathbf{R}$ 上任取 $x_1>x_2$，令 $h(x)=f(x)+x^3$，则 $h(x_1)-h(x_2)=f(x_1)+x_1^3-f(x_2)-x_2^3=f(x_1-x_2+x_2)-f(x_2)+(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)=f(x_1-x_2)-3(x_1-x_2)x_2x_1+(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)=f(x_1-x_2)+(x_1-x_2)(x_1^2-2x_1x_2+x_2^2)=f(x_1-x_2)+(x_1-x_2)^3$. 又因为 $\forall x>0$，$f(x)+x^3>0$，而 $x_1-x_2>0$，所以 $f(x_1-x_2)+(x_1-x_2)^3>0$，即 $h(x_1)-h(x_2)>0$，所以 $h(x_1)>h(x_2)$，所以 $y=f(x)+x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

方法总结 对于抽象函数的性质的证明及综合问题，一般需要紧扣题干条件，反复赋值找到 $f(x)$ 与 $f(-x)$，$f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的关系. 特别注意，在证明单调性时，常构造 $f(x_1)=f(x_2+x_1-x_2)$ 或 $f(x_1)=f\left(x_2\cdot\frac{x_1}{x_2}\right)$，并结合题干条件以及单调性的定义进行证明.

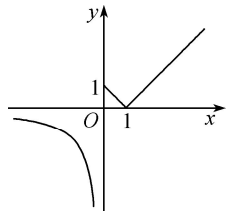
章末提优

1. D　因为 $f(x)$ 的定义域为 $[1,4]$，对于 $y=\frac{f(3-2x)}{\sqrt{2-2x}}$，有 $\begin{cases}1\leqslant 3-2x\leqslant 4,\\2-2x>0,\end{cases}$ 解得 $-\frac{1}{2}\leqslant x<1$，所以函数 $y=\frac{f(3-2x)}{\sqrt{2-2x}}$ 的定义域为 $\left[-\frac{1}{2},1\right)$.

2. D　因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x^2-2x+m-1$，所以 $f(0)=m-1=0$，即 $m=1$，故 $f(x)=x^2-2x$. 又 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(-3)=-f(3)=-(3^2-2\times 3)=-3$.

3. B　易知 $\frac{2}{x}<0\leqslant|x-1|$，且 $y=\frac{2}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，

作出函数图象如图所示，所以可得 $a\geqslant 0$，所以 $f(a)=|a-1|=f(a+1)=|a|\leqslant f(0)=1$，解得 $a=\frac{1}{2}$. 所以 $f(-2a)=f(-1)=-2$.



4. C　当 $a<0$ 时，如取 $a=-4$，则 $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$，其定义域为 $\{x|x\neq\pm 2\}$，它是奇函数，图象是③，所以③选项是正确的；当 $a>0$ 时，如取 $a=1$，其定义域为 $\mathbf{R}$，它是奇函数，图象是②，所以②选项是正确的；当 $a=0$ 时，$f(x)=\frac{1}{x}$，其定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，它是奇函数，图象是④，所以④选项是正确的. 故可以作为 $f(x)=\frac{x}{x^2+a}$ 的图象的有 3 个.

5. A　因为 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 为偶函数，所以 $f\left(-x+\frac{1}{2}\right)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)$，所以 $f(-x+2)=f(x-1)$. 因为 $f(2-x)+f(x)=0$，所以 $f(x-1)+f(x)=0$，即 $f(x)=-f(x-1)$，所以 $f(x-1)=-f(x-2)$，即 $f(x)=f(x-2)$，所以 $f\left(\frac{16}{3}\right)=f\left(-\frac{2}{3}+6\right)=f\left(-\frac{2}{3}\right)$. 在 $f(x-1)+f(x)=0$ 中，令 $x=\frac{1}{3}$ 得 $f\left(-\frac{2}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)=0$，因为 $f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{2}$，所以 $f\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}$，所以 $f\left(\frac{16}{3}\right)=f\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}$.

6. D　由题意，① 当 $-1>-\frac{a}{2}$，即 $a>2$ 时，$f(x)=\begin{cases}-3x-(1+a), & x\leqslant -\frac{a}{2},\\ x+a-1, & -\frac{a}{2}<x\leqslant -1,\\ 3x+(a+1), & x>-1,\end{cases}$ 则当 $x=-\frac{a}{2}$ 时，$f(x)_{\min}=f\left(-\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{2}a-1=3$，解得 $a=8$；② 当 $-1<-\frac{a}{2}$，即 $a<2$ 时，$f(x)=\begin{cases}-3x-(1+a), & x\leqslant -1,\\ -x+1-a, & -1<x\leqslant -\frac{a}{2},\\ 3x+(a+1), & x>-\frac{a}{2},\end{cases}$ 则当 $x=-\frac{a}{2}$ 时，$f(x)_{\min}=f\left(-\frac{a}{2}\right)=1-\frac{1}{2}a=3$，解得 $a=-4$；③ 当 $-1=-\frac{a}{2}$，即 $a=2$ 时，$f(x)=3|x+1|$，此时 $f(x)_{\min}=0$，不满足题意. 综上，$a=8$ 或 $a=-4$.

7. AC　对于 A，对于函数 $f(x)=\frac{\sqrt{4x^2-x^4}}{|x-2|-2}$，由 $\begin{cases}4x^2-x^4=x^2(4-x^2)\geqslant 0,\\ |x-2|-2\neq 0,\end{cases}$ 解得 $-2\leqslant x<0$ 或 $0<x\leqslant 2$，所以 $f(x)$ 的定义域为 $[-2,0)\cup(0,2]$，故 A 正确. 当 $0<x\leqslant 2$ 时，$f(x)=\frac{\sqrt{4x^2-x^4}}{-x}=-\sqrt{-x^2+4}\in(-2,0]$，$f(x)$ 单调递增；当 $-2\leqslant x<0$ 时，$f(x)=\frac{\sqrt{4x^2-x^4}}{-x}=\sqrt{-x^2+4}\in[0,2)$，$f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 的值域为 $(-2,2)$，故 B 错误. 因为函数 $f(x)=\frac{\sqrt{4x^2-x^4}}{|x-2|-2}$ 的定义域为 $[-2,0)\cup(0,2]$，关于原点对称，所以 $f(x)=\frac{\sqrt{4x^2-x^4}}{|x-2|-2}=\frac{\sqrt{4x^2-x^4}}{-x}$，$f(-x)=\frac{\sqrt{4x^2-x^4}}{|-x-2|-2}=\frac{\sqrt{4x^2-x^4}}{x}$，故 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，$f(x)$ 的图象关于原点对称，故 C 正确. $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,2]$，$[-2,0)$，但不能说 $f(x)$ 在定义域 $[-2,0)\cup(0,2]$ 上单调递增，故 D 错误.

8. AC　由 $f(x)=f(2-x)$ 知函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，当 $x\geqslant 1$ 且 $x\neq 2$ 时，$f(x)=\frac{x-1}{x-2}=1+\frac{1}{x-2}$，作出函数 $f(x)$ 的图象如图 1 所示. 由图象知，$f(x)$ 的值域为 $(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$，故选项 A 正确；$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为增函数，故选项 B 错误；$x=1$ 是 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的唯一零点，故选项 C 正确；对于选项 D，作出函数 $|f(x)|$ 的图象如图 2 所示，要使方程 $|f(x)|=m$ 有 4 个不同的解 x_1,x_2,x_3,x_4，则 $m\geqslant 1$. 因为函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以函数 $|f(x)|$ 的图象也关于直线 $x=1$ 对称，所以 $x_1+x_4=2$，$x_2+x_3=2$. 当 $1\leqslant x<2$ 时，由 $|f(x)|=1$ 得 $x=\frac{3}{2}$，其关于直线 $x=1$ 的对称值为 $x=\frac{1}{2}$，故 $x_2\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$，所以 $(x_1+x_4)x_2x_3=2x_2(2-x_2)\in\left(0,\frac{3}{2}\right]$，故选项 D 错误.

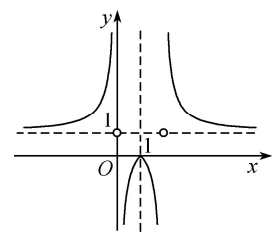


图 1

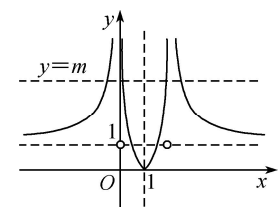


图 2

9. ACD　因为 $f(2x-4)$ 是偶函数，所以 $f(2x-4)=f(-2x-4)$，即 $f(x-4)=f(-x-4)$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-4$ 对称. 因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称. 所以 $f(8)=f(-8)=f(0)$，$f(-5)=f(-3)=f(3)$. 因为 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上单调递增，所以 $f(3)>f(2)>f(1)>f(0)$，即 $f(-5)>f(2)>f(1)>f(8)$，A 正确，B 错误. 因为 $f(2x-4)$ 是偶函数，所以 $f(2x-4)$ 的图象关于 y 轴对称，将 $f(2x-4)$ 的图象向左平移 3 个单位长度可得 $f(2x+2)$ 的图象，所以 $f(2x+2)$ 的图象关于直线 $x=-3$ 对称，C 正

确. 令函数 $g(x)=f(2x+2)+f(4-2x)$，则 $g(1-x)=f(4-2x)+f(2x+2)$，即 $g(x)=g(1-x)$，所以函数 $y=f(2x+2)+f(4-2x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称，D 正确.

10. $[2,4]$　由 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 可知 $f(x)$ 单调递增，所以可得 $\begin{cases}-\frac{2(a-1)}{-2}\geqslant 1,\\ 5-a>0,\\ -1+2(a-1)\leqslant 5-a+4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a\geqslant 2,\\ a<5,\\ a\leqslant 4,\end{cases}$ 所以 $2\leqslant a\leqslant 4$.

11. $\left(-\infty,-\frac{7}{5}\right]$　当 $x>0$ 时，$f(x)=-f(-x)=-\left(-4x-\frac{a^2}{x}+6\right)=4x+\frac{a^2}{x}-6$. 由 $f(x)\geqslant a+1$ 得 $4x+\frac{a^2}{x}-6\geqslant a+1$，当 $x>0$ 时，$4x+\frac{a^2}{x}-6\geqslant 2\sqrt{4x\cdot\frac{a^2}{x}}-6=4|a|-6$，当且仅当 $4x=\frac{a^2}{x}$ 时取等号，即 $x=\frac{|a|}{2}$ 时取等号，要想 $f(x)\geqslant a+1$ 恒成立，只需 $4|a|-6\geqslant a+1$ 成立，则有 $\begin{cases}a\geqslant 0,\\ 4a-6\geqslant a+1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<0,\\ -4a-6\geqslant a+1,\end{cases}$ 解得 $a\geqslant\frac{7}{3}$ 或 $a\leqslant-\frac{7}{5}$. 当 $x=0$ 时，由奇函数的性质可知 $f(0)=0$，所以要想 $f(0)\geqslant a+1$，即 $a+1\leqslant 0$，解得 $a\leqslant -1$. 综上所述，a 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{7}{5}\right]$.

12. $[-1,2]$　因为 $f(x+y)=f(x)f(y)$，且 $f(2)=\frac{1}{4}$，令 $x=2,y=0$，则 $f(2)=f(2)f(0)$，可得 $f(0)=1$；令 $x=2,y=-2$，则 $f(0)=f(2)f(-2)$，即 $1=\frac{1}{4}f(-2)$，可得 $f(-2)=4$. 故不等式 $f(x^2)\geqslant 4f(x+4)=f(-2)f(x+4)=f(x+2)$. 又因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，则 $x^2\leqslant x+2$，即 $x^2-x-2\leqslant 0$，解得 $-1\leqslant x\leqslant 2$，所以不等式 $f(x^2)\geqslant 4f(x+4)$ 的解集为 $[-1,2]$.

13. (1)**证明**：由函数 $f(x)=\frac{x}{|x|+1}$，可得其定义域为 $\mathbf{R}$，关于原点对称. 又 $f(-x)=-\frac{x}{|-x|+1}=-\frac{x}{|x|+1}=-f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

(2)**证明**：当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$. 任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，可得 $f(x_1)-f(x_2)=1-\frac{1}{x_1+1}-\left(1-\frac{1}{x_2+1}\right)=\frac{1}{x_2+1}-\frac{1}{x_1+1}=\frac{x_1-x_2}{(x_2+1)(x_1+1)}$. 因为 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，可得 $x_1-x_2<0$，所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

(3)**解**：因为函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上也单调递增. 又因为 $f(0)=0$，所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数. 由 $f(ax^2+3ax)+f(1-ax)>0$，可得 $f(ax^2+3ax)>-f(1-ax)=f(ax-1)$. 因为不等式 $f(ax^2+3ax)+f(1-ax)>0$ 对任意实数 x 恒成立，即不等式 $f(ax^2+3ax)>f(ax-1)$ 对任意实数 x 恒成立，所以不等式 $ax^2+3ax>ax-1$ 对任意实数 x 恒成立，即不等式 $ax^2+2ax+1>0$ 对任意实数 x 恒成立. 当 $a=0$ 时，不等式为 $1>0$ 恒成立，符合题意；当 $a\neq 0$ 时，$\begin{cases}a>0,\\ \Delta=(2a)^2-4a<0,\end{cases}$ 解得 $0<a<1$. 综上，$0\leqslant a<1$，即实数 a 的取值范围是 $[0,1)$.

易错警示　本题第(3)问易忽视对 $a=0$ 的讨论而漏解致错.

14. **解**：(1)由函数 $f(x)=2x^2+ax+b(a,b\in\mathbf{R})$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，且 $f(2)=3$，可得 $\begin{cases}8+2a+b=3,\\ -\frac{a}{4}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-4,\\ b=3.\end{cases}$

(2)当 $a=1$ 时，函数 $f(x)=2x^2+x+b=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+b-\frac{1}{8}\geqslant b-\frac{1}{8}$. 令 $t=f(x)$，则 $f(f(x))=f(t)=2t^2+t+b=2\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+b-\frac{1}{8}$，$t\in\left[b-\frac{1}{8},+\infty\right)$. 因为函数 $f(x)$ 和函数 $f(f(x))$ 的值域相同，所以 $b-\frac{1}{8}\leqslant-\frac{1}{4}$，解得 $b\leqslant-\frac{1}{8}$，所以实数 b 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{1}{8}\right]$.

(3)由题知 $h(x)=\begin{cases}-2x^2+10x-8, & x\leqslant 1,\\ 2x+\frac{8}{x}-10, & x>1.\end{cases}$ 当 $x\leqslant 1$ 时，$h(x)=-2x^2+10x-8=-2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$，此时 $h(x)$ 单调递增；当 $x>1$ 时，$h(x)=2x+\frac{8}{x}-10$，根据对勾函数的性质知，$h(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减；在 $(2,+\infty)$ 上单调递增. 令 $h(x)=7$，即 $2x+\frac{8}{x}-10=7$，解得 $x=8$；令 $h(x)=-2$，则 $-2x^2+10x-8=-2$ 或 $2x+\frac{8}{x}-10=-2$，解得 $x=2$ 或 $x=\frac{5-\sqrt{13}}{2}$，所以 $(n-m)_{\max}=8-\frac{5-\sqrt{13}}{2}=\frac{11+\sqrt{13}}{2}$.

15. (1) **解**：对任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1\neq x_2$，$|g(x_1)-g(x_2)|=|x_1-x_2|$，$|f(x_1)-f(x_2)|=3|x_1-x_2|$，所以 $|g(x_1)-g(x_2)|<|f(x_1)-f(x_2)|$，所以函数 $y=g(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 在 D 上的“L 函数”.

(2) **解**：因为函数 $y=g(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 在 D 上的“L 函数”，所以 $|g(x_1)-g(x_2)|<|f(x_1)-f(x_2)|$ 对任意的 $x_1,x_2\in[0,+\infty)(x_1\neq x_2)$ 恒成立，即 $|\sqrt{x_1^2+a}-\sqrt{x_2^2+a}|<|x_1^2-x_2^2|$ 对任意的 $x_1,x_2\in[0,+\infty)(x_1\neq x_2)$ 恒成立，化简得 $\frac{|x_1^2-x_2^2|}{\sqrt{x_1^2+a}+\sqrt{x_2^2+a}}<|x_1^2-x_2^2|$ 对任意的 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$

$(x_1\neq x_2)$恒成立，即$\sqrt{x_1^2+a}+\sqrt{x_2^2+a}>1$对任意的$x_1,x_2\in[0,+\infty)(x_1\neq x_2)$恒成立，即$2\sqrt{a}\geqslant 1$，解得$a\geqslant\frac{1}{4}$.

(3) **证明**：对于$x_1,x_2\in[0,2]$，不妨设$x_1>x_2$，

①当$0<x_1-x_2\leqslant 1$时，因为函数$y=g(x)$是函数$y=f(x)$在$[0,2]$上的“L函数”，所以$|g(x_1)-g(x_2)|<|x_1-x_2|\leqslant 1$. 此时$|g(x_1)-g(x_2)|<1$成立；

②当$x_1-x_2>1$时，由$x_1,x_2\in[0,2]$得$1<x_1-x_2\leqslant 2$，因为$g(0)=g(2)$，函数$y=g(x)$是函数$y=f(x)$在$[0,2]$上的“L函数”，所以$|g(x_1)-g(x_2)|=|g(x_1)-g(2)+g(0)-g(x_2)|\leqslant|g(x_1)-g(2)|+|g(0)-g(x_2)|<|x_1-2|+|0-x_2|=(2-x_1)+x_2=2-(x_1-x_2)<1$，此时$|g(x_1)-g(x_2)|<1$也成立. 综上，$|g(x_1)-g(x_2)|<1$恒成立.

感悟真题

1. D　函数$f(x)=\frac{|x^2-1|}{x}$的定义域为$\{x\mid x\neq 0\}$，且$f(-x)=\frac{|(-x)^2-1|}{-x}=-\frac{|x^2-1|}{x}=-f(x)$，函数$f(x)$为奇函数，A选项错误；又当$x<0$时，$f(x)=\frac{|x^2-1|}{x}\leqslant 0$，C选项错误；当$x>1$时，$f(x)=\frac{|x^2-1|}{x}=\frac{x^2-1}{x}=x-\frac{1}{x}$，函数单调递增，故B选项错误.

2. B　因为当$x<3$时，$f(x)=x$，所以$f(1)=1,f(2)=2$. 又因为$f(x)>f(x-1)+f(x-2)$，所以$f(3)>f(2)+f(1)=3$，$f(4)>f(3)+f(2)>5$，$f(5)>f(4)+f(3)>8$，$f(6)>f(5)+f(4)>13$，$f(7)>f(6)+f(5)>21$，$f(8)>f(7)+f(6)>34$，$f(9)>f(8)+f(7)>55$，$f(10)>f(9)+f(8)>89$，$f(11)>f(10)+f(9)>144$，$f(12)>f(11)+f(10)>233$，$f(13)>f(12)+f(11)>377$，$f(14)>f(13)+f(12)>610$，$f(15)>f(14)+f(13)>987$，$f(16)>f(15)+f(14)>1\,597>1\,000$，依次类推可知$f(20)>1\,000$，故B正确；且无证据表明A,C,D一定正确.

3. 0　因为$f(x)$是奇函数，所以$f(-x)+f(x)=0$，即$x^3+a+(-x)^3+a=0$，解得$a=0$.

4. 解：(1)若$a=0$，则$f(x)=\frac{x^2+x+c}{x}=x+\frac{c}{x}+1$，要使函数有意义，则$x\neq 0$，即$f(x)$的定义域为$\{x\mid x\neq 0\}$. 因为$y=x+\frac{c}{x}$是奇函数，$y=1$是偶函数，所以函数$f(x)=x+\frac{c}{x}+1$为非奇非偶函数，不可能是奇函数，故不存在实数$c$，使得$f(x)$是奇函数.

(2)若函数图象过点$(1,3)$，则$f(1)=\frac{1+3a+1+c}{1+a}=\frac{3a+2+c}{1+a}=3$，得$3a+2+c=3+3a$，解得$c=1$，此时$f(x)=\frac{x^2+(3a+1)x+1}{x+a}$. 若函数$f(x)$与$x$轴负半轴有两个不同交点，即$f(x)=\frac{x^2+(3a+1)x+1}{x+a}=0$，得$x^2+(3a+1)x+1=0$，当$x<0$时，有两个不同的实数根$x_1,x_2$，且$x_1\neq -a$，$x_2\neq -a$. 设$g(x)=x^2+(3a+1)x+1$，则$\begin{cases}\Delta=(3a+1)^2-4>0,\\ x_1x_2=1>0,\\ x_1+x_2=-(3a+1)<0,\\ -\frac{3a+1}{2}<0,\end{cases}$得$\begin{cases}3a+1>2\text{ 或 }3a+1<-2,\\ 3a+1>0,\end{cases}$得$\begin{cases}a>\frac{1}{3}\text{ 或 }a<-1,\\ a>-\frac{1}{3},\end{cases}$即$a>\frac{1}{3}$. 若$x+a=0$，即$x=-a$是方程$x^2+(3a+1)x+1=0$的根，则$a^2-(3a+1)a+1=0$，即$2a^2+a-1=0$，解得$a=\frac{1}{2}$或$a=-1$，则$a>\frac{1}{3}$且$a\neq\frac{1}{2}$且$a\neq -1$，即实数$a$的取值范围是$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

阶段滚动(第一章—第二章)

1. D　因为a,b,x,y为正数，则$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geqslant\frac{(a+b)^2}{x+y}$，当且仅当$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$时等号成立. 又$0<x<\frac{1}{3}$，即$1-3x>0$，所以$f(x)=\frac{3^2}{3x}+\frac{4^2}{1-3x}\geqslant\frac{(3+4)^2}{3x+(1-3x)}=49$，当且仅当$\frac{1}{x}=\frac{4}{1-3x}$，即$x=\frac{1}{7}$时取等号，所以函数$f(x)=\frac{3}{x}+\frac{16}{1-3x}\left(0<x<\frac{1}{3}\right)$的最小值为49.

2. BD　对于A，当$m=3$时，方程为$3x^2+1=0$，而方程无实数根，故A错误；对于B，由题意可得$\begin{cases}m\neq 0,\\ \Delta=(m-3)^2-4m<0,\end{cases}$由$\Delta=(m-1)(m-9)<0$，解得$1<m<9$，$(1,9)\subseteq(1,+\infty)$，故B正确；对于C，由题意可得$\begin{cases}m\neq 0,\\ \Delta=(m-3)^2-4m>0,\\ -\frac{m-3}{m}>0,\\ \frac{1}{m}>0,\end{cases}$解得$0<m<1$，所以“$0<m<3$”是“$mx^2+(m-3)x+1=0$有两个不相等的正根”的一个必要条件，故C错误；对于D，由题意可得$\begin{cases}m\neq 0,\\ \Delta>0,\\ \frac{1}{m}<0,\end{cases}$解得$m<0$，故D正确.

3. ①②③　对于①，若$-1\in A$，则$\frac{-1}{-1}=1\in A$，所以$-1+1=0\in A$，而当$x=-1\in A$，$y=0\in A$时，$\frac{-1}{0}$无意义，不满足$\frac{x}{y}\in A$，故①正确；对于②，若$x\neq 0$，$x\in A$，则$1=\frac{x}{x}$，所以$2=1+1\in A$，$3=2+1\in A$，…，依次类推，对任意$n\in\mathbf{N}^*$，$n\in A$，$2\,020\in A$，$2\,021\in A$，所以$\frac{2\,020}{2\,021}\in A$，故②正确；对于③，若$x$，

$y\in A$，则 $x\neq 0$，$y\neq 0$，由②知，$x,y\in A$，$1\in A$，$\frac{1}{y}\in A$，所以 $\frac{x}{\frac{1}{y}}=xy\in A$，故③正确；对于④，由②知，$1,2\in A$，取 $x=2$，$y=1$，则 $x-y=1\in A$，故④错误.

4. -1　令 $m+n=x<0$，$m-n=y<0$，则 $m=\frac{x+y}{2}$，$n=\frac{x-y}{2}$，则 $\frac{8n}{m+n}-\frac{2m}{m-n}=\frac{8\cdot\frac{x-y}{2}}{x}-\frac{2\cdot\frac{x+y}{2}}{y}=\frac{4x-4y}{x}-\frac{x+y}{y}=4-\frac{4y}{x}-1-\frac{x}{y}=3-\left(\frac{4y}{x}+\frac{x}{y}\right)\leqslant 3-2\sqrt{\frac{4y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=-1$，当且仅当 $\frac{4y}{x}=\frac{x}{y}$，即 $x=2y$ 时，等号成立，故 $\frac{8n}{m+n}-\frac{2m}{m-n}$ 的最大值为 -1.

第四章　指数函数与对数函数

课时提优 19　指数

1. A　$\sqrt{(\pi-4)^2}+\sqrt[3]{(3-\pi)^3}=|\pi-4|+3-\pi=4-\pi+3-\pi=7-2\pi$.

2. A　$(-1)^0=1$，A 正确；$a^{\frac{1}{2}}\cdot a^2=a^{\frac{5}{2}}\neq a$，B 错误；$4^{\frac{2}{4}}=2^{2\times\frac{1}{2}}=2\neq 8$，C 错误；$a^{\frac{2}{3}}\div a^{-\frac{1}{3}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}=a$，D 错误.

3. C　由分数指数幂的运算可得 $(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})\cdot(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}})\div(a^{\frac{1}{6}}\cdot b^{\frac{5}{6}})=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}=a$.

4. BD　对于 A，当 $y<0$ 时，$\sqrt[6]{y^2}=-y^{\frac{1}{3}}$，故 A 错误；对于 B，$y^{-\frac{5}{6}}=\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{\left(\frac{1}{y}\right)^5}\ (y>0)$，故 B 正确；对于 C，$x^{-\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\frac{1}{x}}\ (x\neq 0)$，故 C 错误；对于 D，$[\sqrt[3]{(-x)^2}]^{\frac{3}{4}}=(\sqrt[3]{x^2})^{\frac{3}{4}}=(x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}=x^{\frac{1}{2}}\ (x>0)$，故 D 正确.

5. $a^{\frac{1}{2}}$　$\sqrt{a^{\frac{1}{2}}\sqrt{a^{\frac{1}{2}}\sqrt{a}}}=[a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}=[a^{\frac{1}{2}}(a^1)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$.

6. 16　**解法 1**　$a^{5m+n}=(a^{2m+n})^2\cdot a^{m-n}=\frac{1}{16}\times 256=16$.

解法 2　因为 $a^{2m+n}=(a^m)^2\cdot a^n=\frac{1}{4}$，$a^{m-n}=\frac{a^m}{a^n}=256$，所以 $a^m=4$，$a^n=\frac{1}{64}$，所以 $a^{5m+n}=(a^m)^5\cdot a^n=4^5\cdot\frac{1}{64}=16$.

方法总结　本题可以从两种角度来思考：一是将 a^{2m+n}，a^{m-n} 作为一个整体，从而将 a^{5m+n} 整体表示为它们两个的形式来处理；二是将 a^m，a^n 作为一个整体进行求解.

7. A　$a^{\frac{2m+3n}{2}}=a^m\cdot a^{\frac{3n}{2}}=3\cdot(a^n)^{\frac{3}{2}}=3\times 4^{\frac{3}{2}}=3\times(2^2)^{\frac{3}{2}}=3\times 2^3=3\times 8=24$.

8. C　设植物原来的长度为 m，经过 8 天后，该植物的长度是原来的 $\frac{3}{2}$，则 $m(1+a\%)^8=\frac{3}{2}m$，即 $(1+a\%)^8=\frac{3}{2}$，所以 $1+a\%=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{8}}$，24 天后该植物的长度是 $m(1+a\%)^{24}$，即为原来的 $(1+a\%)^{24}$ 倍，则 $(1+a\%)^{24}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{8}\times 24}=\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27}{8}$，即 24 天后该植物的长度是原来的 $\frac{27}{8}$.

9. CD　对于 A，$\sqrt{a^4}=a^2$，故 A 错误；对于 B，$2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$，故 B 错误；对于 C，$(\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{a})\div\sqrt[6]{a}=(a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{2}})\div a^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}=a$，故 C 正确；对于 D，$\sqrt[10]{(\sqrt{2}-1)^5}=(\sqrt{2}-1)^{\frac{5}{10}}=(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\sqrt{2}-1}$，故 D 正确.

10. AC　由 $\frac{4}{2-x}<1$ 化简可得 $\frac{x+2}{x-2}>0$，所以 $(x+2)(x-2)>0$，所以 $x>2$ 或 $x<-2$. 又 $\sqrt{25-30x+9x^2}-\sqrt{(x-2)^2}-3=\sqrt{(5-3x)^2}-\sqrt{(x-2)^2}-3$，所以 $\sqrt{25-30x+9x^2}-\sqrt{(x-2)^2}-3=|5-3x|-|x-2|-3$. 当 $x>2$ 时，$\sqrt{25-30x+9x^2}-\sqrt{(x-2)^2}-3=3x-5-x+2-3=2x-6$；当 $x<-2$ 时，$\sqrt{25-30x+9x^2}-\sqrt{(x-2)^2}-3=5-3x+x-2-3=-2x$.

11. 1（答案不唯一）　由题得 $a^{\frac{\pi}{3}}a^{\frac{2\pi}{3}}a^{-\pi}+\sqrt[4]{(a-1)^4}=a^{\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}-\pi}+[(a-1)^4]^{\frac{1}{4}}=1+|a-1|=a$，即 $|a-1|=a-1$，则 $a-1\geqslant 0$，所以 $a\geqslant 1$.

12. 47　由于 $(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2=a+a^{-1}+2=9$，故 $a+a^{-1}=7$，所以 $(a+a^{-1})^2=a^2+a^{-2}+2=49$，则 $a^2+a^{-2}=47$.

13. **解**：(1)原式 $=5^{3\times(-\frac{2}{3})}\times 10^2=\frac{1}{5^2}\times 100=4$.

(2)因为 $\frac{(\sqrt{m})^3}{m^{\frac{7}{2}}}=\frac{(m^{\frac{1}{2}})^3}{m^{\frac{7}{2}}}=\frac{m^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{7}{2}}}=m^{\frac{3}{2}-\frac{7}{2}}=m^{-2}$，所以 $\alpha=-2$.

14. **解**：(1)因为 $a>0$，$b>0$，所以 $-4\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{b^3}\div 2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}=-4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{3}{2}}\div 2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}=-2b^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}=-2b$.

(2)因为 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{6}$，两边平方，得 $(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=6$，所以 $x+x^{-1}=4$，两边平方，得 $x^2+x^{-2}=14$，所以原式 $=\frac{4}{14-2}=\frac{1}{3}$.

15. A　因为 $2^x=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$，所以 $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$. 由 $f(x_1)+f(x_2)=1$，得 $\frac{2^{x_1}-1}{2^{x_1}+1}+\frac{2^{x_2}-1}{2^{x_2}+1}=1$，整理得 $2^{x_2}(2^{x_1}-1)=2^{x_1}+3$，易知 $x_1>0$，则 $2^{x_2}=\frac{2^{x_1}+3}{2^{x_1}-1}$，所以 $f(x_1+x_2)=\frac{2^{x_1+x_2}-1}{2^{x_1+x_2}+1}=1-\frac{2}{2^{x_1+x_2}+1}=1-\frac{2}{2^{x_1}\cdot\frac{2^{x_1}+3}{2^{x_1}-1}+1}=1-\frac{2}{2^{x_1}-1+\frac{4}{2^{x_1}-1}+6}$，因为 $2^{x_1}-1+\frac{4}{2^{x_1}-1}\geqslant 4$，当且仅当 $2^{x_1}-1=\frac{4}{2^{x_1}-1}$，即 $2^{x_1}=$

3 时，等号成立，所以 $1-\dfrac{2}{2^{x_1}-1+\dfrac{4}{2^{x_1}-1}+6}\geqslant 1-\dfrac{2}{4+6}=\dfrac{4}{5}$，

即 $f(x_1+x_2)$ 的最小值是 $\dfrac{4}{5}$.

课时提优 20　指数函数的概念

1. C　由幂函数的定义可知，$y=2x^4$ 不是幂函数. 因为 $4^{2x}=(4^2)^x=16^x$，所以 $y=4^{2x}$ 是指数函数.

2. A　因为函数 $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}a-3\right)\cdot a^x$ 是指数函数，所以 $\dfrac{1}{2}a-3=1$ 且 $a>0$，$a\neq 1$，解得 $a=8$，所以 $f(x)=8^x$，所以 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=8^{\frac{1}{3}}=2$.

3. B　设该物质年衰减率为 t，原质量为 1，则 1 年后剩余质量为 $(1-t)^1$，2 年后剩余质量为 $(1-t)^2$，…，50 年后剩余质量为 $(1-t)^{50}=0.952\ 7$，即 $1-t=0.952\ 7^{\frac{1}{50}}$，则 y 与 x 的函数关系式是 $y=(1-t)^x=0.952\ 7^{\frac{x}{50}}$.

4. ABC　对于 A，$f(x+y)=a^{x+y}$，$f(x)f(y)=a^x\cdot a^y=a^{x+y}$，所以 $f(x+y)=f(x)f(y)$，故 A 正确；对于 B，$f(x-y)=a^{x-y}$，$\dfrac{f(x)}{f(y)}=\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$，所以 $f(x-y)=\dfrac{f(x)}{f(y)}$，故 B 正确；对于 C，$f(nx)=a^{nx}$，$[f(x)]^n=(a^x)^n=a^{nx}$，所以 $f(nx)=[f(x)]^n$，故 C 正确；对于 D，$[f(xy)]^n=(a^{xy})^n=a^{nxy}$，$[f(x)]^n[f(y)]^n=(a^x)^n\cdot(a^y)^n=a^{nx}\cdot a^{ny}=a^{nx+ny}$，所以 $[f(xy)]^n\neq[f(x)]^n[f(y)]^n$，故 D 错误.

5. $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$　设 $f(x)=a^x$，$a>0$ 且 $a\neq 1$. 因为函数 $f(x)$ 的图象过点 $(-1,2)$，即 $f(-1)=a^{-1}=2$，解得 $a=\dfrac{1}{2}$，所以 $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

6. $f(x)=3\cdot 2^x$（答案不唯一）　根据表中数据可得函数与指数函数相关，由表格数据中函数值从左到右的规律：右侧数据为相邻左侧数据的 2 倍，可设 $f(x)=a\times 2^x$，由 $f(0)=3$，可得 $a=3$，故 $f(x)=3\cdot 2^x$，检验符合题意.

7. C　由题意，得 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=-f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{5}}{25}$，即 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=a^{\frac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{25}=\dfrac{5^{\frac{1}{2}}}{5^2}=5^{-\frac{3}{2}}$，所以 $a=\dfrac{1}{5}$，所以当 $x>0$ 时，$f(x)=\left(\dfrac{1}{5}\right)^x$，故 $f(2)=\left(\dfrac{1}{5}\right)^2=\dfrac{1}{25}$.

8. B　因为 $f(0)=1$，所以排除 C，D. 又 $\dfrac{f(1)}{f(0)}=2$，所以排除 A. 故 $f(x)=2^x$，经检验，符合题意.

9. ACD　设指数函数 $f(x)=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$），则 $a^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{25}$，即 $a^{-\frac{3}{2}}=5^{-\frac{3}{2}}$，解得 $a=5$，所以函数 $f(x)=5^x$，A 正确，B 错误；$f(-1)=5^{-1}=\dfrac{1}{5}$，C 正确；$5f(1)=5\times 5=25=5^2=f(2)$，D 正确.

10. BCD　由图象可知，$f(1)=1$，$f(2)=2$，即 $\begin{cases}ka=1,\\ ka^2=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\dfrac{1}{2},\\ a=2,\end{cases}$ 所以 $y=\dfrac{1}{2}\cdot 2^x=2^{x-1}$. 对于 A，第三周，即当 $x=3$ 时，感染人数为 4 千人，所以第一周到第二周增加 1 千人，第二周到第三周增加 2 千人，故 A 错误. 对于 B，由 $y=2^{x-1}$ 可知，第 n 周的感染人数为 2^{n-1}，则第 $(n+1)$ 周的感染人数为 2^n，第 $(n+2)$ 周的感染人数为 2^{n+1}，则第 $(n+1)$ 周新增感染人数为 $2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$，第 $(n+2)$ 周新增感染人数为 $2^{n+1}-2^n=2^n$，$\dfrac{2^n}{2^{n-1}}=2$，故 B 正确. 对于 C，第一周感染人数是 1 千人，第二周感染人数是 2 千人，则该地区感染人数翻一番所需时间只要 1 周，故 C 正确. 对于 D，第四周，即当 $x=4$ 时，感染人数为 8 千人，所以估计疫情发生一个月后该地区感染人数会超过 8 000，故 D 正确.

11. 4　由题意得 $\begin{cases}m=(m-2)^2,\\ m-2>0,\\ m-2\neq 1,\end{cases}$　解得 $m=4$.

12. $\dfrac{1}{64}$　由题意得 $a^2=\dfrac{1}{4}$，因为 $a>0$ 且 $a\neq 1$，所以 $a=\dfrac{1}{2}$，所以指数函数的解析式为 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$. 因此，当 $x=6$ 时，$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^6=\dfrac{1}{64}$.

13. **解**：(1)因为函数 $f(x)=(a^2-2a-2)a^x$ 是指数函数，$a>0$ 且 $a\neq 1$，所以 $a^2-2a-2=1$，解得 $a=3$ 或 $a=-1$（舍去），所以 $f(x)=3^x$.

(2)$F(x)$ 是偶函数. 证明如下：$F(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}=3^x+3^{-x}$，$x\in\mathbf{R}$. 因为 $F(-x)=3^{-x}+3^x=F(x)$，所以 $F(x)$ 是偶函数.

14. (1) **证明**：由 $x_1+x_2=1$，得 $x_2=1-x_1$，则 $f(x_1)+f(x_2)=f(x_1)+f(1-x_1)=\dfrac{a^{x_1}}{a^{x_1}+\sqrt{a}}+\dfrac{\dfrac{a}{a^{x_1}}}{\dfrac{a}{a^{x_1}}+\sqrt{a}}=\dfrac{a^{x_1}}{a^{x_1}+\sqrt{a}}+\dfrac{a}{a+\sqrt{a}a^{x_1}}=\dfrac{a^{x_1}}{a^{x_1}+\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+a^{x_1}}=1$.

(2) **解**：原式 $=\left[f\left(\dfrac{1}{10}\right)+f\left(\dfrac{9}{10}\right)\right]+\left[f\left(\dfrac{2}{10}\right)+f\left(\dfrac{8}{10}\right)\right]+\left[f\left(\dfrac{3}{10}\right)+f\left(\dfrac{7}{10}\right)\right]+\left[f\left(\dfrac{4}{10}\right)+f\left(\dfrac{6}{10}\right)\right]+f\left(\dfrac{5}{10}\right)=4\times 1+\dfrac{a^{\frac{5}{10}}}{a^{\frac{5}{10}}+\sqrt{a}}=4+\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{2}$.

15. **解**：设 $f(x)=a\cdot b^x$，由 $\dfrac{f(0.5n)}{f[0.5(n+1)]}=2$，可得 $\dfrac{a\cdot b^{0.5n}}{a\cdot b^{0.5(n+1)}}=2$，即 $\dfrac{1}{b^{0.5}}=2$，解得 $b=\dfrac{1}{4}$. 又因为 $f(0)=3$，所以 $a\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^0=3$，则 $a=3$，故 $y=3\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$（答案不唯一）.

课时提优 21　指数函数的图象与性质

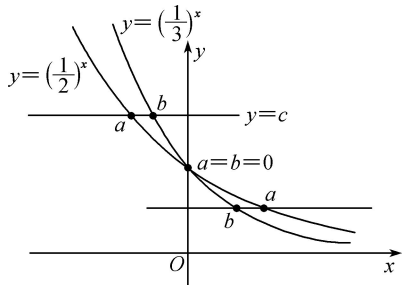
1. B　函数 $y=3^{\frac{1}{x-1}}$ 的定义域为$\{x\mid x\neq 1\}$. 又当 $x>1$ 时，$\frac{1}{x-1}>0$，所以 $3^{\frac{1}{x-1}}>1$；当 $x<1$ 时，$\frac{1}{x-1}<0$，所以 $0<3^{\frac{1}{x-1}}<1$. 所以函数 $y=3^{\frac{1}{x-1}}$ 的值域为$(0,1)\cup(1,+\infty)$.

2. C　因为 $f(x)$为偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$，即$(-x)^3\cdot(a\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x})=x^3(a\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x})$，所以$-x^3(a\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x})=x^3(a\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x})$，所以 $x^3(a\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{x}+a\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x})=0$，所以 $x^3(a-1)(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})=0$. 因为 $x^3(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})$不恒为 0，所以 $a-1=0$，即 $a=1$.

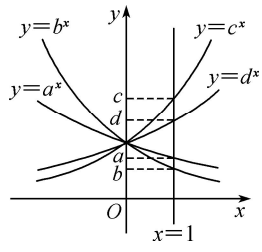
3. C　$b=\left(\frac{4}{5}\right)^{-\frac{1}{5}}=\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{5}}$，因为函数 $y=\left(\frac{5}{4}\right)^{x}$ 是增函数，所以$\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{5}}<\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$，即 $b<a$. 又 $c=\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}}>\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}}>\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{4}}=a$，所以 $b<a<c$.

方法总结　比较指数式的大小，常用的方法是利用指数函数(或幂函数)的单调性及中间值(0 或 1)法，即先将所要比较的指数式化为同指数幂的指数式或同底的指数式，然后应用它们所对应的指数函数或幂函数的单调性来进行处理.

4. CD　如图，若 a,b 均为正数，则 $a>b>0$；若 a,b 均为负数，则 $a<b<0$；若 $a=b=0$，则$\left(\frac{1}{2}\right)^{a}=\left(\frac{1}{2}\right)^{b}=1$.



5. $b<a<d<c$　作直线 $x=1$，与 $y=a^x$，$y=b^x$，$y=c^x$，$y=d^x$ 分别相交，如图所示，由交点的纵坐标大小可得 $b<a<d<c$.



6. $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$　由 $4^x-3\cdot 2^x+2>0$ 可得$(2^x-1)\cdot(2^x-2)>0$，可得 $2^x<1=2^0$ 或 $2^x>2$. 又因为函数 $y=2^x$ 为 **R** 上的增函数，所以 $x<0$ 或 $x>1$，故原不等式的解集为$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

7. B　因为 $f(x)=2-\frac{1}{2^x+1}$，$g(x)=\frac{m\cdot 2^x}{2^x+2}=\frac{m\cdot 2^{x-1}}{2^{x-1}+1}=\frac{m(2^{x-1}+1)-m}{2^{x-1}+1}=m-\frac{m}{2^{x-1}+1}$，而将函数 $y=f(x)$的图象平移后能与函数 $y=g(x)$的图象重合，所以 $m=1$，经检验符合题意.

8. C　由已知 $f(-x)=\mathrm{e}^{|-x|}+|-x|=\mathrm{e}^{|x|}+|x|=f(x)$，所以 $f(x)$是偶函数. 又当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^{x}+x$ 单调递增，所以不等式 $f(2x-1)<f\left(\frac{1}{3}\right)$可化为 $f(|2x-1|)<f\left(\frac{1}{3}\right)$，则$|2x-1|<\frac{1}{3}$，解得$\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}$.

9. AD　因为 $f(x)$的定义域为 **R**，$f(-x)=\frac{2^{-x}+2^{x}}{3}=f(x)$，所以 $f(x)$为偶函数，所以 $f[f(-x)]=f[f(x)]$，则 $f[f(x)]$为偶函数，A 正确；因为函数 $y=2^x$，$y=-2^{-x}$ 在 **R** 上单调递增，所以函数 $g(x)$在 **R** 上单调递增，则 $g[g(x)]$在 **R** 上单调递增，B 错误；因为 $f(2x)+g(2x)=\frac{2^{2x}+2^{-2x}}{3}+\frac{2^{2x}-2^{-2x}}{3}=\frac{2^{2x+1}}{3}$，$f(x)+g(x)=\frac{2^{x}+2^{-x}}{3}+\frac{2^{x}-2^{-x}}{3}=\frac{2^{x+1}}{3}$，则$[f(x)+g(x)]^2=\frac{2^{2x+2}}{9}$，所以 $f(2x)+g(2x)\neq[f(x)+g(x)]^2$，C 错误；令 $F(x)=f(x)\cdot g(x)=\frac{2^{2x}-2^{-2x}}{9}$，易知 $F(x)$在 **R** 上单调递增，因为 $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$，所以 $x^2>x-1$，则 $F(x^2)>F(x-1)$，即 $f(x^2)\cdot g(x^2)>f(x-1)\cdot g(x-1)$，又 $f(x)>0$，所以$\frac{g(x^2)}{f(x-1)}>\frac{g(x-1)}{f(x^2)}$，D 正确.

10. ABD　**分析**：注意到题设条件中的等式两边的字母关系，为此，利用“同类归类”的原则，来构造函数 $f(x)=2^x+3x$，$g(x)=3^x+2x$，根据它的图象来进行判断.

设 $f(x)=2^x+3x$，$g(x)=3^x+2x$，则 $f(x)=2^x+3x$，$g(x)=3^x+2x$ 都为单调递增函数，作出两函数的图象如图 1 所示，两个函数图象有 2 个交点，分别为$(0,1)$，$(1,5)$.

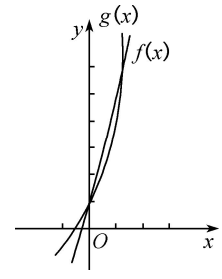


图 1

对于 A，如图 2，作一直线 $y=m(1<m<5)$分别与 $f(x)$，$g(x)$的图象相交，交点的横坐标分别为 a,b，且 $0<a<b<1$，此时 $f(a)=g(b)=m$，即 $2^a+3a=3^b+2b$ 能成立，所以 A 满足题意；

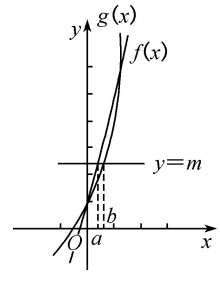


图 2

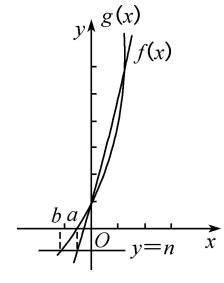


图 3

对于 B，如图 3，作一直线 $y=n(n<0)$分别与 $f(x)$，$g(x)$的图

象相交，交点横坐标分别为 a,b，且 $b<a<0$，此时 $f(a)=g(b)=n$，即 $2^a+3a=3^b+2b$ 能成立，所以 B 满足题意；对于 C，$a=2$，$f(a)=f(2)=10$，因为 $2=a<b$，所以 $f(b)=3^b+2b>3^2+4=13$，所以此时 $2^a+3a=3^b+2b$ 不可能成立，故 C 不满足题意；对于 D，当 $a=b=0$ 或 $a=b=1$ 时，$2^a+3a=3^b+2b$ 成立，所以 D 满足题意.

11. (1) -2　(2) $(-\infty,-1]$　(1) 当 $a=-2$ 时，$f(x)=\begin{cases}2^x-1,x<-2,\\x^2-2,x\geqslant-2.\end{cases}$ 则当 $x<-2$ 时，$f(x)=2^x-1\in\left(-1,-\frac{3}{4}\right)$；当 $x\geqslant-2$ 时，$f(x)=x^2-2\geqslant-2$. 故 $f(x)$ 的最小值为 -2.

(2) 由 $f(x)=\begin{cases}2^x-1,x<a,\\x^2+a,x\geqslant a,\end{cases}$ 则当 $x<a$ 时，$f(x)=2^x-1\in(-1,2^a-1)$，若 $f(x)$ 有最小值，则当 $x\geqslant a$ 时，$f(x)$ 的最小值小于等于 -1，则当 $a\leqslant-1$ 且 $x\geqslant a$ 时，有 $f(x)_{\min}=a\leqslant-1$，符合要求；当 $a>-1$ 时，$y=x^2+a\geqslant a>-1$，故不符合要求，舍去. 综上所述，$a\leqslant-1$.

12. 12　因为函数 $y=a^{x-3}-2$ 的图象过定点 $(3,-1)$，所以 $s=3,t=-1$，即 $3m+n=1$，所以 $\frac{1}{m}+\frac{3}{n}=(3m+n)\left(\frac{1}{m}+\frac{3}{n}\right)=6+\frac{n}{m}+\frac{9m}{n}\geqslant6+2\sqrt{\frac{n}{m}\cdot\frac{9m}{n}}=12$，当且仅当 $\frac{n}{m}=\frac{9m}{n}$，即 $m=\frac{1}{6},n=\frac{1}{2}$ 时，等号成立，所以 $\frac{1}{m}+\frac{3}{n}$ 的最小值为 12.

13. 解：(1) 当 $a>1$ 时，$f(x)=a^x$ 在 $[-1,3]$ 上单调递增，可得 $f(x)_{\max}=f(3)=a^3=8$，解得 $a=2$；当 $0<a<1$ 时，$f(x)=a^x$ 在 $[-1,3]$ 上单调递减，可得 $f(x)_{\max}=f(-1)=a^{-1}=8$，解得 $a=\frac{1}{8}$. 综上，实数 a 的值为 $\frac{1}{8}$ 或 2.

(2) **解法 1**　由函数 $g(x)=30-x$ 在 $[-1,3]$ 上单调递减，当 $a>1$ 时，$f(x)=a^x$ 在 $[-1,3]$ 上单调递增，所以 $f(3)\leqslant g(3)$，即 $a^3\leqslant27$. 又因为 $a>1$，所以 $1<a\leqslant3$，所以实数 a 的取值范围是 $(1,3]$.

解法 2　由题意得不等式 $f(x)\leqslant30-x$ 对 $x\in[-1,3]$ 恒成立，即 $a^x+x\leqslant30$ 对 $x\in[-1,3]$ 恒成立，令 $g(x)=a^x+x$，$x\in[-1,3]$. 因为 $a>1$，所以 $g(x)$ 为增函数，所以 $g(x)_{\max}=g(3)=a^3+3$，所以 $a^3+3\leqslant30$. 又因为 $a>1$，解得 $1<a\leqslant3$，所以实数 a 的取值范围是 $(1,3]$.

14. 解：(1) 当 $a=-1$ 时，$f(x)=\frac{4^x-6^x}{9^x}+1=\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-\left(\frac{2}{3}\right)^x+1$. 令 $t=\left(\frac{2}{3}\right)^x$，因为 $x<-1$，所以 $t>\frac{3}{2}$，则 $y=t^2-t+1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$，当 $t>\frac{3}{2}$ 时，$y>\frac{7}{4}$，此时，$f(x)$ 没有最小值.

(2) $f(x)=\frac{4^x+a\cdot6^x}{9^x}+1=\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+a\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+1$，令 $t=\left(\frac{2}{3}\right)^x$，$x\in[0,1]$，则 $t\in\left[\frac{2}{3},1\right]$. 由 $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+a\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+1\leqslant2$，得 $a\leqslant\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^x}-\left(\frac{2}{3}\right)^x$，即 $a\leqslant\frac{1}{t}-t$，由于 $\exists x\in[0,1]$，使 $f(x)\leqslant2$ 成立，只需 $a\leqslant\left(\frac{1}{t}-t\right)_{\max}$，$t\in\left[\frac{2}{3},1\right]$. 因为 $y=\frac{1}{t}-t$ 在 $\left[\frac{2}{3},1\right]$ 上单调递减，所以 $\left(\frac{1}{t}-t\right)_{\max}=\frac{3}{2}-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$，所以 $a\leqslant\frac{5}{6}$，所以实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{5}{6}\right]$.

15. $(0,+\infty)$　结合题意，若 $x<0$，则 $-x>0$，所以 $f(-x)=\frac{1}{2^{-x}}+\frac{1}{3^{-x}}=2^x+3^x$. 因为 $y=f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，所以 $-f(x)=f(-x)=\frac{1}{2^{-x}}+\frac{1}{3^{-x}}=2^x+3^x$，即 $f(x)=-2^x-3^x$，$x<0$. 因为 $y=f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，所以 $f(0)=0$，所以 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}, & x>0,\\0, & x=0,\\-2^x-3^x, & x<0.\end{cases}$ 当 $x<0$ 时，$f(x)=-2^x-3^x<0$，而 $\frac{2}{5^x}>0$，此时不满足 $f(x)>\frac{2}{5^x}$；当 $x=0$ 时，$f(x)=0$，而 $\frac{2}{5^x}>0$，此时不满足 $f(x)>\frac{2}{5^x}$；当 $x>0$ 时，要使 $f(x)>\frac{2}{5^x}$，只需 $\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}>\frac{2}{5^x}$，即 $\left(\frac{5}{2}\right)^x+\left(\frac{5}{3}\right)^x>2$，令 $g(x)=\left(\frac{5}{2}\right)^x+\left(\frac{5}{3}\right)^x$，则 $g(x)=\left(\frac{5}{2}\right)^x+\left(\frac{5}{3}\right)^x$ 在 **R** 上单调递增，且 $g(0)=\left(\frac{5}{2}\right)^0+\left(\frac{5}{3}\right)^0=2$，而 $\left(\frac{5}{2}\right)^x+\left(\frac{5}{3}\right)^x>2\Leftrightarrow g(x)>g(0)$，解得 $x>0$，即 $f(x)>\frac{2}{5^x}$ 的解集为 $(0,+\infty)$.

课时提优 22　对数

1. B　因为 $\log_x8=2=\log_xx^2$，所以 $x^2=8$，且 $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$，解得 $x=2\sqrt{2}$.

2. B　由 $\log_x\sqrt[7]{y}=z$，得 $x^z=\sqrt[7]{y}$，$y=x^{7z}$.

3. C　因为 $\log_m2=a$，$\log_m3=b$，所以 $m^a=2$，$m^b=3$，所以 $m^{2a+b}=m^{2a}m^b=(m^a)^2m^b=2^2\times3=12$.

4. AD　因为 $a>0$ 且 $a\neq1$，m,n 是正整数. 对于选项 A，$\log_a(mn)=\log_am+\log_an$，故 A 正确；对于选项 B，$\log_a\frac{m}{n}=\log_am-\log_an$，故 B 错误；对于选项 C，$\log_{a^n}m=\frac{1}{n}\log_am$，故 C 错误；对于选项 D，$\log_am^n=n\log_am$，故 D 正确.

5. e^2　由 $b=\frac{2}{\ln a}$，得 $\ln a=\frac{2}{b}$，即 $a=e^{\frac{2}{b}}$，所以 $a^b=(e^{\frac{2}{b}})^b=e^2$.

6. 2　$2\lg5+\lg4-\log_23\cdot\log_34+e^{\ln2}=\lg25+\lg4-2\log_23\cdot\log_32+2=\lg100-2+2=2$.

7. B　由题意可知 $a>0,b>0,c>0$. 因为关于 x 的二次方程 $x^2-2x+\lg(c^2-b^2)-2\lg a+1=0$ 有两个相等的实数根，则 $\Delta=4-4[\lg(c^2-b^2)-2\lg a+1]=0$，可得 $\lg(c^2-b^2)-2\lg a=$

$\lg\frac{c^2-b^2}{a^2}=0$,则$\frac{c^2-b^2}{a^2}=1$,即 $c^2=a^2+b^2$,所以角 C 为直角,即△ABC 是直角三角形.

8. B　$\sum_{n=k}^{14}P_{10}(n)=\sum_{n=k}^{14}\lg\frac{n+1}{n}=\lg\frac{k+1}{k}+\lg\frac{k+2}{k+1}+\cdots+\lg\frac{15}{14}=\lg\frac{15}{k}$,而$\frac{\log_2 9-\log_2 3}{1+\log_2 5}=\frac{\log_2 3}{\log_2 10}=\lg 3$,故 $\lg\frac{15}{k}=\lg 3$,解得 $k=5$.

9. BCD　由题意得$-2\log_3 a+\log_3 b=0$,即 $\log_3 b=\log_3 a^2$,则 $b=a^2$ 且 $a,b>0$,故 C 正确;对于 A,$(2^a)^2=2^a\cdot 2^a=2^{2a}\neq 2^b$,故 A 错误;对于 B,$a\cdot e^{\ln a}=a^2=b$,故 B 正确;对于 D,$\log_8(ab)=\log_{2^3}a^3=\log_2 a$,故 D 正确.

10. AC　对于 A,$\log_4 5\cdot\log_5 8=\frac{\lg 5}{\lg 4}\cdot\frac{\lg 8}{\lg 5}=\frac{\lg 5}{2\lg 2}\cdot\frac{3\lg 2}{\lg 5}=\frac{3}{2}$,$\frac{1}{\log_8 9\cdot\log_9 4}=\frac{1}{\frac{\lg 9}{\lg 8}\cdot\frac{\lg 4}{\lg 9}}=\frac{1}{\frac{\lg 9}{3\lg 2}\cdot\frac{2\lg 2}{\lg 9}}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$,所以 $\log_4 5\cdot\log_5 8=\frac{1}{\log_8 9\cdot\log_9 4}$,故 A 正确;对于 B,$\log_6 2-\log_8 2=\frac{\log_2 2}{\log_2 6}-\frac{\log_2 2}{\log_2 8}=\frac{1}{\log_2 6}-\frac{1}{3}$,$\log_8 4-\log_6 4=\frac{\log_2 4}{\log_2 8}-\frac{\log_2 4}{\log_2 6}=\frac{2}{3}-\frac{2}{\log_2 6}$,所以 $\log_6 2-\log_8 2\neq\log_8 4-\log_6 4$,故 B 错误;对于 C,$(\lg 2)^2+\lg 2\cdot\lg 5+\lg 50=\lg 2\cdot(\lg 2+\lg 5)+\lg 50=\lg 2\cdot\lg(2\times 5)+\lg 50=\lg 2+\lg 50=\lg(2\times 50)=\lg 100=2$,故 C 正确;对于 D,因为 $3^a=10$,$\log_9 25=b$,所以 $a=\log_3 10$,$b=\log_9 25=\log_{3^2}5^2=\log_3 5$,所以 $\log_2 5=\frac{\log_3 5}{\log_3 2}=\frac{\log_3 5}{\log_3\frac{10}{5}}=\frac{\log_3 5}{\log_3 10-\log_3 5}=\frac{b}{a-b}$,故 D 错误.

11. 5　由 $\log_3 a=\log_4 b=\log_{12}5$,得 $a=3^{\log_{12}5}$,$b=4^{\log_{12}5}$,所以 $ab=3^{\log_{12}5}\times 4^{\log_{12}5}=(3\times 4)^{\log_{12}5}=5$.

12. $\frac{25}{4}$　因为对任意实数 x,y 都有 $xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$,当且仅当 $x=y$ 时,等号成立,所以 $\log_2(4a)\cdot\log_2 b\leqslant\left[\frac{\log_2(4a)+\log_2 b}{2}\right]^2=\left[\frac{\log_2(4ab)}{2}\right]^2=\frac{25}{4}$,当且仅当 $\log_2(4a)=\log_2 b$,即 $a=\sqrt{2}$,$b=4\sqrt{2}$ 时,等号成立.故 $\log_2(4a)\cdot\log_2 b$ 的最大值是$\frac{25}{4}$.

13. 解:(1) $\log_{\sqrt{3}}9+\frac{1}{2}\lg 25+\lg 2-\log_4 9\times\log_3 8+2^{(\log_2 3-1)}-\ln\sqrt[3]{e}=4+\lg 5+\lg 2-\frac{\lg 9}{\lg 4}\times\frac{\lg 8}{\lg 3}+2^{\log_2\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}=4+\lg 10-\frac{2\lg 3}{2\lg 2}\times\frac{3\lg 2}{\lg 3}+\frac{3}{2}-\frac{1}{3}=4+1-3+\frac{3}{2}-\frac{1}{3}=\frac{19}{6}$.

(2) $\log_{14}56=\frac{\lg 56}{\lg 14}=\frac{\lg(7\times 8)}{\lg(2\times 7)}=\frac{\lg 7+3\lg 2}{\lg 2+\lg 7}=1+\frac{2\lg 2}{\lg 2+\lg 7}=1+\frac{2}{1+\frac{\lg 7}{\lg 2}}$. 又 $a=\log_2 3=\frac{\lg 3}{\lg 2}$,$b=\log_3 7=\frac{\lg 7}{\lg 3}$,所以 $ab=\frac{\lg 3}{\lg 2}\times\frac{\lg 7}{\lg 3}=\frac{\lg 7}{\lg 2}$,所以$\log_{14}56=1+\frac{2}{1+ab}$.

14. 解:(1) 由题意得 $k\lg\frac{P}{2\times 10^{-5}}+60=k\lg\frac{1\,000P}{2\times 10^{-5}}$,则 $k\lg\frac{P}{2\times 10^{-5}}+60=k\left(3+\lg\frac{P}{2\times 10^{-5}}\right)$,即 $3k=60$,解得 $k=20$,故声压级 S 关于声压 P 的函数解析式为 $S=20\lg\frac{P}{2\times 10^{-5}}$.

(2) 不会干扰我们正常的学习.理由如下:

将 $S=40$ 代入 $S=20\lg\frac{P}{2\times 10^{-5}}$,得 $\lg\frac{P}{2\times 10^{-5}}=2$,所以 $\frac{P}{2\times 10^{-5}}=10^2$,解得 $P=2\times 10^{-3}$,即 $P_1=P_2=2\times 10^{-3}$,所以 $P=\sqrt{P_1^2+P_2^2}=\sqrt{2}P_1=2\sqrt{2}\times 10^{-3}$. 代入 $S=20\lg\frac{P}{2\times 10^{-5}}$,得 $S=20\lg\frac{2\sqrt{2}\times 10^{-3}}{2\times 10^{-5}}=20\lg(\sqrt{2}\times 10^2)=40+10\lg 2\approx 43<45$,所以不会干扰我们正常的学习.

15. 解:(1) 由题意知 $\frac{2\log_2 2}{\log_2 x}+\log_2 x+\log_2 2-\frac{\log_2 y}{\log_2 x}=4$,即 $\frac{2}{\log_2 x}+\log_2 x-\frac{\log_2 y}{\log_2 x}=3$,所以 $\log_2 y=2+(\log_2 x)^2-3\log_2 x=(\log_2 x-1)(\log_2 x-2)$,所以 $y=2^{(\log_2 x-1)(\log_2 x-2)}$,$x>0$ 且 $x\neq 1$.

(2) 由(1)知 $y=2^{(\log_2 x-1)(\log_2 x-2)}$,令 $y=1$,则$(\log_2 x-1)\cdot(\log_2 x-2)=0$,故$\log_2 x-1=0$,或$\log_2 x-2=0$,解得 $x=2$ 或 $x=4$. 综上,x 的值为 2 或 4.

课时提优 23　对数函数的概念

1. C　设对数函数的解析式为 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1)$,代入点 $P(16,2)$,可得 $\log_a 16=2$,则 $a^2=16$,解得 $a=4$,所以 $y=\log_4 x$,代入点 $Q(t,\log_2 3)$,可得 $\log_4 t=\log_2 3$,则 $\frac{1}{2}\log_2 t=\log_2 3$,可得 $\log_2 t=2\log_2 3=\log_2 9$,所以 $t=9$.

2. B　根据对数函数的定义 $f(x)=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1)$,分析 A,B,C,D 中函数的形式,函数 $y=\log_{(\sqrt{3}-1)}x$ 为对数函数.

3. C　函数的定义域需满足不等式 $1-\log_2 x\geqslant 0$,即$\log_2 x\leqslant 1$,即 $0<x\leqslant 2$,所以函数的定义域为$(0,2]$.

4. AD　因为 $f(x)=\log_5 x$,$a,b\in(0,+\infty)$,所以 $f(ab)=\log_5(ab)=\log_5 a+\log_5 b=f(a)+f(b)$,故 A 正确,B 错误;$f\left(\frac{a}{b}\right)=\log_5\frac{a}{b}=\log_5 a-\log_5 b=f(a)-f(b)$,故 C 错误,D 正确.

5. 2　因为 $f(x)=(a^2-3a+3)\log_a x$ 是对数函数,所以 $a^2-3a+3=1$,解得 $a=1$(舍去)或 $a=2$,所以 $f(4)=\log_2 4=2$.

6. $\left(-\frac{3}{4},+\infty\right)$　依题意,问题等价于当 $x\in(-\infty,1]$时,$\frac{1+2^x+4^x\cdot a}{a^2-a+1}>0$ 恒成立. 因为 $a^2-a+1>0$ 恒成立,所以问题等价于 $1+2^x+4^x\cdot a>0$ 恒成立,即当 $x\in(-\infty,1]$时,$a>-\frac{1}{4^x}-\frac{1}{2^x}$恒成立. 设 $t=\frac{1}{2^x}=2^{-x}\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$,则 $g(x)=\varphi(t)=-t^2-t=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$,易知 $\varphi(t)$在$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$上

单调递减，所以 $g(x)_{\max}=\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}$，则 $a>-\frac{3}{4}$.

7. B　因为函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，且 $f(0)=0$. 又当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=\ln x+\frac{1}{4}$，所以 $f(0)+f(-\mathrm{e})=0-f(\mathrm{e})=0-\left(\ln \mathrm{e}+\frac{1}{4}\right)=-\frac{5}{4}$.

8. C　设 $g(x)=f(x)-1=mx^3+n\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$，则 $g(-x)=-mx^3+n\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=-mx^3+n\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-mx^3-n\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-g(x)$，所以 $g(x)$ 是奇函数. 又因为 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上有最大值 7，所以 $g(x)$ 在 $[1,3]$ 上有最大值 6，所以 $g(x)$ 在 $[-3,-1]$ 上有最小值 -6，即 $f(x)$ 在区间 $[-3,-1]$ 上有最小值 -5.

9. AC　因为 $x^2+1>0$，所以根据对数函数的定义得 $\begin{cases}a-2>0,\\a-2\neq1,\\5-a>0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a>2,\\a\neq3,\\a<5,\end{cases}$ 所以 $2<a<3$ 或 $3<a<5$，故 A，C 符合题意.

10. BCD　对于 A，函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$f(-x)=\frac{1}{(-x)^2}=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数，故 A 不符合题意；对于 B，函数 $f(x)=x^3$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x)$ 是奇函数，故 B 符合题意；对于 C，在函数 $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$ 中，令 $\frac{1+x}{1-x}>0$，解得 $-1<x<1$，即 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$，$f(-x)=\ln\frac{1-x}{1+x}=-\ln\frac{1+x}{1-x}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数，故 C 符合题意；对于 D，函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$f(-x)=-x+\frac{1}{-x}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数，故 D 符合题意.

11. 6　$f(-7)=\log_2(1+7)=\log_2 8=3$，$f(\log_4 3)=4^{\log_4 3}=3$，所以 $f(-7)+f(\log_4 3)=3+3=6$.

12. -1　因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(x)=f(-x)$，即 $\frac{\ln(1+ax)-\ln(1+x)}{x}=\frac{\ln(1-ax)-\ln(1-x)}{-x}$，所以 $\ln(1-a^2x^2)=\ln(1-x^2)$，所以 $a^2=1$. 又因为 $a<0$，所以 $a=-1$.

13. **解**：(1) 由题意可得 $f(4)=\log_a 4=1$，可得 $a=4$，则 $f(x)=\log_4 x$，所以 $f(16)=\log_4 16=2$.

(2) $g(x)=f(2-x)+f(2+x)=\log_4(2-x)+\log_4(2+x)=\log_4(4-x^2)$，其中 $2-x>0$，$2+x>0$，解得 $-2<x<2$，此时函数 $g(x)$ 的定义域为 $\{x\mid-2<x<2\}$.

14. **解**：(1) 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=x+\ln x$，当 $x<0$ 时，$-x>0$，$f(x)=-f(-x)=-[-x+\ln(-x)]=x-\ln(-x)$，当 $x=0$ 时，$f(0)=0$，所以

$$f(x)=\begin{cases}x+\ln x, & x>0,\\0, & x=0,\\x-\ln(-x), & x<0.\end{cases}$$

(2) 当 $x>0$ 时，$f(x)=x+\ln x$，由函数 $y=x$ 和 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上都单调递增，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，正数 m,n 满足 $m+\ln m=n^2+\ln n^2$，得 $f(m)=f(n^2)$，则有 $m=n^2$，则 $n-m=n-m^2=-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{4}$，当 $n=\frac{1}{2}$ 时，取等号，因为 $y=\mathrm{e}^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 e^{n-m} 的最大值为 $\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}$.

15. **解**：(1) 因为 $g(x)=\log_2\frac{2x}{x+2}$，所以 $g(x-2)+g(-x)=\log_2\frac{2(x-2)}{x}+\log_2\frac{-2x}{2-x}=\log_2\left[\frac{2(x-2)}{x}\cdot\frac{-2x}{2-x}\right]=\log_2 4=2$.

(2) 由 (1) 知，$g(x)$ 的图象关于点 $M(-1,1)$ 中心对称，且 $g(2)=0$，$g(-4)=\log_2\frac{2\times(-4)}{-4+2}=2$，$g\left(\frac{2}{3}\right)=\log_2\frac{2\times\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+2}=-1$，$g\left(-\frac{8}{3}\right)=\log_2\frac{2\times\left(-\frac{8}{3}\right)}{-\frac{8}{3}+2}=3$. 取函数 $g(x)$ 图象上两点 $C(2,0)$，$D(-4,2)$，显然线段 CD 的中点恰为 M；再取函数 $g(x)$ 图象上两点 $E\left(\frac{2}{3},-1\right)$，$F\left(-\frac{8}{3},3\right)$，显然线段 EF 的中点也恰为 M. 因为四边形 $CEDF$ 的对角线互相平分，所以四边形 $CEDF$ 为平行四边形，所以函数 $g(x)$ 具有性质 P.

(3) 因为 $g(x)=\log_2\frac{2x}{x+2}$，令 $\frac{2x}{x+2}>0$，解得 $x>0$ 或 $x<-2$，所以 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$，所以 $h(x)=2^{g(x)}=\frac{2x}{x+2}$，$x\in(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$. 设 $B\left(x_0,\frac{2x_0}{x_0+2}\right)$，$x_0<-2$ 或 $x_0>0$，则 $|AB|^2=(x_0+4)^2+\left(\frac{2x_0}{x_0+2}\right)^2=(x_0+4)^2+\left(2-\frac{4}{x_0+2}\right)^2=(x_0+2)^2+4(x_0+2)+4+\frac{16}{(x_0+2)^2}-\frac{16}{x_0+2}+4$. 令 $x_0+2=t$（$t<0$ 或 $t>2$），则 $|AB|^2=t^2+4t+\frac{16}{t^2}-\frac{16}{t}+8=\left(t-\frac{4}{t}\right)^2+4\left(t-\frac{4}{t}\right)+16$. 令 $t-\frac{4}{t}=u$，则 $|AB|^2=u^2+4u+16=(u+2)^2+12$，所以当 $u=-2$，即 $x_0=-3-\sqrt{5}$ 时，$|AB|_{\min}=2\sqrt{3}$.

课时提优 24　对数函数的图象与性质

1. A　因为对数函数图象恒过点 $(1,0)$，所以令 $x-1=1$，解得 $x=2$，所以对任意实数 $a>0$ 且 $a\neq1$，函数 $y=\log_a(x-1)$ 的图象恒过点 $P(2,0)$.

2. A　因为函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(2x^2-ax+1)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上是增函数，又函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}u$ 为减函数，所以函数 $u=2x^2-ax+1$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 上为减函数，所以 $\frac{a}{4}\geqslant-1$，得 $a\geqslant$

-4. 当 $x=-1$ 时，$u=2+a+1\geqslant 0$，解得 $a\geqslant -3$. 因此实数 a 的取值范围是 $[-3,+\infty)$.

3. C　因为函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2+3)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=\log_{\frac{1}{2}}[(-x)^2+3]=\log_{\frac{1}{2}}(x^2+3)=f(x)$，所以 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2+3)$ 为偶函数. 又 $y=x^2+3$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，所以不等式 $f(\log_2 m)>f(2)$ 即 $|\log_2 m|<2$，所以 $-2<\log_2 m<2$，解得 $\frac{1}{4}<m<4$，所以实数 m 的取值范围是 $\left(\frac{1}{4},4\right)$.

4. ACD　对于 A，$f(0)=\log_2 2=1$，故 A 正确；对于 B，若 $f(-1)=-1$，则 $a-3+2=\frac{1}{2}$，解得 $a=\frac{3}{2}$，故 B 错误；对于 C，若 $a=0$，则 $f(x)=\log_2(3x+2)$ 在其定义域上为增函数，故 C 正确；对于 D，若 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，则 ax^2+3x+2 要取遍所有正数，所以 $a=0$ 或 $\begin{cases}a>0,\\9-8a\geqslant 0,\end{cases}$ 所以 $0\leqslant a\leqslant\frac{9}{8}$，故 D 正确.

5. 9　由反函数的性质可得 $x=\log_3 g(x)$，即 $g(x)=3^x$，故 $g(2)=3^2=9$.

6. $(-\infty,3)$　因为函数 $y=\lg(9-a\cdot 3^x)$ 对任意 $x\in(-\infty,1]$ 都有意义，所以 $9-a\cdot 3^x>0$ 在 $x\in(-\infty,1]$ 上恒成立，即 $a<\frac{9}{3^x}$ 在 $x\in(-\infty,1]$ 上恒成立. 因为 $y=3^x$ 在 $(-\infty,1]$ 上单调递增，所以 $\left(\frac{9}{3^x}\right)_{\min}=3$，所以 $a<3$.

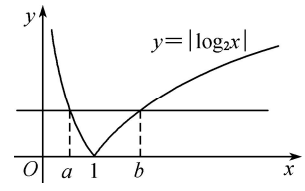
7. A　构造函数 $f(x)=3x^2$，$g(x)=\log_a x\left(0<x<\frac{1}{3}\right)$. 因为不等式 $3x^2-\log_a x<0$ 对任意 $x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$ 恒成立，所以 $f\left(\frac{1}{3}\right)\leqslant g\left(\frac{1}{3}\right)$，即 $3\times\frac{1}{9}-\log_a\frac{1}{3}\leqslant 0$，解得 $0<a<1$ 且 $a\geqslant\frac{1}{27}$，所以实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{27},1\right)$.

8. A　由于 $9^x+1>1$ 恒成立，故 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x)=\log_3(9^x+1)-x=\log_3(9^x+1)-\log_3 3^x=\log_3\frac{9^x+1}{3^x}=\log_3(3^x+3^{-x})$. 由于 $f(-x)=\log_3(3^{-x}+3^x)=f(x)$，故 $f(x)$ 为偶函数. 又 $c=f\left(\ln\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=f(-1)=f(1)$，$\log_3 2<\log_3 3=1$，$\log_5 3<\log_5 5=1$，$\log_3 2=\frac{1}{3}\log_3 2^3=\frac{1}{3}\log_3 8<\frac{1}{3}\log_3 9=\frac{2}{3}$，$\log_5 3=\frac{1}{3}\log_5 3^3=\frac{1}{3}\log_5 27>\frac{1}{3}\log_5 25=\frac{2}{3}$，所以 $\log_3 2<\log_5 3<1$. 当 $x\in(0,1]$ 时，$3^x\in(1,3]$，令 $t=3^x\in(1,3]$，令 $y=t+\frac{1}{t}$，$t\in(1,3]$，由对勾函数的性质可得该函数在 $(1,3]$ 上单调递增，则 $f(x)=\log_3(3^x+3^{-x})$ 在 $(0,1]$ 上单调递增，故 $a<b<c$.

9. BD　对于 A，$f(x)=2^x$，对定义域内的任意 x_1,x_2，$f(x_1)+f(x_2)=2^{x_1}+2^{x_2}\neq f(x_1x_2)=2^{x_1x_2}$，不满足条件①，故 A 错误；对于 B，$f(x)=\ln x$，对定义域内的任意 x_1,x_2，$f(x_1)+f(x_2)=\ln x_1+\ln x_2=\ln x_1x_2=f(x_1x_2)$，满足条件①，当 $x>1$ 时，因为 $f(x)=\ln x$ 在其定义域上是增函数，所以 $f(x)>f(1)=\ln 1=0$，满足条件②，故 B 正确；对于 C，$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，对定义域内的任意 x_1,x_2，$f(x_1)+f(x_2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}\neq f(x_1x_2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1x_2}$，不满足条件①，故 C 错误；对于 D，$f(x)=\log_2 x$，对定义域内的任意 x_1,x_2，$f(x_1)+f(x_2)=\log_2 x_1+\log_2 x_2=\log_2(x_1x_2)=f(x_1x_2)$，满足条件①，当 $x>1$ 时，因为 $f(x)=\log_2 x$ 在其定义域上是增函数，所以 $f(x)>f(1)=\log_2 1=0$，满足条件②，故 D 正确.

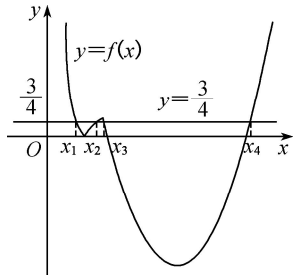
10. ACD　对于 A，当 $t=2$ 时，函数 $f(x)=\lg(x^2-2x+2)=\lg[(x-1)^2+1]$，由 $(x-1)^2+1\geqslant 1$，得 $f(x)\geqslant 0$，故 A 正确；对于 B，当 $t=-3$ 时，函数 $f(x)=\lg(x^2-2x-3)$，令 $x^2-2x-3>0$，则 $(x-3)(x+1)>0$，解得 $x<-1$ 或 $x>3$，所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$，由函数 $y=x^2-2x-3$ 的对称轴为直线 $x=1$，知该函数在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，由函数 $y=\lg x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，知函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-1)$，故 B 错误；对于 C，因为 $f(1-x)=\lg[(1-x)^2-2(1-x)+t]=\lg(x^2+t-1)$，$f(1+x)=\lg[(1+x)^2-2(1+x)+t]=\lg(x^2+t-1)$，所以 $f(1-x)=f(1+x)$，所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，故 C 正确；对于 D，由 $f(x)$ 的定义域为全体实数，知 $x^2-2x+t>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，可得 $t>-x^2+2x=-(x-1)^2+1$，所以 $t>1$，故 D 正确.

11. $\frac{5}{2}$　如图，因为 $0<a<b$ 且 $f(a)=f(b)$，所以 $0<a<1<b$，所以 $0<a^2<a$. 又函数 $f(x)=|\log_2 x|$ 在 $(0,1]$ 上单调递减，所以 $f(a^2)>f(a)=f(b)$，故 $f(a^2)=2$，即 $\log_2 a^2=-2$，解得 $a=\frac{1}{2}$. 因为 $f(a)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\left|\log_2\frac{1}{2}\right|=1$，所以 $f(b)=\log_2 b=1$，解得 $b=2$，所以 $a+b=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$.



12. 14　$f(x)=\begin{cases}|\log_2(x-1)|, & 1<x\leqslant 3,\\ \frac{1}{2}x^2-7x+\frac{35}{2}, & x>3\end{cases}$ 的图象如图所示，因为方程 $f(x)=\frac{3}{4}$ 有 4 个不同的实根 x_1,x_2,x_3,x_4 且 $x_1<x_2<x_3<x_4$，即 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=\frac{3}{4}$ 有四个不同的交点，由图知 $-\log_2(x_1-1)=\log_2(x_2-1)$，得 $(x_1-1)(x_2-1)=1$，所以 $x_1x_2-x_1-x_2=0$，变形得 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=1$. 又当 $x>3$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}x^2-7x+\frac{35}{2}$，其对称轴为直线 $x=7$，所以 x_3+

$x_4=14$. 故$\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)(x_3+x_4)=1\times14=14$.



13. 解:(1) 因为 $f(x)$是偶函数,且定义域为 $\mathbf{R}$,所以对任意的 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(-x)=f(x)$,即$\log_2(2^{-x}+1)+mx=\log_2(2^x+1)-mx$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,则 $2mx=\log_2(2^x+1)-\log_2(2^{-x}+1)=\log_2\frac{2^x+1}{2^{-x}+1}=\log_2 2^x=x$ 恒成立,所以 $2m=1$,解得 $m=\frac{1}{2}$.

(2) 不等式 $2f(x)-x-a\geqslant0$ 对任意的 $x\in(-\infty,0]$恒成立,即$\frac{1}{2}a\leqslant\log_2(2^x+1)-x$ 对任意的 $x\in(-\infty,0]$恒成立. 令 $g(x)=\log_2(2^x+1)-x=\log_2(2^x+1)-\log_2 2^x=\log_2\left(1+\frac{1}{2^x}\right)$,$x\in(-\infty,0]$. 因为 $1+\frac{1}{2^x}\geqslant2$,所以 $g(x)=\log_2\left(1+\frac{1}{2^x}\right)\geqslant\log_2 2=1$,所以$\frac{1}{2}a\leqslant1$,解得 $a\leqslant2$. 所以实数 a 的取值范围是$(-\infty,2]$.

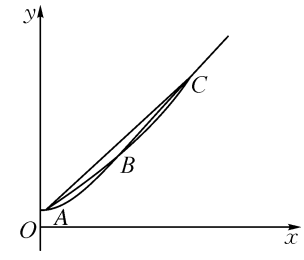
14. 解:(1) 由题意可知 $g(x)=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$. 若 $a=2$,则 $g(x)=\log_2 x(a>0$ 且 $a\neq1)$.

(2) 若函数 $y=g[f(x)+3^k-1]$的值域为 $\mathbf{R}$,则 $y=f(x)+3^k-1=a^x+3^k-1$ 的值域包含$(0,+\infty)$. 因为 $a^x>0$,所以 $a^x+3^k-1>3^k-1$,即 $y=a^x+3^k-1$ 的值域为$(3^k-1,+\infty)$,可得 $3^k-1\leqslant0$,即 $3^k\leqslant1$,解得 $k\leqslant0$. 所以实数 k 的取值范围是$(-\infty,0]$.

(3) $g(x)=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$的定义域为$(0,+\infty)$,且 $x\in[a+2,a+3]$,对于 $g\left(\frac{1}{x-a}\right)$,可知$\frac{1}{x-a}>0$ 恒成立,对于 $g(x-3a)$,由$(a+2)-3a=2-2a>0$,解得 $0<a<1$. 又因为 $g(x-3a)-g\left(\frac{1}{x-a}\right)=\log_a(x-3a)-\log_a\frac{1}{x-a}=\log_a[(x-3a)(x-a)]$,且函数 $g(x-3a)$和 $g\left(\frac{1}{x-a}\right)$是$[a+2,a+3]$上的“粗略逼近函数”,所以$\left|g(x-3a)-g\left(\frac{1}{x-a}\right)\right|=|\log_a[(x-3a)(x-a)]|\leqslant1$,即$-1\leqslant\log_a[(x-3a)(x-a)]\leqslant1$,且 $0<a<1$,由 $y=\log_a x$ 在定义域上单调递减,可得 $a\leqslant(x-3a)(x-a)\leqslant\frac{1}{a}$在$[a+2,a+3]$上恒成立. 又因为 $y=(x-3a)(x-a)=x^2-4ax+3a^2$,开口向上,对称轴为直线 $x=2a<a+2$,所以 $y=x^2-4a+3a^2$ 在$[a+2,a+3]$上单调递增,所以$\begin{cases}a\leqslant(a+2-3a)(a+2-a),\\(a+3-3a)(a+3-a)\leqslant\frac{1}{a},\end{cases}$解得 $0<a\leqslant\frac{9-\sqrt{57}}{12}$. 所以实数 a 的最大值为$\frac{9-\sqrt{57}}{12}$.

15. 解:(1) 由 $f(-x)=f(x)$,得 $\log_2(2^{-x}+1)+kx=\log_2(2^x+1)-kx$,所以 $\log_2(2^{-x}+1)-\log_2(2^x+1)+2kx=0$,所以 $\log_2\frac{2^{-x}+1}{2^x+1}+2kx=0$,所以 $\log_2\frac{1+2^x}{2^x(2^x+1)}+2kx=0$,从而$(2k-1)x=0$,所以 $k=\frac{1}{2}$.

(2)由(1)知 $f(x)=\log_2(2^x+1)-\frac{1}{2}x$,所以 $g(x)=f(x)+\frac{1}{2}x=\log_2(2^x+1)$. 函数 $g(x)$的大致图象如图所示,又 $A(t,g(t))$,$B(t+1,g(t+1))$,$C(t+2,g(t+2))$,所以由图可知,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times[(t+2)-t]\left[\frac{g(t+2)+g(t)}{2}-g(t+1)\right]=\frac{1}{2}\times[g(t+2)+g(t)]-g(t+1)=\frac{1}{2}\log_2[(2^t+1)(2^{t+2}+1)]-\log_2(2^{t+1}+1)=\log_2\sqrt{\frac{2^{2t+2}+2^{t+2}+2^t+1}{2^{2t+2}+2^{t+2}+1}}$. 令 $u=2^t$,$2\leqslant u\leqslant4$,则 $\frac{2^{2t+2}+2^{t+2}+2^t+1}{2^{2t+2}+2^{t+2}+1}=1+\frac{2^t}{2^{2t+2}+2^{t+2}+1}=1+\frac{1}{4\times2^t+\frac{1}{2^t}+4}=1+\frac{1}{4u+\frac{1}{u}+4}=h(u)$. 因为函数 $y=4u+\frac{1}{u}+4$ 在$[2,4]$上单调递增,所以 $y=4u+\frac{1}{u}+4\in\left[\frac{25}{2},\frac{81}{4}\right]$,所以 $h(u)\in\left[\frac{85}{81},\frac{27}{25}\right]$. 故 $\triangle ABC$ 面积的取值范围是$\left[\log_2\frac{\sqrt{85}}{9},\log_2\frac{3\sqrt{3}}{5}\right]$.

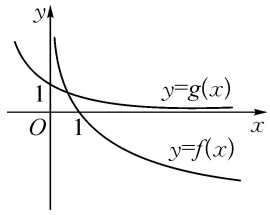


课时提优 25　不同函数增长的差异

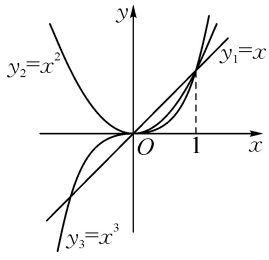
1. A　$y=1.1^x$ 是指数函数,$y=2\ 020x^2$ 是二次函数,$y=\log_{2\ 020}x$ 是对数函数,$y=2\ 020x$ 是一次函数,当 x 足够大时,指数函数增长速度最快.

2. D　对于 A,由图可知,注入时间在 3 小时以内(含 3 小时),方案一的注入量大于其他两种方案,故 A 正确;对于 B,当注入时间恰为 4 小时,由图可知,方案三的注入量小于其他两个方案,故 B 正确;对于 C,当注入时间恰为 6 小时,方案二的注入量大于其他两个方案,故 C 正确;对于 D,当注入时间大于 8 小时,由图可知方案三的注入量最大,故应选择方案三,故 D 错误.

3. C　在平面直角坐标系中画出 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象如图所示，由图象可知，$f(x)$ 的衰减速度越来越慢，$g(x)$ 的衰减速度越来越慢.

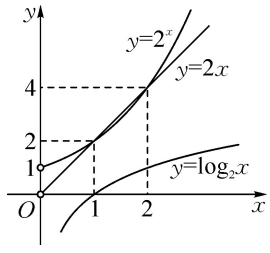


4. BD　在同一平面直角坐标系中画出函数 $y_1=x$，$y_2=x^2$，$y_3=x^3$ 的图象，如图所示，



由图可知 $y_1=x$ 的增长速度保持不变，所以 A 错误；在 $(0,+\infty)$ 上，$y_2=x^2$ 的增长速度越来越快，所以 B 正确；由图可知在 $(0,1)$ 上，y_3 的增长速度最慢，而在 $(1,+\infty)$ 上，y_3 的增长速度最快，所以 C 错误，D 正确.

5. $y=2^x$　$(1,2)$　作出函数 $y=\log_2 x$，$y=2x$，$y=2^x$ 的图象如图所示.



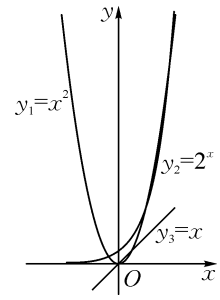
从增长速度看，$y=\log_2 x$ 的增长是由快变慢的，$y=2x$ 是均匀增长的，$y=2^x$ 是由慢变快的，故增长较快的一个是 $y=2^x$. 由图可知，使 $\log_2 x<2^x<2x$ 成立的 x 的取值范围是 $(1,2)$.

6. y_2　以爆炸式增长的变量呈指数函数变化. 从表格中可以看出，四个变量 y_1,y_2,y_3,y_4 均是从 2 开始变化，且都是越来越大，但是增长速度不同，其中变量 y_2 的增长速度最快，可知变量 y_2 关于 x 呈指数函数变化.

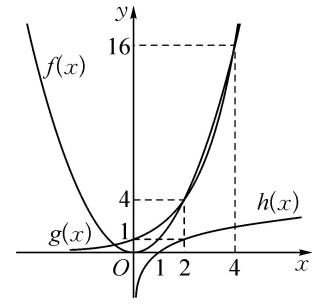
7. B　在 2 h 内，血液中的药物含量呈线性增加，则第一段图象为线段，且为增函数，排除 A，D；停止注射后，血液中的药物含量呈指数衰减，排除 C；能反映血液中药物含量 Q 随时间 t 变化的图象是 B.

8. A　因为指数函数 $y=1.05^x$ 的底数大于 1，其增长速度随着时间的推移会越来越快，比幂函数 $y=x^2$，对数函数 $y=\lg(x+1)$，一次函数 $y=50x$ 增长的速度都要快，所以从足够长远的角度看，使得公司获益最大的函数模型是 $y=10\times1.05^x$.

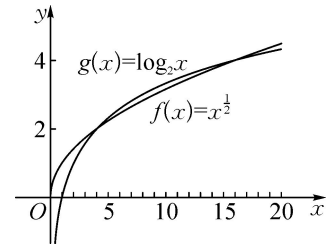
9. BD　如图，对于 $y_1=x^2$，$y_2=2^x$，从负无穷开始，y_1 大于 y_2，然后 y_2 大于 y_1，然后 y_1 再次大于 y_2，最后 y_2 大于 y_1，此后 y_1 再也追不上 y_2，故随着 x 的逐渐增大，y_2 的增长速度越来越快于 y_1，A 错误，B，D 正确；对于 $y_1=x^2$，$y_3=x$，由于 $y_3=x$ 的增长速度是不变的，所以当 $x\in(0,1)$ 时，y_3 大于 y_1，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，y_1 大于 y_3，y_3 再也追不上 y_1，即 y_1 的增长速度有时快于 y_3，C 错误.



10. ACD　画出函数 $f(x)=x^2$，$g(x)=2^x$，$h(x)=\log_2 x$ 的图象如图所示，结合图象，可得当 $x\in(4,+\infty)$ 时，函数 $g(x)=2^x$ 的增长速度最快，$h(x)=\log_2 x$ 的增长速度最慢，所以选项 B 正确，选项 A，C，D 错误.

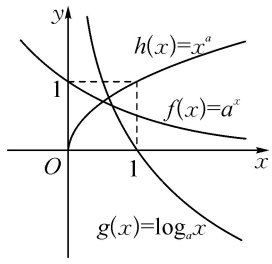


11. $x^{\frac{1}{2}}>\log_2 x$　作出 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ 和 $g(x)=\log_2 x$ 的图象如图所示，



由图象可知，在 $(0,4)$ 内，$x^{\frac{1}{2}}>\log_2 x$；当 $x=4$ 或 $x=16$ 时，$x^{\frac{1}{2}}=\log_2 x$；在 $(4,16)$ 内，$x^{\frac{1}{2}}<\log_2 x$；在 $(16,20)$ 内，$x^{\frac{1}{2}}>\log_2 x$.

12. ②③　对于①，取 $a=e^{\frac{1}{e}}>e^0=1$，则 $f(x)=(e^{\frac{1}{e}})^x$，满足 $f(e)=(e^{\frac{1}{e}})^e=e$，$g(x)=\log_{e^{\frac{1}{e}}}x$ 满足 $g(e)=\log_{e^{\frac{1}{e}}}e=e\ln e=e$，此时 $f(e)=g(e)$，不满足函数 $f(x)$ 的图象恒在函数 $g(x)$ 的图象上方，故①错误. 对于②，当 $0<a<1$ 时，在 $x\in(1,+\infty)$ 上，$g(x)=\log_a x$ 的图象在 x 轴下方，$h(x)=x^a$ 的图象在 x 轴上方，此时显然满足条件；当 $a>1$ 时，对于对数函数 $g(x)=\log_a x$ 和幂函数 $h(x)=x^a$，在区间 $(0,+\infty)$ 上，随着 x 的增大，$g(x)=\log_a x$ 增长得越来越慢，尽管在 x 的一定变化范围内，$\log_a x$ 可能会大于 x^a，但由于 x^a 的增长速度比 $\log_a x$ 快，故总存在一个 x_0，使得当 $x>x_0$ 时，$h(x)>g(x)$ 成立，故②正确. 对于③，当 $0<a<1$ 时，在同一坐标系中作出函数 $f(x)=a^x$，$g(x)=\log_a x$，$h(x)=x^a$ 的大致图象如图所示，



函数 $f(x)=a^x$，$g(x)=\log_a x$，$h(x)=x^a$ 的图象两两之间都分别有交点，所以方程 $f(x)=g(x)$，$f(x)=h(x)$，$g(x)=h(x)$ 都有解，故③正确.

13. 解：(1)曲线 C_1 对应的函数为 $g(x)=x^3$，曲线 C_2 对应的函数为 $f(x)=2^x$.

(2)因为 $f(1)>g(1)$，$f(2)<g(2)$，$f(9)<g(9)$，$f(10)>g(10)$，所以 $1<x_1<2$，$9<x_2<10$，所以 $x_1<6<x_2$，$2\ 024>x_2$，由图可知，当 $x_1<x<x_2$ 时，$f(x)<g(x)$，所以 $f(6)<g(6)$. 当 $x>x_2$ 时，$f(x)>g(x)$，即 $f(2\ 024)>g(2\ 024)$. 又因为 $g(2\ 024)>g(6)$，所以 $f(2\ 024)>g(2\ 024)>g(6)>f(6)$.

14. 解：(1)当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2^x}-1\right)$，由 $\frac{1}{2^x}-1>0$，解得 $x<0$，所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)$.

(2)由题意知，$f(x)=\log_a(a^x-1)(a>1)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，当 $x_1>x_2>0$ 时，$f(x_1)-f(x_2)=\log_a(a^{x_1}-1)-\log_a(a^{x_2}-1)=\log_a\frac{a^{x_1}-1}{a^{x_2}-1}>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，由 $f(x)<f(1)$，得 $\begin{cases}x>0,\\x<1,\end{cases}$ 解得 $0<x<1$，所以所求不等式的解集为 $(0,1)$.

(3)设 $g(x)=f(x)-\log_2(1+2^x)=\log_2\frac{2^x-1}{2^x+1}$，$x\in[1,3]$，设 $t=\frac{2^x-1}{2^x+1}=1-\frac{2}{2^x+1}$，$x\in[1,3]$，易知 $t=1-\frac{2}{2^x+1}$ 在 $x\in[1,3]$ 上单调递增，所以 $t\in\left[\frac{1}{3},\frac{7}{9}\right]$，所以 $g(x)_{\min}=\log_2\frac{1}{3}$. 又因为 $f(x)-\log_2(1+2^x)>m$ 对任意实数 $x\in[1,3]$ 恒成立，所以 $m<g(x)_{\min}=\log_2\frac{1}{3}=-\log_2 3$. 故实数 m 的取值范围是 $(-\infty,-\log_2 3)$.

15. 解：(1)由已知，可得 $h(x)=9x+\frac{4}{x}=m\left(2x-\frac{1}{x}+a\right)+n\left(\frac{1}{2}x+\frac{4}{x}-2\right)=\left(2m+\frac{n}{2}\right)x+\frac{4n-m}{x}+ma-2n$，则 $\begin{cases}2m+\frac{n}{2}=9,\\4n-m=4,\\ma-2n=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=4,\\n=2,\\a=1,\end{cases}$ 所以实数 a 的值为 1.

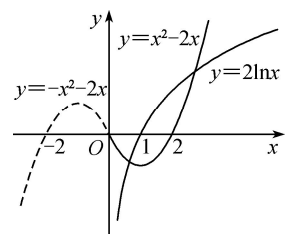
(2)①设 $h(x)=m\log_2(4^x+1)+n\left(\frac{1}{2}x+1\right)$. 因为 $h(x)$ 为偶函数，所以 $h(-x)=m\log_2(4^{-x}+1)-\frac{n}{2}x+n$. 由 $h(-x)=h(x)$，可得 $m\log_2(4^x+1)+\frac{n}{2}x+n=m\log_2(4^{-x}+1)-\frac{n}{2}x+n$，整理可得 $m\log_2\frac{4^{-x}+1}{4^x+1}=nx$，即 $m\log_2 4^{-x}=nx$，所以 $2^{nx}=4^{-mx}$，所以 $nx=-2mx$ 对任意 x 恒成立，所以 $n=-2m$，所以 $h(x)=m\log_2(4^x+1)-2m\left(\frac{x}{2}+1\right)=m[\log_2(4^x+1)-x]-2m$. 又因为 $h(0)=-1$，所以 $m\log_2 2-2m=-1$，所以 $m=1$，故函数 $h(x)$ 的解析式为 $h(x)=\log_2(4^x+1)-x-2$.

②由①知 $h(x)=\log_2(4^x+1)-x-2=\log_2\frac{4^x+1}{2^x}-2$. 在 $[0,1]$ 内任取 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，则 $h(x_1)-h(x_2)=\log_2\frac{4^{x_1}+1}{2^{x_1}}-2-\log_2\frac{4^{x_2}+1}{2^{x_2}}+2=\log_2\frac{(4^{x_1}+1)2^{x_2}}{(4^{x_2}+1)2^{x_1}}$. 因为 $(4^{x_1}+1)2^{x_2}-(4^{x_2}+1)2^{x_1}=(2^{x_2}-2^{x_1})+(2^{2x_1+x_2}-2^{x_1+2x_2})=(2^{x_2}-2^{x_1})+2^{x_1+x_2}(2^{x_1}-2^{x_2})=(2^{x_2}-2^{x_1})(1-2^{x_1+x_2})$，$x_1<x_2$，所以 $2^{x_2}-2^{x_1}>0$，$2^{x_1+x_2}>1$，所以 $1-2^{x_1+x_2}<0$，所以 $(2^{x_2}-2^{x_1})(1-2^{x_1+x_2})<0$，即 $0<\frac{(4^{x_1}+1)2^{x_2}}{(4^{x_2}+1)2^{x_1}}<1$，所以 $\log_2\frac{(4^{x_1}+1)2^{x_2}}{(4^{x_2}+1)2^{x_1}}<0$，即 $h(x_1)<h(x_2)$，所以函数 $h(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增. 易知 $h(x)$ 为偶函数，所以函数 $h(x)$ 在 $[-1,0]$ 上单调递减. 设 $x_k\leqslant 0\leqslant x_{k+1}(x_k\neq x_{k+1})$，$k=0,1,2,3,\cdots,n-1$，则 $0>h(x_0)>h(x_1)>\cdots>h(x_k)\geqslant h(0)$，$h(0)\leqslant h(x_{k+1})<h(x_{k+2})<\cdots<h(x_n)<0$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}|h(x_i)-h(x_{i-1})|=h(x_0)-h(x_1)+h(x_1)-h(x_2)+\cdots+h(x_{k-1})-h(x_k)+|h(x_{k+1})-h(x_k)|+h(x_{k+2})-h(x_{k+1})+h(x_{k+3})-h(x_{k+2})+\cdots+h(x_n)-h(x_{n-1})=h(x_0)-h(x_k)+|h(x_{k+1})-h(x_k)|+h(x_n)-h(x_{k+1})=h(-1)+h(1)-h(x_k)-h(x_{k+1})+|h(x_{k+1})-h(x_k)|$，当且仅当 $x_k=0$ 或 $x_{k+1}=0$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n}|h(x_i)-h(x_{i-1})|$ 有最大值 $2h(1)-2h(0)=2\log_2\frac{5}{4}$，故 M 的最大值为 $2\log_2\frac{5}{4}$.

单元综合练 4　指数函数与对数函数的综合应用

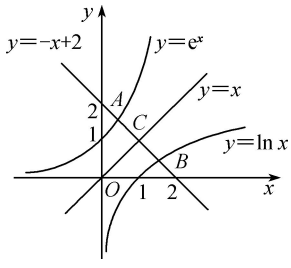
1. D　设第 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 年该市政府全年投入的资金翻两番. 依题意得 $120(1+20\%)^{n-1}=4\times120$，则 $(n-1)\lg 1.2=\lg 4$，所以 $n-1=\frac{2\lg 2}{\lg 1.2}=\frac{2\lg 2}{\lg 6-\ln 5}=\frac{2\lg 2}{\lg 2+\lg 3-(1-\lg 2)}$，则 $n=\frac{2\lg 2}{2\lg 2+\lg 3-1}+1\approx 8.5$. 因此，该市政府全年投入的资金翻两番(即为 2024 年的四倍)的年份是 2032 年.

2. B　根据题意，作出函数 $y=-x^2-2x(x\leqslant 0)$ 的图象关于原点对称的图象，即函数 $y=x^2-2x$ 的图象，该函数与函数 $y=2\ln x(x>0)$ 的交点个数即为函数 $f(x)$ 的“和谐点对”的个数，如图，观察图象可得交点个数是 2，即 $f(x)$ 的“和谐点对”有 2 个.

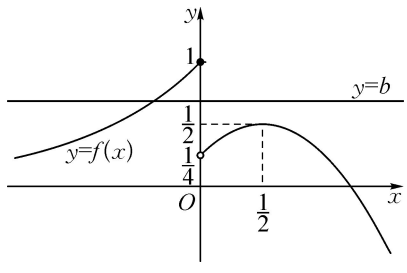


3. BC　因为函数 $f(x)=2^{-x}$ 的图象与函数 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，所以 $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$，又 $h(x)=g\left(\frac{1}{x^2+2}\right)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x^2+2}\right)=\log_2(x^2+2)$，$x\in\mathbf{R}$，$h(-x)=\log_2[(-x)^2+2]=\log_2(x^2+2)=h(x)$，所以函数 $y=h(x)$ 是偶函数，图象关于 y 轴对称，所以 B 正确，A 错误；函数 $y=x^2+2$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，根据复合函数的单调性可得函数 $y=h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)_{\min}=h(0)=1$，所以 C 正确，D 错误.

4. ABC　方程 $e^x+x=2$ 和 $\ln x+x=2$ 可化为 $e^x=-x+2$ 和 $\ln x=-x+2$，即直线 $y=-x+2$ 与两函数 $y=e^x$ 和 $y=\ln x$ 的图象的交点横坐标分别为 x_1,x_2，由于 $y=e^x$ 和 $y=\ln x$ 互为反函数，则它们的图象关于直线 $y=x$ 对称，如图所示，点 A,B 关于点 C 对称，$0<x_1<1<x_2<2$，且 $C(1,1)$，所以 $x_1+x_2=2$，故 A 正确；因为 $e>\left(\frac{3}{2}\right)^2$，即 $e^{\frac{1}{2}}>\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}+2$，所以 $0<x_1<\frac{1}{2}$，又 $x_2=2-x_1$，所以 $x_2-x_1=2-x_1-x_1=2-2x_1>1$，故 B 正确；由 $y=e^x$ 和 $y=\ln x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，所以 $e^{x_1}=x_2$，$\ln x_2=x_1$，所以 $x_1e^{x_1}=x_2\ln x_2$，故 C 正确；对于 D，若 $\frac{e^{x_1}}{x_1}=\frac{\ln x_2}{x_2}$ 成立，则 $\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1}{x_2}$ 成立，即 $x_1=x_2$，与 $0<x_1<1<x_2<2$ 矛盾，故 D 错误.



5. $(-\infty,0]\cup\left(\frac{1}{2},1\right]$　方程 $f(x)=b$ 有且仅有 1 个实数根，即函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=b$ 有且仅有一个交点，作出函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示.



结合图象可得 $b\in(-\infty,0]\cup\left(\frac{1}{2},1\right]$.

6. e^2　**分析**：观察题设中的两个等式，将 $1+\ln m$ 作为一个整体 t，则 $1+\ln m=e^{2-\ln m}$ 转化为 $t=e^{3-t}$，与 $n=e^{3-n}$ 具有相同结构，为此构造函数 $g(x)=x-e^{3-x}$ 加以解决.

由 $1+\ln m=e^{2-\ln m}$ 可得 $1+\ln m=e^{3-(1+\ln m)}$. 记 $g(x)=x-e^{3-x}$，由于函数 $y=e^{3-x}$ 单调递减，故 $g(x)=x-e^{3-x}$ 单调递增. 由 $n=e^{3-n}$ 可得 $g(n)=n-e^{3-n}=0$. 又 $g(1+\ln m)=1+\ln m-e^{3-(1+\ln m)}=0$，所以 $1+\ln m=n$. 由 $n=e^{3-n}$ 可得 $\ln n=3-n$，所以 $\ln n+\ln m=(3-n)+(n-1)=2$，可得 $mn=e^2$.

7. **解**：(1) $x\in(0,1)$ 时，令 $a\cdot 9^x+3^x-1>0$，则 $a>\left(\frac{1}{9}\right)^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x$. 令 $u=\left(\frac{1}{3}\right)^x$，$\frac{1}{3}<u<1$，则 $a>u^2-u$ 恒成立，$u^2-u=\left(u-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，所以 $(u^2-u)_{\max}<1-1=0$，所以 $a\geqslant 0$. 故实数 a 的取值范围是 $[0,+\infty)$.

(2) 令 $h(x)=a\cdot 9^x+3^x-1$，则 $h(x)$ 的值域包含 $(0,+\infty)$.

当 $a=0$ 时，$h(x)=3^x-1$，其值域为 $(-1,+\infty)$，满足条件；

当 $a<0$ 时，$h(x)=a\cdot 9^x+3^x-1$，令 $t=3^x$，$t>0$，则 $y=at^2+t-1=a\left(t+\frac{1}{2a}\right)^2-1-\frac{1}{4a}$，函数为开口向下的抛物线，$h(x)$ 的值域为 $\left(-\infty,-1-\frac{1}{4a}\right]$，不满足条件.

综上所述，$a=0$.

(3) $f(x)=\lg(3^x-1)$，定义域为 $(0,+\infty)$，$g(x)=10^{f(x)}+1=3^x$，该函数在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

由 $g(x^2+tx-2t)\geqslant g(2x)$，得 $x^2+tx-2t\geqslant 2x>0$，

即 $x^2+(t-2)x-2t=(x-2)(x+t)\geqslant 0$ 且 $x>0$，

①当 $t<-2$ 时，解集为 $\{x\mid 0<x\leqslant 2$ 或 $x\geqslant -t\}$；

②当 $t=-2$ 时，解集为 $\{x\mid x>0\}$；

③当 $-2<t<0$ 时，解集为 $\{x\mid 0<x\leqslant -t$ 或 $x\geqslant 2\}$；

④当 $t\geqslant 0$ 时，解集为 $\{x\mid x\geqslant 2\}$.

8. **解**：(1) 因为 $f(x)=\frac{a\cdot e^x-2+a}{e^x+1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ 且为奇函数，所以 $f(0)=0$，即 $\frac{a\cdot 1-2+a}{1+1}=0$，解得 $a=1$，所以 $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$. 因为 $f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{1-e^x}{1+e^x}=-\frac{e^x-1}{e^x+1}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数，符合题意，故 $a=1$ 成立. $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}=1-\frac{2}{e^x+1}$，该函数是 $\mathbf{R}$ 上的增函数. 证明如下：设 x_1,x_2 是任意两个实数，且 $x_1<x_2$，则有 $f(x_2)-f(x_1)=1-\frac{2}{e^{x_2}+1}-\left(1-\frac{2}{e^{x_1}+1}\right)=\frac{2(e^{x_2}-e^{x_1})}{(e^{x_1}+1)(e^{x_2}+1)}$. 因为 $x_1<x_2$，所以 $e^{x_2}>e^{x_1}>0$，所以 $f(x_2)-f(x_1)>0$，即 $f(x_2)>f(x_1)$，所以函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

(2) 因为函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数又是奇函数，所以由 $f(2^{x+1})+f(3-4^x)>0$，得 $f(2^{x+1})>-f(3-4^x)=f(4^x-3)$，所以 $2^{x+1}>4^x-3$，即 $(2^x)^2-2\times 2^x-3<0$，则 $(2^x-3)\cdot(2^x+1)<0$，所以 $2^x-3<0$，解得 $x<\log_2 3$，所以不等式的解集为 $(-\infty,\log_2 3)$.

(3) 因为函数 $h(x)$ 与 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,-2)$ 对称，所以 $h(x)+f(-x)=-4$，则 $h(x)=-4-\left(1-\frac{2}{e^{-x}+1}\right)=-3-$

$\frac{2}{e^x+1}$，显然 $e^x+1>1$，所以 $0<\frac{1}{e^x+1}<1$，则 $0<\frac{2}{e^x+1}<2$，所以 $-2<-\frac{2}{e^x+1}<0$，即 $-5<f(x)<-3$. $g(x)=\log_2(4x^2)\cdot\log_4\frac{x}{8}+m=(\log_2 4+\log_2 x^2)(\log_4 x-\log_4 8)+m=(2+2\log_2 x)\left(\frac{1}{2}\log_2 x-\frac{3}{2}\right)+m=(\log_2 x)^2-2\log_2 x+m-3$，令 $t=\log_2 x$，当 $x\in\left[\frac{1}{4},32\right]$ 时，$t\in[-2,5]$，设 $F(t)=t^2-2t+m-3=(t-1)^2+m-4$，所以 $F(t)_{\max}=F(5)=12+m$，$F(t)_{\min}=m-4$，即当 $x_2\in\left[\frac{1}{4},32\right]$ 时，$g(x_2)\in[m-4,12+m]$. 因为对任意 $x_1\in\mathbf{R}$，总存在 $x_2\in\left[\frac{1}{4},32\right]$，使得 $h(x_1)=g(x_2)$ 成立，所以 $\begin{cases}12+m\geqslant-3,\\ m-4\leqslant-5,\end{cases}$ 解得 $-15\leqslant m\leqslant-1$，即实数 m 的取值范围是 $[-15,-1]$.

9. (1)**解**：当 $a=2$ 时，$4\oplus4=\log_2(2^4+2^4)=\log_2 32=5$.

(2)**证明**：因为 $(x\oplus y)\oplus z=\log_a(a^x+a^y)\oplus z=\log_a(a^{\log_a(a^x+a^y)}+a^z)=\log_a(a^x+a^y+a^z)$，$x\oplus(y\oplus z)=x\oplus[\log_a(a^y+a^z)]=\log_a(a^x+a^{\log_a(a^y+a^z)})=\log_a(a^x+a^y+a^z)$，所以 $(x\oplus y)\oplus z=x\oplus(y\oplus z)$.

(3)**解**：由新运算可知，$f(x)=m\oplus m-\log_a 2=\log_a(a^m+a^m)-\log_a 2=m+\log_a 2-\log_a 2=m=\log_a(x^2-3ax+2a^2)$. 令 $g(x)=x^2-3ax+2a^2$，则 $g(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减. 因为 $f(x)$ 在 $[s,t]$ 上的值域为 $[\log_a t,\log_a s]$，所以 $\log_a t<\log_a s\ (s<t)$，则 $0<a<1$，所以 $f(x)$ 在 $[s,t]$ 上单调递增，则 $\begin{cases}g(s)=t,\\ g(t)=s,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}s^2-3as+2a^2=t,\\ t^2-3at+2a^2=s,\end{cases}$ 整理得 $s^2-t^2-3a(s-t)=-(s-t)$，所以 $s+t-3a=-1$，将 $t=3a-s-1$ 代入 $s^2-3as+2a^2=t$，得 $s^2-(3a-1)s+2a^2-3a+1=0$，同理得 $t^2-(3a-1)t+2a^2-3a+1=0$. 所以 s,t 是函数 $h(x)=x^2-(3a-1)x+2a^2-3a+1$ 在 $(0,a)$ 上的两个不同的零点，则

$$\begin{cases}h(0)=2a^2-3a+1>0,\\ h(a)=-2a+1>0,\\ 0<\frac{3a-1}{2}<a,\\ \Delta=(3a-1)^2-4(2a^2-3a+1)>0,\end{cases}$$ 解得

$$\begin{cases}a<\frac{1}{2}\text{或}a>1,\\ a<\frac{1}{2},\\ \frac{1}{3}<a<1,\\ a<-3-2\sqrt{3}\text{或}a>-3+2\sqrt{3},\end{cases}$$ 所以 $2\sqrt{3}-3<a<\frac{1}{2}$，故实数 a 的取值范围是 $\left(2\sqrt{3}-3,\frac{1}{2}\right)$.

课时提优 26　函数的零点与方程的解

1. C　解方程 $6x^2+x-1=0$，即 $(3x-1)(2x+1)=0$，解得 $x=-\frac{1}{2}$ 或 $x=\frac{1}{3}$，因此，函数 $y=6x^2+x-1$ 的零点为 $\frac{1}{3},-\frac{1}{2}$.

方法总结　探究函数零点的两种求法：

(1) 代数法：求方程 $f(x)=0$ 的实数根，若存在实数根，则函数存在零点，否则函数不存在零点.

(2) 几何法：与函数 $y=f(x)$ 的图象联系起来，图象与 x 轴的交点的横坐标即为函数的零点.

2. C　$f(x)=2^x+\log_2 x-\frac{19}{2}$ 是单调递增函数，又 $f(1)=2^1+\log_2 1-\frac{19}{2}<0$，$f(2)=2^2+\log_2 2-\frac{19}{2}<0$，$f(3)=2^3+\log_2 3-\frac{19}{2}=\log_2 3-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}(\log_2 9-3)>\frac{1}{2}(\log_2 8-3)=0$，所以所求零点在区间 $(2,3)$ 上.

方法总结　确定函数 $f(x)$ 零点所在区间的常用方法：

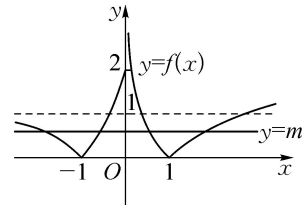
(1) 解方程法：当对应方程 $f(x)=0$ 易解时，可先解方程，再看求得的根是否落在给定区间上.

(2) 利用函数零点存在定理：首先看函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图象是否连续，再看是否有 $f(a)f(b)<0$. 若 $f(a)f(b)<0$，则函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内必有零点.

(3) 数形结合法：通过画函数图象，观察图象与 x 轴在给定区间上是否有交点来判断.

3. B　令 $f(x)=2x+3x^3=x(2+3x^2)=0$，得 $x_1=0$. 因为 $g(x)=x^2+\ln x$，$x>0$，易知 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又因为 $g\left(\frac{1}{e}\right)=\left(\frac{1}{e}\right)^2-1<0$，$g(1)=1>0$，所以 $x_2\in\left(\frac{1}{e},1\right)$；$h(x)=3^x+x-5$，$x\in\mathbf{R}$，易知 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，又因为 $h(1)=3+1-5=-1<0$，$h(2)=9+2-5=6>0$，所以 $x_3\in(1,2)$，所以 $x_3>x_2>x_1$.

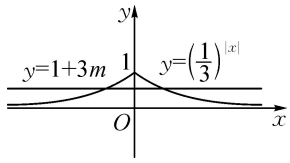
4. BCD　画出 $f(x)$ 的大致图象，如图所示.



由图可知 $0<m<1$，故 A 错误. 因为 $x_1<x_2<x_3<x_4$，所以 $3^{x_1+1}-1+3^{x_2+1}-1=0$，$\ln x_3+\ln x_4=0$，所以 $3^{x_1}+3^{x_2}=\frac{2}{3}$，$x_3x_4=1$，故 B 正确. 因为 $x_3>0$，$x_4>0$，所以 $2x_3+x_4=2x_3+\frac{1}{x_3}\geqslant2\sqrt{2}$，当且仅当 $x_3=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x_4=\sqrt{2}$ 时，等号成立，故 C 正确. 由图可知 $\frac{1}{e}<x_3<1$，则 $y=x_3+x_4=x_3+\frac{1}{x_3}$ 在 $\left(\frac{1}{e},1\right)$ 上单调递减. 因为 m 越大，x_3 越小，所以 x_3+x_4 的值越大，故 D 正确.

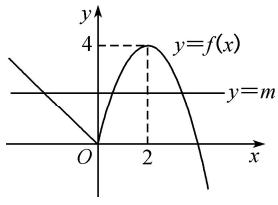
5. $\left(-\frac{1}{3},0\right)$　若函数 $f(x)$ 有两个零点，则 $f(x)=$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}-1-3m=0$，即$\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}=1+3m$ 有两个实数解，则函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$ 的图象与直线 $y=1+3m$ 有两个交点，作出函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$ 和直线 $y=1+3m$ 的图象如图所示，



由图象知，当 $0<1+3m<1$，即 $-\frac{1}{3}<m<0$ 时，函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$ 的图象与直线 $y=1+3m$ 有两个交点，即函数 $f(x)$ 有两个零点，所以实数 m 的取值范围是$\left(-\frac{1}{3},0\right)$.

6. $(0,4)$　若函数 $g(x)=f(x)-m$ 有三个零点，即 $y=f(x)$ 与 $y=m$ 的图象有三个交点，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=-x(x-4)=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$，当 $x=2$ 时，$f(x)=-x(x-4)$ 在$[0,+\infty)$上有最大值 4，画出函数 $y=f(x)$ 的图象，如图，由图可知，$m\in(0,4)$.

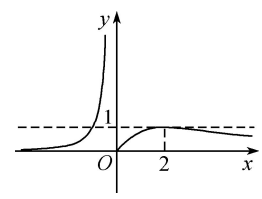


7. A　令 $y=x^2-nx-2$，其对称轴为直线 $x=\frac{n}{2}$，当 $x=m$ 时，$(x-m)(x^2-nx-2)=0$，若 $m\leqslant 0$，当 $x>0$ 时，要使不等式 $(x-m)(x^2-nx-2)\geqslant 0$ 对任意 $x>0$ 恒成立，则 $y=x^2-nx-2\geqslant 0$ 对任意 $x>0$ 恒成立，当 $x=0$ 时，$y=-2<0$，即存在 x_0，使得在$(0,x_0)$上，$x^2-nx-2<0$，不满足题意，所以 $m>0$，且 $x=m$ 是方程 $x^2-nx-2=0$ 的一个正根，将 $x=m$ 代入 $x^2-nx-2=0$，可得 $m^2-mn-2=0$，即 $n=\frac{m^2-2}{m}=m-\frac{2}{m}$，则 $m^2+n^2=m^2+\left(m-\frac{2}{m}\right)^2=2m^2+\frac{4}{m^2}-4\geqslant 2\sqrt{2m^2\cdot\frac{4}{m^2}}-4=4\sqrt{2}-4$，当且仅当 $2m^2=\frac{4}{m^2}$，即 $m^2=\sqrt{2}$，$n=2^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{3}{4}}$ 时，等号成立，所以 m^2+n^2 的最小值为 $4\sqrt{2}-4$.

8. D　由 $f(x)=2^{2x}+2^{-2x}-4(2^x+2^{-x})+m$，令 $t=2^x+2^{-x}$，$t\geqslant 2$，则 $g(t)=t^2-4t+m-2$ 在$[2,+\infty)$上有且只有一个零点，且 $t=2^x+2^{-x}$ 有且只有一个根，所以 $\Delta=16-4(m-2)=0$，解得 $m=6$.

9. BCD　对于 C，$f(4)=2+8-11=-1<0$，$f(5)=\log_2 5+10-11=\log_2 5-1>0$，$g(2)=16+4-12=8>0$，$g(1)=4+2-12=-6<0$，由零点存在定理得，函数 $f(x)$ 的零点 $\alpha\in(4,5)$，函数 $g(x)$ 的零点 $\beta\in(1,2)$，C 正确；对于 A，B，由解析式知 $f(x)$，$g(x)$ 均为增函数，则 $g(\alpha)>g(4)=256+8-12=252>0$，$f(\beta)<f(2)=1+4-11=-6<0$，故 A 错误，B 正确；对于 D，$f(\alpha)=\log_2\alpha+2\alpha-11=0$，所以 $\log_2\alpha=11-2\alpha$，所以 $\log_2 2\alpha=12-2\alpha$，所以 $\log_2 2\alpha+2\alpha-12=0$，$g(\beta)=4^\beta+2\beta-12=0$，所以 $\log_2 4^\beta=\log_2(12-2\beta)$，所以 $2\beta=\log_2(12-2\beta)$，令 $2t=12-2\beta$，则 $12-2t=\log_2 2t$，即 $\log_2 2t+2t-12=0$. 因为 $y=\log_2 x+2x-12$ 是增函数，故 $2\alpha=2t=12-2\beta$，所以 $\alpha+\beta=6$，D 正确.

10. AB　当 $x=0$ 时，$f(0)=0$. 当 $x>0$ 时，函数 $y=x+\frac{4}{x}$ 在$(0,2)$上单调递减，在$(2,+\infty)$上单调递增，且函数 $y=\frac{4}{x}$ 在$(0,+\infty)$上单调递减，所以 $f(x)=\frac{4x}{x^2+4}=\frac{4}{x+\frac{4}{x}}$ 在$(0,2)$上单调递增，在$(2,+\infty)$上单调递减，由 $y=x+\frac{4}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$，得 $0<f(x)\leqslant 1$；当 $x<0$ 时，$f(x)$ 单调递增，$f(x)>0$，如图所示. 令 $f(x)=t$，当 $t=0$ 或 $t>1$ 时，方程 $f(x)=t$ 只有一解；当 $t=1$ 时，方程 $f(x)=t$ 有两解；当 $0<t<1$ 时，方程 $f(x)=t$ 有三解. 方程$[f(x)]^2+mf(x)+2=0$ 有四个不相等的实数根，等价于关于 t 的方程 $t^2+mt+2=0$ 有两个不相等的实数根 t_1，t_2，且 $t_1\in\{0\}\cup(1,+\infty)$，$t_2\in(0,1)$. 令 $F(t)=t^2+mt+2$，因为 $F(0)=2>0$，$t_1t_2=2>0$，所以 $t_1\in(1,+\infty)$，$t_2\in(0,1)$，即 $F(1)=m+3<0$，得 $m<-3$，此时 $t_2\in(0,1)$，$t_1=\frac{2}{t_2}\in(2,+\infty)$，故 m 的取值范围为$(-\infty,-3)$.



11. $(-18,-5)$　若函数 $f(x)=\log_2 x+x^2+m$ 在区间$(2,4)$上存在零点，由函数 $f(x)$ 在$(2,4)$上的图象连续不断，且为增函数，则根据零点存在定理可知，只需满足 $f(2)f(4)<0$，即$(m+5)(m+18)<0$，解得 $-18<m<-5$，所以实数 m 的取值范围是$(-18,-5)$.

12. -6　$\left(-\frac{8}{3},4\right)$　设函数 $g(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{|x|}-x^{\frac{2}{3}}$，则 $g(x)$ 为偶函数，且有 $g(x)$ 在$(0,+\infty)$上单调递减，在$(-\infty,0)$上单调递增，$g(0)=1$，$g(1)=-\frac{1}{3}$，故 $g(0)g(1)<0$，可得 $g(x)$ 在$(0,+\infty)$上有一个零点，在$(-\infty,0)$上有一个零点，且两个零点关于原点对称. 故 $f(x)$ 有两个零点，而且关于 $x=-3$ 对称，则两个零点之和为 -6. 不等式 $f(2m-1)>f(m+3)$ 等价为$|2m-1+3|<|m+3+3|$，即 $3m^2-4m-32<0$，解得 $-\frac{8}{3}<m<4$.

13. **解**：(1) 函数 $f(x)=\log_4(4^x+1)+tx$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，由

$f(x)$是偶函数,得 $f(x)-f(-x)=0$,即 $\log_4(4^x+1)+tx-\log_4(4^{-x}+1)+tx=0$,则 $2tx=\log_4(4^{-x}+1)-\log_4(4^x+1)=\log_4\frac{4^{-x}+1}{4^x+1}=\log_4 4^{-x}=-x$,而 x 不恒为 0,所以 $t=-\frac{1}{2}$.

(2)$f(x_1)+4^{x_2}-m\cdot 2^{x_2}\geqslant 0$,即 $f(x_1)\geqslant m\cdot 2^{x_2}-4^{x_2}$. 若对任意 $x_1\in\mathbf{R}$,都存在 $x_2\in[-1,1]$,使得 $f(x_1)+4^{x_2}-m\cdot 2^{x_2}\geqslant 0$ 成立,则只需存在 $x_2\in[-1,1]$,使得 $f(x)_{\min}\geqslant m\cdot 2^{x_2}-4^{x_2}$ 成立,而 $f(x)=\log_4(4^x+1)-\log_4 2^x=\log_4\frac{4^x+1}{2^x}=\log_4\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)$,由基本不等式得 $2^x+\frac{1}{2^x}\geqslant 2\sqrt{2^x\cdot\frac{1}{2^x}}=2$,当且仅当 $x=0$ 时,等号成立,所以 $f(x)_{\min}=\log_4 2=\frac{1}{2}$,则存在 $x_2\in[-1,1]$,使得 $m\cdot 2^{x_2}-4^{x_2}\leqslant\frac{1}{2}$,由 $x_2\in[-1,1]$,令 $u=2^{x_2}\in\left[\frac{1}{2},2\right]$,则存在 $u\in\left[\frac{1}{2},2\right]$,使得 $m\leqslant\frac{1}{2u}+u$. 令 $h(u)=u+\frac{1}{2u}$,$u\in\left[\frac{1}{2},2\right]$,由对勾函数的性质知,函数 $h(u)$在$\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$上单调递减,在$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},2\right]$上单调递增,而 $h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$,$h(2)=\frac{9}{4}$,所以 $m\leqslant\frac{9}{4}$,即实数 m 的取值范围是$\left(-\infty,\frac{9}{4}\right]$.

(3)由(2)得 $f(x)=\log_4(2^x+2^{-x})$,依题意,方程$\log_4(2^x+2^{-x})=\log_4\left(a\cdot 2^{x-1}-\frac{2}{3}a\right)$有且只有一个实数根,即方程 $2^x+2^{-x}=a\cdot 2^{x-1}-\frac{2}{3}a$ 有且只有一个实数根. 令 $\lambda=2^x>0$,则方程 $\lambda+\frac{1}{\lambda}=\frac{a}{2}\lambda-\frac{2}{3}a$ 有且只有一个正根,即方程$\left(\frac{a}{2}-1\right)\cdot\lambda^2-\frac{2}{3}a\lambda-1=0$ 有且只有一个正根. 令函数 $\varphi(\lambda)=\left(\frac{a}{2}-1\right)\lambda^2-\frac{2}{3}a\lambda-1$. ①当 $a=2$ 时,$\varphi(\lambda)=-\frac{4}{3}\lambda-1$,由 $\varphi(\lambda)=0$,得 $\lambda=-\frac{3}{4}$,不符合题意;②当 $a<2$ 时,$\frac{a}{2}-1<0$,二次函数 $\varphi(\lambda)$的图象开口向下,对称轴为直线 $\lambda=\frac{2a}{3(a-2)}$,$\Delta=\left(-\frac{2}{3}a\right)^2+4\left(\frac{a}{2}-1\right)=\frac{4}{9}a^2+2a-4=\frac{2}{9}(2a-3)(a+6)$,而 $\varphi(0)=-1<0$,若方程$\left(\frac{a}{2}-1\right)\lambda^2-\frac{2}{3}a\lambda-1=0$ 有且只有一个正根,则$\begin{cases}\Delta=0,\\ \frac{2a}{3(a-2)}>0,\end{cases}$解得 $a=-6$;③当 $a>2$ 时,$\frac{a}{2}-1>0$,$\Delta=\frac{2}{9}(2a-3)(a+6)>0$,设方程$\left(\frac{a}{2}-1\right)\lambda^2-\frac{2}{3}a\lambda-1=0$ 的两根分别为 λ_1,λ_2,$\lambda_1\lambda_2=-\frac{2}{a-2}<0$,则方程$\left(\frac{a}{2}-1\right)\lambda^2-\frac{2}{3}a\lambda-1=0$ 有且只有一个正根,符合题意. 所以实数 a 的取值范围是$\{-6\}\cup(2,+\infty)$.

14. (1)**证明**:由题意 $f(x)=ax^2+bx+c$,$f(1)=-a$,即 $a+b+c=-a$,所以 $2a+b+c=0$,所以 $b=-2a-c$. 因为 $f(0)=c$,$f(2)=4a+2b+c=4a+2(-2a-c)+c=-c$,当 $c\neq 0$ 时,$f(0)f(2)=-c^2<0$,由函数零点存在定理知 $f(x)$在$[0,2]$内存在零点;当 $c=0$ 时,$x=0$,$x=2$ 是零点,此时 $f(x)$在$[0,2]$内存在零点. 综上,$f(x)$在$[0,2]$内存在零点.

(2)**解**:依题意得 $a>0$,且-2,-1 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根,由一元二次方程根与系数的关系得$-2-1=-\frac{b}{a}$,$-2\times(-1)=\frac{c}{a}$,即 $b=3a$,$c=2a$,所以 $f(x)=ax^2+3ax+2a=a(x^2+3x+2)$. 依题意,得 $a(2^{2x}+3\cdot 2^x+2)\leqslant 4^x$ 对任意 $x\in[1,3]$上恒成立. 因为 $a>0$,$4^x>0$,所以$\frac{1}{a}\geqslant\frac{2^{2x}+3\cdot 2^x+2}{4^x}$对任意$x\in[1,3]$恒成立,即$\frac{1}{a}\geqslant\left(\frac{2^{2x}+3\cdot 2^x+2}{4^x}\right)_{\max}$,$x\in[1,3]$,令 $y=\frac{2^{2x}+3\cdot 2^x+2}{4^x}=\frac{2}{2^{2x}}+\frac{3}{2^x}+1$,$x\in[1,3]$. 令 $t=\frac{1}{2^x}$,则 $t\in\left[\frac{1}{8},\frac{1}{2}\right]$,所以 $y=2t^2+3t+1$,且 $y=2t^2+3t+1$ 在$\left[\frac{1}{8},\frac{1}{2}\right]$上单调递增,所以当 $t=\frac{1}{2}$时,$y_{\max}=3$,所以$\frac{1}{a}\geqslant 3$,即 $a\leqslant\frac{1}{3}$,所以 $0<a\leqslant\frac{1}{3}$. 所以实数 a 的取值范围是$\left(0,\frac{1}{3}\right]$.

15. **解**:(1)当 $a=1$,$b=0$ 时,$f(x)=x^2-x-8$,令 $f(x)=x$,则$(x+2)(x-4)=0$,解得 $x=-2$ 或 $x=4$,所以 $f(x)$的不动点是-2 和 4.

(2)由题意知,$b\in\mathbf{R}$,$f(x)=ax^2+(b-1)x+b-8=x$ 有两个不相等的实数根,即 $ax^2+(b-2)x+b-8=0$ 有两个不相等的实数根,$\Delta=(b-2)^2-4a(b-8)>0$ 恒成立,即 $b^2-4(a+1)b+4+32a>0$ 对 $b\in\mathbf{R}$ 恒成立,所以 $\Delta=16(a+1)^2-4(4+32a)<0$,解得 $0<a<6$,即实数 a 的取值范围是$(0,6)$.

(3)由题意知,$ax^2+(b-2)x+b-8=0$ 有两个不相等的实数根,$a\in(1,3)$,所以 $\Delta_1=(b-2)^2-4a(b-8)>0$,$a\in(1,3)$,因为$\begin{cases}(b-2)^2-4(b-8)=(b-4)^2+20>0,\\ (b-2)^2-12(b-8)=(b-8)^2+36>0,\end{cases}$所以 $b\in\mathbf{R}$,$x_1+x_2=-\frac{b-2}{a}$,$x_1x_2=\frac{b-8}{a}$. 又 $x_1f(x_2)=\frac{a}{a-1}$,即 $x_1x_2=\frac{a}{a-1}$,所以$\frac{b-8}{a}=\frac{a}{a-1}$. 因为 $a-1>0$,所以 $b=\frac{a^2}{a-1}+8=a+1+\frac{1}{a-1}+8=a-1+\frac{1}{a-1}+10\geqslant 2\sqrt{(a-1)\cdot\frac{1}{a-1}}+10=12$,当且仅当 $a-1=\frac{1}{a-1}$,即 $a=2$ 时,等号成立,所以 $b_{\min}=12$.

课时提优 27　用二分法求方程的近似解

1. C　对于 A,$f(x)=x^3-8$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,且与 x 轴有唯一交点,交点两侧的函数值异号,则可用二分法求解;对于 B,$f(x)=\ln x+3$ 在$(0,+\infty)$上单调递增,且与 x 轴有唯一交

点，交点两侧的函数值异号，则可用二分法求解；对于C，由题意可知 $f(x)=x^2+2\sqrt{2}x+2=(x+\sqrt{2})^2$ 只有一个零点为 $x=-\sqrt{2}$，且在该零点左右两侧的函数值都大于零，故不宜用二分法求解该零点；对于D，$f(x)=-x^2+4x+1=-(x-2)^2+5$，在 $(-\infty,2)$ 上单调递增，$(2,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)_{\max}=f(2)=5>0$，零点左右两侧的函数值异号，则可用二分法求解.

2. B　$f(1)=2+1-8=-5<0$，$f(5)=2^5+5-8=2^5-3>0$，第一次取 $x_1=\frac{1+5}{2}=3$，有 $f(3)=2^3+3-8=3>0$，故第二次取 $x_2=\frac{1+3}{2}=2$，有 $f(2)=2^2+2-8=-2<0$，故此时可确定近似解所在区间为 $[2,3]$.

3. D　因为 $f(0)f(0.5)<0$，由零点存在性知，零点 $x_0\in(0,0.5)$，根据二分法，第二次应计算 $f\left(\frac{0+0.5}{2}\right)$，即 $f(0.25)$.

4. ABD　能用二分法求零点的函数必须在给定区间 $[a,b]$ 上连续不断，且 $f(a)\cdot f(b)<0$. 因为A，B中不存在 $f(x)<0$，D中函数不连续，所以都不能用二分法求零点.

5. 0.25　由 $f(0)<0$，$f(0.5)>0$，知函数 $f(x)$ 在 $(0,0.5)$ 上有零点，由 $\frac{0+0.5}{2}=0.25$，知第二次应计算 $f(0.25)$，即 $x_1=0.25$.

6. $\left(\frac{3}{2},2\right)$　设 $f(x)=x^3-4x+1$，则 $f(1)=1-4+1=-2<0$，$f(3)=3^3-4\times3+1=16>0$，$\frac{1+3}{2}=2$，$f(2)=8-8+1=1>0$；$\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$，$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{27}{8}-6+1=-\frac{13}{8}<0$，故近似解 x_0 所在的区间为 $\left(\frac{3}{2},2\right)$.

方法总结　(1)依据图象估计零点所在的初始区间 $[m,n]$(这个区间既要包含所求的根，又要使其长度尽可能地小，区间的端点尽量为整数).

(2)取区间端点的平均数 c，计算 $f(c)$，确定有解区间是 (m,c) 还是 (c,n)，逐步缩小区间的“长度”，直到区间的长度符合精确度要求(这个过程中应及时检验所得区间端点差的绝对值是否达到给定的精确度)，才终止计算，得到函数零点的近似值(为了比较清晰地表达计算过程与函数零点所在的区间往往采用列表法).

7. B　设 $f(x)=x+\lg x-3$，显然函数图象是连续的，则有 $f(1)=-2<0$，$f(2)=\lg 2-1<0$，$f(3)=\lg 3>0$，$f(4)=1+\lg 4>0$，$f(5)=2+\lg 5>0$，所以 $f(1)\cdot f(2)>0$，$f(2)\cdot f(3)<0$，$f(3)\cdot f(4)>0$，$f(4)\cdot f(5)>0$，故区间 $[2,3]$ 可以作为初始区间，故A，C，D错误.

8. D　由于 $f(x)=x^3-x-1$ 在 $\mathbf{R}$ 上为连续函数，$f(1.375)=0.224\ 6>0$，$f(1.312\ 5)=-0.051\ 51<0$，且 $1.375-1.312\ 5=0.062\ 5<0.1$，而 $1.5-1=0.5>0.1$，$1.5-1.25=0.25>0.1$，$1.375-1.25=0.125>0.1$，均不符合要求，故方程 $x^3-x-1=0$ 的一个近似根为1.312 5，D正确

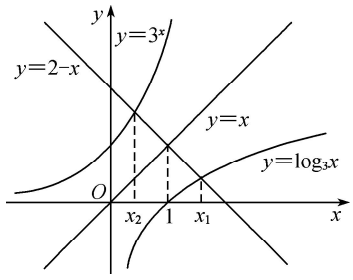
9. BC　因为函数 $f(x)=\ln x+2x-6$ 在其定义域内单调递增，结合表格中数据，可知方程 $\ln x+2x-6=0$ 的近似解所在区间可以是 $(2,3)$，$(2.5,3)$，$(2.5,2.75)$，$(2.5,2.625)$，$(2.5,2.562\ 5)$. 根据区间的长度计算分别为1，0.5，0.25，0.125，0.062 5，由精确度为0.1，可知方程 $\ln x+2x-6=0$ 的近似解在区间 $(2.5,2.562\ 5)$ 上. 根据精确度为0.1的要求，可在区间 $(2.5,2.562\ 5)$ 上任选一个值作为该方程的近似解.

10. ABC　对于A，因为函数 $y=f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，所以 $f(0)<f(1)=-0.24<0$，正确；对于B，因为函数 $y=f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，所以当 $x>2$ 时，$f(x)>f(2)=1.21>0$，正确；对于C，因为函数 $y=f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，$f(1)<0$ 且 $f(2)>0$，即 $f(1)f(2)<0$，所以函数 $f(x)$ 有且仅有一个在区间 $(1,2)$ 的零点，正确；对于D，因为函数 $g(x)=f(x)+x$ 连续，且 $g(0)=f(0)<f(1)<0$，$g(1)=f(1)+1>0$，即 $g(0)g(1)<0$，所以函数 $g(x)=f(x)+x$ 在区间 $(0,1)$ 上一定存在零点，错误.

11. $\left[-\frac{1}{8},\frac{3}{8}\right)$　当 $m=0$ 时，方程 $-x-1=0$，解得 $x=-1$，$-1\in[-2,2]$，符合题意；当 $m\neq0$ 时，若 $\Delta=0$，则 $1+4\times2m=0$，解得 $m=-\frac{1}{8}$，此时方程为 $-\frac{1}{4}x^2-x-1=0$，即 $-\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2=0$，解得 $x=-2$，$-2\in[-2,2]$，符合题意；当 $m\neq0$，且 $\Delta>0$，即 $m\neq0$ 且 $m>-\frac{1}{8}$ 时，令 $f(x)=2mx^2-x-1=0$，若在区间 $(-2,2)$ 上恰有一个 x 满足方程 $2mx^2-x-1=0$，则 $f(-2)\cdot f(2)<0$. 又 $f(-2)=8m+1$，$f(2)=8m-3$，所以 $(8m+1)(8m-3)<0$，解得 $-\frac{1}{8}<m<0$ 或 $0<m<\frac{3}{8}$. 当 $f(-2)=8m+1=0$ 时，$m=-\frac{1}{8}$，符合题意；当 $f(2)=8m-3=0$ 时，$m=\frac{3}{8}$，$f(x)=\frac{3}{4}x^2-x-1=0$，解得 $x=-\frac{2}{3}$ 或 $x=2$，不符合题意. 综上所述，实数 m 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{8},\frac{3}{8}\right)$.

12. 1　2　因为 $y=\log_9 x$，$y=\frac{1}{2}x-1$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递增，所以函数 $f(x)=\log_9 x+\frac{1}{2}x-1$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递增，因为 $f(1)=\log_9 1+\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}<0$，$f(2)=\log_9 2+\frac{1}{2}\times2-1=\log_9 2>0$，且 $x_1\in(k,k+1)(k\in\mathbf{Z})$，所以 $k=1$. 由 $f(x)=\log_3\sqrt{x}+\frac{1}{2}x-1=0$ 可得 $f(x)=\frac{1}{2}\log_3 x+\frac{1}{2}x-1=0$，令 $f(x)=0$ 可得 $\log_3 x=2-x$，所以 x_1 即为两函数 $y=\log_3 x$，$y=2-x$ 图象的交点的横坐标；令 $g(x)=0$ 可得 $3^x=2-x$，所以 x_2 即为两函数 $y=3^x$，$y=2-x$ 图象的交点的横坐标，因为函数 $y=\log_3 x$ 与 $y=3^x$ 的图象关于 $y=x$ 对称，

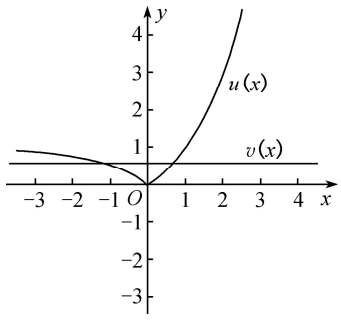
且 $y=x$，$y=2-x$ 互相垂直，且由 $\begin{cases}y=x,\\y=2-x,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}$ 即 $(x_1,f(x_1))$，$(x_2,g(x_2))$ 的中点为 $(1,1)$，所以 $x_1+x_2=2$.



13. 解：(1) 因为函数 $g(x)$ 的图象可由指数函数 $y=(a+1)^x$ 的图象向右平移 2 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度得到. 又函数 $y=(a+1)^x$ 的图象过定点 $(0,1)$，所以函数 $g(x)$ 的图象恒过定点 $A(2,2)$，又因为点 A 在 $f(x)$ 图象上，则 $f(2)=\log_{\sqrt{3}}(2+a)=2$，所以 $2+a=3$，解得 $a=1$.

(2) $h(x)=|g(x+2)-2|-2b=|2^x-1|-2b$，若函数 $h(x)$ 有两个零点，则方程 $|2^x-1|=2b$ 有两个不等实根，

令 $u(x)=|2^x-1|$，$v(x)=2b$，则它们的函数图象有两个交点，由图可知，$0<2b<1$，故 b 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.



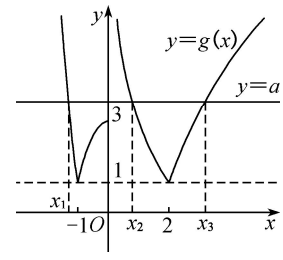
14. 解：(1) ①当 $x\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 为一次函数，设其解析式为 $f(x)=kx+m(k\neq 0)$. 因为点 $(0,2)$ 和 $(-2,0)$ 在该一次函数的图象上，所以 $\begin{cases}m=2,\\-2k+m=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1,\\m=2,\end{cases}$ 所以 $f(x)=x+2$.

②当 $0<x\leqslant 2$ 时，函数 $f(x)$ 是二次函数，由题可设其解析式为 $f(x)=ax^2+bx+3(a\neq 0)$. 因为点 $(1,0)$，$(2,0)$ 在该二次函数的图象上，所以 $\begin{cases}a+b+3=0,\\4a+2b+3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{3}{2},\\b=-\frac{9}{2},\end{cases}$ 所以 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}x+3$. 综上，$f(x)=\begin{cases}x+2,x\leqslant 0,\\\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}x+3,0<x\leqslant 2.\end{cases}$

(2) 由 (1) 得，当 $0<x\leqslant 2$ 时，$f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}x+3=\frac{3}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{8}$，所以 $f(x)\geqslant -\frac{3}{8}$. 结合题图可知，若方程 $f(x)=a$ 有三个不同的实数解，则 $-\frac{3}{8}<a\leqslant 0$，所以实数 a 的取值范围为 $\left(-\frac{3}{8},0\right]$.

(3) 当 $x\leqslant 0$ 时，由 $f(x)=\frac{9}{8}$，得 $x+2=\frac{9}{8}$，解得 $x=-\frac{7}{8}$；当 $0<x\leqslant 2$ 时，由 $f(x)=\frac{9}{8}$，得 $\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}x+3=\frac{9}{8}$，整理得 $4x^2-12x+5=0$，解得 $x=\frac{1}{2}$ 或 $x=\frac{5}{2}$（舍去）. 综上，实数 x 的值是 $-\frac{7}{8}$ 或 $\frac{1}{2}$.

15. A　因为 $g(x)=f(x)+3|f(x)-1|$，$f(x)=\begin{cases}\log_2 x,x>0,\\x^2,x\leqslant 0,\end{cases}$ 当 $f(x)=1$ 时，$x=2$ 或 $x=-1$，故当 $x\leqslant -1$ 时，$g(x)=f(x)+3|f(x)-1|=4f(x)-3=4x^2-3$，当 $-1<x\leqslant 0$ 时，$g(x)=f(x)+3|f(x)-1|=-2f(x)+3=-2x^2+3$，当 $0<x\leqslant 2$ 时，$g(x)=f(x)+3|f(x)-1|=-2f(x)+3=-2\log_2 x+3$，当 $x>2$ 时，$g(x)=f(x)+3|f(x)-1|=4f(x)-3=4\log_2 x-3$. 因为方程 $g(x)=a$ 有 3 个不同的实根 $x_1,x_2,x_3(x_1<x_2<x_3)$，所以 $y=g(x)$，$y=a$ 有 3 个不同的交点，如图，由 $3-2\log_2 x_2=4\log_2 x_3-3$ 可得 $x_2x_3^2=8$，又 $4x_1^2-3>3$，解得 $x_1<-\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以 $x_1x_2x_3^2<-4\sqrt{6}$.



课时提优 28　函数模型的应用(1)

1. C　根据指数函数、对数函数、幂函数、一次函数的增长差异可知，对数函数的增长速度最慢.

2. D　设该企业这两年生产总值的年平均增长率为 x，可得 $(1+p)(1+q)=(1+x)^2$，解得 $x=\sqrt{(1+p)(1+q)}-1$.

3. B　设 $a=0.076\ 6$，则由题意 $a\cdot 2^{38}=2.1$（万公里），设至少对折 x 次，纸张厚度超过 38 万公里，则 $a\cdot 2^x>38$，即 $\frac{2.1}{2^{38}}\cdot 2^x>38$，即 $2^{x-38}>\frac{38}{2.1}\approx 18.1$，因为 $2^4=16<18$，$2^5=32>18$，函数 $y=2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $x-38\geqslant 5$，即 $x\geqslant 43$，所以理论上至少对折 43 次，纸张的厚度会超过地球到月亮的距离.

4. AC　依题意可设 $v=kr^4$，k 为常数. 当气体在半径为 5 cm 的管道中时，流量为 1 250 cm^3/s，所以 $1\ 250=k\times 5^4$，解得 $k=2$，则 $v=2r^4$. 当 $r=3$ 时，$v=162$，故 A 正确，B 错误. 由 $2r^4\geqslant 512$，解得 $r\geqslant 4$，故 C 正确，D 错误.

5. 5.6　设该驾驶员经过 x 小时才能驾驶，则 $100\times(1-25\%)^x<20$，即 $0.75^x<0.2$，故 $x>\log_{0.75}0.2$，因为 $\log_{0.75}0.2=\frac{\lg 0.2}{\lg 0.75}=\frac{\lg 2-1}{\lg 3-2\lg 2}\approx\frac{0.301-1}{0.477\ 1-2\times 0.301}=\frac{-0.699}{-0.124\ 9}\approx 5.596$，所以 $x>5.596$，即至少经过 5.6 小时才能

驾驶.

6. 30　由题得 $T-24=(88-24)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}=64\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}$，将 $T=40$，$t=20$ 代入，得 $40-24=64\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{20}{h}}$，解得 $h=10$，所以 $T=64\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}}+24$，当 $T=32$ 时，$32=64\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}}+24$，解得 $t=30$，即降温到 32 ℃，需要的时长为 30 min.

7. B　由于 5 000 远大于 1，故 $v=a\lg\left(1+\frac{M}{m}\right)=a\lg(1+5\ 000)\approx a\lg 5\ 000=a(\lg 5+\lg 1\ 000)=a(3+\lg 5)=a(3+1-\lg 2)=a(4-\lg 2)$，因为 $\lg 2\approx 0.301\ 0$，所以 $v\approx a(4-0.301\ 0)=3.699a$.

8. A　根据一月份用水量为 3.5 m^3，水费为 4 元，根据二月份用水量为 4 m^3，水费为 4 元，可知 $f(4)=m=4$，所以 $\begin{cases}f(15)=4+n(15-a)=18,\\ f(20)=4+n(20-a)=25,\end{cases}$ 解得 $a=5$，$n=\frac{7}{5}$，所以 $f(x)=\begin{cases}4, & 0<x\leqslant 5,\\ 4+\frac{7}{5}(x-5), & x>5,\end{cases}$ 所以 $f(25)=4+\frac{7}{5}(25-5)=32$.

9. CD　因为 $y=-x^2+21x-5=-\left(x-\frac{21}{2}\right)^2+\frac{421}{4}$，且 $x=1,2,\cdots,12$，所以当 $x=10$ 或 $x=11$ 时，需求量 y 取最大值.

10. BCD　对于 A，由题可知 $120=e^b$，$30=e^{20k+b}=e^{20k}\times e^b$，则 $e^{20k}=\frac{1}{4}$，即 $e^{10k}=\frac{1}{2}$，可得 $10k<0$，即 $k<0$，故 A 错误；对于 B，由 A 可知，$y=kx+b$ 在 **R** 上是减函数，且 $y=e^x$ 在 **R** 上是增函数，所以 $y=e^{kx+b}$ 在 **R** 上是减函数，则储存温度越高保鲜时间越短，故 B 正确；对于 C，由 A 可知，$e^{10k+b}=e^{10k}\times e^b=\frac{1}{2}\times 120=60$(h)，故 C 正确；对于 D，由 A 可知，$e^{30k+b}=e^{30k}\times e^b=\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 120=15$(h)，故 D 正确.

11. 100　由 $20\times\lg\frac{P_1}{P_0}=80$，得 $\lg\frac{P_1}{P_0}=4$，则 $P_1=10^4P_0$，由 $20\times\lg\frac{P_2}{P_0}=40$，得 $\lg\frac{P_2}{P_0}=2$，则 $P_2=10^2P_0$，所以 $\frac{P_1}{P_2}=100$.

12. 5 712　专项扣除总额为 $249\ 600\times(8\%+2\%+1\%+9\%)=49\ 920$(元)，应纳税所得额为 $249\ 600-60\ 000-52\ 800-4\ 560-49\ 920=82\ 320$(元)，个税税额为 $82\ 320\times 10\%-2\ 520=5\ 712$(元).

13. **解**：(1) 由题意得 $f(x)=15W(x)-20x-10x$

$$=\begin{cases}15\times 5(x^2+3)-30x, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 15\times\frac{50x}{1+x}-30x, & 2<x\leqslant 5,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}75x^2-30x+225, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 750-\frac{750}{x+1}-30x, & 2<x\leqslant 5.\end{cases}$$

(2) 由 (1) 得 $f(x)=\begin{cases}75\left(x-\frac{1}{5}\right)^2+222, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 780-30\left(\frac{25}{x+1}+x+1\right), & 2<x\leqslant 5.\end{cases}$ 当 $x\in[0,2]$ 时，由二次函数的性质可知，$f(x)_{\max}=f(2)=465$；当 $x\in(2,5]$ 时，由基本不等式可知，$f(x)=780-30\left(\frac{25}{x+1}+x+1\right)\leqslant 780-30\times 2\sqrt{\frac{25}{x+1}\cdot(x+1)}=480$，当且仅当 $\frac{25}{x+1}=x+1$，即 $x=4$ 时，等号成立. 由于 $465<480$，故当施用肥料为 4 千克时，该水果树的单株利润最大，最大利润为 480 元.

14. **解**：(1) 由题意得

$\begin{cases}\frac{50\times 0.9\times\left(1+\frac{80x}{x+4}\%\right)-x-50\times 0.9}{50\times 0.9}\geqslant\frac{1}{3},\\ x>0,\end{cases}$ 即 $\frac{0.8x}{x+4}-\frac{x}{45}\geqslant\frac{1}{3}(x>0)$，化简并整理得 $x^2-17x+60\leqslant 0$，解得 $5\leqslant x\leqslant 12$，所以预算广告费用的取值范围是[5,12].

(2) 由题意净利润为 $y=50\times 0.9\times\left(1+\frac{80x}{x+4}\%\right)-x=\frac{36x}{x+4}-x+45=85-\left(\frac{144}{x+4}+x+4\right)$(单位：万元)，所以由基本不等式可得 $y=85-\left(\frac{144}{x+4}+x+4\right)\leqslant 85-2\times 12=61$，当且仅当 $x=8$ 时，等号成立，所以当投入广告费用为 8 万元时，品牌服装的净利润最大.

15. **解**：(1) 由表格中的数据知，当时间 x 增加时，$Q(x)$ 先增后减，而①③函数模型都描述的是单调函数，不符合该数据模型，所以选择模型②$Q(x)=m|x-a|+n$. 由 $Q(12)=Q(28)$，可得 $|12-a|=|28-a|$，解得 $a=20$，所以 $Q(x)=m|x-20|+n$. 由 $\begin{cases}Q(5)=15m+n=45,\\ Q(30)=10m+n=50,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-1,\\ n=60,\end{cases}$ 所以 $Q(x)=-|x-20|+60$，定义域为 $\{x\in\mathbf{N}^*\mid 1\leqslant x\leqslant 30\}$.

(2) 由 (1) 得 $Q(x)=-|x-20|+60=\begin{cases}x+40, & 1\leqslant x\leqslant 20, x\in\mathbf{N}^*,\\ -x+80, & 20<x\leqslant 30, x\in\mathbf{N}^*,\end{cases}$ 设绿色产品 A 的日销售收入为 $f(x)$ (单位：元)，则 $f(x)=10Q(x)=\begin{cases}10x+400, & 1\leqslant x\leqslant 20, x\in\mathbf{N}^*,\\ -10x+800, & 20<x\leqslant 30, x\in\mathbf{N}^*,\end{cases}$ 当 $1\leqslant x\leqslant 20$，$x\in\mathbf{N}^*$ 时，由 $f(x)=10x+400\geqslant P(x)=\frac{2}{3}x^2-20x+\frac{1\ 900}{3}$，解得 $10\leqslant x\leqslant 35$，所以 $10\leqslant x\leqslant 20$，$x\in\mathbf{N}^*$；当 $20<x\leqslant 30$，$x\in\mathbf{N}^*$ 时，由 $f(x)=-10x+800\geqslant P(x)=\frac{2}{3}x^2-20x+\frac{1\ 900}{3}$，解得 $-10\leqslant x\leqslant 25$，所以 $20<x\leqslant 25$，$x\in\mathbf{N}^*$. 所以这 30 天内(包括第 30 天)绿色科技产品 A 的日销售收入不少于绿色科技产品 B 的总天数为 16 天.

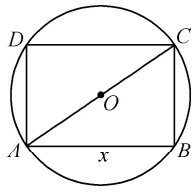
课时提优 29　函数模型的应用(2)

1. A　比较一次函数、幂函数、指数函数与对数函数可知，指数函数增长速度最快.

2. C　选 $x=4$ 代入四个选项的解析式中，选取所得的 v 最接近 7.5 的解析式即可. 对于选项 A，当 $x=4$ 时，$v=\log_2 4=2$，与

7.5 相差较多，故选项 A 错误，对于选项 B，当 $x=4$ 时，$v=\log_{\frac{1}{2}}4=-2$，与 7.5 相差较多，故选项 B 错误，对于选项 C，当 $x=4$ 时，$v=\frac{4^2-1}{2}=7.5$，故选项 C 正确；对于选项 D，当 $x=4$ 时，$v=2t-2=2\times4-2=6$，与 7.5 相差较多，故选项 D 错误.

3. B　如图，圆的直径 $AC=2OC=50$ cm，矩形的边 $AB=x$ cm. 因为 $\angle ABC=90°$，所以由勾股定理，得 $BC=\sqrt{2\,500-x^2}$ cm，所以矩形 $ABCD$ 的面积 $y=AB\cdot BC=x\cdot\sqrt{2\,500-x^2}$ (cm²)，又 $0<AB<AC=50$，所以 $0<x<50$.



4. ACD　对于 A，由图象可得，当 $t=6$ 时，$y=85$，所以测试结束时，该手机剩余电量为 85%，故 A 正确；对于 B，由图象可得该手机在前 5 h 内电量下降曲线不是一条直线，即不是匀速下降，故 B 错误；对于 C，由图象可得，在 0 h～3 h 内电量下降的速度为 $\frac{100-50}{3}=\frac{50}{3}$，在 3 h～5 h 内下降的速度为 $\frac{50-30}{5-3}=10$，由于 $\frac{50}{3}>10$，故 C 正确；对于 D，由图象可得该手机在 5 h～6 h 电量上升了 55%，可以推断进行了充电操作，故 D 正确.

5. 5　根据图象，设 $y=a(x-6)^2+11$. 代入点 $(4,7)$，解得 $a=-1$，所以 $y=-(x-6)^2+11=-x^2+12x-25$. 因此，年平均利润 $\frac{y}{x}=-x+12-\frac{25}{x}=-\left(x+\frac{25}{x}\right)+12$. 因为 $x>0$，所以 $x+\frac{25}{x}\geqslant10$，当且仅当 $x=\frac{25}{x}$，即 $x=5$ 时，等号成立. 故要使年平均利润最大，则客车的营运年数为 5.

6. 2　由题意 $(1-20\%)N_0=N_0e^{-2k}$，解得 $k=-\frac{1}{2}\ln0.8$，设还需 t 小时满足题意，则 $64\%N_0=N_0e^{-k(t+2)}$，$-k(t+2)=\ln0.64$，$t=\frac{2\ln0.64}{\ln0.8}-2=2$.

7. B　将 $x=1,y=\frac{1}{4}$；$x=3,y=\frac{3}{28}$ 代入 $y=\frac{bx}{1+ax^2}$ 可得 $\frac{1}{4}=\frac{b}{1+a}$ 和 $\frac{3}{28}=\frac{3b}{1+9a}$，解得 $a=3,b=1$.

8. D　由题意可知 $I_a-I_b=2$，即 $\lg\frac{D}{D_a}-\lg\frac{D}{D_b}=2$，所以 $\lg\frac{D_b}{D_a}=2$，所以 $\frac{D_b}{D_a}=10^2=100$，即 $D_b=100D_a$.

9. BC　由 $p(x)=-\frac{1}{5}x^2+6x-20=-\frac{1}{5}(x-15)^2+25$，所以当投入 15 万元时，月利润最大，所以需再投入 6 万元研发经费，B 选项正确，D 选项错误；研发利润率 $y=\frac{p(x)}{x}\times100\%=-\frac{1}{5}x+6-\frac{20}{x}=-\left(\frac{x}{5}+\frac{20}{x}\right)+6$，又 $\frac{x}{5}+\frac{20}{x}\geqslant2\sqrt{\frac{x}{5}\times\frac{20}{x}}=4$，当且仅当 $\frac{x}{5}=\frac{20}{x}$，即 $x=10$ 时，利润率最大，所以需再投入研发经费 1 万元，可获得最大利润率，A 选项错误，C 选项正确.

方法总结　1. 一次函数模型的应用：利用一次函数求最值，常转化为求解不等式 $ax+b\geqslant0$(或 $\leqslant0$). 解答时，注意系数 a 的正负，也可以结合函数图象或其单调性来求最值.

2. 二次函数模型的应用：构建二次函数模型解决最值问题时，可以利用配方法、判别式法、换元法、讨论函数的单调性等方法求最值，也可以根据函数图象的对称轴与函数定义域的对应区间之间的位置关系讨论求解，但一定要注意自变量的取值范围.

10. ACD　由题意可得 $\begin{cases}e^{2a+b}=e^{2a}\cdot e^b=2.25,\\ e^{4a+b}=(e^{2a})^2\cdot e^b=0.36,\end{cases}$ 解得 $e^a=\frac{2}{5}$，则 $a=\ln\frac{2}{5}$，$e^b=\frac{225}{16}<\frac{225}{15}=15$，故 A 正确，B 错误；由 A 可知，$\rho(t)=e^{at+b}=(e^a)^t\cdot e^b=\frac{225}{16}\times\left(\frac{2}{5}\right)^t$，$\rho(3)=\frac{225}{16}\times\left(\frac{2}{5}\right)^3=0.9$，故 C 正确；令 $\frac{225}{16}\times\left(\frac{2}{5}\right)^t\leqslant\frac{1}{10}$，得 $\left(\frac{2}{5}\right)^t\leqslant\frac{1}{10}\times\frac{16}{225}$，两边取对数得 $t(\ln2-\ln5)\leqslant3\ln2-(2\ln3+3\ln5)$，即 $t\geqslant\frac{3\ln2-(2\ln3+3\ln5)}{\ln2-\ln5}\approx\frac{3\times0.7-(2\times1.1+3\times1.6)}{0.7-1.6}\approx5.4$，所以该教学楼竣工后的甲醛浓度若要达到安全开放标准，则至少需要放置的时间为 6 周，故 D 正确.

11. ①④　由题知，$y=a^t$ 的图象经过点 $(0,1)$，$(1,3)$，即 $\begin{cases}a^0=1,\\ a^1=3,\end{cases}$ 解得 $a=3$，故 $y=3^t$. 对于①，浮萍的面积每月的增长率为 $\frac{a^{t+1}-a^t}{a^t}=\frac{3^{t+1}-3^t}{3^t}=\frac{3^t(3-1)}{3^t}=2$，故①正确；对于②，浮萍每月增加的面积为 $a^{t+1}-a^t=3^{t+1}-3^t=3^t(3-1)=2\times3^t$，不为定值，故②错误；对于③，第 5 个月时，$t=5$，浮萍面积为 $y=3^5=243>240$，故③错误；对于④，若浮萍蔓延到 5 m²，25 m²，125 m² 所经过的时间分别是 t_1,t_2,t_3，即 $3^{t_1}=5,3^{t_2}=25,3^{t_3}=125$，所以 $3^{t_1}=5,3^{t_2}=5^2=(3^{t_1})^2,3^{t_3}=5^3=(3^{t_1})^3$，又因为 $y=3^t$ 是增函数，所以 $t_2=2t_1,t_3=3t_1$，故 $2t_2=4t_1=t_1+3t_1=t_1+t_3$，故④正确.

方法总结　(1)涉及平均增长率的问题，求解可用指数型函数模型表示，通常可以表示为 $y=N\cdot(1+p)^x$(其中 N 为原来的基础数，p 为增长率，x 为时间)的形式.

(2) 在实际问题中，有关人口增长、银行利率、细胞分裂等增长问题，都常用到指数型函数模型.

12. 200　100　设总利润为 $P(x)$. 当 $0\leqslant x<400$ 时，$P(x)=400x-\frac{1}{2}x^2-20\,000-100x=-\frac{1}{2}x^2+300x-20\,000$；当 $x\geqslant400$ 时，$P(x)=80\,000-100x-20\,000=60\,000-100x$. 故 $P(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+300x-20\,000, & 0\leqslant x<400,\\ 60\,000-100x, & x\geqslant400.\end{cases}$ 设零件的单位利

润为 $g(x)$，则 $g(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x-\frac{20\ 000}{x}+300, & 0\leqslant x<400,\\ \frac{60\ 000}{x}-100, & x\geqslant 400.\end{cases}$ 当 $0\leqslant x<400$ 时，$g(x)=300-\left(\frac{1}{2}x+\frac{20\ 000}{x}\right)\leqslant 300-2\sqrt{\frac{x}{2}\cdot\frac{20\ 000}{x}}=100$，当且仅当 $\frac{x}{2}=\frac{20\ 000}{x}$，即 $x=200$ 时，等号成立；当 $x\geqslant 400$ 时，$g(x)=\frac{60\ 000}{x}-100<50$. 故当产量为 200 时，零件的单位利润最大，最大单位利润是 100 元.

13. 解：(1) 当 $0<x\leqslant 10$ 时，$y=12x-\left(\frac{1}{2}x^2+2x\right)-30=-\frac{1}{2}x^2+10x-30$；当 $10<x\leqslant 50$ 时，$y=12x-\left(14x+\frac{450}{x}-115\right)-30=-2x-\frac{450}{x}+85$. 故 $y=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+10x-30, & 0<x\leqslant 10,\\ -2x-\frac{450}{x}+85, & 10<x\leqslant 50.\end{cases}$

(2) 当 $0<x\leqslant 10$ 时，函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+10x-30$ 为开口向下的二次函数，且对称轴为直线 $x=10$，所以 $y=-\frac{1}{2}x^2+10x-30$ 在 $(0,10]$ 上单调递增，故 $y_{\max}=-\frac{1}{2}\times 10^2+10\times 10-30=20$（万元）；当 $10<x\leqslant 50$ 时，$y=-2x-\frac{450}{x}+85=-\left(2x+\frac{450}{x}\right)+85\leqslant -2\sqrt{2x\cdot\frac{450}{x}}+85=25$，当且仅当 $2x=\frac{450}{x}$，即 $x=15$ 时，等号成立. 即当 $x=15$ 时，$y_{\max}=25$（万元）. 因为 $20<25$，所以当年代加工量为 15 万件时，该农民专业合作社为这一品牌服装代加工费的年利润最大，最大值为 25 万元.

方法总结 (1)分段函数的“段”一定要分的合理，不重不漏.(2)分段函数的定义域为对应每一段自变量取值范围的并集.(3)分段函数的值域求法：逐段求函数值的范围，最后比较再下结论.

14. 解：(1)选模型③，理由如下：由图知，函数单调递增，且增长速度较快，而模型①单调递减，故不符合题意；而模型②中对数函数在单调递增时图象是上凸的，增加幅度越来越慢，故不符合题意；模型③为指数型函数，符合题意. 故选模型③. 代入点 $(1,14)$，$(2,20)$，$(3,29)$，得 $\begin{cases}14=ma+n,\\ 20=ma^2+n,\\ 29=ma^3+n,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{3}{2},\\ m=8,\\ n=2,\end{cases}$ 故模型③的解析式为 $y=8\times\left(\frac{3}{2}\right)^x+2$.

(2)由(1)可知 $y=8\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x+2$，$x\in\mathbf{N}^*$，故不等式 $8\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x+2\leqslant k\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^x$ 对 $x\in[1,+\infty)$，且 $x\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，即 $k\geqslant\frac{8\times\left(\frac{3}{2}\right)^x+2}{\left(\frac{9}{4}\right)^x}=\frac{8\times\left(\frac{3}{2}\right)^x+2}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}}$. 令 $t=\left(\frac{3}{2}\right)^x$，$t\in\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$，则 $\frac{1}{t}\in\left(0,\frac{2}{3}\right]$，则 $k\geqslant\frac{8t+2}{t^2}=8\left(\frac{1}{t}\right)+2\left(\frac{1}{t}\right)^2$ 对任意的 $\frac{1}{t}\in\left(0,\frac{2}{3}\right]$ 恒成立. 又 $8\left(\frac{1}{t}\right)+2\left(\frac{1}{t}\right)^2\leqslant 8\times\frac{2}{3}+2\times\frac{4}{9}=\frac{56}{9}$，所以 $k\geqslant\frac{56}{9}$，即 k 的最小值为 $\frac{56}{9}$.

15. 解：(1)由 AB 为直径，得 $AC\perp BC$，所以 $BC^2=400-x^2$. 由已知得 $y=\frac{1}{x^2}+\frac{K}{400-x^2}(0<x<20)$. 又当污水处理厂是弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点时，对学校 A 和学校 B 的总影响度为 0.085，即当 $x=10\sqrt{2}$ 时，$y=0.085$，代入上式得 $0.085=\frac{1}{200}+\frac{K}{400-200}$，解得 $K=16$，所以 y 表示成 x 的函数为 $y=\frac{1}{x^2}+\frac{16}{400-x^2}(0<x<20)$.

(2)由(1)知，$y=\frac{1}{x^2}+\frac{16}{400-x^2}=\frac{5(3x^2+80)}{x^2(400-x^2)}$，令 $3x^2+80=t$，$t\in(80,1\ 280)$，$x^2=\frac{t-80}{3}$，则 $y=\frac{45t}{-t^2+1\ 360t-102\ 400}=\frac{45}{-\left(t+\frac{102\ 400}{t}\right)+1\ 360}$. 又 $t+\frac{102\ 400}{t}\geqslant 2\sqrt{t\cdot\frac{102\ 400}{t}}=640$，当且仅当 $t=\frac{102\ 400}{t}$，即 $t=320$ 时，等号成立，所以 $y\geqslant\frac{45}{-640+1\ 360}=\frac{1}{16}$，此时 $x=4\sqrt{5}$，所以弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上存在一点，当该点到学校 A 的距离为 $4\sqrt{5}$ km 时，建在此处的污水处理厂对学校 A 和学校 B 的总影响度最小，最小值为 $\frac{1}{16}$.

培优突破练 6　与指数、对数函数有关的复合函数问题

1. B　因为 $y=f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$，所以 $0<|2^x-1|<1$，即 $\begin{cases}-1<2^x-1<1,\\ 2^x\neq 1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x<1,\\ x\neq 0,\end{cases}$ 所以 $F(x)=f(|2^x-1|)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,1)$.

2. B　令 $t=-x^2+4x-6=-(x-2)^2-2$，则它在 $(-\infty,2)$ 上单调递增，而函数 $g(t)=\left(\frac{1}{2}\right)^t$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，则根据复合函数单调性“同增异减”的原则知 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+4x-6}$ 的单调递减区间为 $(-\infty,2)$.

3. B　因为函数 $f(x)=\lg\left(x^2-ax+\frac{1}{2}\right)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$x^2-ax+\frac{1}{2}>0$ 恒成立，且 $y=x^2-ax+\frac{1}{2}$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\begin{cases}\frac{a}{2}\leqslant 1,\\ 1-a+\frac{1}{2}\geqslant 0,\end{cases}$ 解得

$a\leqslant\frac{3}{2}$，则“$a<2$”是“函数 $f(x)=\lg\left(x^2-ax+\frac{1}{2}\right)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增”的必要不充分条件.

4. B　**分析**：求解 $f(a-2)+f(2a^2)>0$ 的基本思路是将它转化为 $f(x_1)>f(x_2)$ 的形式，然后通过函数的单调性来脱去“f”进行求解，而要将 $f(a-2)+f(2a^2)>0$ 转化为 $f(x_1)>f(x_2)$ 的形式，又需要研究函数的奇偶性或者对称性.

因为 $f(x)=\frac{1}{e^{x-2}}-e^{x-2}$，$x\in\mathbf{R}$，令 $g(x)=f(x+2)=\frac{1}{e^x}-e^x$，$x\in\mathbf{R}$，则 $g(-x)=\frac{1}{e^{-x}}-e^{-x}=-\left(\frac{1}{e^x}-e^x\right)=-g(x)$，所以 $g(x)$ 为奇函数，即 $g(x)$ 的图象关于原点对称，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(2,0)$ 对称，所以 $f(x)+f(4-x)=0$. 因为 $y=e^{x-2}$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上单调递增，$y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $y=\frac{1}{e^{x-2}}$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上单调递减，所以 $f(x)=\frac{1}{e^{x-2}}-e^{x-2}$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上单调递减. 因为不等式 $f(a-2)+f(2a^2)>0$，即 $f(2a^2)>-f(a-2)$，所以 $f(2a^2)>f(6-a)$，则 $2a^2<6-a$，解得 $-2<a<\frac{3}{2}$，即实数 a 的取值范围是 $\left(-2,\frac{3}{2}\right)$.

5. C　二次函数 $y=7+2ax-x^2$ 的对称轴为直线 $x=a$，且开口向下，因为函数 $y=\ln x$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数，又函数 $f(x)=\ln(7+2ax-x^2)$ 在区间 $[-1,1]$ 上单调递减，所以 $y=7+2ax-x^2$ 在区间 $[-1,1]$ 上单调递减，且 $y>0$ 恒成立，只需满足 $\begin{cases}a\leqslant-1,\\7+2a\cdot1-1^2>0,\end{cases}$ 解得 $-3<a\leqslant-1$.

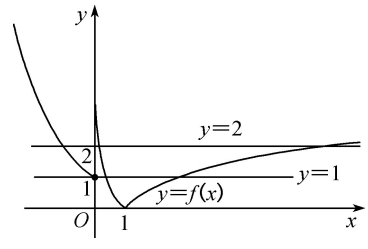
6. B　因为 $f(x)=2^x+2^{-x}$，所以 $f(2x)=2^{2x}+2^{-2x}=(2^x+2^{-x})^2-2=[f(x)]^2-2$，所以 $g(x)=m\cdot f(2x)+2f(x)+m=m\{[f(x)]^2-2\}+2f(x)+m=m[f(x)]^2+2f(x)-m$. 设 $0\leqslant x_1<x_2$，因为 $f(x_1)-f(x_2)=2^{x_1}+2^{-x_1}-(2^{x_2}+2^{-x_2})=\frac{(2^{x_1}-2^{x_2})\cdot(2^{x_1+x_2}-1)}{2^{x_1+x_2}}<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，最小值为 $f(0)=2$. 因为对任意 $x_1\in[0,+\infty)$，总存在 $x_2\in[0,1]$，使得 $f(x_1)+g(x_2)>7$，即 $g(x_2)>7-f(x_1)$，所以 $g(x_2)_{\max}>[7-f(x_1)]_{\max}=5$. 令 $t=f(x_2)$，易得 $t\in\left[2,\frac{5}{2}\right]$，所以 $(mt^2+2t-m)_{\max}>5$，即 $m>\left(\frac{5-2t}{t^2-1}\right)_{\min}$，令 $h(t)=\frac{5-2t}{t^2-1}$，显然 $h(t)\geqslant0$ 在 $\left[2,\frac{5}{2}\right]$ 上恒成立，所以 $h(t)$ 在 $\left[2,\frac{5}{2}\right]$ 上的最小值为 0，所以 $m>0$，即实数 m 的取值范围是 $(0,+\infty)$.

7. AB　令 $(\log_2x)^2-\log_2x^2-3=0$，即 $(\log_2x)^2-2\log_2x-3=0$，解得 $\log_2x=3$ 或 $\log_2x=-1$，即 $x=8$ 或 $x=\frac{1}{2}$，A 正确；由 $f(x)=(\log_2x)^2-2\log_2x-3=(\log_2x-1)^2-4\geqslant-4$，知函数 $f(x)$ 的最小值为 -4，无最大值，B 正确，C 错误；由 $f(1)=-3$，$f(3)=(\log_23)^2-2\log_23-3$，知 $f(1)\neq f(3)$，所以函数 $y=f(x)$ 的图象不关于直线 $x=2$ 对称，D 错误.

8. ABC　由题意知，当 $x\in[1,3]$ 时，$f(x)_{\max}-f(x)_{\min}\geqslant1$. 当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在 $[1,3]$ 上单调递减，故 $f(1)-f(3)=\log_a\frac{a+1}{a+3}\geqslant1$，所以 $\frac{a+1}{a+3}\leqslant a$，可得 $a^2+2a-1\geqslant0$，故 $\sqrt{2}-1\leqslant a<1$；当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在 $[1,3]$ 上单调递增，故 $f(3)-f(1)=\log_a\frac{a+3}{a+1}\geqslant1$，所以 $\frac{a+3}{a+1}\geqslant a$，可得 $a^2\leqslant3$，故 $1<a\leqslant\sqrt{3}$. 综上所述，$\sqrt{2}-1\leqslant a<1$ 或 $1<a\leqslant\sqrt{3}$. 结合选项可知，A，B，C 符合条件.

9. ACD　对于 A，令 $t=\frac{2+x}{2-x}$，$x\in(-2,2)$，又因为 $t=\frac{2+x}{2-x}=-1-\frac{4}{x-2}$ 在 $(-2,2)$ 上单调递增，所以 $t\in(0,+\infty)$，由对数函数的性质可得 $y=\log_{\frac{1}{3}}t$ 的值域为 $\mathbf{R}$，故 A 正确；对于 B，因为 $t=\frac{2+x}{2-x}=-1-\frac{4}{x-2}$ 在 $(-2,2)$ 上单调递增，$y=\log_{\frac{1}{3}}t$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，由复合函数的单调性可知 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}\frac{2+x}{2-x}$ 为减函数，故 B 错误；对于 C，因为 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}\frac{2+x}{2-x}$ 的定义域为 $(-2,2)$，且 $f(-x)=\log_{\frac{1}{3}}\frac{2-x}{2+x}$，$f(x)+f(-x)=\log_{\frac{1}{3}}\frac{2+x}{2-x}+\log_{\frac{1}{3}}\frac{2-x}{2+x}=\log_{\frac{1}{3}}1=0$，所以 $f(x)$ 为奇函数，且 $f(x)$ 在 $(-2,2)$ 上单调递减，不等式 $f(3x-1)+f(3x)<0$ 等价于 $f(3x-1)<-f(3x)$，即 $f(3x-1)<f(-3x)$，等价于 $\begin{cases}3x-1>-3x,\\-2<3x-1<2,\\-2<3x<2,\end{cases}$ 解得 $\frac{1}{6}<x<\frac{2}{3}$，故 C 正确；对于 D，因为 $f(-x)+f(x)=0$ 且 $f(0)=0$，所以 $f\left(-\frac{1}{2\,023}\right)+f\left(-\frac{1}{2\,022}\right)+\cdots+f\left(-\frac{1}{2}\right)+f(-1)+f(0)+f(1)+f\left(\frac{1}{2}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2\,023}\right)=0$，故 D 正确.

10. 6　令 $g(x)=0$，即 $[f(x)]^2-3f(x)+2=0$，解得 $f(x)=1$ 或 $f(x)=2$，作出函数 $f(x)$ 的图象如图所示. 由图可知，方程 $f(x)=1$ 有 3 个实数解，$f(x)=2$ 有 3 个实数解，且均互不相同，所以 $g(x)=0$ 的实数解有 6 个，所以函数 $g(x)=[f(x)]^2-3f(x)+2$ 零点的个数为 6.



11. $(-\infty,4]$　由题意知函数 $f(x)=\lg\left(x^2-2x+\frac{a}{4}\right)$ 没有最小值，因为函数 $g(x)=x^2-2x+\frac{a}{4}$ 的开口向上，所以函数

$g(x)=0$ 至少有 1 个根，即 $\Delta=4-4\times\frac{a}{4}\geqslant 0$，解得 $a\leqslant 4$. 所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,4]$.

12. $(-\infty,-3]$ **分析**：求出 $g(x)$ 的最小值是解题的第一步，注意到函数的解析式可以转化为双勾函数与二次函数的和的形式，为此，分别求得它们的最小值即可. 求 $y=g[g(x)]$ 的最小值是解题的第二步，为此，就需确定该函数的单调性，结合 $t=g(x)$ 的最小值，从而可求得 $g[g(x)]=g(t)$ 的最小值.

依题意，函数 $g(x)=e^{x-1}+\frac{1}{e^{x-1}}+(x-1)^2+2+a$，显然 $e^{x-1}+\frac{1}{e^{x-1}}\geqslant 2\sqrt{e^{x-1}\cdot\frac{1}{e^{x-1}}}=2$，当且仅当 $e^{x-1}=\frac{1}{e^{x-1}}$，即 $x=1$ 时取等号，$(x-1)^2+2+a\geqslant 2+a$，当且仅当 $x=1$ 时取等号，因此当 $x=1$ 时，$g(x)_{\min}=4+a$，又根据复合函数的单调性及双勾函数的单调性可得 $y=e^{x-1}+\frac{1}{e^{x-1}}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,1]$ 上单调递减，同时，函数 $y=(x-1)^2+2+a$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,1]$ 上单调递减，故 $y=g[g(x)]$ 在 $x=1$ 处取得最小值. 因为 $y=g(x)$ 与 $y=g[g(x)]$ 有相同的最小值，于是得 $g(x)=1$ 成立，即 $a=-1-\left(e^{x-1}+\frac{1}{e^{x-1}}\right)-(x-1)^2$ 成立，而 $\left(e^{x-1}+\frac{1}{e^{x-1}}\right)+(x-1)^2\geqslant 2$，当且仅当 $x=1$ 时取等号，因此 $-1-\left(e^{x-1}+\frac{1}{e^{x-1}}\right)-(x-1)^2\leqslant -3$，即 $a\leqslant -3$，所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-3]$.

13. 解：(1) 由 $f(0)=\frac{1-a}{1-b}=0$ 得 $a=1$. $f(1)=\frac{1}{2-b}$，$f(-1)=\frac{2^{-1}-1}{2^{-1}-b}=\frac{-1}{1-2b}$，由 $f(-1)=-f(1)$ 得 $2-b=1-2b$，解得 $b=-1$. 此时 $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$，经检验，满足题意. 所以 $a=1,b=-1$.

(2) $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}=\frac{2^x+1-2}{2^x+1}=1-\frac{2}{2^x+1}$，任取 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 且 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)=1-\frac{2}{2^{x_1}+1}-1+\frac{2}{2^{x_2}+1}=\frac{2}{2^{x_2}+1}-\frac{2}{2^{x_1}+1}=\frac{2(2^{x_1}-2^{x_2})}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}$，因为 $x_1<x_2$，所以 $2^{x_1}<2^{x_2}$，所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

(3) 因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(0)=0$，$f\left(\ln\frac{1}{x+1}\right)=f[-\ln(x+1)]=-f[\ln(x+1)]$，所以不等式 $f[\ln(x^2-2x)]+f\left(\ln\frac{1}{x+4}\right)\leqslant f(0)$ 可化为 $f[\ln(x^2-2x)]\leqslant f[\ln(x+4)]$，又由(2)知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $\ln(x^2-2x)\leqslant\ln(x+4)$，所以 $\begin{cases}x^2-2x\leqslant x+4,\\x^2-2x>0,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant x<0$ 或 $2<x\leqslant 4$，所以不等式的解集为 $[-1,0)\cup(2,4]$.

14. 解：(1) 因为点 $P(3,-2)$ 在函数 $f(x)=\log_a(2x-4)+\log_a(5-x)$ 的图象上，所以 $f(3)=\log_a 2+\log_a 2=2\log_a 2=-2$，即 $\log_a 2=-1$，解得 $a=\frac{1}{2}$. 由 $\begin{cases}2x-4>0,\\5-x>0,\end{cases}$ 解得 $2<x<5$. 所以 $f(x)$ 的定义域为 $(2,5)$.

(2) 由 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(2x-4)+\log_{\frac{1}{2}}(5-x)=\log_{\frac{1}{2}}[(2x-4)\cdot(5-x)]$，令 $s=(2x-4)(5-x)=-2x^2+14x-20$，当 $x\in\left(2,\frac{7}{2}\right)$ 时，$s=-2x^2+14x-20$ 单调递增，当 $x\in\left(\frac{7}{2},5\right)$ 时，$s=-2x^2+14x-20$ 单调递减，又 $y=\log_{\frac{1}{2}}s$ 单调递减，由复合函数的单调性知 $f(x)$ 在 $\left(2,\frac{7}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{7}{2},5\right)$ 上单调递增，故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(\frac{7}{2},5\right)$，单调递减区间为 $\left(2,\frac{7}{2}\right)$.

(3) 由 $2^m=3^n=t\left(\frac{5}{2}<t<3\right)$，得 $(\sqrt{2})^{2m}=(\sqrt[3]{3})^{3n}=t$. 所以 $2m=\log_{\sqrt{2}}t$，$3n=\log_{\sqrt[3]{3}}t$. 因为 $\sqrt{2}=\sqrt[6]{8}$，$\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{9}>\sqrt[6]{8}=\sqrt{2}>1$，所以 $2m>3n$. 又 $\frac{5}{2}<t<3$，所以 $m=\log_2 t<\log_2 3$，所以 $2m<2\log_2 3$. 因为 $2^7>3^4$，所以 $7>4\log_2 3$，所以 $\log_2 3<\frac{7}{4}$，即 $2m<\frac{7}{2}$. 又 $n=\log_3 t>\log_3\frac{5}{2}$，所以 $3n>3\log_3\frac{5}{2}=\log_3\frac{125}{8}>\log_3 9=2$，所以 $2m\in\left(2,\frac{7}{2}\right)$，$3n\in\left(2,\frac{7}{2}\right)$，由(2)知 $f(x)$ 在 $\left(2,\frac{7}{2}\right)$ 上单调递减，所以 $f(2m)<f(3n)$.

15. 解：(1)由题意得函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-1)=f(1)$，所以 $\log_3\frac{10}{9}-k=\log_3 10+k$，解得 $k=-1$，此时 $f(x)=\log_3(9^x+1)-x=\log_3\left(3^x+\frac{1}{3^x}\right)$，$f(-x)=\log_3\left(3^{-x}+\frac{1}{3^{-x}}\right)=\log_3\left(\frac{1}{3^x}+3^x\right)=f(x)$，满足 $f(x)$ 为偶函数，所以 $k=-1$.

(2)由题知，不等式 $\log_3(9^x+1)-\log_3(m\cdot 3^x-1)\geqslant 0$，所以 $9^x+1\geqslant m\cdot 3^x-1>0$，即 $3^x+\frac{2}{3^x}\geqslant m>\frac{1}{3^x}$，当 $x\in[0,1]$ 时，令 $t=3^x\in[1,3]$，所以 $\left(t+\frac{2}{t}\right)_{\min}\geqslant m>\left(\frac{1}{t}\right)_{\max}$. 因为 $t+\frac{2}{t}\geqslant 2\sqrt{2}$，当且仅当 $t=\sqrt{2}$ 时，取等号，所以 $1<m\leqslant 2\sqrt{2}$，即实数 m 的取值范围是 $(1,2\sqrt{2}]$.

章末提优

1. C 因为 $f(x)=(m^2-m-11)x^{2m+4}$ 为幂函数，所以 $m^2-m-11=1$，即 $m^2-m-12=0$，解得 $m=-3$ 或 $m=4$. 因为幂函数 $f(x)=(m^2-m-11)x^{2m+4}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $2m+4<0$，解得 $m<-2$，所以 $m=-3$.

2. D 由题设得 $\log_3 a+\log_3 b=1$，则 $f(a^2)+f(b^2)=2\log_3 a+2\log_3 b=2$.

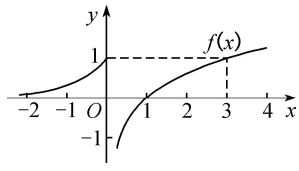
3. B 令 $4x-7=1$，解得 $x=2$，又 $f(2)=\log_a(4\times 2-7)-$

$3=-3$,所以函数 $f(x)=\log_a(4x-7)-3(a>0$ 且 $a\neq1)$的图象恒过点$(2,-3)$,即 $m=2,n=-3$,所以 $m+n=-1$.

4. A　因为 $0<\log_3 2<\log_3 3=1$,$2^{0.1}>2^0=1$,$\log_{0.9}1.1<\log_{0.9}1=0$,所以 $c<a<b$.

5. D　当 $x>0$ 时,$f(x)=e^x$ 在$(0,+\infty)$上单调递增,且 $f(x)>f(0)=1$;当 $x\leqslant0$ 时,$f(x)=2-e^{-x}$ 在$(-\infty,0]$上单调递增,且 $f(x)\leqslant f(0)=1$,所以 $f(x)$在 **R** 上单调递增. 令 $g(x)=f(x)+f(-x)$,当 $x>0$ 时,$g(x)=f(x)+f(-x)=e^x+2-e^x=2$;当 $x\leqslant0$ 时,$g(x)=f(x)+f(-x)=2-e^{-x}+e^{-x}=2$. 所以 $g(x)=2$ 恒成立. 因为 $f(x-2a)+f(x+\ln x^2)\leqslant2$,即 $f(x-2a)+f(x+\ln x^2)\leqslant g(x)$,所以 $f(x+\ln x^2)\leqslant g(x)-f(x-2a)=f(2a-x)$,所以 $x+\ln x^2\leqslant2a-x$,即 $2a\geqslant2x+\ln x^2$. 令 $h(x)=2x+\ln x^2=2x+2\ln x$,$x\in(0,e]$,则 $h(x)$在$(0,e]$上单调递增,所以 $h(x)_{\max}=h(e)=2+2e$,则 $2a\geqslant2+2e$,即 $a\geqslant1+e$,所以 a 的最小值为 $e+1$.

6. C　函数 $f(x)$的图象如图所示.



当 $x\leqslant0$ 时,$f(x)=3^x$,值域为$(0,1]$,所以 $f(f(x))=\log_3 3^x=x$;当 $0<x\leqslant1$ 时,$f(x)=\log_3 x$,值域为$(-\infty,0]$,所以 $f(f(x))=3^{\log_3 x}=x$;当 $x>1$ 时,$f(x)=\log_3 x$,值域为$(1,+\infty)$,所以 $f(f(x))=\log_3(\log_3 x)$,所以 $f(f(x))=\begin{cases}x, & x\leqslant1,\\ \log_3(\log_3 x), & x>1,\end{cases}$当 $x\leqslant1$ 时,$f(f(x))$单调递增,值域为$(-\infty,1]$;当 $x>1$ 时,$f(x)$单调递增,值域为 **R**. 设 $g(m)=m^2+2am-3(a>0)$,对称轴为直线 $m=-a$,因为 $a>0$,所以函数 $g(m)$在$(1,+\infty)$上单调递增,值域为$(2a-2,+\infty)$. 又对任意的 $m\in(1,+\infty)$,都存在唯一的 $x\in\mathbf{R}$,使得 $f(f(x))=m^2+2am-3(a>0)$成立,所以 $2a-2\geqslant1$,解得 $a\geqslant\frac{3}{2}$. 故 a 的最小值是$\frac{3}{2}$.

7. AC　函数 $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}+\ln\frac{1+x}{1-x}$的定义域满足$\frac{1+x}{1-x}>0$,解得$-1<x<1$,则 $f(x)$的定义域是$(-1,1)$,故 A 正确;$f(-x)=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}+\ln\frac{1-x}{1+x}=\frac{1}{e^x+1}-\ln\frac{1+x}{1-x}\neq f(x)$,且 $f(-x)\neq-f(x)$,故 $f(x)$是非奇非偶函数,故 B 错误;由于函数 $y=\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^x+1-1}{e^x+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$,由复合函数单调性可得 $y=1-\frac{1}{e^x+1}$在$(-1,1)$上为单调增函数,又函数 $y=\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln\frac{-(1-x)+2}{1-x}=\ln\left(-1+\frac{2}{1-x}\right)=\ln\left(-1-\frac{2}{x-1}\right)$,由复合函数单调性可得 $y=\ln\left(-1-\frac{2}{x-1}\right)$在$(-1,1)$上为单调增函数,所以 $f(x)$是单调增函数,故 C 正确;因为 $f(x)$是$(-1,1)$上的单调增函数,且 $f(0)=\frac{e^0}{e^0+1}+\ln 1=\frac{1}{2}$,所以 $f(x^2-x)>\frac{1}{2}$可得 $f(x^2-x)>f(0)$,所以 $0<x^2-x<1$,解得$\frac{1-\sqrt{5}}{2}<x<0$ 或 $1<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,故 D 错误.

8. ABD　**分析:**问题的关键在于 AC 与 x 轴平行,即 A,C 两点的纵坐标相等,由此出发不难得到问题的解.

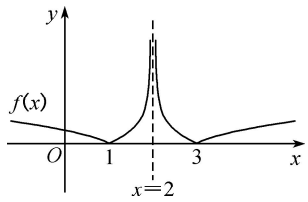
由图可知,若设 $A(a,t)$,则 $C(b,t)$,又点 A 在 $f(x)=\log_c x$ 的图象上,所以 $t=\log_c a$,即 $C(b,\log_c a)$,故 A 正确;由题意得 $A(2,\log_3 2)$,$B(4,\log_3 4)$,$C(4,\log_m 4)$且 AC 与 x 轴平行,所以 $\log_m 4=\log_3 2$,解得 $m=9$,故 B 正确;由题意得 $A(a,\log_c a)$,$B(b,\log_c b)$,$C(b,\log_m b)$且 AC 与 x 轴平行,所以$\log_m b=\log_c a$,因为 $b=a^2$,所以 $m=c^2$,故 C 错误;因为 $a<x_1<x_2<b$,且 $c>1$,所以$\log_c a<\log_c x_1<\log_c x_2<\log_c b$,又因为 $b>a>1$,所以 $a^{\log_c x_2}<a^{\log_c b}$,$b^{\log_c a}<b^{\log_c x_1}$,又因为$\log_c b\cdot\log_c a=\log_c a\cdot\log_c b$,所以$\log_c a^{\log_c b}=\log_c b^{\log_c a}$,所以 $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$,所以 $a^{\log_c x_2}<b^{\log_c x_1}$,即 $a^{f(x_2)}<b^{f(x_1)}$,故 D 正确.

9. ABC　对于 A,令 $x=y=0$,则有 $f(0)=\frac{f(0)}{e^0}+\frac{f(0)}{e^0}$,解得 $f(0)=0$,故 A 正确;对于 B,令 $x=1,y=-1$,则有 $f(1-1)=\frac{f(1)}{e^{-1}}+\frac{f(-1)}{e^1}$,即 $f(0)=ef(1)+\frac{f(-1)}{e}$,由 $f(0)=0$,$f(1)=1$,得 $f(-1)=-e^2$,故 B 正确;对于 C,令 $y=-x$,则有 $f(x-x)=\frac{f(x)}{e^{-x}}+\frac{f(-x)}{e^x}$,即 $f(0)=e^xf(x)+e^{-x}f(-x)$,即 $e^xf(x)=-e^{-x}f(-x)$,又函数 $f(x)$的定义域为 **R**,所以函数 $y=e^xf(x)$的定义域为 **R**,故函数 $y=e^xf(x)$为奇函数,故 C 正确;对于 D,令 $y=x$,则有 $f(x+x)=\frac{f(x)}{e^x}+\frac{f(x)}{e^x}$,即 $f(2x)=\frac{2f(x)}{e^x}$,即有 $\frac{f(2x)}{f(x)}=\frac{2}{e^x}$,当 $x=\ln 2$ 时,有 $\frac{f(2\ln 2)}{f(\ln 2)}=\frac{2}{e^{\ln 2}}=1$,所以 $f(2\ln 2)=f(\ln 2)$,即 $f(x)$在$(0,+\infty)$上不具有单调性,故 D 错误.

10. $(-\infty,-16]\cup[2,+\infty)$　由"局部奇函数"的定义得,$\exists x\in\mathbf{R}$ 使得方程 $e^{-2x}+ae^{-x}-2a+1=-(e^{2x}+ae^x-2a+1)$成立,即 $e^{2x}+e^{-2x}+ae^{-x}+ae^x-4a+2=0$ 有实数解. 方程变形为$(e^x+e^{-x})^2+a(e^x+e^{-x})-4a=0$,令 $t=e^x+e^{-x}$,则 $t\in[2,+\infty)$,故方程 $t^2+at-4a=0$ 在区间$[2,+\infty)$上有解. 令 $g(t)=t^2+at-4a$,则 $g(2)=4-2a\leqslant0$ 或 $\begin{cases}\Delta=a^2+16a\geqslant0,\\ -\frac{a}{2}\geqslant2,\\ g(2)>0,\end{cases}$ 解得 $a\geqslant2$ 或 $a\leqslant-16$.

11. ①②③　$f(x)=|\lg|2-x||=|\lg|x-2||$,将 $y=\lg x$ 的图象关于 y 轴对称,可得 $y=\lg|x|$的图象,将 $y=\lg|x|$的图象位于 x 轴下方的部分对折至 x 轴上方,可得 $y=|\lg|x||$的图象,将 $y=|\lg|x||$的图象向右平移 2 个单位长度,可得

$f(x)=|\lg|x-2||$的图象，据此可得 $f(x)$的图象，结合图象可知函数 $f(x)$在区间$(1,2)$上单调递增，函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=2$ 对称，且函数 $f(x)$的图象与 x 轴有且仅有两个交点，故①②③是真命题；取 $x_1=\frac{21}{10}$，$x_2=12$，可得 $f(x_1)=f(x_2)=1$，满足命题④的条件，但 $x_1+x_2\neq4$，故④是假命题.



12. 7　由$\left|\log_2\frac{m}{n}\right|>1$，得 $\log_2\frac{m}{n}>1$ 或 $\log_2\frac{m}{n}<-1$，且 m，n 的取值为正整数，所以$\frac{m}{n}>2$ 或$\frac{m}{n}<\frac{1}{2}$，所以 $m>2n$ 或 $n>2m$. 根据集合中元素的无序性，我们只需考虑 $m>2n$ 即可. 当 $m>2n$ 时，集合 A 中的元素必须呈指数增长，由于 A 是 M 的子集，且 M 中最大的元素为 100，故当 A 中元素最多时，考虑 2^k 的增长，当 $k=6$ 时，$2^6=64<100$，当 $k=7$ 时，$2^7=128>100$，所以集合 A 中最多只能包含 7 个元素，即 $1,2,2^2,\cdots,2^6$，才能满足条件.

13. 解：(1) 当 $x<0$ 时，$-x>0$，所以 $f(-x)=-\frac{1}{4}(-x)-\log_2(-x+2)=\frac{1}{4}x-\log_2(2-x)$. 又因为 $f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$且 $f(0)=0$，所以当 $x<0$ 时，$f(x)=-f(-x)=\log_2(2-x)-\frac{1}{4}x$.

综上，$f(x)=\begin{cases}\log_2(2-x)-\frac{1}{4}x, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -\frac{1}{4}x-\log_2(x+2), & x>0.\end{cases}$

(2) 因为当 $x>0$ 时，$f(x)=-\frac{1}{4}x-\log_2(x+2)$单调递减，又 $f(x)$是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，由对称性可知 $f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，所以 $\forall x>0$，有 $f(x)<-1<0=f(0)$. 又因为当 $x<0$ 时，$f(x)=\log_2(2-x)-\frac{1}{4}x$ 单调递减，所以$\forall x<0$，有 $f(x)>1>0=f(0)$，所以 $f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的减函数.

(3) 由 $f(mt^2+3)+f(-4mt)<0$ 得 $f(mt^2+3)<-f(-4mt)$，因为 $f(x)$是奇函数，所以 $f(mt^2+3)<f(4mt)$. 又因为 $f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，所以 $mt^2+3>4mt$，即 $mt^2-4mt+3>0$ 对任意的 $t\in\mathbf{R}$ 恒成立. ①当 $m=0$ 时，$3>0$ 恒成立，满足条件；②当 $m\neq0$ 时，m 应满足$\begin{cases}m>0,\\ \Delta=16m^2-12m<0,\end{cases}$解得 $0<m<\frac{3}{4}$. 综上，m 的取值范围是$\left[0,\frac{3}{4}\right)$.

14. 解：(1)由题意知 $ax^2+4x+a-3>0$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立. 当 $a=0$ 时，$4x-3>0$，解得 $x>\frac{3}{4}$，不符合题意；当 $a\neq0$ 时，$\begin{cases}a>0,\\ \Delta=4^2-4a(a-3)<0,\end{cases}$解得 $a>4$. 综上，实数 a 的取值范围是$(4,+\infty)$.

(2)当 $a=0$ 时，$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(4x-3)$在区间$[1,2]$上单调递减，符合题意；当 $a>0$ 时，若 $f(x)$在区间$[1,2]$上单调递减，则$\begin{cases}-\frac{4}{2a}\leqslant1,\\ a+4+a-3>0,\end{cases}$所以 $a>0$；当 $a<0$ 时，若 $f(x)$在区间$[1,2]$上单调递减，则$\begin{cases}-\frac{4}{2a}\geqslant2,\\ a+4+a-3>0,\end{cases}$所以$-\frac{1}{2}<a<0$. 综上，实数 a 的取值范围是$\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

15. 解：(1)因为第 9 天的日销售收入为 552 元，所以 $P(9)\cdot Q(9)=552$，即 $54\times\left(10+\frac{k}{9}\right)=552$，解得 $k=2$.

(2)由函数 $y=ax+b$，$y=a^x+b$，$y=b\log_a x$ 的解析式可知，这三个函数在定义域内单调递增，或单调递减，或是常值函数，不会在定义域内，既有单调递减又有单调递增的情况. 对于函数 $y=a|x-m|+b$，当 $a<0$ 时，该函数在$(-\infty,m)$上单调递增，在$(m,+\infty)$上单调递减. 由列表可知，$Q(x)$是先增后减的，因此选择 $Q(x)=a|x-m|+b$. 把$(14,59)$，$(18,63)$，$(22,59)$代入，得$\begin{cases}a|14-m|+b=59,\\ a|18-m|+b=63,\\ a|22-m|+b=59,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=18,\\ b=63,\\ a=-1,\end{cases}$所以 $Q(x)=-|x-18|+63$，显然$(9,54)$，$(29,52)$也满足函数的解析式.

(3)由题意可知 $f(x)=P(x)Q(x)=\left(10+\frac{2}{x}\right)(-|x-18|+63)$. 当 $1\leqslant x\leqslant18$，$x\in\mathbf{N}^*$ 时，$f(x)=\left(10+\frac{2}{x}\right)[-(18-x)+63]=452+10x+\frac{90}{x}\geqslant452+2\sqrt{10x\cdot\frac{90}{x}}=512$，当且仅当 $10x=\frac{90}{x}$，即 $x=3$ 时，取等号，此时 $f(x)_{\min}=512$；当 $18<x\leqslant30$，$x\in\mathbf{N}^*$ 时，$f(x)=\left(10+\frac{2}{x}\right)[-(x-18)+63]=808-10x+\frac{162}{x}$，显然函数 $f(x)$单调递减，此时 $f(x)_{\min}=f(30)=513.4$. 由于 $513.4>512$，故函数 $f(x)$的最小值为 512 元.

感悟真题

1. D　函数 $y=2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，而函数 $f(x)=2^{x(x-a)}$在区间$(0,1)$上单调递减，则有函数 $y=x(x-a)=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$在区间$(0,1)$上单调递减，所以$\frac{a}{2}\geqslant1$，解得 $a\geqslant2$，所以 a 的取值范围是$[2,+\infty)$.

2. B　由题意，不妨设 $x_1<x_2$，因为函数 $y=2^x$ 是增函数，所以

$0<2^{x_1}<2^{x_2}$，即 $0<y_1<y_2$. 对于选项 A，B，$\frac{2^{x_1}+2^{x_2}}{2}>\sqrt{2^{x_1}\cdot 2^{x_2}}=2^{\frac{x_1+x_2}{2}}$，即 $\frac{y_1+y_2}{2}>2^{\frac{x_1+x_2}{2}}>0$，根据函数 $y=\log_2 x$ 是增函数，可知 $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>\log_2 2^{\frac{x_1+x_2}{2}}=\frac{x_1+x_2}{2}$，故 B 正确，A 错误；对于选项 C，取 $x_1=-1$，$x_2=-2$，则 $y_1=\frac{1}{2}$，$y_2=\frac{1}{4}$，所以 $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}=\log_2\frac{3}{8}=\log_2 3-3\in(-2,-1)$，即 $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>-3=x_1+x_2$，故 C 错误；对于选项 D，取 $x_1=0$，$x_2=1$，则 $y_1=1$，$y_2=2$，所以 $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}=\log_2\frac{3}{2}\in(0,1)$，即 $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}<1=x_1+x_2$，故 D 错误.

3. B　因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，且当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=e^x+\ln(x+1)$ 单调递增，所以需满足 $\begin{cases}-\frac{-2a}{2\times(-1)}\geqslant 0,\\ -a\leqslant e^0+\ln 1,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant a\leqslant 0$，即实数 a 的取值范围是 $[-1,0]$.

4. 64　由题知 $\frac{1}{\log_8 a}-\frac{1}{\log_a 4}=\frac{3}{\log_2 a}-\frac{1}{2}\log_2 a=-\frac{5}{2}$，整理得 $(\log_2 a)^2-5\log_2 a-6=0$，解得 $\log_2 a=-1$ 或 $\log_2 a=6$. 又 $a>1$，所以 $\log_2 a=6=\log_2 2^6$，即 $a=2^6=64$.

阶段滚动（第一章—第三章）

1. B　因为 $M=\{x\mid -3<x<5\}$，$N=\{x\mid x=2k,k\in\mathbf{N}\}=\{0,2,4,6,8,\cdots\}$，所以 $M\cap N=\{0,2,4\}$.

2. B　由 $\frac{x+1}{2x-1}\geqslant 2$，得 $\frac{-3x+3}{2x-1}\geqslant 0$，解得 $\frac{1}{2}<x\leqslant 1$，则 $p:\frac{1}{2}<x\leqslant 1$. 由 $|1-x|\leqslant x$，得 $x\geqslant\frac{1}{2}$，则 $q:x\geqslant\frac{1}{2}$. 若 $p:\frac{1}{2}<x\leqslant 1$ 成立，则 $q:x\geqslant\frac{1}{2}$ 成立，但 $q:x\geqslant\frac{1}{2}$ 成立，$p:\frac{1}{2}<x\leqslant 1$ 不一定成立，则 p 是 q 的充分不必要条件.

3. BCD　对于 A，B，因为 $x^2+y^2-xy=4$，所以 $(x+y)^2-4=3xy$，又因为 $xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$，所以 $(x+y)^2-4\leqslant\frac{3}{4}(x+y)^2$，所以 $(x+y)^2\leqslant 16$，所以 $-4\leqslant x+y\leqslant 4$，当 $x=y=2$ 时，$x+y=4$，当 $x=y=-2$ 时，$x+y=-4$，故 A 错误，B 正确；对于 C，D，因为 $(x+y)^2\geqslant 0$，所以 $x^2+y^2\geqslant -2xy$，所以 $4+xy\geqslant -2xy$，所以 $xy\geqslant -\frac{4}{3}$，当 $\begin{cases}x=\frac{2\sqrt{3}}{3},\\ y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{2\sqrt{3}}{3},\\ y=\frac{2\sqrt{3}}{3}\end{cases}$ 时，取等号，因为 $(x-y)^2\geqslant 0$，所以 $x^2+y^2\geqslant 2xy$，所以 $4+xy\geqslant 2xy$，所以 $xy\leqslant 4$，当 $x=y=\pm 2$ 时，取等号，故 C，D 正确.

4. $(0,1]$　因为函数 $f(x)=\begin{cases}(a-2)x, & x<1,\\ \frac{2a}{x}-3, & x\geqslant 1\end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，所以 $\begin{cases}a-2<0,\\ a>0,\\ a-2\geqslant 2a-3,\end{cases}$ 解得 $0<a\leqslant 1$.

5. 解：(1)因为不等式 $f(x)<0$ 的解集为 $\varnothing$，即 $x^2-2(k+2)x+k^2+k+1<0$ 的解集为 $\varnothing$，所以 $\Delta=[-2(k+2)]^2-4(k^2+k+1)\leqslant 0$，解得 $k\leqslant -1$，即实数 k 的取值范围是 $(-\infty,-1]$.

(2)因为 x_1,x_2 是方程 $f(x)=0$ 的两个不相等的正实数根，所以 $\begin{cases}\Delta>0,\\ x_1+x_2=2(k+2)>0,\\ x_1x_2=k^2+k+1>0,\end{cases}$ 解得 $k>-1$，则 $k+1>0$，所以 $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{4(k+2)^2}{k^2+k+1}-2=\frac{4(k^2+k+1)+12(k+1)}{k^2+k+1}-2=\frac{12(k+1)}{k^2+k+1}+2=\frac{12(k+1)}{(k+1)^2-(k+1)+1}+2=\frac{12}{(k+1)-1+\frac{1}{k+1}}+2\leqslant\frac{12}{2\sqrt{(k+1)\cdot\frac{1}{k+1}}-1}+2=14$，当且仅当 $k+1=\frac{1}{k+1}$，即 $k=0$ 时，取等号，所以 $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$ 的最大值为 14.

第五章　三角函数

课时提优 30　任意角

1. A　若 α 是锐角，则 α 一定是第一象限角；但 α 是第一象限角，α 不一定是锐角，故“α 是锐角”是“α 是第一象限角”的充分不必要条件.

2. C　与角 $\alpha=1\ 680^\circ$ 终边相同的角为 $\beta=1\ 680^\circ+360^\circ k$，$k\in\mathbf{Z}$，当 $k=-5$ 时，$\beta=1\ 680^\circ-360^\circ\times 5=-120^\circ$，C 选项符合要求，经过检验，其他选项均不符合要求.

方法总结　**找与给定角终边相同的角的方法**

(1) 把任意角化为 $\alpha+k\cdot 360^\circ(k\in\mathbf{Z}$ 且 $0^\circ\leqslant\alpha<360^\circ)$ 的形式，关键是确定 k. 可以用观察法（α 的绝对值较小），也可用排除法.

(2) 要求适合某种条件且与已知角终边相同的角，其方法是先求出与已知角终边相同的角的一般形式，再依条件构建不等式求出 k 的值.

3. A　因为 $800^\circ=2\times 360^\circ+80^\circ$，所以 800° 与 80° 的终边相同，而 80° 是第一象限的角，所以 800° 的终边在第一象限.

方法总结　判断一个角 α 在第几象限或哪条坐标轴上的一般方法：

(1) 若角 α 的绝对值比较大，可通过加上或减去 360° 的整数倍得到 $0^\circ\sim 360^\circ$ 内或 $-360^\circ\sim 0^\circ$ 内的一个角 β；

(2) 判断角 β 的终边所在的象限，则角 β 的终边在第几象限，角 α 的终边就在第几象限.

4. ACD　由条件知 $\alpha=\gamma+45^\circ+k_1\cdot 360^\circ(k_1\in\mathbf{Z})$，$\beta=\gamma-45^\circ+k_2\cdot 360^\circ(k_2\in\mathbf{Z})$，两式相减消去 γ，得 $\alpha-\beta=(k_1-k_2)\cdot 360^\circ+90^\circ=k\cdot 360^\circ+90^\circ(k_1,k_2\in\mathbf{Z},k_1-k_2=k)$. 当 $k=0$ 时，$\alpha-\beta=90^\circ$；当 $k=1$ 时，$\alpha-\beta=450^\circ$；当 $k=9$ 时，$\alpha-\beta=$

3 330°. 结合选项,A,C,D符合.

5. $\{\alpha|\alpha=45°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$　终边落在第一象限角平分线上的角 α 的集合为 $\{\alpha|\alpha=45°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|\alpha=45°+2k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$;终边落在第三象限角平分线上的角 α 的集合为 $\{\alpha|\alpha=225°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|\alpha=45°+(2k+1)\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$. 又 $\{\alpha|\alpha=45°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=225°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|\alpha=45°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$,所以角 α 的集合是 $\{\alpha|\alpha=45°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$.

6. $\{\alpha|90°+k\cdot180°\leqslant\alpha\leqslant120°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$　因为终边落在 y 轴上的角的集合为 $\{\alpha|\alpha=90°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$. 终边落在图中直线上的角为的集合为 $\{\alpha|\alpha=120°+k\cdot360°=120°+2k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$;$300°+k\cdot360°=120°+180°+2k\cdot180°=120°+(2k+1)\cdot180°,k\in\mathbf{Z}$,即终边在直线上的角为 $120°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}$. 所以终边落在阴影部分的角 α 的集合是 $\{\alpha|\alpha=90°+k\cdot180°\leqslant\alpha\leqslant120°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$.

7. C　若 α 是第一象限角,则 $k\cdot360°<\alpha<90°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$. $-90°-k\cdot360°<-\alpha<-k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$,则 $-\alpha$ 是第四象限角,故D错误;$-k\cdot360°<90°-\alpha<90°-k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$,则 $90°-\alpha$ 是第一象限角,故A错误;$90°-k\cdot360°<180°-\alpha<180°-k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$,则 $180°-\alpha$ 是第二象限角,故B错误;$180°-k\cdot360°<270°-\alpha<270°-k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$,则 $270°-\alpha$ 是第三象限角,故C正确.

8. D　$\alpha=45°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}$ 表示终边在直线 $y=x$ 上的角,$\alpha=135°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}$ 表示终边在直线 $y=-x$ 上的角,而 $\beta=45°+k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}$ 表示终边在四条射线上的角,四条射线分别是射线 $y=x,x\geqslant0$;$y=-x,x\leqslant0$;$y=x,x\leqslant0$;$y=-x,x\geqslant0$. 它们构成直线 $y=x$、直线 $y=-x$,故 $A=B$.

方法总结　本题考查终边相同的角,注意 $k\cdot180°+\alpha$ 的终边与 α 的终边的关系是重合或互为反向延长线,而 $k\cdot90°+\alpha$ 的终边与 α 的终边的关系是重合或互为反向延长线或相互垂直.

9. ACD　若 α 是第三象限的角,则 $180°+k\cdot360°<\alpha<270°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$,则 $60°+k\cdot120°<\frac{\alpha}{3}<90°+k\cdot120°,k\in\mathbf{Z}$. 当 $k=3n,n\in\mathbf{Z}$ 时,$60°+n\cdot360°<\frac{\alpha}{3}<90°+n\cdot360°,n\in\mathbf{Z}$,在第一象限;当 $k=3n+1,n\in\mathbf{Z}$ 时,$180°+2n\cdot360°<\frac{\alpha}{3}<210°+2n\cdot360°,n\in\mathbf{Z}$,在第三象限;当 $k=3n+2,n\in\mathbf{Z}$ 时,$300°+n\cdot360°<\frac{\alpha}{3}<330°+n\cdot360°,n\in\mathbf{Z}$,在第四象限. 综上,$\frac{\alpha}{3}$ 可以是第一、第三或第四象限角.

10. AC　对于A,终边在第二象限的角的集合为 $\{\alpha|90°+360°\cdot k<\alpha<180°+360°\cdot k,k\in\mathbf{Z}\}$,故A正确;对于B,与 $-65°$ 终边相同的角的集合为 $\{\alpha|\alpha=-65°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$,故B错误;对于C,$\alpha=665°=360°+305°$,所以 665° 和 305° 的终边相同,故 665° 是第四象限角,故C正确;对于D,当三角形其中一个内角为直角时,该角终边不在任何象限,故D错误.

11. 145°　$-215°$　$\alpha=-6\times360°+145°=-2\ 015°$,则与角 α 终边相同的角可以写成 $k\cdot360°+145°(k\in\mathbf{Z})$ 的形式. 当 $k=0$ 时,可得与角 α 终边相同的最小正角为 145°;当 $k=-1$ 时,可得与角 α 终边相同的最大负角为 $-215°$.

12. $\left\{\frac{\alpha}{2}\middle|15°+k\cdot90°\leqslant\frac{\alpha}{2}<52.5°+k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\right\}$　终边在 30° 角的终边所在直线上的角的集合为 $S_1=\{\alpha|\alpha=30°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$,终边在 $180°-75°=105°$ 角的终边所在直线上的角的集合为 $S_2=\{\alpha|\alpha=105°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$,因此终边在题图中的阴影区域内的角 α 的取值范围是 $\{\alpha|30°+k\cdot180°\leqslant\alpha<105°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$,所以角 $\frac{\alpha}{2}$ 的取值范围是 $\left\{\frac{\alpha}{2}\middle|15°+k\cdot90°\leqslant\frac{\alpha}{2}<52.5°+k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

13. 解:(1) 因为 $\alpha=250°-6\times360°$,所以 α 是第三象限角.

(2) 令 $\theta=250°+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$,当 $k=-1,-2$ 时,角 θ 满足 $-720°\leqslant\theta<0°$. 令 $k=-1$,得 $250°-360°=-110°$;令 $k=-2$,得 $250°-720°=-470°$. 故 $\theta=-110°$ 或 $-470°$.

14. 解:(1) 集合 M 中的角可以分成四类,即 $30°+k\cdot360°$,$120°+k\cdot360°$,$210°+k\cdot360°$,$300°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$.

(2) 令 $-360°<30°+k\cdot90°<360°$,得 $-\frac{13}{3}<k<\frac{11}{3}$,又 $k\in\mathbf{Z}$,所以集合 M 中大于 $-360°$ 且小于 360° 的角共有 8 个,分别是 $-330°,-240°,-150°,-60°,30°,120°,210°,300°$.

(3) 集合 M 中的第二象限角与 120° 角的终边相同,所以 $\beta=120°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$.

方法总结　在 0°～360° 范围内找与给定角终边相同的角的方法:(1)把任意角化为 $\alpha+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z}$ 且 $0°\leqslant\alpha<360°)$ 的形式,关键是确定 k,可以用观察法(α 的绝对值较小),也可用除法;(2)要求适合某种条件且与已知角终边相同的角,其方法是先求出与已知角终边相同的角的一般形式,再依条件构建不等式求出 k 的值.

15. $\frac{900°}{7}$　根据题意可知 $14\alpha,14\beta$ 均为 360° 的整数倍,故可设 $14\alpha=m\cdot360°,m\in\mathbf{Z}$,$14\beta=n\cdot360°,n\in\mathbf{Z}$,则 $\alpha=\frac{m}{7}\cdot180°$,$\beta=\frac{n}{7}\cdot180°,m,n\in\mathbf{Z}$. 因为两只蚂蚁在第 2 秒时均位于第二象限,所以 $2\alpha,2\beta$ 为第二象限角. 又 $0°<\alpha<\beta<180°$,则 $2\alpha,2\beta$ 均为钝角,即 $90°<2\alpha<2\beta<180°$,则 $45°<\alpha<90°,45°<\beta<90°$,所以 $45°<\frac{m}{7}\cdot180°<90°,45°<\frac{n}{7}\cdot180°<90°$,即 $\frac{7}{4}<m<\frac{7}{2},\frac{7}{4}<n<\frac{7}{2}$. 又 $\alpha<\beta$,则 $m<n$,即 $m=2,n=3$,即 $\alpha=\frac{360°}{7},\beta=\frac{540°}{7}$,所以 $\alpha+\beta=\frac{900°}{7}$.

课时提优 31　弧度制

1. B　$200°\times\frac{\pi}{180°}=\frac{10\pi}{9}$.

2. A　设扇形的弧长为 l，半径为 r，圆心角为 α，所以扇形的面积 $S=\frac{1}{2}\alpha r^2=\frac{1}{2}\times 2r^2=4$，解得 $r=2$，所以 $l=\alpha r=2\times 2=4(\text{cm})$.

3. A　设等边三角形 ABC 的边长为 a，弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度为 $\frac{\pi}{3}\cdot a=\frac{6\pi}{3}$，解得 $a=6$. 以 A 为圆心，所得的扇形 ABC 的面积为 $\frac{\pi}{3}\times 6^2=6\pi$，等边三角形 ABC 的面积为 $\frac{1}{2}\times 6^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$，勒洛三角形的面积为 $3\times 6\pi-2\times 9\sqrt{3}=18\pi-18\sqrt{3}$.

4. BC　由题意得分针转过的角的弧度为 $-\frac{25-13}{60}\times 2\pi=-\frac{2\pi}{5}$，所以分针尖端所走过的弧长为 $5\times\frac{2\pi}{5}=2\pi(\text{cm})$，分针扫过的扇形面积为 $\frac{1}{2}\times 5\times 2\pi=5\pi(\text{cm}^2)$.

5. $\frac{24}{\pi}$　由题意得圆心角 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，则半径 $R=\frac{4}{\frac{\pi}{3}}=\frac{12}{\pi}$，所以 $S=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{12}{\pi}=\frac{24}{\pi}$.

6. $\frac{12}{11}$　$-\frac{6\pi}{11}$　设从午夜零时起，分针走了 t h 后与时针重合，分针的角速度为 -2π rad/h，时针的角速度为 $-\frac{\pi}{6}$ rad/h，则 $2\pi t-\frac{\pi}{6}t=2k\pi, k\in\mathbf{N}^*$，解得 $t=\frac{12}{11}k, k\in\mathbf{N}^*$. 当 $k=1$ 时，$t=\frac{12}{11}$，当 $k=3$ 时，$t=\frac{36}{11}$，这时时针所转的角度为 $-\frac{\pi}{6}\times\frac{36}{11}=-\frac{6\pi}{11}$.

7. B　因为 $l_1=(OB+4)\times\frac{5\pi}{6}$，$l_2=OB\times\frac{5\pi}{6}$，且 $l_1=3l_2$，所以 $OB+4=3OB$，解得 $OB=2$，则几何图形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times\frac{5\pi}{6}\times(6^2-2^2)=\frac{40\pi}{3}$.

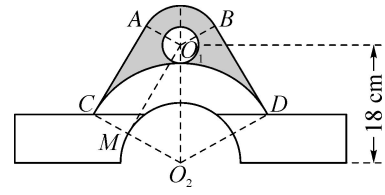
8. B　因为 $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$，$OA=OB$，所以 $\triangle AOB$ 为等边三角形. 因为 $AB=2$，所以 $OA=OB=AB=2$，所以弧 $\overset{\frown}{ACB}$ 与弦 AB 围成的弓形的面积为 $\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\times 2^2-\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$.

9. ABC　根据角度制和弧度制的定义可知，度与弧度是度量角的两种不同的度量单位，所以 A 正确；由圆周角的定义知，1 度的角是周角的 $\frac{1}{360}$，1 弧度的角是周角的 $\frac{1}{2\pi}$，所以 B 正确；根据弧度的定义知，180°一定等于 π 弧度，所以 C 正确；无论是用角度制还是用弧度制度量角，角的大小均与圆的半径长短无关，只与弧长与半径的比值有关，故 D 错误.

10. BCD　由题意知 $2r+l=rl$，则 $r=\frac{l}{l-2}(l>2)$，所以扇形面积 $S=\frac{1}{2}rl=\frac{l^2}{2(l-2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{(l-2)^2+4(l-2)+4}{l-2}\right]=\frac{1}{2}\left[(l-2)+\frac{4}{l-2}\right]+2\geqslant\sqrt{(l-2)\cdot\frac{4}{l-2}}+2=4$，当且仅当 $l-2=\frac{4}{l-2}$，即 $l=4$ 时，等号成立，选项 A 错误；扇形周长为 $2r+l=\frac{2l}{l-2}+l=\frac{l^2}{l-2}=\frac{(l-2)^2+4(l-2)+4}{l-2}=(l-2)+\frac{4}{l-2}+4\geqslant 2\sqrt{(l-2)\cdot\frac{4}{l-2}}+4=8$，当且仅当 $l-2=\frac{4}{l-2}$，即 $l=4$ 时，等号成立，此时，圆心角为 $\frac{l}{r}=\frac{4}{2}=2$，选项 B 正确；$r+2l=\frac{l}{l-2}+2l=\frac{2(l-2)^2+5(l-2)+2}{l-2}=2(l-2)+\frac{2}{l-2}+5\geqslant\sqrt{2(l-2)\cdot\frac{2}{l-2}}+5=9$，当且仅当 $2(l-2)=\frac{2}{l-2}$，即 $l=3$ 时，等号成立，选项 C 正确；$\frac{1}{r^2}+\frac{4}{l^2}=\frac{(l-2)^2}{l^2}+\frac{4}{l^2}=\frac{8}{l^2}-\frac{4}{l}+1=8\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2}$，当 $\frac{1}{l}=\frac{1}{4}$，即 $l=4$ 时，上式取得最小值为 $\frac{1}{2}$，选项 D 正确.

11. 2　设扇形的圆心角为 α，半径为 r，则 $\begin{cases}2r+\alpha r=8,\\ \frac{1}{2}\alpha r^2=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\alpha=2,\\ r=2.\end{cases}$

12. $189\sqrt{3}-72\pi$　如图所示，作 $O_1M\perp CO_2$，则 $O_2M=15-6=9$，又 $O_1O_2=18$，则 $O_1M=\sqrt{18^2-9^2}=9\sqrt{3}$，所以 $\angle O_1O_2M=\frac{\pi}{3}$，所以 $\angle CO_2D=\angle AO_1B=\frac{2\pi}{3}$.



所以 $S=S_{梯形AO_1O_2C}+S_{梯形BO_1O_2D}+S_{扇形AO_1B}-S_{扇形CO_2D}-S_{圆O_1}=2\times\frac{1}{2}\times(6+15)\times 9\sqrt{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}\times 6^2-\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}\times 15^2-\pi\times 3^2=189\sqrt{3}-72\pi$.

13. **解**：(1)在扇形 OAD 中，由题意得 $AB=x$，$OA=2x$，扇形 OAD 的面积为 $\frac{1}{2}\theta\cdot(2x)^2=2\theta x^2$，扇形 OBC 的面积为 $\frac{1}{2}\theta\cdot x^2=\frac{1}{2}\theta x^2$，故 $y=2\theta x^2-\frac{1}{2}\theta x^2=\frac{3}{2}\theta x^2$. 弧 $\overset{\frown}{BC}$ 的长度为 θx，弧 $\overset{\frown}{AD}$ 的长度为 $2\theta x$，则 $\theta x+2\theta x+x+x=50$，解得 $\theta=\frac{50-2x}{3x}$. 因为圆心角 θ 小于 π，所以 $0<\frac{50-2x}{3x}<\pi$，解得 $\frac{50}{3\pi+2}<x<25$，而 $x\in(0,10]$，故 $x\in\left(\frac{50}{3\pi+2},10\right]$，$y=\frac{3}{2}x^2\cdot\frac{50-2x}{3x}=\frac{1}{2}x(50-2x)=25x-x^2$，该函数的定义域为 $\left(\frac{50}{3\pi+2},10\right]$.

(2)由二次函数性质得 y 在 $\left(\frac{50}{3\pi+2},10\right]$ 上单调递增，故当 $x=10$ 时，y 取最大值，最大值为 $25\times 10-10^2=150$，此时弧 $\overset{\frown}{AD}$ 的

长度为 $2x\cdot\frac{50-2x}{3x}=\frac{2\times(50-2\times10)}{3}=20$ m，弧 $\overset{\frown}{BC}$ 的长度为 $x\cdot\frac{50-2x}{3x}=\frac{50-2\times10}{3}=10$ m.

14. **解**：(1) $l=\alpha R=\frac{\pi}{3}\times10=\frac{10\pi}{3}$(cm).

(2)由已知得，$l+2R=20$，则 $l=20-2R$，设扇形的面积为 S，则 $S=\frac{1}{2}lR=(10-R)R\leqslant\left(\frac{10-R+R}{2}\right)^2=25$，当且仅当 $10-R=R$，即 $R=5$ 时，等号成立，此时扇形的面积最大，圆心角 $\alpha=\frac{l}{R}=\frac{10}{5}=2$.

(3)设弓形面积为 $S_{弓形}$，$S_{弓形}=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\times2^2-\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{2^2-1}=\left(\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$.

15. $ld-\frac{1}{2}\alpha d^2$　由题意知，大扇形的半径为 $\frac{l}{\alpha}$，小扇形的半径为 $\frac{l}{\alpha}-d$.

解法 1　梯形上底为 $\left(\frac{l}{\alpha}-d\right)\cdot\alpha$，下底为 l，高为 d，由题意可知该图形面积等于梯形面积，即 $S=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{l}{\alpha}-d\right)\alpha+l\right]d=ld-\frac{1}{2}\alpha d^2$.

解法 2　该图形面积 $S=S_{大扇形}-S_{小扇形}=\frac{l^2}{2\alpha}-\frac{1}{2}\alpha\left(\frac{l}{\alpha}-d\right)^2=ld-\frac{1}{2}\alpha d^2$.

课时提优 32　三角函数的概念

1. B　由题意知 $\tan\alpha=\frac{1}{-\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. A　若 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，则 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即充分性成立；若 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 不一定成立，例如 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$，必要性不成立. 综上，p 是 q 的充分不必要条件.

3. A　由 $\cos\theta\cdot\tan\theta>0$ 可知 $\cos\theta$，$\tan\theta$ 同号，若同为正，则 θ 为第一象限角，若同为负，则 θ 为第二象限角.

4. AB　$\sin\alpha=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{m^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $m=\pm\frac{1}{2}$.

5. $-\frac{2\sqrt{13}}{13}$　由题意得 $\tan\alpha=\frac{m}{-3}=\frac{2}{3}$，解得 $m=-2$，所以 $\sin\alpha=\frac{-2}{\sqrt{(-3)^2+(-2)^2}}=-\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

6. $(-\sqrt{3},1)$　记 $P_0(1,\sqrt{3})$ 是角 α 终边上的一点，则 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+3}}=\frac{1}{2}$，则 $\alpha=\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$. 记 P 是角 β 终边上的一点，由题意知 $\beta=\alpha+\frac{\pi}{4}\times2=\frac{5\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则 $x_P=2\cos\beta=-\sqrt{3}$，$y_P=2\sin\beta=1$，即点 P 的坐标为 $(-\sqrt{3},1)$.

7. B　因为 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\tan\theta}>1$，$\left(\frac{1}{3}\right)^{\sin\theta}<1$，所以 $\tan\theta<0$，$\sin\theta>0$，故 θ 为第二象限角.

8. C　由题意令 $2x-1=1$，得 $x=1$，此时 $y=\log_a(2x-1)+2=\log_a1+2=2$，所以角 α 的终边经过定点 $P(1,2)$，所以 $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{1+4}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+4}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $2\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{5}$.

9. ACD　$485^\circ=360^\circ+125^\circ$ 是第二象限角，$\tan485^\circ<0$，$-447^\circ=-360^\circ-87^\circ$ 是第四象限角，$\sin(-447^\circ)<0$，所以 $\tan485^\circ\sin(-447^\circ)>0$，A 符合题意；$\frac{5\pi}{4}$ 是第三象限角，$\sin\frac{5\pi}{4}<0$，$\frac{4\pi}{5}$ 是第二象限角，$\cos\frac{4\pi}{5}<0$，$\frac{11\pi}{6}$ 是第四象限角，$\tan\frac{11\pi}{6}<0$，所以 $\sin\frac{5\pi}{4}\cos\frac{4\pi}{5}\tan\frac{11\pi}{6}<0$，B 不符合题意；$188^\circ$ 是第三象限角，$\tan188^\circ>0$，-55° 是第四象限角，$\cos(-55^\circ)>0$，所以 $\frac{\tan188^\circ}{\cos(-55^\circ)}>0$，C 符合题意；$\frac{29\pi}{6}=4\pi+\frac{5\pi}{6}$ 是第二象限角，$\cos\frac{29\pi}{6}<0$，$-\frac{13\pi}{6}=-2\pi-\frac{\pi}{6}$ 是第四象限角，$\tan\left(-\frac{13\pi}{6}\right)<0$，$\frac{2\pi}{3}$ 是第二象限角，$\sin\frac{2\pi}{3}>0$，所以 $\frac{\cos\frac{29\pi}{6}\tan\left(-\frac{13\pi}{6}\right)}{\sin\frac{2\pi}{3}}>0$，D 符合题意.

10. ABC　若 x 为第一象限角，则 $\sin x>0$，$\cos x>0$，$\tan x>0$，故 $y=\frac{|\sin x|}{\sin x}+\frac{|\cos x|}{\cos x}-\frac{2|\tan x|}{\tan x}=1+1-2=0$；若 x 为第二象限角，则 $\sin x>0$，$\cos x<0$，$\tan x<0$，故 $y=\frac{|\sin x|}{\sin x}+\frac{|\cos x|}{\cos x}-\frac{2|\tan x|}{\tan x}=1-1+2=2$；若 x 为第三象限角，则 $\sin x<0$，$\cos x<0$，$\tan x>0$，故 $y=\frac{|\sin x|}{\sin x}+\frac{|\cos x|}{\cos x}-\frac{2|\tan x|}{\tan x}=-1-1-2=-4$；若 x 为第四象限角，则 $\sin x<0$，$\cos x>0$，$\tan x<0$，故 $y=\frac{|\sin x|}{\sin x}+\frac{|\cos x|}{\cos x}-\frac{2|\tan x|}{\tan x}=-1+1+2=2$，故 A，B，C 正确，D 错误.

方法总结　三角函数值在各象限内的符号也可以用下面的口诀记忆：
“一全正，二正弦，三正切，四余弦”，意为：第一象限各个三角函数均为正；第二象限只有正弦为正，其余两个为负；第三象限正切为正，其余两个为负；第四象限余弦为正，其余两个为负.

11. $(-2,3]$　因为点 $(3a-9,a+2)$ 在角 α 的终边上，$\sin\alpha>0$，$\cos\alpha\leqslant0$，所以 $\begin{cases}a+2>0,\\3a-9\leqslant0,\end{cases}$ 解得 $-2<a\leqslant3$.

12. $\frac{8}{5}$　因为终边在 $y=-\frac{3}{4}x(x\leqslant0)$ 上，不妨取 $x=-4$，则 $y=$

3，所以 $\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{3}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{-4}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=-\frac{4}{5}$，$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$，故 $\cos\alpha(\cos\alpha+\tan\alpha)+\sin^2\alpha=-\frac{4}{5}\times\left(-\frac{4}{5}-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{8}{5}$.

13. 解：(1) 设 P，Q 第一次相遇时所用的时间是 t，则 $t\cdot\frac{\pi}{3}+t\cdot\frac{\pi}{6}=2\pi$，所以 $t=4$(秒)，即第一次相遇所用的时间为 4 秒.

设第一次相遇点为 C，则 $x_C=2\cos\frac{4\pi}{3}=-1$，$y_C=2\sin\frac{4\pi}{3}=-\sqrt{3}$，所以点 C 的坐标为$(-1,-\sqrt{3})$，

(2) 第一次相遇时，P 点滚动的路程为$\frac{4\pi}{3}\times2=\frac{8\pi}{3}$，$Q$ 点滚动的路程为$\frac{4\pi}{6}\times2=\frac{4\pi}{3}$，故第二次相遇时，$P$ 点滚动的路程为$\frac{8\pi}{3}\times2=\frac{16\pi}{3}$，$Q$ 点滚动的路程为$\frac{4\pi}{3}\times2=\frac{8\pi}{3}$.

14. 解：(1) 因为 $\frac{1}{|\sin\alpha|}=-\frac{1}{\sin\alpha}$，所以 $\sin\alpha<0$. 因为 $\lg(\cos\alpha)$有意义，所以 $\cos\alpha>0$. 由 $\sin\alpha<0$，$\cos\alpha>0$ 可知角 α 的终边在第四象限.

(2) 因为点 $M\left(\frac{3}{5},m\right)$在单位圆上，所以$\left(\frac{3}{5}\right)^2+m^2=1$，解得 $m=\pm\frac{4}{5}$. 又角 α 是第四象限角，所以 $m<0$，所以 $m=-\frac{4}{5}$. 由三角函数的定义，知 $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$.

15. CD　如图 1，α，β 的终边分别为 OP，OQ，$\sin\alpha=MP>NQ=\sin\beta$，此时 $\cos\alpha=OM<ON=\cos\beta$，故 A 错误；如图 2，$OP$，$OQ$ 分别为角 α，β 的终边，$\sin\alpha=MP>NQ=\sin\beta$，所以 $\tan\alpha=AC<AB=\tan\beta$，故 B 错误；如图 2，角 α，β 的终边分别为 OP，OQ，$\sin\alpha=MP>NQ=\sin\beta$，所以 $\cos\beta=ON<OM=\cos\alpha$，故 C 正确；如图 3，角 α，β 的终边分别为 OP，OQ，$\sin\alpha=MP>NQ=\sin\beta$，所以 $\tan\alpha=TH>TK=\tan\beta$，故 D 正确.

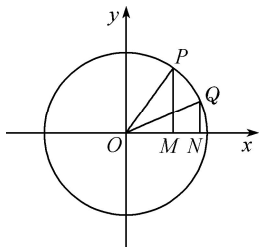


图 1

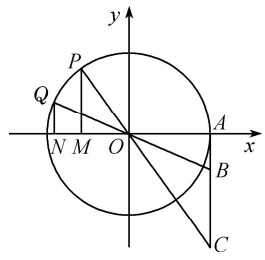


图 2

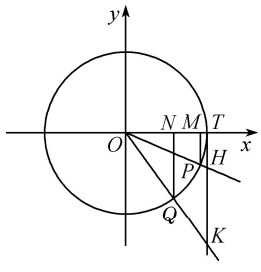


图 3

课时提优 33　同角三角函数关系

1. D　因为 α 为第三象限角，则 $\sin\alpha<0$，因此$\frac{2\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}=\frac{2\sin\alpha}{|\sin\alpha|}=-\frac{2\sin\alpha}{\sin\alpha}=-2$.

2. D　因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$，所以 $\sin\alpha-\cos\alpha>0$，所以 $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{7}{5}$.

3. B　因为 $\sqrt{1-\cos^2\alpha}+\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sin\alpha-\cos\alpha$，所以 $\sin\alpha\geqslant0$，$\cos\alpha\leqslant0$. 又 $\alpha\in[0,2\pi)$，所以 $\alpha\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

4. BD　对于 A，B，当 $\sin\alpha=m$ 时，$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-m^2$，所以 $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-m^2}$，A 错误，B 正确；对于 C，D，由 $\begin{cases}\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=m,\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\end{cases}$ 得 $\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$，$\sin\alpha=\pm\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$，C 错误，D 正确.

5. $\frac{1}{3}$　$\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+1}=\frac{\tan\alpha-1}{\tan\alpha+1}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$.

6. $\frac{\pi}{3}$　由题意知 $\cos A>0$，故 A 为锐角. 将$\sqrt{2}\sin A=\sqrt{3\cos A}$两边平方，得 $2\sin^2A=3\cos A$，即 $2(1-\cos^2A)=3\cos A$，$2\cos^2A+3\cos A-2=0$，解得 $\cos A=\frac{1}{2}$ 或 $\cos A=-2$(舍去). 又 $0<A<\pi$，故 $A=\frac{\pi}{3}$.

7. A　以直角边 AC，AB 为直径的半圆的面积分别为$\frac{\pi}{2}\times\left(\frac{AC}{2}\right)^2=\frac{\pi\cdot AC^2}{8}$，$\frac{\pi}{2}\times\left(\frac{AB}{2}\right)^2=\frac{\pi\cdot AB^2}{8}$，由面积之比为$\frac{1}{4}$，得$\frac{AC^2}{AB^2}=\frac{1}{4}$，即$\frac{AC}{AB}=\frac{1}{2}$. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\tan\theta=\tan\angle ABC=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{2}$，则$\frac{\sin\theta-2\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\frac{\tan\theta-2}{1+\tan\theta}=\frac{\frac{1}{2}-2}{1+\frac{1}{2}}=-1$.

8. B　由题意 $1-\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\alpha$，所以$(\sqrt{2}\cos\alpha+\sin\alpha)^2=1=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$，化简得 $\cos^2\alpha+2\sqrt{2}\cos\alpha\sin\alpha=0$. 因为 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos\alpha\neq0$，所以 $2\sqrt{2}\tan\alpha+1=0$，解得 $\tan\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

9. ACD　由 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$，两边平方得 $1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{25}$，$2\sin\theta\cos\theta=-\frac{24}{25}$. 由于 $\theta\in(0,\pi)$，所以 $\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$，所以 $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，则 $\sin\theta-\cos\theta>0$，$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-$

$2\sin\theta\cos\theta=\frac{49}{25}$，所以 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{7}{5}$. 由 $\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5},\\ \sin\theta-\cos\theta=\frac{7}{5},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}\sin\theta=\frac{4}{5},\\ \cos\theta=-\frac{3}{5},\end{cases}$ 所以 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{4}{3}$. 结合选项知 A，C，D 正确，B 错误.

10. AD　因为点 $P(1,0)$ 绕点 O 逆时针旋转 α 后到达点 $Q(x_0,y_0)$，所以 $\sin\alpha=y_0$，$\cos\alpha=x_0$. 因为 $\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha=-\frac{22}{13}$，所以 $x_0-\sqrt{3}y_0=-\frac{22}{13}$，则由 $\begin{cases}x_0^2+y_0^2=1,\\ x_0-\sqrt{3}y_0=-\frac{22}{13},\end{cases}$ 解得

$\begin{cases}x_0=\frac{1}{26},\\ y_0=\frac{15\sqrt{3}}{26}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=-\frac{23}{26},\\ y_0=\frac{7\sqrt{3}}{26},\end{cases}$ 所以 x_0 可以取 $\frac{1}{26}$ 或 $-\frac{23}{26}$.

11. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$　因为 α 为第三象限角，所以 $\tan\alpha>0$，$\cos\alpha<0$，$\sin\alpha<0$，所以 $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}+\frac{1}{\cos\alpha}=\sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}}+\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{1-\sin\alpha}{-\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2$. 又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以 $(-2\cos\alpha)^2+\cos^2\alpha=1$，解得 $\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$. 又 $\cos\alpha<0$，所以 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

12. $\left[1,\frac{5}{4}\right]$　$\cos^2x+\sin x-a=0$ 可转化为 $1-\sin^2x+\sin x-a=0$，即 $\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}-a$. 因为 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$，所以 $\sin x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，则 $\sin x-\frac{1}{2}\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，所以 $\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2\in\left[0,\frac{1}{4}\right]$，所以 $0\leqslant\frac{5}{4}-a\leqslant\frac{1}{4}$，解得 $1\leqslant a\leqslant\frac{5}{4}$，即实数 a 的取值范围是 $\left[1,\frac{5}{4}\right]$.

13. **解**：因为 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{4}$，所以 $1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{16}$，得 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{15}{32}<0$. 因为 $\theta\in(0,\pi)$，所以 $\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$，则 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，故 $\cos\theta-\sin\theta<0$，所以 $\cos\theta-\sin\theta=-\sqrt{(\cos\theta-\sin\theta)^2}=-\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}=-\sqrt{\frac{31}{16}}=-\frac{\sqrt{31}}{4}$，所以 $\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{8\sqrt{31}}{15}$.

14. (1) **证明**：左边 $=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=$ 右边. 所以 $\frac{1-2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$.

(2) **证明**：因为 $\tan^2\alpha=2\tan^2\beta+1$，所以 $\tan^2\alpha+1=2\tan^2\beta+2=2(\tan^2\beta+1)$，所以 $\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1=2\left(\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}+1\right)$，所以 $\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=2\left(\frac{\sin^2\beta+\cos^2\beta}{\cos^2\beta}\right)$，即 $\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{2}{\cos^2\beta}$，所以 $\cos^2\beta=2\cos^2\alpha=2(1-\sin^2\alpha)$，所以 $1-\sin^2\beta=2-2\sin^2\alpha$，整理得 $\sin^2\beta=2\sin^2\alpha-1$.

方法总结　在证明三角恒等式时，可以从左边推到右边，也可以从右边推到左边，本着化繁为简的原则，即从较繁的一边推向较简的一边；还可以将左、右两边同时推向一个中间结果；有时候改证其等价命题更为方便. 但是，不管采取哪一种方式，证明时都要“盯住目标，据果变形”. 化简证明过程中常用的技巧有：弦切互化，运用分式的基本性质变形，分解因式，回归定义等.

15. **解**：(1) $f(0)=(1+1)^2-0=4$；$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{49}{12}-\frac{1}{12}=4$；$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\right)^2-1^2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=4$；$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{1}{2}+2\right)^2-(\sqrt{3})^2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{25}{4}-\frac{9}{4}=4$.

(2) 发现结论：$f(x)=\left(\cos x+\frac{1}{\cos x}\right)^2-\tan^2x\sin^2x=4$.

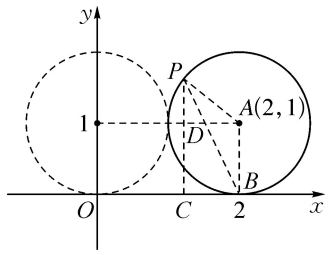
证明：$\forall x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，$f(x)=\cos^2x+2+\frac{1}{\cos^2x}-\frac{\sin^2x}{\cos^2x}\cdot\sin^2x=\cos^2x+2+\frac{1-\sin^4x}{\cos^2x}=\cos^2x+2+\frac{(1+\sin^2x)(1-\sin^2x)}{1-\sin^2x}=\cos^2x+2+1+\sin^2x=4$.

课时提优 34　诱导公式

1. D　由题意得 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\cos(-\alpha)=\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

2. A　由题意得 $m^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$，且 $m<0$，解得 $m=-\frac{3}{5}$，所以 $A\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$，所以 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$. 因为 $\beta=\alpha+\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin\beta=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，$\cos\beta=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，所以 $\frac{3\sin\alpha+2\cos\beta}{2\cos\alpha-3\sin\beta}=\frac{3\times\frac{4}{5}+2\times\left(-\frac{4}{5}\right)}{2\times\left(-\frac{3}{5}\right)-3\times\left(-\frac{3}{5}\right)}=\frac{4}{3}$.

3. D　如图：



由题意知,弧 $\overset{\frown}{BP}$ 的长度为 2. 因为圆的半径 $R=1$,所以$\angle DAP=2-\frac{\pi}{2}$,所以 $DP=AP\cdot\sin\left(2-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 2$,$DA=AP\cdot\cos\left(2-\frac{\pi}{2}\right)=\sin 2$,所以 $OC=2-\sin 2$,$PC=1-\cos 2$,即点 $P(2-\sin 2,1-\cos 2)$.

4. ACD　对于 A,$\sin(\alpha+3\pi)=\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha$,故 A 正确;对于 B,$\cos\left(\alpha+\frac{7\pi}{2}\right)=\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\alpha$,故 B 错误;对于 C,$\cos\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$,故 C 正确;对于 D,$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\frac{1}{\tan\alpha}$,故 D 正确.

5. $\frac{\sqrt{7}}{4}$　由题意得 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{7}}{4}$,所以 $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

6. 1　原式$=\frac{\sqrt{1+2\sin 20^\circ\cos 20^\circ}}{\cos 20^\circ+\sin 160^\circ}=\frac{\sqrt{(\sin 20^\circ+\cos 20^\circ)^2}}{\cos 20^\circ+\sin 20^\circ}=\frac{\sin 20^\circ+\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ+\cos 20^\circ}=1$.

7. C　由题意得 $\tan\alpha=\frac{1}{\tan 220^\circ}=\frac{1}{\tan(180^\circ+40^\circ)}=\frac{1}{\tan 40^\circ}=\frac{\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}=\frac{\cos(90^\circ-50^\circ)}{\sin(90^\circ-50^\circ)}=\frac{\sin 50^\circ}{\cos 50^\circ}=\tan 50^\circ$. 又 $0^\circ<\alpha<180^\circ$,所以 $\alpha=50^\circ$.

8. A　因为$\frac{5\pi}{6}<\alpha<\frac{5\pi}{3}$,所以 $\pi<\alpha+\frac{\pi}{6}<\frac{11\pi}{6}$,则 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)<0$. 又 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{3}$,所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$,所以 $\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)=\sin\left[\pi-\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

9. ACD　由 $\tan^2\alpha-6\tan\alpha\sin\alpha+9\sin^2\alpha=0$,得$(\tan\alpha-3\sin\alpha)^2=0$,所以 $\tan\alpha=3\sin\alpha$,即$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=3\sin\alpha$,化简整理得 $\sin\alpha(3\cos\alpha-1)=0$,所以 $\sin\alpha=0$ 或 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$. 当 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$时,$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 所以 $\cos\left(\alpha+\frac{2\,025\pi}{2}\right)=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha=0$ 或$\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

10. BCD　由 $\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}$ 得 $-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}-x<0$,则 $\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)>0$,所以 $\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}=\frac{12}{13}$,$\tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=-\frac{5}{12}$,$\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{12}{13}$,故 A 错误;$\cos\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)=\cos\left[\pi-\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right]=-\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=-\frac{12}{13}$,故 B 正确;$\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{5}{12}$,故 C 正确;$\cos\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right]=-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{5}{13}$,故 D 正确.

11. ①②③　对于①,由于 $\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$,故①正确;对于②,由 $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\sin\frac{C}{2}$,所以②正确;对于③,由 $\sin(2A+2B)+\sin 2C=\sin[2(A+B)]+\sin 2C=\sin[2(\pi-C)]+\sin 2C=\sin(2\pi-2C)+\sin 2C=-\sin 2C+\sin 2C=0$,所以③正确;对于④,$\cos(2A+2B)+\cos 2C=\cos[2(A+B)]+\cos 2C=\cos[2(\pi-C)]+\cos 2C=\cos(2\pi-2C)+\cos 2C=\cos 2C+\cos 2C=2\cos 2C$,所以④错误.

12. $\frac{11}{8}$　由题意得$\begin{cases}\frac{2m-3}{m+2}>0,\\-\frac{m+1}{m+2}<0,\end{cases}$解得 $m<-2$ 或 $m>\frac{3}{2}$. 因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\frac{2m-3}{m+2}\right)^2+\left(-\frac{m+1}{m+2}\right)^2=\frac{5m^2-10m+10}{m^2+4m+4}=1$,整理可得 $2m^2-7m+3=0$,即$(2m-1)(m-3)=0$,解得 $m=\frac{1}{2}$(舍)或 $m=3$,所以 $\sin\alpha=\frac{2m-3}{m+2}=\frac{3}{5}$,$\cos\alpha=-\frac{m+1}{m+2}=-\frac{4}{5}$,所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{5}\times\left(-\frac{5}{4}\right)=-\frac{3}{4}$,所以原式$=\frac{\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1+\tan\alpha+2\tan^2\alpha=1-\frac{3}{4}+2\times\left(-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{11}{8}$.

方法总结　解决条件求值问题的方法:

(1) 解决条件求值问题,首先要仔细观察条件与所求式之间的角、函数名及有关运算之间的差异及联系;

(2) 可以将已知式进行变形向所求式转化,或将所求式进行变形向已知式转化.

13. **解**:(1)因为锐角 α 的终边与单位圆交于点 $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2},m\right)$,所以 $m=\frac{1}{2}$,则 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 又

$$\frac{\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\sin(\pi-\theta)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(2\pi-\theta)-\cos(\pi+\alpha)\cos(-\theta)}=$$

$$\frac{-\sin\alpha\cdot\sin\theta}{\cos\alpha\cdot(-\sin\theta)-(-\cos\alpha)\cdot\cos\theta}=\frac{-\sin\alpha\cdot\sin\theta}{-\cos\alpha\cdot\sin\theta+\cos\alpha\cdot\cos\theta}$$

$$=\frac{-\tan\alpha\tan\theta}{-\tan\theta+1}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}\times(-3)}{3+1}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

(2)由三角函数定义得 $f(\theta)=\sin(\alpha+\theta)$,因为 $f(\theta)=\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\alpha$ 为锐角,所以 $\alpha=\frac{\pi}{6}$,故 $\sin(\alpha+\theta)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 因为 $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)$. 又 $\theta\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$,所以 $\frac{\pi}{6}+\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{11\pi}{6}\right)$,结合 $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}>0$,知 $\frac{\pi}{6}+\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,所以 $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$,故 $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

14. 解:(1) $f(\alpha)=\frac{\sin(2\pi-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\tan(\pi+\alpha)}=\frac{-\sin\alpha\cdot\sin\alpha}{-\sin\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\cos\alpha$. 因为 $f(\alpha)=-\frac{1}{2}$,所以 $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$. 又 $\alpha\in(0,\pi)$,所以 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$.

(2) 由(1)知 $f\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$,因为 $f\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}$,所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}$,令 $x=\alpha+\frac{\pi}{3}$,则 $\cos x=\frac{1}{4}$,$\alpha=x-\frac{\pi}{3}$,所以 $\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\sin^2(\pi-x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin^2x+\cos x=1-\cos^2x+\cos x=\frac{19}{16}$.

15. C　因为 $\cos(4\pi+1)=\cos 1$,又 $\cos 1=1-\frac{1^2}{2!}+\frac{1^4}{4!}-\frac{1^6}{6!}+\cdots=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}-\frac{1}{720}+\cdots\approx1-0.5+0.041-0.001+\cdots\approx0.54$,所以 $\cos(4\pi+1)\approx0.54$.

单元综合练 5　三角函数有关概念及其应用

1. B　因为 α 的终边与 $-\frac{\pi}{6}$ 的终边垂直,且 $0<\alpha<\pi$,所以 $\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$,则 $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

2. A　$\frac{3\sin(\pi-\alpha)-2\cos(\pi+\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{3\sin\alpha+2\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-3-\frac{2}{-2}=-2$.

3. AC　因为 $\sin\alpha<0$,$\cos\alpha>0$,所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}<0$. 对于 A,$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha>0$,故 A 正确;对于 B,$\cos\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha<0$,故 B 错误;对于 C,$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\frac{1}{\tan\alpha}>0$,故 C 正确;对于 D,例如 $\alpha=-\frac{\pi}{4}$,则 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}<0$,$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}>0$ 符合题意,但 $\cos 2\alpha=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$,故 D 错误.

4. AC　对于 A,当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时,$\sin x<x<\tan x$,所以 $\sin 1<1<\tan 1$,故 A 正确;对于 B,因为 $\frac{\pi}{2}>1>\frac{\pi}{4}$,所以 $\sin 1>\frac{\sqrt{2}}{2}>\cos 1$,故 B 错误;对于 C,因为 $\sin 1$,$\cos 1$ 均大于 0,所以 $\sqrt{1+2\sin 1\cos 1}=\sqrt{(\sin 1+\cos 1)^2}=\sin 1+\cos 1$,故 C 正确;对于 D,根据诱导公式 $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$,所以 $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-1\right)=-\sin 1$,故 D 错误.

5. $-\frac{\pi}{4}$(答案不唯一)　不妨考虑第四象限角 α,由 $\sin\alpha<\cos\alpha$ 得 $\tan\alpha<1$,取 $\alpha=-\frac{\pi}{4}$,此时 $\tan\alpha=-1$,$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. 3　由三角函数的定义可知 $\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,得 $t=2$,所以角 α 终边上一点为 $(-1,2)$,$\tan\alpha=\frac{2}{-1}=-2$,所以 $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha-1}{\tan\alpha+1}=3$.

7. 解:(1)由题意得 $\sin\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$,则 $3\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{10}$,两边平方得 $9\sin^2\alpha-6\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=10$,即 $\frac{9\sin^2\alpha-6\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{9\tan^2\alpha-6\tan\alpha+1}{\tan^2\alpha+1}=10$,化简可得 $\tan^2\alpha+6\tan\alpha+9=0$,即 $(\tan\alpha+3)^2=0$,解得 $\tan\alpha=-3$.

(2)原式 $=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{-\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{1+\tan\alpha}{-\tan\alpha+1}=\frac{1-3}{3+1}=-\frac{1}{2}$.

8. 解:(1)因为 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$,所以 $\sin\alpha<0$,$\cos\alpha>0$. 由 $\cos\alpha+7\sin\alpha=0$,得 $\cos\alpha=-7\sin\alpha$. 又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,所以 $50\sin^2\alpha=1$,$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{10}$,$\cos\alpha=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

(2) 因为角 β 的终边与角 α 的终边关于 x 轴对称,所以 $\beta=-\alpha+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$. 由 $\cos\alpha+7\sin\alpha=0$,得 $\tan\alpha=-\frac{1}{7}$,则 $\tan\beta=-\tan\alpha=\frac{1}{7}$,所以 $\frac{\sin\beta-3\cos\beta}{2\sin\beta+\cos\beta}=\frac{\tan\beta-3}{2\tan\beta+1}=\frac{\frac{1}{7}-3}{2\times\frac{1}{7}+1}=-\frac{20}{9}$.

9. 解:设 $f(n)=\sin^n\alpha+\cos^n\alpha$. 由 $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=k^2$ 得 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{k^2-1}{2}$. 因为 $(\sin^n\alpha+\cos^n\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)=$

$\sin^{n+1}\alpha+\cos^{n+1}\alpha+\sin\alpha\cos\alpha(\sin^{n-1}\alpha+\cos^{n-1}\alpha)$，则 $f(n)\cdot k=f(n+1)+\frac{k^2-1}{2}\cdot f(n-1)$. 所以 $f(n+1)=k\cdot f(n)-\frac{k^2-1}{2}\cdot f(n-1)$. 又因为 $f(1)=k$，$f(2)=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以 $f(3)=k\cdot f(2)-\frac{k^2-1}{2}\cdot f(1)=\frac{-k^3+3k}{2}$. 以此类推，$f(4)=k\cdot f(3)-\frac{k^2-1}{2}\cdot f(2)=\frac{-k^4+2k^2+1}{2}$，$f(5)=k\cdot f(4)-\frac{k^2-1}{2}\cdot f(3)=\frac{-k^5+5k}{4}$，即 $\sin^5\alpha+\cos^5\alpha=\frac{-k^5+5k}{4}$.

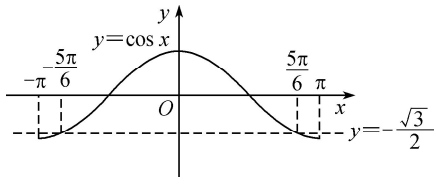
方法总结 首先本题采用了递推法解决问题，不要过多纠结试题的做法，而要思考解决问题的方向. 在对式子的变形中，逐渐发现由一次方可以推理二次方，再推理三次方……由此继续推理下去，很容易得到五次方，可是问题在于，在解决问题的过程当中发现了相邻三个次方的式子之间具有递推关系，故而在具体求解的时候没有将问题特殊化，而是采取了通用的解法. 基于此种考虑，这个试题可以求解 n 次方.

课时提优 35　正弦函数、余弦函数的图象

1. A　可以利用代入法，$(\pi,-1)$不满足解析式.

2. C　对于 A，当 $0<x<\pi$ 时，$y=|\sin x|>0$，故 A 不满足条件；对于 B，当 $0<x<\pi$ 时，$0<|x|<\pi$，$y=\sin|x|>0$，故 B 不满足条件；对于 C，令 $f(x)=-\sin|x|$，该函数的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)=-\sin|-x|=-\sin|x|=f(x)$，故函数为偶函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=-\sin x$，由三角函数图象可知，故 C 满足条件；对于 D，当 $\pi<x<2\pi$ 时，$y=-|\sin x|<0$，故 D 不满足条件.

3. D　因为 $2\cos x+\sqrt{3}\geqslant 0$，所以 $\cos x\geqslant-\frac{\sqrt{3}}{2}$，注意到 $x\in[-\pi,\pi]$，结合余弦函数图象可得 $x\in\left[-\frac{5\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$.



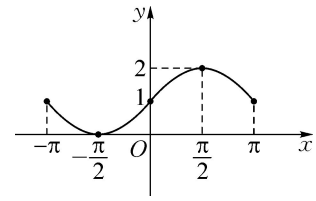
4. AB　结合余弦函数 $y=\cos x$ 的图象可知 A，B 正确；利用五点法画函数 $y=\cos x$ 的图象时，其中一个关键点为$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$，故 C 错误；函数 $y=1+\cos x$ 的图象可由 $y=\cos x$ 的图象向上平移 1 个单位长度得到，故 D 错误.

5. $\left[-\frac{1}{2},0\right]$　由正弦函数的图象，知当 $x\in[0,2\pi]$时，$\sin x\in[-1,1]$，要使得方程 $\sin x=4m+1$ 在 $x\in[0,2\pi]$上有解，则 $-1\leqslant 4m+1\leqslant 1$，故$-\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant 0$.

6. 0 或 2　令 $y=\sin x+1$，在 $x\in[-\pi,\pi]$上，取五个关键点，列表如下：

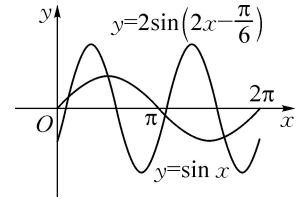
x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
y	1	0	1	2	1

图象如图所示.



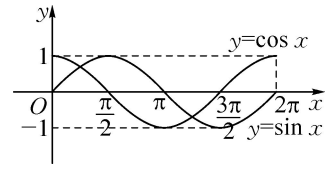
若满足 $a=\sin x+1$，且 $x\in[-\pi,\pi]$的 x 的值只有一个，则直线 $y=a$ 与函数 $y=\sin x+1$ 的图象在 $x\in[-\pi,\pi]$上只有 1 个交点，结合图象可知，$a=0$ 或 $a=2$.

7. B　在同一直角坐标系中，分别作出 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象，根据图象可知 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象在 $x\in[0,2\pi]$上有 4 个交点.



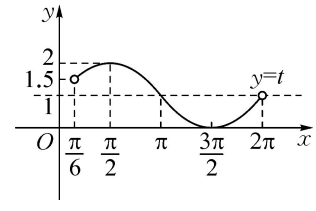
8. C　因为 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$，所以 $\omega\times\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\omega=3k-\frac{1}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$. 因为 $\omega>0$，所以 ω 的最小值为$\frac{5}{2}$.

9. AC　在同一平面直角坐标系中画出正、余弦函数在$[0,2\pi]$上的图象，如图：



在$[0,2\pi]$内，当 $\cos x=\sin x$ 时，$x=\frac{\pi}{4}$ 或 $x=\frac{5\pi}{4}$，结合图象可知满足 $\cos x>\sin x$ 的 x 的取值范围是$\left[0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$.

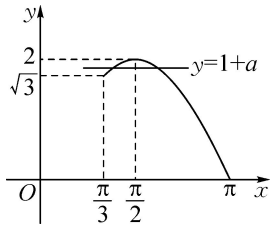
10. ABC　在同一平面直角坐标系中，作出函数 $y=1+\sin x$，$x\in\left(\frac{\pi}{6},2\pi\right)$的图象和直线 $y=t$，如图所示.



由图可知，当 $t>2$ 或 $t<0$ 时，交点个数为 0；当 $0<t<1$ 或 $\frac{3}{2}<t<2$ 时，交点个数为 2；当 $t=0$ 或 $1\leqslant t\leqslant\frac{3}{2}$或 $t=2$ 时，交点个数为 1. 综上，交点个数可能为 0，1，2.

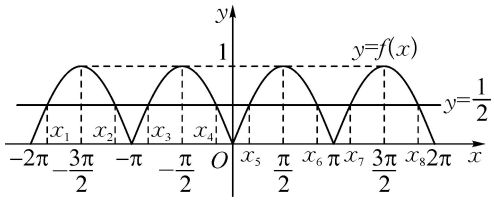
11. $[\sqrt{3}-1,1)$　由 $y=2\sin x-1-a$ 在$\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$上有两个零

点，得 $y=2\sin x$ 与 $y=1+a$ 的图象在 $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ 上有两个交点. 作出 $y=2\sin x$ 在 $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ 上的图象和直线 $y=1+a$，如图所示.



由图象得 $\sqrt{3}\leqslant 1+a<2$，解得 $\sqrt{3}-1\leqslant a<1$.

12. 0　函数 $f(x)$ 与函数 $y=\frac{1}{2}$ 的图象如图：

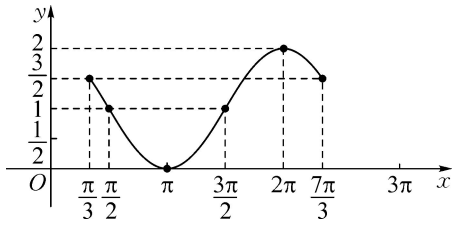


不妨设方程 $f(x)=\frac{1}{2}$ 的所有根从小到大依次为 $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8$，由对称性可知 $x_1+x_2=-3\pi$，$x_3+x_4=-\pi$，$x_5+x_6=\pi$，$x_7+x_8=3\pi$，则方程 $f(x)=\frac{1}{2}$ 的所有根的和等于 0.

13. 解：(1)

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{7\pi}{3}$
$\cos x$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1	$\frac{1}{2}$
$1+\cos x$	$\frac{3}{2}$	1	0	1	2	$\frac{3}{2}$

(2)根据上表和五点法，作出函数图象如图所示.

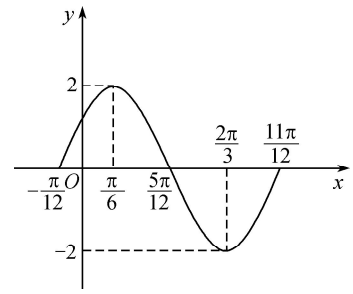


(3)当 $\frac{3\pi}{2}<x\leqslant\frac{7\pi}{3}$ 时，令 $g(x)=-\frac{2}{\pi}x+4=0$，得 $x=2\pi$. 因为 $g(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{3}\right]$ 上共有三个零点，所以当 $x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{2}\right]$ 时，方程 $g(x)=0$ 有且仅有 2 个根，即 $y=m$ 与 $y=f(x)$ 的图象有 2 个交点，所以实数 m 的取值范围是 $(0,1]$.

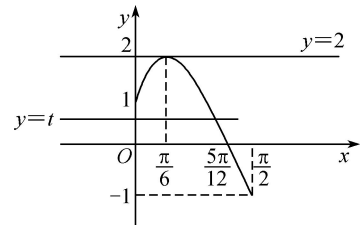
14. 解：(1) 由函数 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，列表如下：

$2x+\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$
$2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$	0	2	0	-2	0

函数 $f(x)$ 的图象如图所示.



(2)由 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，可得 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$. 当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$ 时，即 $x=0$ 时，可得 $f(x)=1$；当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ 时，即 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，可得 $f(x)=2$；当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$ 时，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，可得 $f(x)=-1$. 要使得关于 x 的方程 $f(x)=t(t\in\mathbf{R})$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有唯一解，即函数 $y=f(x)$ 和 $y=t$ 的图象只有一个交点. 如图，结合图象，可得 $-1\leqslant t<1$ 或 $t=2$，即实数 t 的取值范围是 $[-1,1)\cup\{2\}$.



15. 解：(1)$\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 理由如下：由 $f(x)=\sin x$ 在 $(0,\pi)$ 上的图象可知其为凸函数，所以 $f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)\geqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$，所以 $\sin A+\sin B+\sin C\leqslant 3\sin\frac{A+B+C}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，当且仅当 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时，等号成立.

(2)当 $a>0$ 时，$y=ax^2+x$ 为凹函数；当 $a<0$ 时，$y=ax^2+x$ 为凸函数.

理由：任取 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{ax_1^2+x_1+ax_2^2+x_2}{2}=\frac{-a(x_1-x_2)^2}{4}$. 当 $a>0$ 时，$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\leqslant 0$，$f(x)$ 为凹函数；当 $a<0$ 时，$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\geqslant 0$，$f(x)$ 为凸函数.

(3)由(2)知，当 $a>0$ 时，$y=f(x)=ax^2+x$ 为 $\mathbf{R}$ 上的凹函数，由题意构造 $f(x)=x^2+x$，则 $a_1(a_1+1)+a_2(a_2+1)+\cdots+a_n(a_n+1)=n\cdot\left[\frac{a_1(a_1+1)+a_2(a_2+1)+\cdots+a_n(a_n+1)}{n}\right]=n\cdot\frac{f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)}{n}\geqslant n\cdot f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)=$

$n\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{k^2}{n}+k$，当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{k}{n}$ 时，等号成立. 故 $a_1(a_1+1)+a_2(a_2+1)+\cdots+a_n(a_n+1)$ 的最小值为 $\frac{k^2}{n}+k$.

课时提优 36　正弦函数、余弦函数的性质(1)

1. B　由余弦型函数周期性可知 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

2. B　由 $f(-x)=f(x)$，知 $f(x)$ 是偶函数，排除 A，C；图象关于 y 轴对称. 由 $f(x+2)=f(x)$，知 $f(x)$ 的周期为 2，排除 D.

3. D　设函数 $f(x)$，$g(x)$ 的最小正周期分别为 T_1，T_2，由图象可知 $T_2=3T_1$，且 $\omega_1>0$，$\omega_2>0$，则 $\frac{2\pi}{\omega_2}=3\times\frac{2\pi}{\omega_1}$，整理可得 $\frac{\omega_1}{\omega_2}=3$.

4. AC　由题意得 $y=f(x+a)=e^{|x+4+a|}\sin(bx+ab)$，若存在实数 a，使得 $y=f(x+a)$ 是奇函数，则 $-f(x+a)=f(-x+a)$，即 $-e^{|x+4+a|}\sin(bx+ab)=e^{|x+4+a|}\sin(-bx-ab)=e^{|-x+4+a|}\sin(-bx+ab)$，所以 $4+a=0$ 且 $ab=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $a=-4$，$b=-\frac{k\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $\sin b=\sin\left(-\frac{k\pi}{4}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$. 易知 $y=\sin\left(-\frac{k\pi}{4}\right)$ 的周期为 8. 当 $k=1$ 时，$\sin b=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$；当 $k=2$ 时，$\sin b=\sin\left(-\frac{2\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$；当 $k=3$ 时，$\sin b=\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$；当 $k=4$ 时，$\sin b=\sin(-\pi)=0$；当 $k=5$ 时，$\sin b=\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)=-\sin\frac{5\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$；当 $k=6$ 时，$\sin b=\sin\left(-\frac{6\pi}{4}\right)=-\sin\frac{3\pi}{2}=1$；当 $k=7$ 时，$\sin b=\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)=-\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$；当 $k=8$ 时，$\sin b=\sin(-2\pi)=0$. 结合选项，A，C 正确. 所以 $\sin b$ 的值可能为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，-1，1，0.

5. $\frac{3}{4}$　设函数 $f(x)$ 的周期为 T，则 $\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=(2k+1)\cdot\frac{T}{4}(k\in\mathbf{Z})$，所以 $T=\frac{2\pi}{\frac{3(2k+1)}{4}}(k\in\mathbf{Z})$，所以 $\omega=\frac{3(2k+1)}{4}(k\in\mathbf{Z})$. 又 $\omega>0$，所以 $\omega_{\min}=\frac{3}{4}$.

6. π　由题意知 $2\pi\cdot A=3\pi$，所以 $A=\frac{3}{2}$，所以 $2A-1=2$，所以 $y=3\cos[(2A-1)x-\pi]=3\cos(2x-\pi)$ 的最小正周期为 π.

7. B　令 $f(x)=\frac{3}{2}$，则 $\sin(\omega x+\varphi)=\frac{1}{2}$，所以 $\omega x+\varphi=2k\pi+\frac{1}{6}\pi$ 或 $\omega x+\varphi=2k\pi+\frac{5}{6}\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 因为 $|x_i-x_j|(i\neq j,i,j\in\{1,2,3,\cdots\})$ 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$，所以 $\frac{\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}}{\omega}=\frac{\pi}{6}$，解得 $\omega=4$.

8. D　$f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=f\left(\frac{5\pi}{3}-2\pi\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}-\pi\right)=f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

9. C　选项 A，因为 $f(x)g(x)=\sin x\cos x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，又 $f(-x)g(-x)=\sin(-x)\cos(-x)=-\sin x\cos x=-f(x)g(x)$，所以 $f(x)g(x)$ 是奇函数，故 A 错误；选项 B，因为 $|f(x)|g(x)=|\sin x|\cos x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，又 $|f(-x)|\cdot g(-x)=|\sin(-x)|\cos(-x)=|\sin x|\cos x=f(x)g(x)$，所以 $|f(x)|\cdot g(x)$ 是偶函数，故 B 错误；选项 C，因为 $f(x)\cdot|g(x)|=\sin x|\cos x|$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，又 $f(-x)|g(-x)|=\sin(-x)\cdot|\cos(-x)|=-\sin x|\cos x|=-f(x)g(x)$，所以 $f(x)|g(x)|$ 是奇函数，故 C 正确；选项 D，因为 $|f(x)\cdot g(x)|=|\sin x\cos x|$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，又 $|f(-x)g(-x)|=|\sin(-x)\cos(-x)|=|\sin x\cos x|=|f(x)g(x)|$，所以 $|f(x)g(x)|$ 是偶函数，故 D 错误.

10. BC　因为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，且 $T\in(1,4)$，即 $1<\frac{2\pi}{\omega}<4$. 又 $\omega>0$，所以 $\frac{\pi}{2}<\omega<2\pi$，所以正整数 ω 的最小值为 2，正整数 ω 的最大值为 6，所以正整数 ω 可以取 3 和 6.

11. 0　因为函数 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$. 又 $f(1)=\sin\frac{\pi}{2}=1$，$f(2)=\sin\pi=0$，$f(3)=\sin\frac{3\pi}{2}=-1$，$f(4)=\sin 2\pi=0$，所以 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0$. 又 $2\,023=4\times505+3$，所以 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2\,023)=f(1)+f(2)+f(3)=0$.

12. 2 或 3　由 $5\cos\left(\frac{2k+1}{3}\pi x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{4}$，得 $\cos\left(\frac{2k+1}{3}\pi x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$. 因为函数 $y=\cos x$ 在每个周期内出现函数值为 $\frac{1}{4}$ 的次数为 2 次，而区间 $[a,a+3]$ 的长度为 3，所以为了使长度为 3 的区间内出现函数值 $\frac{1}{4}$ 的次数不少于 4 次且不多于 8 次，必须使 3 不小于 2 个周期长度且不大于 4 个周期长度，即 $2\times\frac{2\pi}{\frac{2k+1}{3}\pi}\leqslant3$，且 $4\times\frac{2\pi}{\frac{2k+1}{3}\pi}\geqslant3$. 所以 $\frac{3}{2}\leqslant k\leqslant\frac{7}{2}$. 又 $k\in\mathbf{N}$，所以 $k=2$ 或 $k=3$.

13. **解**：(1) 因为 $f(x)=3\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$ 且最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}$，即 $\omega=4$，所以 $f(x)=3\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$.

(2) 因为 $f(x)=3\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $f\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{4}\right)=3\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=3\cos\alpha=\frac{9}{5}$，所以 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$. 因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\sin(-\pi+\alpha)=-\sin(\pi-\alpha)=-\sin\alpha=-\frac{4}{5}$.

14. (1)**证明**:函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,任取 $x\in\mathbf{R}$,$f(-x)=|\sin(-x)|+|\cos(-x)|=|\sin x|+|\cos x|=f(x)$,所以函数 $f(x)$是偶函数.

(2)**证明**:任取 $x\in\mathbf{R}$,$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|+\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|=|\cos x|+|-\sin x|=|\cos x|+|\sin x|=f(x)$,所以 $f(x)$是周期函数,$\frac{\pi}{2}$是它的一个周期.

15. A　令 $x=y=0$,得 $f(0)=[f(0)]^2+[f(1)]^2$,则 $[f(1)]^2=f(0)-[f(0)]^2$,令 $x=y=1$,得 $f(0)=[f(1)]^2+[f(2)]^2=f(0)-[f(0)]^2+[f(2)]^2$,由 $f(2)=-1$,得 $[f(0)]^2=1$. 又 $f(0)>0$,故 $f(0)=1$,$f(1)=0$. 令 $x=2$,$y=1$,知 $f(1)=f(2)f(1)+f(3)f(2)$,得 $f(3)=0$. 令 $y=1$ 得 $f(x-1)=f(x)f(1)+f(1+x)f(2)$,$f(x-1)=-f(1+x)$,即 $f(x+2)=-f(x)$,故存在 $T=4$,使得 $f(x)=f(x+T)$,所以 $f(x)$是周期函数,周期 $T=4$,所以 $f(2\,023)=f(4\times505+3)=f(3)=0$.

课时提优 37　正弦函数、余弦函数的性质(2)

1. A　令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,解得 $k\pi-\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$. 当 $k=0$ 时,$\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$是函数 y 的一个单调递增区间,而其他选项均不符合.

2. B　函数 $f(x)$的定义域为$\{x|x\neq0\}$,$f(-x)=\cos(-x)\cdot\frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1}=\cos x\cdot\frac{1+e^x}{1-e^x}=-f(x)$,所以函数 $f(x)$为奇函数,排除 A,D;当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$\cos x>0$,$\frac{e^x+1}{e^x-1}>0$,所以 $f(x)>0$,排除 C.

3. C　因为 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$过原点,所以当 $0\leqslant\omega x\leqslant\frac{\pi}{2}$,即 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2\omega}$时,$y=\sin\omega x$ 单调递增;当 $\frac{\pi}{2}\leqslant\omega x\leqslant\frac{3\pi}{2}$,即$\frac{\pi}{2\omega}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2\omega}$时,$y=\sin\omega x$ 单调递减. 由 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$在$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$上单调递增,在$\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减知,$\frac{\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{3}$,所以 $\omega=\frac{3}{2}$.

方法总结　已知单调区间求参数取值范围的 3 种方法:

子集法	求出原函数的相应单调区间,由已知区间是所求某区间的子集,列不等式(组)求解
反子集法	由所给区间求出整体角的范围,由该范围是某相应正、余弦函数的某个单调区间的子集,列不等式(组)求解
周期性法	由所给区间的两个端点到其相应对称中心的距离不超过$\frac{1}{4}$周期列不等式(组)求解

4. ACD　对于 A,函数 $f(x)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$,故 A 正确;对于 B,$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(2\times\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}\neq0$,所以函数 $f(x)$的图象不关于点$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$中心对称,故 B 错误;对于 C,因为 $y=\sin x\in[-1,1]$,所以 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in[-2,2]$,所以函数 $y=f(x)$的最大值为 2,故 C 正确;对于 D,令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,解得 $k\pi+\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{11\pi}{12}$,$k\in\mathbf{Z}$,故 D 正确.

5. $(-\pi,0]$　因为 $y=\cos x$ 在$[-\pi,0]$上单调递增,在$[0,\pi]$上单调递减,所以只有当$-\pi<a\leqslant0$ 时满足条件,故 $a\in(-\pi,0]$.

6. $[3,4]$　$y=\sin^2x+2\cos x+2=-\cos^2x+2\cos x+3$,令 $t=\cos x$,由 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$,得 $t\in[0,1]$,函数 $y=-\cos^2x+2\cos x+3$ 可化为 $y=-t^2+2t+3=-(t-1)^2+4$,由二次函数的性质可得当 $t=1$ 时,$y_{\max}=4$,当 $t=0$ 时,$y_{\min}=3$. 所以函数 $y=\sin^2x+2\cos x+2$ 在$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$上的值域为$[3,4]$.

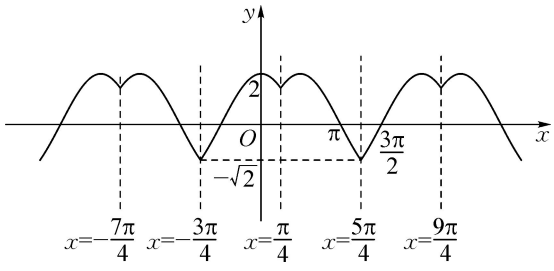
7. B　由于$\frac{\pi}{2}<3<4<\frac{3\pi}{2}$,且函数 $y=\sin x$ 在区间$\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$上单调递减,故 $\sin3>\sin4$,故①正确;由于 $\cos\left(-\frac{14\pi}{5}\right)=\cos\frac{14\pi}{5}=\cos\frac{4\pi}{5}$,$0<\frac{3\pi}{5}<\frac{4\pi}{5}<\pi$,且函数 $y=\cos x$ 在区间$[0,\pi]$上单调递减,故 $\cos\frac{3\pi}{5}>\cos\frac{4\pi}{5}=\cos\left(-\frac{14\pi}{5}\right)$,故②错误;由于 $0<1<2<\pi$,故 $\cos2<\cos1$,故③正确;由于 $0<1<1.5<\frac{\pi}{2}$,且函数 $y=\sin x$ 在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增,故 $\sin1<\sin1.5$,故④错误.

8. A　令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\omega x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,则$-\frac{5\pi}{6\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}(k\in\mathbf{Z})$,所以函数 $f(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{6\omega}\right]$上单调递增,在区间$\left[\frac{\pi}{6\omega},\frac{\pi}{6\omega}+\frac{\pi}{\omega}\right]$上单调递减. $f(0)=3\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. ①当$\frac{\pi}{6\omega}\geqslant1$,即 $\omega\leqslant\frac{\pi}{6}$时,$f(1)\leqslant f\left(\frac{\pi}{6\omega}\right)=3$,此时 $a=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,$b=f(1)\leqslant3$,不合题意. ②当$\frac{\pi}{6\omega}<1<\frac{\pi}{6\omega}+\frac{\pi}{\omega}$,即$\frac{\pi}{6}<\omega<\frac{7\pi}{6}$时,函数 $f(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{6\omega}\right]$上单调递增,在区间$\left[\frac{\pi}{6\omega},1\right]$上单调递减,此时 $b=f\left(\frac{\pi}{6\omega}\right)=3$,因为 $b-a=4$,所以 $a=-1$,即 $f(1)=-1$,所以 $\sin\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{3}$. 又因为$\frac{\pi}{6}<\omega<\frac{7\pi}{6}$,所以 $\frac{\pi}{2}<\omega+\frac{\pi}{3}<\frac{3\pi}{2}$,所以 $\cos\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right)}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$. ③当$\frac{\pi}{6\omega}+\frac{\pi}{\omega}\leqslant1$,即 $\omega\geqslant\frac{7\pi}{6}$时,$b=f\left(\frac{\pi}{6\omega}\right)=3$,$a=f\left(\frac{7\pi}{6\omega}\right)=-3$,此时 $b-a=6$,不合题意. 综

上，$\cos\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

9. ABC　由 $f(1+x)$ 为奇函数，得 $f(1-x)=-f(1+x)$，即 $f(2-x)=-f(x)$. 由 $f(x+2)$ 为偶函数，得 $f(-x+2)=f(x+2)$，所以 $f(x+2)=-f(x)$，$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以 $f(x)=f[2+(2+x)]=f[2-(2+x)]=f(-x)$，因此函数 $f(x)$ 是偶函数，且当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)$ 单调递减. 对于 A，$0<\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}<1$，则 $f\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)>f\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)$，故 A 正确；对于 B，$1>\sin 1>\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}>\cos 1>0$，则 $f(\sin 1)<f(\cos 1)$，故 B 正确；对于 C，$f\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)>f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=f\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$，故 C 正确；对于 D，$f(\cos 2)=f[-\cos(\pi-2)]=f[\cos(\pi-2)]$，$f(\sin 2)=f[\sin(\pi-2)]$，$\frac{\pi}{4}<\pi-2<\frac{\pi}{2}$，则 $0<\cos(\pi-2)<\sin(\pi-2)<1$，$f[\cos(\pi-2)]>f[\sin(\pi-2)]$，即 $f(\cos 2)>f(\sin 2)$，故 D 错误.

10. ABD　对于 A，$f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)+\cos(x+2\pi)+|\sin(x+2\pi)-\cos(x+2\pi)|=\sin x+\cos x+|\sin x-\cos x|$，故 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，故 A 正确；由于 $f(x)=\begin{cases}2\sin x, 2k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{4},\\ 2\cos x, 2k\pi+\frac{5\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{9\pi}{4},\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$，作出函数 $f(x)$ 的图象如图：



结合图象可知当且仅当 $x=2k\pi+\frac{5\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，函数取得最小值 $-\sqrt{2}$，故 B 正确；函数 $f(x)$ 图象的对称轴为直线 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，故 C 错误；当且仅当 $2k\pi+\pi<x<2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$-\sqrt{2}\leqslant f(x)<0$，故 D 正确.

11. 2　由题意可得 $f(x_1)$ 是函数的最小值，$f(x_2)$ 是函数的最大值，故 $|x_1-x_2|$ 的最小值为函数 $f(x)$ 的半个周期，为 $\frac{1}{2}T=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$.

12. $\left[-\frac{3}{4},0\right)\cup\left[\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right]$　设 $t=\omega x+\frac{\pi}{4}$，$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，当 $\omega>0$ 时，则 $t\in\left(\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{4},\omega\pi+\frac{\pi}{4}\right)$. 由已知得 $\left(\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{4},\omega\pi+\frac{\pi}{4}\right)\subseteq\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $\begin{cases}\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{4},\\ \omega\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\end{cases}$ 解得 $4k+\frac{1}{2}\leqslant\omega\leqslant 2k+\frac{5}{4}$，则 $\begin{cases}4k+\frac{1}{2}\leqslant 2k+\frac{5}{4},\\ 2k+\frac{5}{4}>0,\end{cases}$ 即 $-\frac{5}{8}<k\leqslant\frac{3}{8}$. 又 $k\in\mathbf{Z}$，所以 $k=0$，$\omega\in\left[\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right]$. 当 $\omega<0$ 时，则 $t\in\left(\omega\pi+\frac{\pi}{4},\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$，由已知得 $\left(\omega\pi+\frac{\pi}{4},\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\subseteq\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $\begin{cases}\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,\\ \omega\pi+\frac{\pi}{4}\geqslant-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\end{cases}$ 解得 $2k-\frac{3}{4}\leqslant\omega\leqslant 4k+\frac{1}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $\begin{cases}4k+\frac{1}{2}\geqslant 2k-\frac{3}{4},\\ 2k-\frac{3}{4}<0,\end{cases}$ 所以 $-\frac{5}{8}\leqslant k<\frac{3}{8}$. 又 $k\in\mathbf{Z}$，所以 $k=0$，当 $k=0$ 时，$\omega\in\left[-\frac{3}{4},0\right)$. 综上，$\omega$ 的取值范围是 $\left[-\frac{3}{4},0\right)\cup\left[\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right]$.

13. 解：(1) 由 $f(x)=1$，得 $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$，即 $x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ 或 $x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$，解得 $x=2k\pi-\frac{\pi}{6}$ 或 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以方程 $f(x)=1$ 的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x=2k\pi-\frac{\pi}{6}\text{ 或 }x=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(2) 因为 $y=2\sin u$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$ 上单调递增，在 $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$ 上单调递减，$u=x+\frac{\pi}{3}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 令 $x+\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $x\in\left(-\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$. 令 $x+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $x\in\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{7\pi}{6}+2k\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{7\pi}{6}+2k\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$. 综上，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，单调递减区间为 $\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{7\pi}{6}+2k\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$.

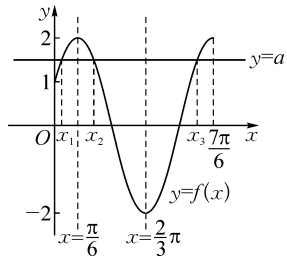
(3) 由(2)得 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，所以当 $x=-\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)_{\min}=2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-1$，当

$x=\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)_{\max}=2\sin\frac{\pi}{2}=2$. 因此 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域为 $[-1,2]$.

14. 解：(1)由题意得 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，所以 $T=\pi$，即 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，所以 $\omega=2$，所以 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$. 又因为函数的图象过点 $(0,1)$，所以 $2\sin\varphi=1$，即 $\sin\varphi=\frac{1}{2}$. 又因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

(2) $f\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-2\cos 2x$. 当 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{12}\right]$ 时，$2x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right]$，所以 $\cos 2x\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$，所以 $f\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-2\cos 2x\in[-1,2]$，所以方程 $f\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-m=0$ 有解，即方程 $m=f\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 有解，所以实数 m 的取值范围是 $[-1,2]$.

(3)当 $x\in\left[0,\frac{7\pi}{6}\right]$ 时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{2}\right]$. 令 $\frac{\pi}{6}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{2}$，解得 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{6}$，所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$，$\left[\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right]$ 上单调递增；令 $\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}$，解得 $\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$，所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递减. 作出 $f(x)$ 的图象 $\left(x\in\left[0,\frac{7\pi}{6}\right]\right)$ 如图所示.



因为方程 $f(x)-a=0$ 在区间 $\left[0,\frac{7\pi}{6}\right]$ 上恰有三个实数根 x_1，x_2，x_3，且 $x_1<x_2<x_3$，即 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=a$ 在区间 $\left[0,\frac{7\pi}{6}\right]$ 上恰有三个交点，则 $1\leqslant a<2$，且 x_1 与 x_2 关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称，x_2 与 x_3 关于直线 $x=\frac{2\pi}{3}$ 对称，所以 $x_1+x_2=\frac{\pi}{3}$，$x_2+x_3=\frac{4\pi}{3}$，所以 $x_1+x_2+x_3=\frac{5\pi}{3}-x_2$. 因为 $1\leqslant a<2$，所以 $\frac{\pi}{6}<x_2\leqslant\frac{\pi}{3}$，所以 $\frac{5\pi}{3}-x_2\in\left[\frac{4\pi}{3},\frac{3\pi}{2}\right)$，所以 $\sin(x_1+x_2+x_3)=\sin\left(\frac{5\pi}{3}-x_2\right)\in\left(-1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

15. 解：(1)由题意得 $g(x_0)=x_0^2+5x_0+4=x_0$，解得 $x_0=-2$. 故 $g(x)$ 的不动点为 -2.

(2)①$g(x)$ 的“2-周期点”共有 0 个. 理由如下：$g(x)-x=x^2+5x+4-x=(x+2)^2\geqslant 0$，故 $g(x)\geqslant x$，当且仅当 $x=-2$ 时，等号成立. 若 x_0 是 $g(x)$ 的“2-周期点”，满足 $x_0=g_2(x_0)=g(g(x_0))\geqslant g(x_0)\geqslant x_0$，故 $x_0=-2$. 而由(1)知，$x_0=-2$ 是 $g(x)$ 的“不动点”，即“1-周期点”，矛盾. 故 $g(x)$ 不存在“2-周期点”

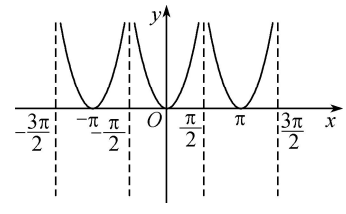
②注意到 $h(x)=\sin x\left(x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 单调递增，$n\geqslant 2$. 若 x_0 为 $h(x)$ 的“n-周期点”，则 $h_n(x_0)=x_0$ 且 $h(x_0)\neq x_0$，$x_0\in[0,1]$(否则 x_0 为 $h(x)$ 的“不动点”). 若 $h(x_0)>x_0$，则由 $h(x)$ 单调递增可知，$h_2(x_0)=h(h(x_0))>h(x_0)$，而 $h(x_0)>x_0$，故 $h_2(x_0)>h(x_0)>x_0$，$h_3(x_0)=h(h_2(x_0))>h(x_0)>x_0$. 类似的，对于任意 $n\geqslant 2$，$h_n(x_0)>h_{n-1}(x_0)>\cdots>h(x_0)>x_0$，与 $h_n(x_0)=x_0$ 矛盾，则 $h(x)$ 不存在 $h(x_0)>x_0$ 的“n-周期点”. 同理可证 $h(x)$ 不存在 $h(x_0)<x_0$ 的“n-周期点”. 故当 $n\geqslant 2$ 时，$h(x)$ 不存在“n-周期点”.

课时提优 38　正切函数的性质与图象

1. C　由 $y=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 可知，$y=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ 在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$ 上单调递减，即 $k\pi-\frac{\pi}{2}<x-\frac{\pi}{4}<k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$，得 y 的单调递减区间为 $\left(k\pi-\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

方法总结　在求 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$ 的单调区间时，若 $\omega<0$，先用诱导公式把 ω 化为正值，再由 $k\pi-\frac{\pi}{2}<\omega x+\varphi<k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解出 x 的取值范围.

2. C　作出 $f(x)=|\tan x|$ 的图象如图所示. 对于 A，$f(-x)=|\tan(-x)|=|\tan x|=f(x)$，故 $f(x)$ 是偶函数，故 A 正确；对于 B，结合正切函数的性质知 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 对称，故 B 正确；对于 C，$f(x)$ 的最小正周期是 π，故 C 错误；对于 D，结合正切函数的性质知 $f(x)$ 在 $\left(k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$ 上单调递增，故 D 正确.



3. A　因为函数 $f(x)=\tan\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)$ 与函数 $g(x)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$ 的最小正周期相同，因此 $\frac{\pi}{|\omega|}=\frac{2\pi}{2}$，所以 $\omega=\pm 1$.

方法总结　**求三角函数周期的两种方法**

(1)定义法：利用周期函数的定义求解；

(2)公式法：一般地，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$(其中 A,ω,φ 为常数，$A\neq 0,\omega>0,x\in\mathbf{R}$)的周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$；函数 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期为 $T=\frac{\pi}{|\omega|}$，常常利用此公式来求周期.

4. AD　对于A,令 $2x-\frac{\pi}{4}\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,则 $x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}$,$k\in\mathbf{Z}$,所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x\left|x\neq\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$,故A正确;对于B,因为函数 $|f(x)|$ 的周期与 $f(x)$ 的周期相同,为 $T=\frac{\pi}{2}$,$g(x)=|\sin x|$ 的周期 $T'=\pi$,即函数 $|f(x)|$ 的周期与函数 $g(x)=|\sin x|$ 的周期不相同,故B错误;对于C,令 $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,则 $x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8},k\in\mathbf{Z}$,所以函数 $f(x)$ 图象的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8},0\right),k\in\mathbf{Z}$,故C错误;对于D,令 $k\pi-\frac{\pi}{2}<2x-\frac{\pi}{4}<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,则 $-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right)$,$k\in\mathbf{Z}$,故D正确.

5. -1　由题意得 $2\times\left(-\frac{\pi}{8}\right)+\varphi=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,即 $\varphi=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$. 又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以 $k=0$,$\varphi=\frac{\pi}{4}$,所以 $f(x)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$,所以 $f\left(\frac{2\,025\pi}{4}\right)=\tan\left(2\times\frac{2\,025\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(1\,012\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{3\pi}{4}=-1$.

6. $\left[\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right)$　函数图象过点 $(0,\sqrt{3})$,代入函数解析式可得 $\tan\varphi=\sqrt{3}$. 因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,则 $f(x)=\tan\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$. 由 $x\in[0,\pi]$,得 $\omega x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\omega\pi+\frac{\pi}{3}\right]$,函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上恰有2个零点,则 $2\pi\leqslant\omega\pi+\frac{\pi}{3}<3\pi$,解得 $\frac{5}{3}\leqslant\omega<\frac{8}{3}$.

7. B　因为 $f(n)=\tan\frac{n\pi}{3}(n\in\mathbf{N}^*)$ 是周期为3的周期函数,$f(1)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$,$f(2)=\tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$,$f(3)=\tan\pi=0$,$2\,623=674\times3+1$,所以 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2\,023)=674[f(1)+f(2)+f(3)]+f(1)=\sqrt{3}$.

8. B　因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},b\right]$,所以 $b>-\frac{\pi}{6}$,所以 $2x\in\left[-\frac{\pi}{3},2b\right]$. 根据函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},b\right]$ 上的最大值为7,最小值为3,所以 $2b<\frac{\pi}{2}$,即 $b<\frac{\pi}{4}$. 根据正切函数 $y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增,则 $f(x)=a-\sqrt{3}\tan 2x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},b\right]$ 上单调递减,所以 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=a+3=7$,解得 $a=4$,所以 $f(b)=4-\sqrt{3}\tan 2b=3$,则 $\tan 2b=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 因为 $2b\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $2b=\frac{\pi}{6}$,所以 $b=\frac{\pi}{12}$. 所以 $ab=4\times\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$.

9. ACD　对于A,由任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)=-f(x+2)$,得 $|f(x)|=|-f(x+2)|=|f(x+2)|$,即2是 $|f(x)|$ 的一个周期,而当 $-1\leqslant x\leqslant0$ 时,$|f(x)|=-\tan x$ 在 $[-1,0]$ 上单调递减;当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时,$|f(x)|=\tan x$ 在 $[0,1]$ 上单调递增,因此函数 $y=|f(x)|$ 的最小正周期为2,A正确;对于B,$f(-1)=\tan(-1)\neq0$,由函数 $f(x-1)$ 是偶函数,得 $f(-x-1)=f(x-1)$,即函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称,因此函数 $y=f(x)$ 的图象不关于点 $(-1,0)$ 对称,B错误;对于C,当 $x\in[1,3]$ 时,$x-2\in[-1,1]$,$f(x)=-f(x-2)=-\tan(x-2)$,C正确;对于D,由对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)=-f(x+2)$,得 $f(x)=-f(x+2)=f(x+4)$,即函数 $f(x)$ 的周期为4,$f(4)+f(2)=0$,$f(3)+f(1)=0$,$f(2)=-f(0)=0$,因此 $\sum\limits_{i=1}^{2\,027}f(i)=506[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(1)+f(2)+f(3)=0$,D正确.

10. BCD　A选项,因为 $k\pi-\frac{\pi}{2}<2x+\frac{\pi}{3}<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,则 $\frac{k\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}<x<\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$,所以 $f(x)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的定义域是 $\left(-\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right),k\in\mathbf{Z}$,其在定义域内的每一个区间上都是单调递增函数,但在整个定义域上没有单调性,故A错误;B选项,$f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\tan 2x$,因为 $\tan 2(-x)=\tan(-2x)=-\tan 2x$,则 $f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 是奇函数,故B正确;C选项,函数 $f(x)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期为 $T=\frac{\pi}{2}$,故C正确;D选项,令 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,解得 $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{4}$,$k\in\mathbf{Z}$,所以 $f(x)$ 图象的对称中心是 $\left(\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{6},0\right),k\in\mathbf{Z}$,故D正确.

11. $\frac{1}{2}$　因为 $y=\tan t$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增. 若函数 $f(x)=\tan\omega x$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上单调递增,则由复合函数单调性可知,只需 $t=\omega x$ 关于 x 单调递增,故只需考虑 $\omega>0$,所以 $\omega\pi\leqslant\frac{\pi}{2}$,解得 $\omega\leqslant\frac{1}{2}$,即 ω 的最大值是 $\frac{1}{2}$.

12. $\frac{\pi}{3}$　因为函数 $f(x)=3\tan\left(2x+\frac{\pi}{6}+\varphi\right)(\varphi>0)$ 为奇函数,所以由 $f(-x)=-f(x)$ 得,$3\tan\left(-2x+\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=-3\tan\left(2x+\frac{\pi}{6}+\varphi\right)$,即 $\tan\left(2x-\frac{\pi}{6}-\varphi\right)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{6}+\varphi\right)$,所以 $2x-\frac{\pi}{6}-\varphi=2x+\frac{\pi}{6}+\varphi+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,解得 $\varphi=-\frac{\pi}{6}-\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$. 因为 $\varphi>0$,取 $k=-1$,得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,所以 φ 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$.

13. 解:(1)由题意知,函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{\pi}{|\omega|}=\pi$. 因为 $\omega>0$,所以 $\omega=1$,所以 $f(x)=\tan(x+\varphi)$. 因为函数 $f(x)$ 的图象关于点 $M\left(-\frac{\pi}{16},0\right)$ 对称,所以 $-\frac{\pi}{16}+\varphi=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,即 $\varphi=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{16},k\in\mathbf{Z}$. 因为 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{16}$,故 $f(x)=\tan\left(x+\frac{\pi}{16}\right)$. 令 $-\frac{\pi}{2}+k\pi<x+\frac{\pi}{16}<\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得 $-\frac{9\pi}{16}+k\pi<x<\frac{7\pi}{16}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,所以函数的单调递增区间为 $\left(-\frac{9\pi}{16}+k\pi,\frac{7\pi}{16}+k\pi\right),k\in\mathbf{Z}$,无单调递减区间.

(2)由(1)知,$f(x)=\tan\left(x+\frac{\pi}{16}\right)$. 由 $-1\leqslant\tan\left(x+\frac{\pi}{16}\right)\leqslant\sqrt{3}$,得 $-\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant x+\frac{\pi}{16}\leqslant\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,即 $-\frac{5\pi}{16}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{13\pi}{48}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 所以不等式 $-1\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{3}$ 的解集为 $\left\{x\,\middle|\,-\frac{5\pi}{16}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{13\pi}{48}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

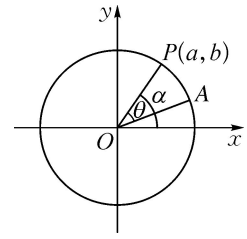
14. 解:(1) 当 $\theta=-\frac{\pi}{6}$ 时,$f(x)=x^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}x-1=\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-\frac{4}{3}$. 因为 $x\in[-1,\sqrt{3}]$,所以当 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时,$f(x)$ 取得最小值,为 $-\frac{4}{3}$,当 $x=-1$ 时,$f(x)$ 取得最大值,为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(2) 函数 $f(x)=(x+\tan\theta)^2-1-\tan^2\theta$ 是关于 x 的二次函数,它的图象的对称轴为直线 $x=-\tan\theta$. 因为函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,\sqrt{3}]$ 上是单调函数,所以 $-\tan\theta\leqslant-1$ 或 $-\tan\theta\geqslant\sqrt{3}$,即 $\tan\theta\geqslant1$ 或 $\tan\theta\leqslant-\sqrt{3}$. 因为 $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,所以 θ 的取值范围是 $\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

15. ACD　由正切函数的定义域可知 $\frac{\pi}{2}-x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$,即 $x\neq-k\pi(k\in\mathbf{Z})$,所以余切函数定义域为 $\{x\mid x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$,故 A 正确;当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时,$-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-x<0$,因为 $t=\frac{\pi}{2}-x$ 为减函数,$y=\tan t$,$t\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 为增函数,由复合函数的单调性知 $y=\cot x=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减,故 B 错误;因为 $y=\tan x$ 的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2},0\right)(k\in\mathbf{Z})$,令 $\frac{\pi}{2}-x=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,解得 $x=\frac{(1-k)\pi}{2}$,由 $k\in\mathbf{Z}$ 可知 $x=\frac{n\pi}{2}(n=1-k\in\mathbf{Z})$,即 $f(x)=\cot x$ 的对称中心为 $\left(\frac{n\pi}{2},0\right)(n\in\mathbf{Z})$,故余切函数与正切函数有相同的对称中心,故 C 正确;$y=-\tan x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度可得 $y=-\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cot x$ 的图象,故 D 正确.

课时提优 39　两角差的余弦公式

1. A　如图:



设 $P(a,b)$,又 $P(\cos\alpha,\sin\alpha)$,所以 $a=\cos\alpha,b=\sin\alpha$,则点 $A(\cos(\alpha-\theta),\sin(\alpha-\theta))$,且 $\cos(\alpha-\theta)=\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta=a\cos\theta+b\sin\theta$.

2. A　因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,$\beta$ 是第三象限角,所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$,$\sin\beta=-\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2}=-\frac{12}{13}$,所以 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\left(-\frac{3}{5}\right)\times\left(-\frac{5}{13}\right)+\frac{4}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)=-\frac{33}{65}$.

方法总结　已知 α,β 的某种三角函数值,求 $\alpha\pm\beta$ 的余弦,先要根据平方关系求出 α,β 的另一种三角函数值. 求解过程中要注意先根据角的范围判断所求三角函数值的符号,然后再将求得的函数值和已知函数值代入和角或差角的三角函数公式中求值.

3. B　由 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$,得 $\alpha+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,则 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$,所以 $\cos\alpha=\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{6}$.

4. AD　令 $\alpha=\beta=0$,则 $\cos(\alpha-\beta)=1$,$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=1$,此时 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$,故 A 正确;令 $\alpha=\beta=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,$\cos(\alpha-\beta)=1$,$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=1$,此时 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$,故 B 错误;由两角差的余弦公式可知,对于任意的 α 和 β,$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$,故 C 错误;不存在 α,β,使得 $\cos(\alpha-\beta)\neq\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$,若存在 α 和 β,则与两角差的余弦公式矛盾,故 D 正确.

5. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　$\cos87^\circ\cos57^\circ+\sin87^\circ\sin57^\circ=\cos(87^\circ-57^\circ)=\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. $-\frac{56}{65}$　因为 $\alpha,\beta\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$,所以 $\alpha+\beta\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$,$\beta-\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$,所以 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$,$\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{5}{13}$,所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left[(\alpha+\beta)-\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\cos(\alpha+\beta)\cdot$

$\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)+\sin(\alpha+\beta)\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{5}{13}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{12}{13}=-\frac{56}{65}$.

7. B　由题意,得$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$,且$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)$. 又$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=\frac{4}{5}$,即$\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{4}{5}$,所以$2-2\cos(\alpha-\beta)=\frac{4}{5}$,所以$\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$.

8. A　因为$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,$0<\beta<\frac{\pi}{2}$,所以$0<\alpha+\beta<\pi$. 由$\cos\alpha=\frac{1}{7}$,$\sin(\alpha+\beta)=\frac{5\sqrt{3}}{14}$,得$\sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{7}$,$\cos(\alpha+\beta)=\pm\frac{11}{14}$. 若$\cos(\alpha+\beta)=\frac{11}{14}$,则$\sin\beta=\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\frac{5\sqrt{3}}{14}\times\frac{1}{7}-\frac{11}{14}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}<0$,与$\sin\beta>0$矛盾,故舍去;若$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$,则$\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=-\frac{11}{14}\times\frac{1}{7}+\frac{5\sqrt{3}}{14}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{1}{2}$. 又因为$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以$\beta=\frac{\pi}{3}$.

方法总结　"给值求角":关键也是变角,把所求角用含已知角的式子表示,由所得的函数值结合该函数的单调区间求得角,有时要压缩角的取值范围.

9. AC　由已知,得$\sin\gamma=\sin\beta-\sin\alpha$,$\cos\gamma=\cos\alpha-\cos\beta$,两式分别平方相加,得$(\sin\beta-\sin\alpha)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2=1$,所以$-2\cos(\beta-\alpha)=-1$,所以$\cos(\beta-\alpha)=\frac{1}{2}$,所以A正确,B错误;因为$\alpha,\beta,\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以$\sin\gamma=\sin\beta-\sin\alpha>0$,所以$\beta>\alpha$,所以$\beta-\alpha=\frac{\pi}{3}$,所以C正确,D错误.

10. ABD　因为$f(x)=\cos 2x\cos\varphi-\sin 2x\sin\varphi=\cos(2x+\varphi)$的图象的一个对称中心为$\left(\frac{\pi}{6},0\right)$,所以$\cos\left(2\times\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=0$,则$\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,所以$\varphi=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$. 因为$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$,则$f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. 因为$f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\cos\left(2\times\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\pi=-1$,所以直线$x=\frac{5\pi}{12}$是函数$f(x)$的图象的一条对称轴,故A正确. 当$x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$时,$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$,所以函数$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$上单调递减,故B正确,$f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$,是非奇非偶函数,故C错误;当$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时,$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$,所以函数$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最小值为$\cos\pi=-1$,故D正确.

11. $-\frac{33}{65}$　由$\sin\alpha=\frac{4}{5}$,$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,得$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$. 由$\cos\beta=-\frac{5}{13}$,$\beta$是第三象限角,得$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2}=-\frac{12}{13}$,所以$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\left(-\frac{3}{5}\right)\times\left(-\frac{5}{13}\right)+\frac{4}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)=-\frac{33}{65}$.

12. $-\frac{1}{2}$　由$\cos\alpha+\cos\beta=1$,$\sin\alpha+\sin\beta=0$,分别两边平方,得$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=1$,$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=0$,两式相加整理,得$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}$,即$\cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}$.

13. **解**:(1) 由题意,可得$f(x)$

$$=\frac{\tan(\pi-x)\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\cdot\cos(-x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$

$$=\frac{-\tan x\cdot\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)\cdot\cos x}{\sin x}$$

$=\frac{-\tan x\cdot(-\cos x)\cdot\cos x}{\sin x}=\cos x$,所以$f(x)=\cos x$. 因为$f(\theta)=\cos\theta=-\frac{1}{2}$,且$\theta$是$\triangle ABC$的一个内角,所以$\theta=\frac{2\pi}{3}$.

(2) 因为$f(\alpha-\beta)=\frac{12}{13}$,所以$\cos(\alpha-\beta)=\frac{12}{13}$. 因为$\frac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\frac{3\pi}{4}$,所以$0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{4}$,所以$\sin(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\beta)}=\frac{5}{13}$. 因为$f\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=-\frac{3}{5}$,所以$\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$. 因为$\frac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\frac{3\pi}{4}$,所以$\pi<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$,所以$\cos(\alpha+\beta)=-\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)}=-\frac{4}{5}$. 所以$f(2\alpha)=\cos 2\alpha=\cos[(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)]=\cos(\alpha-\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)=\frac{12}{13}\times\left(-\frac{4}{5}\right)-\frac{5}{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{33}{65}$.

14. **解**:(1)因为$\sin\alpha=-\frac{1}{2}$,且$m<0$,所以点A在第三象限,则$\alpha=\frac{7\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

(2)由$f(\theta)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$,得$\sin\left(\frac{7\pi}{6}+\theta\right)=-\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$,即$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. 由$\theta\in\left(\pi,\frac{4\pi}{3}\right)$,得$\theta+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right)$,所以$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)<0$,得$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=$

$-\sqrt{1-\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$，所以 $\cos\theta=\cos\left[\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)\times\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，得 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=1$.

(3)易知 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos(\alpha+\theta)=-\frac{\sqrt{2}}{10}$. 由 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}$ 可知，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\frac{3\pi}{4}<\alpha+\theta<2\pi$. 由 $\cos(\alpha+\theta)=-\frac{\sqrt{2}}{10}>-\frac{\sqrt{2}}{2}$，可知 $\frac{5\pi}{4}<\alpha+\theta<\frac{3\pi}{2}$，所以 $\sin(\alpha+\theta)=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$，从而 $\cos\theta=\cos[(\alpha+\theta)-\alpha]=\cos(\alpha+\theta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\theta)\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{10}\times\frac{\sqrt{5}}{5}+\left(-\frac{7\sqrt{2}}{10}\right)\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

15. ACD　对于 A，由小正方形的面积为 1，大正方形的面积为 5，得小正方形的边长为 1，大正方形的边长为 $\sqrt{5}$，且每个直角三角形的面积为 $\frac{1}{4}\times(5-1)=1$，故 A 正确；对于 B，设直角三角形的直角边分别为 a，b（其中 $b>a$），由 $\frac{1}{2}ab=1$，可得 $ab=2$，则 $b-a=\sqrt{(b-a)^2}=\sqrt{a^2+b^2-2ab}=\sqrt{5-2\times2}=1$，联立方程组，解得 $a=1$，$b=2$，所以 $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$，所以 $\sin\alpha=\frac{1}{2}\sin\beta$，故 B 错误；对于 C，因为 $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$，所以 $\cos\alpha=2\cos\beta$，故 C 正确；对于 D，$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$，故 D 正确.

课时提优 40　两角和与差的正弦、余弦、正切公式

1. B　$\sin 40^\circ\cos 160^\circ-\cos 40^\circ\sin 20^\circ=\sin 40^\circ\cos 160^\circ-\cos 40^\circ\sin 160^\circ=\sin(40^\circ-160^\circ)=\sin(-120^\circ)=-\sin 120^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

方法总结　在利用公式解含有非特殊角的三角函数式的求值问题时，要先把非特殊角转化为特殊角的差（或同一个非特殊角与特殊角的差），利用公式直接化简求值，在转化过程中，充分利用诱导公式，构造出两角差的正、余弦公式的结构形式，正确地顺用公式或逆用公式求值.

2. D　$\tan(2\alpha+\beta)=\tan[\alpha+(\alpha+\beta)]=\frac{\tan\alpha+\tan(\alpha+\beta)}{1-\tan\alpha\tan(\alpha+\beta)}=\frac{3-5}{1-3\times(-5)}=-\frac{1}{8}$.

3. A　因为 α 为锐角，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$. 因为 α，β 为锐角，所以 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$. 因为 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}$，所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$，所以 $\sin\beta=\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{7}{25}$.

4. BC　已知 α 为第一象限角，且 $\tan\alpha=2$，则 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2$，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$. 同理 β 为第三象限角，则 $\sin\beta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sin\alpha\sin\beta=-\frac{4}{5}$，$\cos\alpha\cos\beta=-\frac{1}{5}$，C 正确，D 错误；$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-1$，A 错误；$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}$，B 正确.

5. 5　由 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$，$\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$ 可得 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{2}=\frac{5}{12}$，$\cos\alpha\sin\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{2}=\frac{1}{12}$，故 $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}=\frac{\frac{5}{12}}{\frac{1}{12}}=5$.

6. $-\frac{2}{3}$　原式 $=\sin\left(x-\frac{3\pi}{10}\right)\cos\left(y-\frac{\pi}{5}\right)-\sin\left[\frac{\pi}{2}+\left(x-\frac{3\pi}{10}\right)\right]\cos\left[\frac{\pi}{2}+\left(y-\frac{\pi}{5}\right)\right]=\sin\left(x-\frac{3\pi}{10}\right)\cos\left(y-\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(x-\frac{3\pi}{10}\right)\sin\left(y-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\left[\left(x-\frac{3\pi}{10}\right)+\left(y-\frac{\pi}{5}\right)\right]=\sin\left(x+y-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos(x+y)=-\frac{2}{3}$.

7. B　由 $\sin\alpha+\cos\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，两边平方得，$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{8}{9}$　①；由 $\cos\alpha+\sin\beta=m$，两边平方得，$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=m^2$　②. ①＋②得 $1+2\sin\alpha\cos\beta+2\cos\alpha\sin\beta+1=\frac{8}{9}+m^2$，即 $2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)=-\frac{10}{9}+m^2$，即 $2\sin(\alpha+\beta)=-\frac{10}{9}+m^2$，所以 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{m^2}{2}-\frac{5}{9}$.

8. A　因为 $a=(1+\tan 3^\circ)(1+\tan 42^\circ)=1+\tan 3^\circ+\tan 42^\circ+\tan 42^\circ\tan 3^\circ$，$\tan(42^\circ+3^\circ)=\frac{\tan 42^\circ+\tan 3^\circ}{1-\tan 42^\circ\tan 3^\circ}=1$，所以 $\tan 42^\circ+\tan 3^\circ+\tan 42^\circ\tan 3^\circ=1$，所以 $a=1+1=2$. $b=\sin 72^\circ\cos 42^\circ-\sin 42^\circ\cos 72^\circ=\sin(72^\circ-42^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$，则 $\log_b a=\log_{\frac{1}{2}}2=-1$.

9. AD　对于选项 A，由辅助角公式得 $\sqrt{2}\sin 15^\circ+\sqrt{2}\cos 15^\circ=2\sin(15^\circ+45^\circ)=2\sin 60^\circ=\sqrt{3}$，故选项 A 正确；对于选项 B，$\cos^2 15^\circ-\sin 15^\circ\cos 75^\circ=\sin 75^\circ\cos 15^\circ-\sin 15^\circ\cos 75^\circ=$

$\sin(75°-15°)=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故选项 B 错误；对于选项 C，$\frac{\tan 30°}{1-\tan^2 30°}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故选项 C 错误；对于选项 D，$\frac{1+\tan 15°}{1-\tan 15°}=\frac{\tan 45°+\tan 15°}{1-\tan 15°\tan 45°}=\tan(45°+15°)=\tan 60°=\sqrt{3}$，故选项 D 正确.

10. BC　因为 $\tan A,\tan B$ 是方程 $3x^2-6x+1=0$ 的两根，所以 $\tan A+\tan B=2,\tan A\tan B=\frac{1}{3}$，所以 $\tan A>0,\tan B>0$，则 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}=3$，所以 $\tan C=\tan[\pi-(A+B)]=-\tan(A+B)=-3<0$，又 $C\in(0,\pi)$，所以 $C\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，即 C 为钝角，则△ABC 是钝角三角形，故 A 错误，B 正确；因为 $A+B<\frac{\pi}{2}$，所以 $A<\frac{\pi}{2}-B$ 或 $B<\frac{\pi}{2}-A$，所以 $\sin A<\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$，则 $\sin A<\cos B$，故 D 错误；$\sin B<\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)$，即 $\sin B<\cos A$，故 C 正确.

11. 7　$\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha-\cos(\beta-\alpha)\sin\alpha=\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha=\sin[(\alpha-\beta)-\alpha]=-\sin\beta=\frac{3}{5}$，则 $\sin\beta=-\frac{3}{5}$. 又 $\beta\in\left(\frac{19\pi}{6},\frac{13\pi}{4}\right)$，所以 $\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\frac{4}{5}$，则 $\tan\beta=\frac{3}{4}$，则 $\tan\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\tan\beta}{1-\tan\beta}=7$.

12. $\frac{11}{9}$　因为 $\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)=\pi$，$\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)=\sin\left[\pi-\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$，$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$，所以 $\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{3}+1-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{4}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{11}{9}$.

13. 解：(1) 选①，$2\sin(2022\pi-\alpha)=\cos(2022\pi+\alpha)$，由诱导公式得 $-2\sin\alpha=\cos\alpha$，则 $\frac{3\sin\alpha+4\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{3\sin\alpha-8\sin\alpha}{-2\sin\alpha-\sin\alpha}=\frac{5}{3}$. 选②，$\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，两边平方得 $\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=\frac{1}{5}$，所以 $\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{2}{5}$. 又 $\alpha\in(0,\pi)$，所以 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，即 $\sin\alpha>0,\cos\alpha<0$，从而由 $\begin{cases}\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5},\\ \sin\alpha\cos\alpha=-\frac{2}{5}\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5},\\ \cos\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5},\\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}\end{cases}$（舍去），$\frac{3\sin\alpha+4\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{3\times\frac{\sqrt{5}}{5}+4\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{-\frac{2\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{5}}{5}}=\frac{5}{3}$.

(2) 选①，由(1)知 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，即 $\sin\alpha>0,\cos\alpha<0$. 由(1)知 $\cos\alpha=-2\sin\alpha$，所以 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+4\sin^2\alpha=1$，所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$（负值舍去），所以 $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$. $\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\sin\beta=\sqrt{1-\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 又 $\alpha+\beta\in(\pi,2\pi)$，所以 $\alpha+\beta=\frac{7\pi}{4}$.

选②，由(1) 得 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 因为 $\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\sin\beta=\sqrt{1-\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 又 $\alpha+\beta\in(\pi,2\pi)$，所以 $\alpha+\beta=\frac{7\pi}{4}$.

14. 解：(1)由 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，得 $\alpha-\frac{\pi}{4}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{3}{5}$，所以 $\sin\alpha=\sin\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}=\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

(2) 由 $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，得 $\frac{5\pi}{4}+\beta\in\left(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right)$，则 $\cos\left(\frac{5\pi}{4}+\beta\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{5}{4}\pi+\beta\right)}=-\frac{5}{13}$，所以 $\cos(\alpha+\beta)=-\cos\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\left(\frac{5\pi}{4}+\beta\right)\right]=-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{4}+\beta\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{4}+\beta\right)=-\frac{4}{5}\times\left(-\frac{5}{13}\right)+\frac{3}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)=-\frac{16}{65}$.

15. (1) **解**：函数 $f(x)$ 的“源向量”为 $\overrightarrow{OM}=(1,\sqrt{3})$，所以 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，$x\in[0,\pi]$，则 $\frac{\pi}{3}\leqslant x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{4\pi}{3}$，当 $x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)_{\max}=2$，当 $x+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$ 时，$f(x)_{\min}=-\sqrt{3}$，所以函数 $f(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{3},2]$.

(2) **证明**：因为 $|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{3}$，所以 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=2\sqrt{3}$，则 $AB=6$. 又 $g(x)=\sqrt{3}\sin(x+\alpha)=\sqrt{3}\cos\alpha\sin x+\sqrt{3}\sin\alpha\cos x$，

所以 $M(\sqrt{3}\cos\alpha,\sqrt{3}\sin\alpha)$，且 $C(0,2\sqrt{3})$，$A(-3,-\sqrt{3})$，$B(3,-\sqrt{3})$，从而 $\overrightarrow{MA}=(-3-\sqrt{3}\cos\alpha,-\sqrt{3}-\sqrt{3}\sin\alpha)$，$\overrightarrow{MB}=(3-\sqrt{3}\cos\alpha,-\sqrt{3}-\sqrt{3}\sin\alpha)$，$\overrightarrow{MC}=(-\sqrt{3}\cos\alpha,2\sqrt{3}-\sqrt{3}\sin\alpha)$，则 $\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=(3+\sqrt{3}\cos\alpha)^2+(\sqrt{3}+\sqrt{3}\sin\alpha)^2+(3-\sqrt{3}\cos\alpha)^2+(\sqrt{3}+\sqrt{3}\sin\alpha)^2+(\sqrt{3}\cos\alpha)^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{3}\sin\alpha)^2=9\cos^2\alpha+9\sin^2\alpha+36=45$. 因此，$\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2$ 为定值.

课时提优 41　二倍角的正弦、余弦、正切公式

1. C　由题意可得 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2-1=-\frac{7}{9}$.

2. C　因为 $\frac{\sin 40^\circ\sin 80^\circ}{\cos 40^\circ+\cos 60^\circ}=\frac{\sin(60^\circ-20^\circ)\sin(60^\circ+20^\circ)}{\cos 40^\circ+\frac{1}{2}}=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ\right)^2-\left(\frac{1}{2}\sin 20^\circ\right)^2}{\frac{3}{2}-2\sin^2 20^\circ}=\frac{\frac{3}{4}\cos^2 20^\circ-\frac{1}{4}\sin^2 20^\circ}{2\left(\frac{3}{4}-\sin^2 20^\circ\right)}=\frac{\frac{3}{4}-\sin^2 20^\circ}{2\left(\frac{3}{4}-\sin^2 20^\circ\right)}=\frac{1}{2}$，所以原式 $=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

方法总结　对于给角求值问题，一般有两类：

(1) 直接正用、逆用二倍角公式，结合诱导公式和同角三角函数的基本关系对已知式子进行转化，一般可以化为特殊角.

(2) 若形式为几个非特殊角的三角函数式相乘，则一般逆用二倍角的正弦公式，在求解过程中，需利用互余关系配凑出应用二倍角公式的条件，使得问题出现可以连用二倍角的正弦公式的形式.

3. D　原式 $=\frac{-\frac{1}{2}(1-2\sin^2 9^\circ)}{\sin 36^\circ\cdot(2-4\sin^2 18^\circ)}=\frac{-\frac{1}{2}\cos 18^\circ}{2\sin 36^\circ\cos 36^\circ}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos 18^\circ}{\sin 72^\circ}=-\frac{1}{2}$.

4. CD　对于 A，B，当 $A=B=\frac{\pi}{6}$，$C=\frac{2\pi}{3}$ 时，$\sin 2A=\sin\frac{\pi}{3}=\sin 2B$，但由 $C=\frac{2\pi}{3}$ 知 $\triangle ABC$ 不是等腰直角三角形；此时 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan\frac{\pi}{6}+\tan\frac{\pi}{6}+\tan\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\tan A\tan B\tan C=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times(-\sqrt{3})=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$，但由 $C=\frac{2\pi}{3}$ 知 $\triangle ABC$ 不是锐角三角形，故 A，B 错误；对于 C，若 $\cos 2A=\cos 2B$，则 $2\cos^2 A=2\cos^2 B$，所以 $\cos A=\cos B$（或 $\cos A=-\cos B$ 舍去），所以 $A=B$，从而 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，故 C 正确；对于 D，若 $\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A)=1$，则有 $1=\cos(A-B)\cdot\cos(B-C)\cos(C-A)\leqslant|\cos(A-B)||\cos(B-C)||\cos(C-A)|\leqslant 1$. 故每个不等号两边都相等，从而 $|\cos(A-B)|=|\cos(B-C)|=|\cos(C-A)|=1$，而 $A,B,C\in(0,\pi)$，故 $A-B,B-C,C-A\in(-\pi,\pi)$，所以 $A-B=B-C=C-A=0$，所以 $A=B=C$，所以 $\triangle ABC$ 为正三角形，故 D 正确.

5. $\frac{1}{2}$　$\frac{\sin 10^\circ\sin 100^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{\frac{1}{2}\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{1}{2}$.

6. $-\frac{\pi}{2}$ 或 $-\frac{\pi}{6}$　由题意得 $2+3\sin\alpha=1-2\sin^2\alpha$，即 $2\sin^2\alpha+3\sin\alpha+1=0$，解得 $\sin\alpha=-1$ 或 $-\frac{1}{2}$. 因为 $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $\alpha=-\frac{\pi}{2}$ 或 $-\frac{\pi}{6}$.

7. B　由 α 为锐角，得 $\frac{\pi}{3}<\alpha+\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{6}$，而 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left[\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=\sin\left[2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right]=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=2\times\frac{\sqrt{6}}{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

8. D　因为 $\cos\alpha\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\alpha\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $\cos\alpha\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\alpha\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\sin\alpha\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]=\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$，所以 $\cos\alpha\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=0$，所以 $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=0$，所以 $2\alpha+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以 $2\alpha=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以 $\tan\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}+k\pi\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{3-1}=2+\sqrt{3}$.

9. BC　$\tan 48^\circ=\tan(45^\circ+3^\circ)=\frac{1+\tan 3^\circ}{1-\tan 3^\circ}$，故 A 错误；$\tan 48^\circ=\tan(60^\circ-12^\circ)=\frac{\sqrt{3}-\tan 12^\circ}{1+\sqrt{3}\tan 12^\circ}$，故 B 正确；$\tan 48^\circ=\tan(2\times 24^\circ)=\frac{2\tan 24^\circ}{1-\tan^2 24^\circ}$，故 C 正确；$\tan 48^\circ=\frac{\sin 48^\circ}{\cos 48^\circ}=\frac{2\sin 48^\circ\cos 48^\circ}{2\cos^2 48^\circ}=\frac{\sin 96^\circ}{1+\cos 96^\circ}=\frac{\sin 96^\circ}{1-\sin 6^\circ}$，故 D 错误.

10. BC　由题意得 $\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=2$，A 错误；因为 α 是第三象限角，所以 $\sin\alpha<0$，所以由 $\begin{cases}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\\ \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha=2\end{cases}$ 解得 $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，B 正确；$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{4}{5}$，C 正确；$\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=\frac{1}{3}$，D 错误.

11. $-\frac{1}{2}$　$\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left[\left(2\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{2}\right]=-\cos\left(2\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-1=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-1=-\frac{1}{2}$.

12. $3+2\sqrt{2}$　因为 $\tan 2\theta=-2\sqrt{2}$，所以 $\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=-2\sqrt{2}$，整理得 $\sqrt{2}\tan^2\theta-\tan\theta-\sqrt{2}=0$，解得 $\tan\theta=\sqrt{2}$ 或 $\tan\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，所以 $\tan\theta<0$，即 $\tan\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin\theta-1}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)}=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=3+2\sqrt{2}.$$

13. 解：(1)因为 $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{25}$，可得 $2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{24}{25}$，所以 $\sin 2\alpha=-\frac{24}{25}$.

(2)因为 $\alpha\in(0,\pi)$ 且 $2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{24}{25}<0$，所以 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，则 $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{49}{25}$. 因为 $\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$，所以 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{7}{5}$. 由 $\begin{cases}\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5},\\ \sin\alpha-\cos\alpha=\frac{7}{5}\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\sin\alpha=\frac{4}{5},\\ \cos\alpha=-\frac{3}{5},\end{cases}$ 所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{4}{3}$，所以 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{1-\frac{4}{3}}{1+\frac{4}{3}}=-\frac{1}{7}$.

14. 解：(1)由点 P 在单位圆上，且 α 是锐角，可得 $m>0$. 又 $m^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2=1$，所以 $m=\frac{4}{5}$，则 $\tan\alpha=\frac{3}{4}$.

(2)因为锐角 α 的终边与单位圆相交于点 $P\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$，所以 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，可得 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{7}{25}$，$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{24}{25}$，所以 $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{7}{25}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{24}{25}=-\frac{17\sqrt{2}}{50}$.

(3)因为 α 为锐角，所以 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. 又 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$，所以 $0<\alpha+\beta<\pi$. 因为 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{5}{13}$，所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{12}{13}$，所以 $\sin\beta=\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\frac{12}{13}\times\frac{4}{5}-\left(-\frac{5}{13}\right)\times\frac{3}{5}=\frac{63}{65}$.

15. 解：(1) 设 $A=\sin^2x+\sin^2\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$，$B=\cos^2x+\cos^2\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+\cos^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$，所以 $A+B=3$，而 $B-A=\cos 2x+\cos\left(2x-\frac{4\pi}{3}\right)+\cos\left(2x+\frac{4\pi}{3}\right)=\cos 2x+\cos 2x\cdot\cos\frac{4\pi}{3}+\sin 2x\sin\frac{4\pi}{3}+\cos 2x\cos\frac{4\pi}{3}-\sin 2x\sin\frac{4\pi}{3}=0$，所以 $A=\sin^2x+\sin^2\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$.

(2) 设 $A=\cos\frac{\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}\cos\frac{7\pi}{11}\cos\frac{9\pi}{11}$，$B=\sin\frac{\pi}{11}\sin\frac{3\pi}{11}\cdot\sin\frac{5\pi}{11}\sin\frac{7\pi}{11}\sin\frac{9\pi}{11}$，所以 $AB=\frac{1}{32}\sin\frac{2\pi}{11}\sin\frac{6\pi}{11}\sin\frac{10\pi}{11}\sin\frac{14\pi}{11}\cdot\sin\frac{18\pi}{11}=\frac{1}{32}\sin\left(\pi-\frac{9\pi}{11}\right)\sin\left(\pi-\frac{5\pi}{11}\right)\sin\left(\pi-\frac{\pi}{11}\right)\sin\left(\pi+\frac{3\pi}{11}\right)\sin\left(\pi+\frac{7\pi}{11}\right)=\frac{1}{32}\sin\frac{9\pi}{11}\sin\frac{5\pi}{11}\sin\frac{\pi}{11}\cdot\left(-\sin\frac{3\pi}{11}\right)\cdot\left(-\sin\frac{7\pi}{11}\right)=\frac{1}{32}\sin\frac{\pi}{11}\sin\frac{3\pi}{11}\sin\frac{5\pi}{11}\sin\frac{7\pi}{11}\sin\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{32}B$，所以 $A=\cos\frac{\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}\cos\frac{7\pi}{11}\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{32}$.

方法总结　三角函数式化简、证明的常用技巧：

(1) 特殊角的三角函数与特殊值的互化.

(2) 对于分式形式，应分别对分子、分母进行变形处理，有公因式的提取公因式后进行约分.

(3) 对于二次根式，注意二倍角公式的逆用.

(4) 利用角与角之间的隐含关系，如互余、互补等.

(5) 利用“1”的恒等变形，如 $\tan 45°=1$，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 等.

课时提优 42　简单的三角恒等变换

1. C　**解法 1**　因为 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\sqrt{5}-2$.

解法 2　因为 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}>0$，$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}>0$，所以 α 的终边落在第一象限，所以 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边落在第一或第三象限，即 $\tan\frac{\alpha}{2}>0$，所以 $\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}}=\sqrt{5}-2$.

方法总结　利用半角公式求值的思路

(1) 看角：若已知三角函数式中的角是待求三角函数式中角的两倍，则求解时常常借助半角公式求解.

(2) 明范围：由于半角公式求值常涉及符号问题，因此求解时务必依据角的范围，求出相应半角的范围.

(3) 选公式：当涉及半角公式的正切值时，常用 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$，其优点是计算时可避免因开方带来的求角的范围问题；涉及半角公式的正弦、余弦值时，常先利用 $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$，$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$ 计算.

(4) 下结论:结合(2)求值.

2. A　由题意得$(\sin\alpha+\cos\beta)^2=1$,$(\cos\alpha-\sin\beta)^2=\frac{1}{4}$,即$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{1}{2}$,$\cos^2\alpha-2\cos\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{1}{4}$,两式相加得$2+2(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)=\frac{3}{4}$,即$2+2\sin(\alpha-\beta)=\frac{3}{4}$,化简得$\sin(\alpha-\beta)=-\frac{5}{8}$,所以$\cos(2\alpha-2\beta)=1-2\sin^2(\alpha-\beta)=\frac{7}{32}$.

3. A　因为$a=\frac{1}{2}\cos 7^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7^\circ=\cos 60^\circ\cos 7^\circ-\sin 60^\circ\cdot\sin 7^\circ=\cos 67^\circ=\sin 23^\circ$,$b=\frac{2\tan 12^\circ}{1+\tan^2 12^\circ}=\frac{\frac{2\sin 12^\circ}{\cos 12^\circ}}{1+\frac{\sin^2 12^\circ}{\cos^2 12^\circ}}=\frac{2\sin 12^\circ\cos 12^\circ}{\sin^2 12^\circ+\cos^2 12^\circ}=\sin 24^\circ$,$c=\sqrt{\frac{1-\cos 44^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1-(1-2\sin^2 22^\circ)}{2}}=\sin 22^\circ$.由函数$y=\sin x$的性质可知,$c<a<b$.

4. ABC　对于A,$\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\beta}=\frac{2\sin\alpha\cos\beta}{2\cos\beta}=\sin\alpha$,故A正确;对于B,$4\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha$,故B正确;对于C,$\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\sin\alpha$,故C正确;对于D,$\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{1-(1-2\sin^2\alpha)}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\tan\alpha\neq\sin\alpha$,故D错误.

5. $2\sqrt{2}$　**解法1**　$\tan\frac{\pi}{8}+\tan\frac{3\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}+\frac{1-\cos\frac{3\pi}{4}}{\sin\frac{3\pi}{4}}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}+1+\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{2}$.

解法2　因为$\tan\frac{\pi}{8}>0$,所以$\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$.因为$\tan\frac{3\pi}{8}>0$,所以$\tan\frac{3\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{3\pi}{4}}{1+\cos\frac{3\pi}{4}}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$,所以$\tan\frac{\pi}{8}+\tan\frac{3\pi}{8}=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)=2\sqrt{2}$.

6. $\sqrt{3}$　因为$\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以$\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{3}$.

7. A　由$\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2}{3}$,得$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha=\frac{1}{3}$,即$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$,则$\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{7}{9}$,故$\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)=-\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right]=-\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{7}{9}$.

8. B　因为$\sqrt{2}\sin A+\sin B\sin C=\sqrt{2}\sin A+\frac{\cos(B-C)-\cos(B+C)}{2}\leqslant\sqrt{2}\sin A+\frac{1+\cos A}{2}=\sqrt{2}\sin A+\frac{1}{2}\cos A+\frac{1}{2}\leqslant\sqrt{2+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}=2$,当且仅当$\sin B=\sin C=\frac{\sqrt{6}}{3}$,$\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$时,等号成立,所以$\sqrt{2}\sin A+\sin B\sin C$的最大值为2.

9. ACD　对于A,$\cos 10^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ=2\sin(30^\circ-10^\circ)=2\sin 20^\circ$,故A正确;对于B,$\cos 10^\circ+\sqrt{3}\sin 10^\circ=2\sin(30^\circ+10^\circ)=2\sin 40^\circ$,故B错误;对于C,$(\sin 10^\circ+\cos 10^\circ)^2=\sin^2 10^\circ+\cos^2 10^\circ+2\sin 10^\circ\cos 10^\circ=1+\sin 20^\circ$,故C正确;对于D,$\tan 20^\circ+\tan 40^\circ+\sqrt{3}\tan 20^\circ\tan 40^\circ=\tan(20^\circ+40^\circ)(1-\tan 20^\circ\tan 40^\circ)+\sqrt{3}\tan 20^\circ\tan 40^\circ=\sqrt{3}(1-\tan 20^\circ\tan 40^\circ)+\sqrt{3}\tan 20^\circ\tan 40^\circ=\sqrt{3}$,故D正确.

10. ABC　因为$\sin\alpha+\sin\beta=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$,$\cos\alpha+\cos\beta=\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$,所以$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$,$\cos\alpha-\cos\beta=\cos\alpha+\cos(\pi-\beta)=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.对于A,$\sin 5\theta+\sin 3\theta=2\sin 4\theta\cos\theta$,A错误;对于B,$\cos 3\theta-\cos 5\theta=-2\sin 4\theta\cdot\sin(-\theta)=2\sin 4\theta\sin\theta$,B错误;对于C,$\sin 3\theta-\sin 5\theta=-2\cos 4\theta\sin\theta$,C错误;对于D,$\cos 3\theta+\cos 5\theta=2\cos 4\theta\cos\theta$,D正确.

11. $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$　$\cos^2 A+\cos^2 B=\frac{1+\cos 2A}{2}+\frac{1+\cos 2B}{2}=1+$

$\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)=1+\cos\frac{2A+2B}{2}\cdot\cos\frac{2A-2B}{2}=1+\cos(A+B)\cos(A-B)$. 因为 $A+B=\frac{2\pi}{3}$，所以 $\cos^2A+\cos^2B=1+\cos\frac{2\pi}{3}\cos\left(2A-\frac{2\pi}{3}\right)=1-\frac{1}{2}\cos\left(2A-\frac{2\pi}{3}\right)$. 因为 $\cos\left(2A-\frac{2\pi}{3}\right)\in[-1,1]$，所以 $\cos^2A+\cos^2B\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$.

12. 5　由 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，得 $\left(\frac{m-3}{m+5}\right)^2+\left(\frac{4-2m}{m+5}\right)^2=1$，解得 $m=0$ 或 $m=8$. 当 $m=0$ 时，$\sin\theta<0$，不符合题意，舍去；当 $m=8$ 时，$\sin\theta=\frac{5}{13}$，$\cos\theta=-\frac{12}{13}$，所以 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1-\left(-\frac{12}{13}\right)}{\frac{5}{13}}=5$.

13. 证明：(1)根据二倍角公式与和差化积恒等式可得 $\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}-\frac{1-\cos 2\beta}{2}=\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$.

(2)左边 $=\frac{1}{2}[\cos(\beta-\gamma)-\cos(2\alpha+\beta+\gamma)]=\frac{1}{2}[\cos(\beta-\gamma)-\cos(\alpha+\pi-\omega)]=\frac{1}{2}[\cos(\beta-\gamma)+\cos(\alpha-\omega)]$. 右边 $=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\omega)-\cos(\alpha+\omega)]+\frac{1}{2}[\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)]=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\omega)+\cos(\beta-\gamma)]-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\omega)+\cos(\beta+\gamma)]$. 因为 $\alpha+\beta+\gamma+\omega=\pi$，所以 $\cos(\alpha+\omega)+\cos(\beta+\gamma)=0$，故 $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma)=\sin\alpha\sin\omega+\sin\beta\sin\gamma$.

14. 解：(1)由题意，$\angle MON=\frac{\pi}{3}$，扇形半径即 $OM=30$ m，则扇形 OMN 的面积为 $\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\times30^2=150\pi$ m^2.

(2)因为 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，所以在 Rt△OBC 中，$BC=30\sin\frac{\pi}{4}=15\sqrt{2}$，$OB=30\cos\frac{\pi}{4}=15\sqrt{2}$. 在 Rt△$OAD$ 中，$AD=BC=15\sqrt{2}$，则 $OA=\frac{AD}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\times15\sqrt{2}=5\sqrt{6}$，所以 $AB=OB-OA=15\sqrt{2}-5\sqrt{6}$，所以矩形 $ABCD$ 的面积 $S=AB\cdot BC=(15\sqrt{2}-5\sqrt{6})\times15\sqrt{2}=450-150\sqrt{3}$. 所以当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，矩形 $ABCD$ 的面积 S 为 $450-150\sqrt{3}$ m^2.

(3)在 Rt△OBC 中，$BC=30\sin\alpha$，$OB=30\cos\alpha$，在 Rt△OAD 中，$AD=BC=30\sin\alpha$，则 $OA=\frac{AD}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\times30\sin\alpha=10\sqrt{3}\sin\alpha$，所以 $AB=OB-OA=30\cos\alpha-10\sqrt{3}\sin\alpha$，则矩形 $ABCD$ 的面积 $S(\alpha)=AB\cdot BC=30\sin\alpha(30\cos\alpha-10\sqrt{3}\sin\alpha)=300\sqrt{3}(\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha)=150\sqrt{3}(\sqrt{3}\sin 2\alpha+\cos 2\alpha-1)=300\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\cos 2\alpha-\frac{1}{2}\right)=300\sqrt{3}\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-150\sqrt{3}$，$0<\alpha<\frac{\pi}{3}$. 由于 $\frac{\pi}{6}<2\alpha+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，故当 $2\alpha+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $\alpha=\frac{\pi}{6}$ 时，$S(\alpha)_{\max}=150\sqrt{3}$. 所以当 $\alpha=\frac{\pi}{6}$ 时，$S(\alpha)$ 取得最大值，最大值为 $150\sqrt{3}$.

15. 解：(1) $f_6(x)=\sin^6\omega x+\cos^6\omega x=(\sin^2\omega x+\cos^2\omega x)^3-3\sin^2\omega x\cos^2\omega x(\sin^2\omega x+\cos^2\omega x)=1-3\sin^2\omega x\cos^2\omega x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\omega x=1-\frac{3(1-\cos 4\omega x)}{8}=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4\omega x$. 由 $f_6(x)$ 的最小正周期为 π，得 $T=\frac{2\pi}{4\omega}=\pi$，即 $\omega=\frac{1}{2}$.

(2) 设 $F(x)=\frac{f_8(x)}{f_4(x)}$，依题意可知 $\forall x_1,x_2\in\left[\frac{\pi}{16},\frac{\pi}{12}\right]$，$x_1<x_2$，恒有 $F(x_1)<F(x_2)$，即 $F(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{16},\frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递增. 由 $f_4(x)=\sin^4\omega x+\cos^4\omega x=(\sin^2\omega x+\cos^2\omega x)^2-2\sin^2\omega x\cdot\cos^2\omega x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\omega x$，$F(x)=\frac{f_8(x)}{f_4(x)}=\frac{\sin^8\omega x+\cos^8\omega x}{\sin^4\omega x+\cos^4\omega x}=\frac{(\sin^4\omega x+\cos^4\omega x)^2-2\sin^4\omega x\cos^4\omega x}{\sin^4\omega x+\cos^4\omega x}=\sin^4\omega x+\cos^4\omega x-\frac{2\sin^4\omega x\cos^4\omega x}{\sin^4\omega x+\cos^4\omega x}=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\omega x-\frac{\frac{1}{8}\sin^4 2\omega x}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2\omega x}=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\omega x+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\sin^4 2\omega x-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2\omega x}=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\omega x+\frac{1+\frac{1}{2}\sin^2 2\omega x}{2}-\frac{1}{2-\sin^2 2\omega x}=1+\frac{2-\sin^2 2\omega x}{4}-\frac{1}{2-\sin^2 2\omega x}$. 令 $t=2-\sin^2 2\omega x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 4\omega x$，此时函数 $y=1+\frac{t}{4}-\frac{1}{t}$ 单调递增，从而 $t=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 4\omega x$ 在 $\left[\frac{\pi}{16},\frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递增，注意到 $y=\cos x$ 的单调递增区间为 $[2k\pi-\pi,2k\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $\left[\frac{\omega\pi}{4},\frac{\omega\pi}{3}\right]\subseteq[2k\pi-\pi,2k\pi]$，即 $\begin{cases}\frac{\omega\pi}{4}\geqslant2k\pi-\pi,\\ \frac{\omega\pi}{3}\leqslant2k\pi,\end{cases}$ 解得 $8k-4\leqslant\omega\leqslant6k$. 注意到 $\omega>0$，所以当 $k=1$ 时，$4\leqslant\omega\leqslant6$；当 $k=2$ 时，$12\leqslant\omega\leqslant12$，即 $\omega=12$；当 $k\geqslant3$ 时，$8k-4>6k$，此时 ω 无解. 综上可知，$\omega\in[4,6]\cup\{12\}$.

课时提优 43　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$(1)

1. A　要得到函数 $y=3\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 图象，只需将函数 $y=3\sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度.

2. D　$f(x)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$.

3. A　由图知，当 $x=0$ 时，$2\sin\varphi=-1$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$. 由 $\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega}<\frac{7\pi}{18}$，得 $\omega>\frac{18}{7}$，由 $\frac{2\pi}{\omega}>\frac{7\pi}{18}$，得 $\omega<\frac{36}{7}$，所

以$\frac{18}{7}<\omega<\frac{36}{7}$. 当 $x=\frac{7\pi}{18}$时,$\sin\left(\frac{7\pi}{18}\omega-\frac{\pi}{6}\right)=0$,则$\frac{7\pi}{18}\omega-\frac{\pi}{6}=\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,解得 $\omega=3+\frac{36}{7}k(k\in\mathbf{Z})$,所以 $\omega=3$,所以 $\omega\cdot\varphi=-\frac{\pi}{2}$.

4. AC　由 $y=\sin x$ 的图象变为 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象有两种图象变换方式,第一种:先平移,后伸缩,向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度,再将各点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$;第二种:先伸缩,后平移,将各点横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$,再向左平移$\frac{\pi}{8}$个单位长度.

方法总结　三角函数图象变换的法一(先平移后伸缩)和法二(先伸缩后平移)需要注意以下两点:(1)两种变换中平移的单位长度不同,分别是$|\varphi|$和$\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$,但平移方向是一致的.

(2) 虽然两种平移单位长度不同,平移时平移的对象已有变化,但得到的结果是一致的.

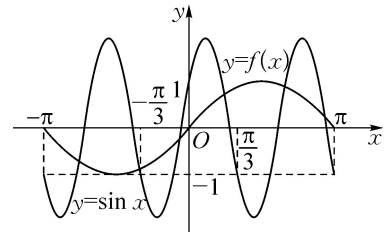
5. $\left(\frac{\pi}{8},0\right),\left(\frac{3\pi}{8},2\right),\left(\frac{5\pi}{8},0\right),\left(\frac{7\pi}{8},-2\right),\left(\frac{9\pi}{8},0\right)$　令 $2x-\frac{\pi}{4}=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$ 得 $x=\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8},\frac{5\pi}{8},\frac{7\pi}{8},\frac{9\pi}{8}$,故五个点的坐标是$\left(\frac{\pi}{8},0\right),\left(\frac{3\pi}{8},2\right),\left(\frac{5\pi}{8},0\right),\left(\frac{7\pi}{8},-2\right),\left(\frac{9\pi}{8},0\right)$.

6. $\frac{\pi}{3}$　因为函数 $f(x)$和 $g(x)$的图象与 x 轴的交点完全相同,所以 $g(x)=f(x)$,即 $\sin(6x+\varphi)=\sin(6x+6a+\varphi)$,所以 $6a=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,解得 $a=\frac{k\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$. 又 $a>0$,所以 a 的最小值为$\frac{\pi}{3}$.

7. B　$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)$的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变),得到 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)$的图象,再向右平移$\frac{2\pi}{5}$个单位长度,最后向上平移 1 个单位长度得到 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{5}\right)+1$ 的图象,令 $x-\frac{\pi}{5}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $x=\frac{\pi}{5}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,故对称中心为$\left(\frac{\pi}{5}+k\pi,1\right),k\in\mathbf{Z}$. 当 $k=0$ 时,对称中心为$\left(\frac{\pi}{5},1\right)$,B 正确,经验证,其他选项均错误.

8. C　曲线 $C_1:y=\sin\left(\omega x+\frac{2\pi}{3}\right)$的最小正周期为 π,故$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,故 $\omega=2$. A 选项,把 C_2 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍,纵坐标不变,再把得到的曲线向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度,得到 $y=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$,A 错误;B 选项,把 C_2 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍,纵坐标不变,再把得到的曲线向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度,得到 $y=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{12}\right)$,B 错误;C 选项,把 C_2 上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍,纵坐标不变,再把得到的曲线向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度,得到 $y=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$,C 正确;D 选项,把 C_2 上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍,纵坐标不变,再把得到的曲线向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度,得到 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$,D 错误.

9. ABD　对于 A,当 $\omega=3$ 时,$f(x)=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$,将 $y=2\sin 3x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{18}$个单位长度,得 $y=2\sin\left[3\left(x+\frac{\pi}{18}\right)\right]=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$,即 $y=f(x)$的图象,所以 A 为真命题;对于 B,当 $\omega=3$ 时,$f(x)=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$,周期 $T=\frac{2\pi}{3}$,如图,作出函数 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$上的图象,再在同一坐标系中作出 $y=\sin x$ 在$[-\pi,\pi]$上的图象,由图可知曲线 $y=f(x)$与曲线 $y=\sin x$ 在区间$[-\pi,\pi]$上的交点个数为 6,所以 B 为真命题;



对于 C,当 $x\in[0,2\pi]$时,$\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},2\omega\pi+\frac{\pi}{6}\right]$,若 $f(x)$在$[0,2\pi]$上有且仅有 5 个零点,则 $5\pi\leqslant 2\omega\pi+\frac{\pi}{6}<6\pi$,解得$\frac{29}{12}\leqslant\omega<\frac{35}{12}$,所以 C 为假命题;对于 D,当 $x\in\left(0,\frac{4\pi}{35}\right)$时,$\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{4\omega\pi}{35}+\frac{\pi}{6}\right)$,由选项 C 可知$\frac{29}{12}\leqslant\omega<\frac{35}{12}$,则$\frac{29\pi}{105}\leqslant\omega\cdot\frac{4\pi}{35}<\frac{\pi}{3}$,所以$\frac{29\pi}{105}+\frac{\pi}{6}\leqslant\omega\cdot\frac{4\pi}{35}+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$,所以$\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{4\omega\pi}{35}+\frac{\pi}{6}\right)\subseteq\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$,所以函数 $f(x)$在$\left(0,\frac{4\pi}{35}\right)$上单调递增,所以 D 为真命题.

10. AD　由 $f(x)$的图象知,$A=2$. 由 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)$过点$(0,1)$,得 $\cos\varphi=\frac{1}{2}$. 又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\pm\frac{\pi}{3}$,当 $\varphi=\frac{\pi}{3}$时,$f(x)=2\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$,又 $f(x)$的图象过点$\left(\frac{\pi}{6},2\right)$,所以 $\cos\left(\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{3}\right)=1$,解得$\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{3}=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,所以 $\omega=-2+12k,k\in\mathbf{Z}$. 由最小正周期为$\frac{2\pi}{\omega}>4\times\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$,得 $0<\omega<3$,无解,即 $\varphi=\frac{\pi}{3}$不符合题意. 当 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$时,$f(x)=2\cos\left(\omega x-\right.$

$\frac{\pi}{3}\Big)$，而 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$，则 $\cos\left(\frac{\pi}{6}\omega-\frac{\pi}{3}\right)=1$，即 $\frac{\pi}{6}\omega-\frac{\pi}{3}=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $\omega=2+12k$，$k\in\mathbf{Z}$，而 $0<\omega<3$，则 $\omega=2$，A 正确，B 错误. 由上述分析可知，函数 $f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，则 $g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=2\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$，又 $g(-x)=2\cos\left(-2x-\frac{2\pi}{3}\right)=2\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)\neq-g(x)$，所以函数 $g(x)$ 不是奇函数，C 错误. 由图象知，函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增，在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递减，且 $f(0)=1$，$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$，则当方程 $f(x)=a$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上有两个根时，$a\in[\sqrt{3},2)$，D 正确.

11. 0　由题知函数 $y=\cos\frac{\pi}{2}x$ 图象上所有点的横坐标都伸长为原来的 2 倍，可得 $y=\cos\frac{\pi}{4}x$ 的图象，再把图象向右平移 2 个单位长度，可得 $y=\cos\left[\frac{\pi}{4}(x-2)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ 的图象，即 $f(x)=\sin\frac{\pi}{4}x$，其最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$，因为 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(8)=\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{3\pi}{4}+\sin\pi+\sin\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{3\pi}{2}+\sin\frac{7\pi}{4}+\sin 2\pi=0$，所以 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2\ 023)=253\times[f(1)+f(2)+\cdots+f(8)]-f(8)=0-\sin 2\pi=0$.

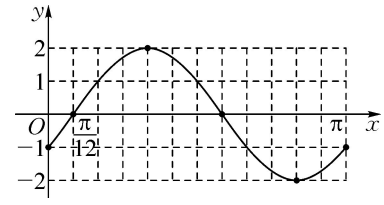
12. π　$f(x)=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$，将图象上所有点的横坐标伸长到原来的 4 倍(纵坐标不变)，得到函数 $y=\frac{1}{2}\sin\left(2\times\frac{1}{4}x\right)=\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}x$ 的图象，向左平移 $m(m>0)$ 个单位长度，得到函数 $g(x)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{m}{2}\right)$ 的图象. 因为 $g(x)$ 为偶函数，所以 $\frac{m}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $m=\pi+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，故 m 的最小值为 π.

13. 解：(1)因为角 α 的终边经过点 $P(3,4)$，所以 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，所以 $f(\alpha)=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{5}$.

(2)将函数 $f(x)$ 的图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$(纵坐标不变)，得到函数 $y=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象，再将所得图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)=\sqrt{2}\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)$ 的图象. 由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{3\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $\frac{\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{8}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以函数 $g(x)$ 的单调递增区间为 $\left[\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{5\pi}{8}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$. 因为 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，所以 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$，$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\left(\frac{3}{5}\right)^2-\left(\frac{4}{5}\right)^2=-\frac{7}{25}$. 故 $g(\alpha)=\sqrt{2}\sin\left(2\alpha-\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\sin 2\alpha\cos\frac{3\pi}{4}-\cos 2\alpha\sin\frac{3\pi}{4}\right)=-\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=\frac{7}{25}-\frac{24}{25}=-\frac{17}{25}$.

14. 解：(1)

$2x-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{12}$
$f(x)$	0	2	0	-2	0



(2)易知 $g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，解得 $k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，所以 $g(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$. 令 $2x+\frac{\pi}{6}=k\pi$，解得 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$，所以函数 $g(x)$ 图象的对称中心坐标为 $\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12},0\right)(k\in\mathbf{Z})$.

15. B　对于甲，因为 $y=\tan t$ 的单调递增区间为 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，$t=x+\theta$ 关于 x 单调递增，所以不存在任何区间使得 $f(x)$ 单调递减，故甲错误；对于乙，因为 $y=\tan x$ 的图象不存在对称轴，而函数 $f(x)=\tan(x+\theta)$ 的图象是由函数 $y=\tan x$ 的图象向左平移 θ 个单位长度得到的，所以函数 $f(x)=\tan(x+\theta)$ 的图象也不存在对称轴，故乙错误；由题意甲、乙、丙、丁四人对函数 $f(x)$ 的论述中有且只有两人正确，故只能丙、丁论述正确. 若丙论述正确，即当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增，则当 $0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$t=x+\theta\in\left(-\frac{\pi}{2}+\theta,\theta\right)$ 关于 x 单调递增，由复合函数单调性可知此时应该有 $\begin{cases}-\frac{\pi}{2}\leqslant-\frac{\pi}{2}+\theta,\\ \theta\leqslant\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 解得 $\theta\geqslant 0$，所以此时 $0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 满

足题意，当$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$时，$t=x+\theta\in\left(-\frac{\pi}{2}+\theta,\theta\right)$关于$x$单调递增，但$0<-\frac{\pi}{2}+\theta<\frac{\pi}{2}<\theta$，即存在$t=x+\theta\in\left(-\frac{\pi}{2}+\theta,\theta\right)$，使得$y=\tan t$无意义，所以此时$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$不满足题意，综上所述，满足题意的$\theta$的取值范围是$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$；若丁论述正确，则$\frac{\pi}{6}+\theta=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，解得$\theta=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$，结合$\theta$的取值范围是$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$可知，只能$k=1,\theta=\frac{\pi}{3}$. 综上所述，实数$\theta$的值为$\frac{\pi}{3}$.

课时提优 44　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$(2)

1. B　将函数$y=\sin(2x+\varphi)$的图象向左平移$\frac{\pi}{8}$个单位长度后，得到函数$y=\sin\left(2x+\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$的图象. 因为它是偶函数，所以$\varphi+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即$\varphi=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，当$k=0$时，$\varphi=\frac{\pi}{4}$. 结合选项，B正确，其他选项均不符合.

2. A　函数$y=\sin x$的图象上各点的横坐标变为原来的2倍得到$y=\sin\frac{1}{2}x$的图象，再将图象向右平移$\frac{\pi}{2}$个单位长度得到曲线$y=\sin\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$.

3. C　由于$x\in(0,2\pi)$，所以$\omega x-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{4},2\omega\pi-\frac{\pi}{4}\right)$. 因为函数$f(x)$在$(0,2\pi)$上有且仅有两个零点，所以$\begin{cases}2\omega\pi-\frac{\pi}{4}>\pi,\\2\omega\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant 2\pi,\end{cases}$解得$\frac{5}{8}<\omega\leqslant\frac{9}{8}$.

4. ACD　因为函数$f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，所以将$f(x)$图象上所有点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$，纵坐标不变，得到函数$g(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象，则$g(x)$的最大值为2，故A正确；因为$g\left(-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left[2\times\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-2$，所以$g(x)$的图象不关于点$\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$对称，故B错误；因为$g\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=2\cos 2x$，所以函数$g\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$为偶函数，故C正确；因为$x\in\left[-\frac{4\pi}{3},-\pi\right]$，所以$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{5\pi}{2},-\frac{11\pi}{6}\right]\subseteq\left[-\frac{5\pi}{2},-\frac{3\pi}{2}\right]$，所以函数$g(x)$在$\left[-\frac{4\pi}{3},-\pi\right]$上单调递增，故D正确.

5. $\frac{5\pi}{6}$　把$y=2\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$的图象向左平移$m$个单位长度，得到$y=2\sin\left(x+m+\frac{2\pi}{3}\right)$的图象，由其图象关于$y$轴对称，可得$m+\frac{2\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，即$m=k\pi-\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$. 故当$k=1$时，$m$取得最小正值为$\frac{5\pi}{6}$.

6. (1)$\frac{3}{4}$(答案不唯一)　(2)$\left(\frac{7}{4},\frac{11}{4}\right]$　(1)由题意可得$g(x)=\sin\left[\omega\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\omega\right)$. 因为$g(x)$的图象关于原点对称，所以$\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\omega=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得$\omega=\frac{3}{4}-3k,k\in\mathbf{Z}$. 又$\omega>0$，所以当$k=0$时，$\omega=\frac{3}{4}$.

(2)若$x\in(0,\pi)$，则$\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\omega\pi+\frac{\pi}{4}\right)$，因为$f(x)$在区间$(0,\pi)$上有且仅有两个零点，所以$2\pi<\omega\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant 3\pi$，解得$\frac{7}{4}<\omega\leqslant\frac{11}{4}$，故$\omega$的取值范围是$\left(\frac{7}{4},\frac{11}{4}\right]$.

7. A　$g(x)=-\cos\frac{3}{2}x=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}x\right)=\sin\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left[\frac{3}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]$，根据“左加右减”平移规则，将函数$g(x)=-\cos\frac{3}{2}x$的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，得到函数$f(x)=\sin\frac{3}{2}x$的图象.

8. C　由函数$f(x)$的图象，可得$f(x)_{\min}=1,f(x)_{\max}=5$，可得$A=\frac{5-1}{2}=2,B=\frac{5+1}{2}=3$，所以$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)+3$. 又由$f(0)=2\sin\varphi+3=2$，可得$\sin\varphi=-\frac{1}{2}$，因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$. 可得$\varphi=-\frac{\pi}{6}$，又因为$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\omega-\frac{\pi}{6}\right)+3=1$，即$\sin\left(\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}\right)=1$. 因为$\omega>0$，可得$\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，解得$\omega=2$，所以$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+3$. 对于A，由于$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)+3=2$，不是函数的最值，所以A错误；对于B，由于$\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\neq 0$，所以点$\left(\frac{\pi}{6},3\right)$不是函数$f(x)$图象的对称中心，所以B错误；对于C，由$x\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$，可得$2x-\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right)$，根据正弦函数的性质，可得$y=\sin x$在$\left(\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right)$上单调递减，所以函数$f(x)$在区间$\left(\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$上单调递减，所以C正确；对于D，由$x\in\left(-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right)$，可得$2x-\frac{\pi}{6}\in(-\pi,0)$，当$2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$时，即$x=-\frac{\pi}{6}$时，可得$f(x)_{\min}=f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=1$，又由$f(x)<$

$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=3$，知函数 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right)$ 上的值域为 $[1,3)$，所以 D 错误.

方法总结 已知图象求函数表达式 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的方法：

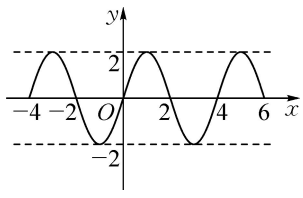
法一：如果从图象可确定最值和周期，则可直接确定函数表达式 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 中的参数 A 和 ω，再选取“第一个零点”(五点作图法中的第一个)的数据代入“$\omega x+\varphi=0$”(要注意正确判断哪一个点是“第一零点”)求得 φ.

法二：通过若干特殊点代入函数式，可以求得相关待定系数 A,ω,φ. 这里需要注意的是，要认清所选择的点属于五个点中的哪一点，并能正确代入列式.

法三：运用逆向思维的方法，先确定函数的基本解析式 $y=A\sin\omega x$，根据图象平移规律可以确定相关的参数.

9. BCD　由图象知 $\frac{T}{2}=\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$，所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$，故 A 错误；因为函数的最小正周期 $T=\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\omega}$，可得 $\omega=2$，所以 $f\left(\frac{3\pi}{8}\right)=A\tan\left(2\times\frac{3\pi}{8}+\varphi\right)=0$，则 $\frac{3\pi}{4}+\varphi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即 $\varphi=k\pi-\frac{3\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$，因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以当 $k=1$ 时，$\varphi=\pi-\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$，则 $f(x)=A\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，又因为 $f(0)=1$，所以 $f(0)=A\tan\frac{\pi}{4}=1$，则 $A=1$，所以 $f(x)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，由 $2x+\frac{\pi}{4}\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，可得 $x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8},k\in\mathbf{Z}$，所以 $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8},k\in\mathbf{Z}\right\}$，所以 B 正确；因为 $2\times\left(-\frac{3\pi}{8}\right)+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}$，可得点 $\left(-\frac{3\pi}{8},0\right)$ 是函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心，所以 C 正确；当 $x\in\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ 时，$2x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{7\pi}{4},\frac{9\pi}{4}\right]$，可得 $\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\in[-1,1]$，所以 D 正确.

10. ACD　因为函数 $f(x+1)$ 是偶函数，$f(x+2)$ 是奇函数，所以 $f(1-x)=f(1+x)$，$f(2-x)=-f(2+x)$，即 $f(2-x)+f(2+x)=0$，所以函数 $f(x)$ 的图象既关于直线 $x=1$ 对称，又关于点 $(2,0)$ 对称，所以 $\begin{cases}f(x)=f(2-x),\\f(x)=-f(4-x),\end{cases}$ 所以 $f(2-x)=-f(4-x)$，所以 $f(x+2)=-f(x)$，所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数. 当 $x\in[1,2]$ 时，$f(x)=2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{2}\right)$，作出函数 $f(x)$ 的图象如图所示.



因为 $f(-4-x)=f(4-x)=-f(x)$，所以 $f(-4-x)+f(x)=0$，则函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(-2,0)$ 对称，故 A 正确；$f(x)$ 的最小值是 -2，故 B 错误；因为 $f(x)$ 在 $(3,5)$ 上单调递增，且 $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)\subseteq(3,5)$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ 上单调递增，故 C 正确；$f(-2.5)=f(1.5)>0>f(3.5)$，故 D 正确.

11. $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$　$\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$　将函数 $f(x)=2\sin x$ 图象的每一个点的横坐标缩短为原来的一半，得到 $y=2\sin 2x$ 的图象；再向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到 $g(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象. $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$. 若函数 $g(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{a}{3}\right]$，$\left[2a,\frac{7\pi}{6}\right]$ 上单调递增，当 $x=0$ 时，$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，故 $2\times\frac{a}{3}+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}$；即 $a\leqslant\frac{\pi}{2}$，当 $x=\frac{7\pi}{6}$ 时，$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{15\pi}{6}=\frac{5\pi}{2}\in\left[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$，故 $2\times2a+\frac{\pi}{6}\geqslant\frac{3\pi}{2}$，即 $a\geqslant\frac{\pi}{3}$. 所以实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$.

12. $\left(\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right]$　$f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+\sin^2\omega x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x+\frac{1-\cos 2\omega x}{2}+\frac{1}{2}=\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{6}\right)+1$，由 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，且 $\omega>0$，得 $2\omega x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\pi\omega-\frac{\pi}{6}\right)$，且函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上只有一个最大值点和一个零点，所以 $\frac{3\pi}{2}<\pi\omega-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{2}$，解得 $\frac{5}{3}<\omega\leqslant\frac{8}{3}$，所以 ω 的取值范围是 $\left(\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right]$.

13. **解**：(1) 因为函数 $f(x)$ 图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\pi$，即 $\frac{2\pi}{|\omega|}=\pi$，由 $\omega>0$，解得 $\omega=2$. 因为 $f(x)$ 的图象过点 $\left(\frac{\pi}{4},1\right)$，所以 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 又因为 $\frac{\pi}{2}<\varphi+\frac{\pi}{2}<\pi$，所以 $\varphi+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}$，即 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，所以 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$. 令 $2x+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$，即函数 $f(x)$ 图象的对称轴为直线 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$.

(2) 由题意得 $g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{11\pi}{12}\right)$，令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{11\pi}{12}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $k\pi-\frac{5\pi}{24}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{7\pi}{24}(k\in\mathbf{Z})$，令 $k=0$ 和 1，得 $-\frac{5\pi}{24}\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{24}$ 和 $\frac{19\pi}{24}\leqslant x\leqslant\frac{31\pi}{24}$，所以函数 $g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调递减区间

为$\left[0,\frac{7\pi}{24}\right]$,$\left[\frac{19\pi}{24},\pi\right]$.

14. 解:(1)由题意可得 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos 2x\cdot\sin\varphi=\frac{1}{2}\sin(2x+\varphi)$. 因为 $x\in\mathbf{R}$,所以函数 $f(x)$的最大值为$\frac{1}{2}$.

(2)由平移变换知 $g(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$. 又因为 $g(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$,所以$\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $\varphi=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$. 又因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,令 $k=0,\varphi=-\frac{\pi}{3}$,所以 $f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$. 令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得$-\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,所以 $f(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$.

(3)当 $x\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$时,$2x+\varphi\in\left[\frac{\pi}{6}+\varphi,\pi+\varphi\right]$,此时 $f(x)$的值域为 $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$. 因为 $f(x)_{\max}=\frac{1}{2}$,所以 $\frac{\pi}{2}\in\left[\frac{\pi}{6}+\varphi,\pi+\varphi\right]$. 又$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以$\frac{\pi}{6}+\varphi\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$,$\pi+\varphi\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$,则$\frac{\pi}{6}+\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$,解得 $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}\right]$,可得$\pi+\varphi\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{4\pi}{3}\right]$. 由 $f(x)_{\min}=-\frac{1}{4}$,可知$\begin{cases}\frac{\pi}{6}+\varphi\geqslant-\frac{\pi}{6},\\ \pi+\varphi\leqslant\frac{7\pi}{6},\end{cases}$解得$-\frac{\pi}{3}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{6}$. 由 $2\times\frac{\pi}{12}+\varphi=-\frac{\pi}{6}$或 $2\times\frac{\pi}{2}+\varphi=\frac{7\pi}{6}$,解得$\varphi=-\frac{\pi}{3}$或$\frac{\pi}{6}$,所以 φ 的值为$-\frac{\pi}{3}$或$\frac{\pi}{6}$.

15. 解:(1)由图象可知,周期 $T=2\times\left(\frac{11\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)=\pi$,所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$. 因为点$\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$在函数图象上,所以 $A\sin\left(2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi\right)=0$,即 $\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\varphi\right)=0$. 又因为 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以$\frac{5\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}+\varphi<\frac{4\pi}{3}$,则$\frac{5\pi}{6}+\varphi=\pi$,即 $\varphi=\frac{\pi}{6}$. 因为点$(0,1)$在函数图象上,所以 $A\sin\frac{\pi}{6}=1$,即 $A=2$,故函数 $f(x)$的解析式为 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

(2)由题意可得 $g(x)=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. 设 $h(x)=f(x)-g(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)$. $x_1,x_2\in[\pi-m,m]$,当 $x_1>x_2$ 时,$f(x_1)-f(x_2)<g(x_1)-g(x_2)$恒成立,即 $f(x_1)-g(x_1)<f(x_2)-g(x_2)$恒成立,即 $h(x_1)<h(x_2)$恒成立,所以 $h(x)$在区间$[\pi-m,m]$上单调递减. 令$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{12}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$,解得$\frac{7\pi}{24}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{19\pi}{24}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$. 因为 $\pi-m<m$,所以 $m>\frac{\pi}{2}$,则 $\pi-m<\frac{\pi}{2}$,故$\begin{cases}\pi-m\geqslant\frac{7\pi}{24},\\ m\leqslant\frac{19\pi}{24},\end{cases}$解得$\frac{\pi}{2}<m\leqslant\frac{17\pi}{24}$,所以 m 的最大值为$\frac{17\pi}{24}$.

单元综合练 6　三角函数的图象和性质

1. C　由图可得,函数图象过点$\left(-\frac{4\pi}{9},0\right)$,将它代入函数 $f(x)$可得 $\cos\left(-\frac{4\pi}{9}\cdot\omega+\frac{\pi}{6}\right)=0$. 又$\left(-\frac{4\pi}{9},0\right)$是函数 $f(x)$图象与 x 轴负半轴的第一个交点,所以$-\frac{4\pi}{9}\cdot\omega+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$,解得 $\omega=\frac{3}{2}$,所以函数 $f(x)$的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{3}{2}}=\frac{4\pi}{3}$.

2. B　函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$,将函数 $f(x)$的图象先向右平移 φ 个单位长度,再将所得函数图象上的所有点保持纵坐标不变,横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$,得到函数 $g(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$的图象,由题知,$g(x)$为奇函数,则 $\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,只有 B 选项满足条件.

3. ACD　观察函数图象知,$A=2$,函数 $f(x)$的最小正周期 $T=4\times\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{2\pi}{\omega}$,解得 $\omega=2$. 由 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=2$,得 $2\times\frac{\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,而$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,则 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$. 对于 A,$f(x)$的最小正周期为 π,故 A 正确;对于 B,$f\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin\left[2\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=2\sin(2x-\pi)=-2\sin 2x$,故 B 错误;对于 C,当 $x\in\left[\frac{7\pi}{12},\frac{13\pi}{12}\right]$时,$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$,而正弦函数 $y=\sin x$ 在$\left[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$上单调递增,因此 $f(x)$在区间$\left[\frac{7\pi}{12},\frac{13\pi}{12}\right]$上单调递增,故 C 正确;对于 D,$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right)=2$,即直线 $x=\frac{\pi}{12}$是 $f(x)$图象的一条对称轴,故 D 正确.

4. AB　由图可知 $A=2$,又因为平行四边形 $EDCB$ 的面积为 4π,所以 $T=\frac{4\pi}{2A}=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$,解得 $\omega=2$,所以 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$. 又 $f(x)$的图象过点 $A\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$,所以 $f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\left[2\times\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\varphi\right]=2\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)=0$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$. 又因

为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以 $k=0,\varphi=\frac{\pi}{6}$,所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,若 $x\in\left(\frac{2\pi}{3},m\right)$,则 $t=2x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{3\pi}{2},2m+\frac{\pi}{6}\right)$. 若函数 $f(x)$在区间$\left(\frac{2\pi}{3},m\right)$上单调递增,则由复合函数单调性可知 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{3\pi}{2},2m+\frac{\pi}{6}\right)\subseteq\left(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right)$, 所以$\begin{cases}m>\frac{2\pi}{3},\\2m+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{2},\end{cases}$解得 $\frac{2\pi}{3}<m\leqslant\frac{7\pi}{6}$. 对比各个选项可知实数 m 的取值可以是$\frac{5\pi}{6}$或 π.

5. $-\frac{\pi}{6}$　由图可得,$\frac{T}{4}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}$,则 $T=\pi=\frac{2\pi}{|\omega|}$. 因为 $\omega>0$,所以 $\omega=2$. 又 $\sin\left(2\times\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=1$,所以 $2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $\varphi=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$. 又$|\varphi|\leqslant\pi$,所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$.

6. $\frac{3}{4}$　当 $x\in(0,2\pi)$时,令 $2\cos x-1\geqslant0$ 得 $\cos x\geqslant\frac{1}{2}$,故 $x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{3},2\pi\right)$. 令 $2\cos x-1<0$ 得 $\cos x<\frac{1}{2}$,故 $x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$,要想$(2\cos x-1)\sin(\omega x+\varphi)\geqslant0$ 对 $\forall x\in(0,2\pi)$恒成立,显然 $\sin(\omega x+\varphi)=0$ 不恒成立,其中 $\omega>0$,则当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{3},2\pi\right)$时,$\sin(\omega x+\varphi)\geqslant0$,此时 $\omega x+\varphi\in\left(\varphi,\frac{\omega\pi}{3}+\varphi\right]\cup\left[\frac{5\omega\pi}{3}+\varphi,2\omega\pi+\varphi\right)$;当 $x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$时,$\sin(\omega x+\varphi)\leqslant0$,此时 $\omega x+\varphi\in\left(\frac{\omega\pi}{3}+\varphi,\frac{5\omega\pi}{3}+\varphi\right)$. 由于 $0<\varphi<\pi$,故$\begin{cases}\frac{\omega\pi}{3}+\varphi=\pi,\\\frac{5\omega\pi}{3}+\varphi=2\pi,\end{cases}$解得$\begin{cases}\omega=\frac{3}{4},\\\varphi=\frac{3\pi}{4},\end{cases}$此时 $2\omega\pi+\varphi=\frac{3\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}=\frac{9\pi}{4}<3\pi$,满足要求.

7. $\left[\frac{15}{8},\frac{19}{8}\right)$　因为 $0\leqslant x\leqslant2\pi$,所以$\frac{\pi}{4}\leqslant\omega x+\frac{\pi}{4}\leqslant2\pi\omega+\frac{\pi}{4}$. 因为函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$在区间$[0,2\pi]$上有且仅有 4 个零点,所以 $4\pi\leqslant2\pi\omega+\frac{\pi}{4}<5\pi$,解得$\frac{15}{8}\leqslant\omega<\frac{19}{8}$,即 ω 的取值范围是$\left[\frac{15}{8},\frac{19}{8}\right)$.

8. 解:(1)由题意可知 $f\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=-1$,$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=1$,结合 $f(x)$在$\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$上单调递增,则 $T=\left(\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}\right)\times2=\pi$,所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$,所以 $2\times\frac{\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$. 由于$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,故 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

(2)由(1)得 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$,所以 $f(x)$的图象可由函数 $y=\sin x(x\in\mathbf{R})$的图象先向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度,再将图象上各点的横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$,纵坐标不变得到(也可以先将图象上各点的横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$,纵坐标不变,再将所得图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度).

9. 解:(1)$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+\sqrt{2}\cos x-a=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}+\cos x\cos\frac{\pi}{6}+\sin x\sin\frac{\pi}{6}+\cos x\right)-a=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)-a=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-a$,所以 $f(x)_{\max}=2-a=3$,即 $a=-1$.

(2)由(1)知 $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1$,令$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得$\frac{\pi}{4}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,所以函数 $f(x)$的单调递减区间为$\left[\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.

(3)因为 $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1$,所以 $f\left(\frac{\pi}{4}-1\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-1+\frac{\pi}{4}\right)+1=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-1\right)+1=2\cos1+1$. 由泰勒公式得 $\cos1=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\cdots\approx1-0.5+0.041\ 67-0.001\ 39=0.540\ 28$,所以 $f\left(\frac{\pi}{4}-1\right)=2\cos1+1\approx2\times0.540\ 28+1\approx2.081$.

课时提优 45　三角函数的应用

1. B　设简谐振动运动规律的三角函数表达式为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$. 由题意可知 $A=\frac{3}{2}$,$3^2+\left(\frac{T}{2}\right)^2=5^2$,则 $T=8$,$\omega=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$,所以 $y=\frac{3}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}x+\varphi\right)$. 由图象过点$\left(0,\frac{3}{4}\right)$得$\frac{3}{2}\sin\varphi=\frac{3}{4}$,所以 $\sin\varphi=\frac{1}{2}$. 因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$,因此频率是$\frac{1}{8}$,初相为$\frac{\pi}{6}$.

2. D　设简谐振动的解析式为 $s=A\sin(\omega t+\varphi)$,$t\in[0,+\infty)$,其中 $A>0,\omega>0$. 由表格可知,振幅 $A=20$,周期 $T=12$,过点$(0,-20)$,由周期 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}=12$,且 $\omega>0$,可得 $\omega=\frac{\pi}{6}$,由图象过点$(0,-20)$,可得 $20\sin\varphi=-20$,即 $\sin\varphi=-1$,则 $\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,可得 $s=20\sin\left(\frac{\pi t}{6}+2k\pi-\frac{\pi}{2}\right),t\in[0,+\infty),k\in\mathbf{Z}$,所以简谐振动的解析式为 $s=20\sin\left(\frac{\pi t}{6}-\frac{\pi}{2}\right),t\in[0,+\infty)$.

方法总结 数据拟合的通法：

(1) 处理的关键：数据拟合是一项重要的数据处理能力，解决该类问题的关键在于如何把实际问题三角函数模型化，而散点图在这里起了关键作用.

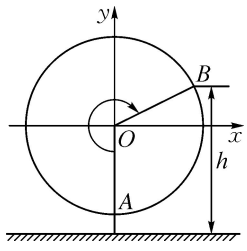
(2) 一般方法：对数据作散点图→确定拟合函数→解决实际问题.

3. D　设 $P(x,y)$，动点 P 从 P_0 出发，以 1 rad/s 的角速度按顺时针方向在圆 O 上做匀速圆周运动，则经过 2 s 所走过圆心角的弧度数为 $1\times2=2$，所以 P 点是角 $\alpha=\frac{\pi}{2}-2$ 的终边与半径为 2 的圆 O 的交点. 根据三角函数的定义可得 $\sin\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\right)=\cos 2=\frac{y}{2}$，即 $y=2\cos 2$，$\cos\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\right)=\sin 2=\frac{x}{2}$，即 $x=2\sin 2$.

4. BC　当 $\omega=\frac{3\pi}{2}$ 时，在区间 $[0,1]$ 内，恒星亮度变化曲线有 2 条对称轴，故 A 错误；由于当 $t=0$ 时，恒星处于最亮状态，即函数 $L(t)$ 取最大值，可得 $\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，故 $L(t)=\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)+m$，则 $t=0$ 是函数 $L(t)$ 的对称轴，区间 $[-1,1]$ 关于 $t=0$ 对称，故恒星的亮度为 m 的次数一定是偶数，故 B 正确；因为当 $t=1$ 和 $t=3$ 时，该恒星的亮度均为 m，且当 $t=0$ 时，恒星处于最亮状态，$L(1)=\cos\omega+m=m$，即 $\cos\omega=0$，则 $L(2)=\cos 2\omega+m=2\cos^2\omega-1+m=m-1$，即 $t=2$ 时，$L(t)$ 取最小值，在 $[-1,1]$ 内，恒星达到最暗的次数一定是偶数，在 $[1,3]$ 内，由于区间关于 $t=2$ 对称，且 $t=2$ 时，取最小值，故恒星达到最暗的次数一定是奇数，故在区间 $[-1,3]$ 内，恒星达到最暗的次数一定是奇数，故 C 正确；当 $\omega=\frac{\pi}{2}$，即 $\frac{2\pi}{\omega}=4$ 时，在区间 $[-3,1]$ 内，恒星达到最暗的次数只有 1，故 D 错误.

5. $h(t)=-6\sin\frac{\pi}{6}t(0\leqslant t\leqslant 24)$　设 $h(t)=A\sin(\omega t+\varphi)(A>0,\omega>0)$，由图象知 $A=6$，$T=12$，所以 $\frac{2\pi}{\omega}=12$，可得 $\omega=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$. 点 $(6,0)$ 为“五点法”作图中的“第一点”，故 $\frac{\pi}{6}\times6+\varphi=0$，得 $\varphi=-\pi$，所以 $h(t)=6\sin\left(\frac{\pi}{6}t-\pi\right)=-6\sin\frac{\pi}{6}t(0\leqslant t\leqslant 24)$.

6. 40　以 O 为坐标原点，建立如图所示的平面直角坐标系.



设吊箱 B 离地面的高度为 h，则 $h=100\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{2\pi}{24}t\right)+108=-100\cos\frac{\pi}{12}t+108$. 令 $h=158$，得 $\cos\frac{\pi}{12}t=-\frac{1}{2}$，所以 $\frac{\pi}{12}t=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ 或 $\frac{\pi}{12}t=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $t=8+24k$ 或 $t=16+24k$，$k\in\mathbf{Z}$. 因为第 4 次达到 158 m，所以当 $t=40$ 时，吊箱 B 第 4 次距离地面 158 m.

7. A　设 $d=A\sin(\omega t+\varphi)+b\left(A>0,\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$，由题意可知，$d_{\max}=A+b=6$，$d_{\min}=-A+b=-2$，解得 $A=4$，$b=2$，则函数 $d=4\sin(\omega t+\varphi)+2$，其最小正周期 $T=\frac{60}{1.5}=40$，则 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{40}=\frac{\pi}{20}$. 当 $t=0$ 时，$d=4\sin\varphi+2=0$，可得 $\sin\varphi=-\frac{1}{2}$. 又因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$，故 $d=4\sin\left(\frac{\pi t}{20}-\frac{\pi}{6}\right)+2$.

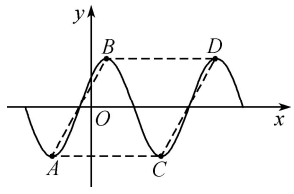
8. D　摩天轮的轮盘直径为 $128-8=120$ m，故 A 错误；对于 B，C，设 $h=A\sin(\omega t+\varphi)+B\left(\omega>0,|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{12}$，又 $\begin{cases}A+B=128,\\-A+B=8,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}A=60,\\B=68,\end{cases}$ 令 $t=0$，得 $60\sin\varphi+68=8$，则 $\sin\varphi=-1$，可得 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$，所以 $h=60\sin\left(\frac{\pi}{12}t-\frac{\pi}{2}\right)+68=-60\cos\frac{\pi}{12}t+68$，$t\in[0,24]$，故 B，C 错误；对于 D，当距地面高度超过 38 m 时，即 $-60\cos\frac{\pi}{12}t+68>38$，即 $\cos\frac{\pi}{12}t<\frac{1}{2}$，解得 $\frac{\pi}{3}+2k\pi<\frac{\pi t}{12}<\frac{5\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $4+24k<t<20+24k$，$k\in\mathbf{Z}$，又因为 $t\in[0,24]$，所以 $4<t<20$，所以游客有 16 min 距地面高度超过 38 m，故 D 正确.

9. ACD　对于 A，设最小正周期为 T，由题意知 $\frac{T}{4}=\frac{7}{6}-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$，则 $T=2$，$\omega=\pi$，频率为 $\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2}$，故 A 正确；对于 B，当 $x=\frac{2}{3}$ 时，小球第一次到平衡位置，即 $\left(\frac{2}{3},0\right)$ 是正弦函数减区间上的零点，且 $|\varphi|<\pi$，所以 $\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=0$，则 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，故 B 错误；对于 C，根据图中的信息知 $(3,-5\sqrt{3})$ 在图象上，所以 $A\sin\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-5\sqrt{3}$，则 $A=10$，故 C 正确；对于 D，当 $x=\frac{2}{3}$ 时，小球第一次到达平衡位置，当 $x=\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}$ 时，小球第三次到达平衡位置，故 D 正确.

10. BD　对于 A，因为 $d=3\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{3}{2}$ 的振幅为筒车的半径，所以筒车的半径为 3 m，因为 $d=3\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{3}{2}$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{30}}=60$，所以旋转一周用时 60 s，故 A 错误；对于 B，因为 $d_{\max}=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$，筒车的半径 $r=3$，所以筒车

的轴心 O 距离水面的高度为 $d_{\max}-r=\frac{3}{2}$(m),故 B 正确;对于 C,当 $t\in(40,50)$时,$\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right)$,此时 d 单调递减,所以盛水筒 P 处于向下运动的状态,故 C 错误;对于 D,令 $3\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{3}{2}=3+\frac{3}{2}$,所以 $\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)=1$,所以 $\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,解得 $t=20+60k(k\in\mathbf{Z})$,又 $t\geqslant0$,所以当 $k=0$ 时,$t_{\min}=20$ s,即盛水筒 P 出水后至少经过 20 s 才可以达到最高点,故 D 正确.

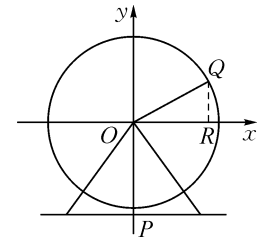
11. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$　令 $\omega x+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,则 $x=\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi+k\pi}{\omega},k\in\mathbf{Z}$,不妨取相邻四个最值所在的点分别为 $A\left(\frac{-\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega},-A\right)$,$B\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega},A\right)$,$C\left(\frac{\frac{3\pi}{2}-\varphi}{\omega},-A\right)$,$D\left(\frac{\frac{5\pi}{2}-\varphi}{\omega},A\right)$,如图所示,因为以 A,B,C,D 为顶点的四边形恰好构成一个菱形,所以 $|AB|=|AC|$,所以$\sqrt{(2A)^2+\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2}=\frac{2\pi}{\omega}$,所以 $4A^2+\frac{\pi^2}{\omega^2}=\frac{4\pi^2}{\omega^2}$,即 $A\omega=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$.



12. 2∶1　$x_2=-2\cos\frac{t}{2}+2$(答案不唯一)　因为做圆周运动的质点在时间 t 内运动的弧长 $l=(\omega t)r$,且点 P_1 和 P_2 在相同时间内运动的弧长相等,所以点 P_1 和 P_2 运动的角速度之比等于运动半径之比的倒数,即 2∶1,所以周期之比为 1∶2,两齿轮的旋转方向相反.设 $x_2=A\cos(\omega t+\varphi)+B$,由 $y_1=\sin t$,可知 $\omega_1=1$,所以 $\omega_2=-\frac{1}{2}$.又因为 y_1 的值域为$[-1,1]$,所以齿轮 A 的半径为 1,所以 x_2 的取值范围是$[0,4]$.所以$[-A+B,A+B]=[0,4]$,解得 $A=B=2$.当 $t=0$ 时,$2\cos\varphi+2=0$,可得 $\varphi=\pi$,所以 $x_2=2\cos\left(-\frac{1}{2}t+\pi\right)+2=-2\cos\frac{t}{2}+2$.

13. 解:(1)**解法 1**　设 $H(t)=A\sin(\omega t+\varphi)+b$,则由题意知 $\begin{cases}A+b=41,\\-A+b=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A=20,\\b=21.\end{cases}$ 因为摩天轮匀速转一圈要 12 min,即 $T=12$,所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{6}$.又因为从摩天轮位于最低点时开始计时,即 $t=0$ 时,$H=1$,所以 $1=20\sin\varphi+21$,得 $\sin\varphi=-1$,不妨取 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$,所以 $H(t)=20\sin\left(\frac{\pi}{6}t-\frac{\pi}{2}\right)+21=21-20\cos\frac{\pi}{6}t$.

解法 2　以摩天轮的中心为原点,建立如图所示的平面直角坐标系,因为摩天轮匀速转一圈要 12 min,即 $T=12$,即 $\omega=\frac{\pi}{6}$.设经过 t min 后,小王同学在点 Q 的位置,则$\angle xOQ=\frac{\pi}{6}t-\frac{\pi}{2}$,所以点 Q 的纵坐标 $y_Q=20\sin\left(\frac{\pi}{6}t-\frac{\pi}{2}\right)=-20\cos\frac{\pi}{6}t$,所以 $H(t)=y_Q-y_P=21-20\cos\frac{\pi}{6}t$.



(2) 由题意知 $H(t)=21-20\cos\frac{\pi}{6}t=11$,得 $\cos\frac{\pi}{6}t=\frac{1}{2}$,因为 $t\in[0,12]$,所以 $t=2$ 或 10,所以两人之间相差 8 min,即小李大概是下午 5:52 或 6:08 进入摩天轮轿厢的.

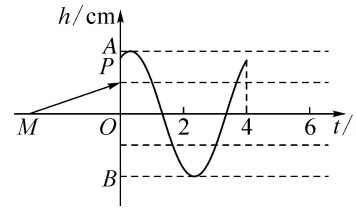
(3)由题意知 $H(t)=21-20\cos\frac{\pi}{6}t\geqslant31$,即 $\cos\frac{\pi}{6}t\leqslant-\frac{1}{2}$,所以$\frac{2\pi}{3}+2k\pi\leqslant\frac{\pi}{6}t\leqslant\frac{4\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $4+12k\leqslant t\leqslant12k+8$,$k\in\mathbf{Z}$.又 $t\in[0,12]$,所以 $4\leqslant t\leqslant8$,所以小王同学处于"美景期"的时间有 4 min.

14. 解:(1)因为 $h(0)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}\times0+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$,此时点 P 的坐标为$(0,\sqrt{3})$,所以点 P 位于平衡位置上方$\sqrt{3}$ cm 处.又因为 $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$,所以每秒钟点 P 往复运动$\frac{1}{4}$次.

(2)取值列表为

$\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{7\pi}{3}$
t	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{10}{3}$	4
h	$\sqrt{3}$	2	0	-2	0	$\sqrt{3}$

图象如图所示.



(3)点 P 被光束恰好第三次照到的时间 t_0 即为曲线 $h(t)$与直线 $h=1$ 的第三个交点的横坐标.由 $2\sin\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3}\right)=1(t\geqslant0)$,即 $\sin\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$,则 $\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ 或 $\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{N})$,解得 $t=-\frac{1}{3}+4k$ 或 $t=1+4k(k\in\mathbf{N})$.将 t 从小到大排列为 $1,\frac{11}{3},5,\cdots$,所以 $t_0=5$.

15. ①③　因为 $f(x)=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}x+\varphi\right)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$经过点$(1,2)$,所以 $\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=1$,即$\frac{2\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $\varphi=$

$-\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$，则 $f(x)=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)$. 对于①，令函数 $f(x)$ 的周期为 T，则 $T=\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}}=3$，由图可知，将噪声声波曲线向左平移 $\frac{T}{2}$ 个单位长度，即可得降噪反向声波曲线，所以 $g(x)=f\left(x+\frac{3}{2}\right)=2\sin\left[\frac{2\pi}{3}\left(x+\frac{3}{2}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}x+\frac{5\pi}{6}\right)$，所以 $g\left(x+\frac{1}{4}\right)=2\sin\left[\frac{2\pi}{3}\left(x+\frac{1}{4}\right)+\frac{5\pi}{6}\right]=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}x+\pi\right)=-2\sin\frac{2\pi}{3}x$，所以函数 $g\left(x+\frac{1}{4}\right)$ 是奇函数，故①正确；对于②，因为 $g(x)=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}x+\frac{5\pi}{6}\right)$，当 $x\in(1,2)$ 时，$\frac{2\pi}{3}x+\frac{5\pi}{6}\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi+\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增，故②错误；对于③，$f(x+1)+f(x+2)+f(x+3)=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}x+\frac{\pi}{2}\right)+2\sin\left(\frac{2\pi}{3}x+\frac{7\pi}{6}\right)+2\sin\left(\frac{2\pi}{3}x+2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\frac{2\pi}{3}x-2\sin\left(\frac{2\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)+2\sin\left(\frac{2\pi}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\frac{2\pi}{3}x-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{2\pi}{3}x+\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}x\right)+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{2\pi}{3}x-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}x\right)=2\cos\frac{2\pi}{3}x-2\cos\frac{2\pi}{3}x=0$，所以 $f(x+1)+f(x+2)+f(x+3)=0$，故③正确；对于④，当 $n=3k, k\in\mathbf{N}^*$ 时，$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)=0$，当 $n=3k+1, k\in\mathbf{N}^*$ 时，$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)=f(n)=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}n-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 2$，当 $n=3k+2, k\in\mathbf{N}^*$ 时，$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)=f(n-1)+f(n)=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}n-\frac{5\pi}{6}\right)+2\sin\left(\frac{2\pi}{3}n-\frac{\pi}{6}\right)=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{2\pi}{3}n-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}n\right)+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{2\pi}{3}n-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}n\right)=-2\cos\frac{2\pi}{3}n\leqslant 2$，故④错误.

培优突破练 7　三角函数的化简与求值问题

1. A　由诱导公式可知，$\sin 210^\circ=\sin(180^\circ+30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$.

2. D　因为 $\sin\alpha-\sin\beta=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $(\sin\alpha-\sin\beta)^2=\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{7}{4}-\sqrt{3}$. 因为 $\cos\alpha-\cos\beta=\frac{1}{2}$，所以 $(\cos\alpha-\cos\beta)^2=\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{1}{4}$，所以 $(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+(\cos^2\beta+\sin^2\beta)-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=\frac{1}{4}+\left(\frac{7}{4}-\sqrt{3}\right)$，所以 $1+1-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=2-\sqrt{3}$，所以 $2-2\cos(\alpha-\beta)=2-\sqrt{3}$，故 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. B　由题意知 $\frac{2\sin(\pi-\alpha)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(-\alpha)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{2\tan\alpha+1}{1+\tan\alpha}=\frac{2\times\left(-\frac{4}{3}\right)+1}{1-\frac{4}{3}}=5$.

4. A　由题意知，$\cos\alpha=\cos\frac{4\pi}{3}=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$，所以 $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}+\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}=\sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha}}+\sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha}}=\frac{1-\sin\alpha}{|\cos\alpha|}+\frac{1+\sin\alpha}{|\cos\alpha|}=\frac{2}{|\cos\alpha|}=4$.

5. C　因为 $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$，所以 $\tan(\alpha+\gamma)=\tan(180^\circ-\beta)=-\tan\beta$，即 $\frac{\tan\alpha+\tan\gamma}{1-\tan\alpha\tan\gamma}=-\tan\beta$. 又 $\tan\alpha+\tan\gamma=2\tan\beta$，所以 $\frac{2\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\gamma}=-\tan\beta$. 因为 β 为锐角，所以 $\tan\beta\neq 0$，所以 $\tan\alpha\tan\gamma=3$.

6. C　由题意 $f(x_0)=2\sin\left(\omega x_0+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$，所以 $\sin\left(\omega x_0+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}$，所以 $\cos\left(\omega x_0-\frac{\pi}{3}\right)+\cos^2\left(\omega x_0-\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(\omega x_0+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)+1-\sin^2\left(\omega x_0+\frac{\pi}{6}-\pi\right)=\sin\left(\omega x_0+\frac{\pi}{6}\right)+1-\sin^2\left(\omega x_0+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}+1-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{19}{16}$.

7. ABD　因为 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$，所以 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{25}$，则 $2\sin\theta\cos\theta=-\frac{24}{25}$，因为 $\theta\in(0,\pi)$，所以 $\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$，所以 $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，故 A 正确；所以 $(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{49}{25}$，所以 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{7}{5}$，故 D 正确；联立 $\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5},\\ \sin\theta-\cos\theta=\frac{7}{5},\end{cases}$ 可得 $\sin\theta=\frac{4}{5}$，$\cos\theta=-\frac{3}{5}$，故 B 正确；所以 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{4}{3}$，故 C 错误.

方法总结　$\sin\theta\pm\cos\theta$，$\sin\theta\cos\theta$ 三者的关系：(1)对于三角函数式 $\sin\theta\pm\cos\theta$，$\sin\theta\cos\theta$ 之间的关系，通过 $(\sin\theta\pm\cos\theta)^2=1\pm 2\sin\theta\cdot\cos\theta$ 进行转化.(2)若已知 $\sin\theta\pm\cos\theta$，$\sin\theta\cos\theta$ 中三者之一，利用方程思想可以求得其余的三角函数值.

8. BC　**分析**：根据给定条件结合诱导公式、同角公式逐项分析、计算并判断作答.

因为 $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\frac{1}{3}$，所以 $\frac{\pi}{6}+\alpha$ 是第一象限或者第四象限角，当 $\frac{\pi}{6}+\alpha$ 是第四象限角时，$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=$

$-\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，A 错误；$\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)=\cos\left[\pi-\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\right]=-\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=-\frac{1}{3}$，B 正确；$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\frac{1}{3}$，C 正确；因为 $\frac{\pi}{6}+\alpha$ 是第一象限或者第四象限角，所以 $\alpha=\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\frac{\pi}{6}$ 不可能是第二象限角，D 错误.

9. ABD　对于 A，分子分母同除以 $\cos\theta$，得 $\frac{\tan\theta+1}{\tan\theta-1}=3$，解得 $\tan\theta=2$，故 A 正确；对于 B，因为 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，$\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$，所以 $\cos\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\varphi=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，所以 $\cos(\theta+\varphi)=\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi=-\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，因为 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，$\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$，所以 $\pi<\theta+\varphi<2\pi$，所以 $\theta+\varphi=\frac{7\pi}{4}$，故 B 正确；对于 C，$\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{2^3\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}}{2^3\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{2^2\sin\frac{2\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}}{2^3\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{2\sin\frac{4\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}}{2^3\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{\sin\frac{8\pi}{9}}{2^3\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{\sin\frac{\pi}{9}}{2^3\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{1}{8}$，故 C 错误；对于 D，$(1+\tan 13^\circ)(1+\tan 32^\circ)=1+\tan 13^\circ+\tan 32^\circ+\tan 13^\circ\tan 32^\circ=1+\tan(13^\circ+32^\circ)(1-\tan 13^\circ\tan 32^\circ)+\tan 13^\circ\cdot\tan 32^\circ=2$，故 D 正确.

10. $-\frac{17}{18}$　由 $3\cos 2\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$，可得 $3(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$，因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\cos\alpha-\sin\alpha\neq 0$，所以 $3(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$，得 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{6}$. 由 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-2\sin\alpha\cos\alpha=1$，解得 $2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{17}{18}$，所以 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{17}{18}$.

11. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　因为 $\sin x+\cos y=1$，$\cos x+\sin y=\sqrt{2}$，所以 $(\sin x+\cos y)^2+(\cos x+\sin y)^2=3$，即 $\sin^2x+\cos^2x+\sin^2y+\cos^2y+2\sin x\cos y+2\cos x\sin y=3$，所以 $\sin x\cos y+\cos x\cdot\sin y=\sin(x+y)=\frac{1}{2}$. 由 $x,y\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，得 $x+y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则 $\cos(x+y)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

12. $\frac{\pi}{6}$　$\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$ 或 $\frac{7\pi}{6}$ 或 $\frac{11\pi}{6}$　由题意知 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\tan^2\alpha-\cos^2\beta=\tan^2\alpha\cdot\cos^2\beta$，故 $\tan^2\frac{\pi}{3}-\cos^2\beta=\tan^2\frac{\pi}{3}\cdot\cos^2\beta$，即 $3-\cos^2\beta=3\cos^2\beta$，所以 $\cos^2\beta=\frac{3}{4}$. 若 $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\beta=\frac{\pi}{6}$；若 $\beta\in(0,2\pi)$，则 $\cos\beta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\beta=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$ 或 $\frac{7\pi}{6}$ 或 $\frac{11\pi}{6}$.

13. 解：(1) $f(x)=\sqrt{\frac{(1-\sin x)^2}{1-\sin^2x}}+\sqrt{\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2x}}=\frac{1-\sin x}{|\cos x|}+\frac{1+\sin x}{|\cos x|}=\frac{2}{|\cos x|}$.

(2) 当 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$ 时，$\alpha+\frac{\pi}{3}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $f\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{10}{3}$，所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{5}$，所以 $\sin\left(\alpha+\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{5}$，$\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=\sin\left[\pi-\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{4}{5}$，所以 $\frac{\sin\left(\alpha+\frac{5\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)}=\frac{3}{4}$.

14. 解：(1) 因为 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times 3}{1-3^2}=-\frac{3}{4}$，所以 $\tan\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan 2\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan 2\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{1+\tan 2\alpha}{1-\tan 2\alpha}=\frac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}}=\frac{1}{7}$.

(2) 因为 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=3$，且 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以 $9\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，得 $\cos^2\alpha=\frac{1}{10}$. 因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\sin\alpha=3\cos\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$. 因为 $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，$\cos\beta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)+\frac{\sqrt{10}}{10}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=-\frac{\sqrt{2}}{10}$.

15. 解：(1) 因为角 α 终边过点 $P\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$，所以点 P 到原点的距离为 $r=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=1$，所以 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(2) 由 (1) 知 $\tan\alpha=-2$，所以 $\frac{\sin 2\alpha-\cos^2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha-1}{2}=-\frac{5}{2}$.

(3) 因为 β 是三角形内角，且 $\sin\beta=\frac{3}{5}$，所以 $\cos\beta=\pm\frac{4}{5}$. 由 (1) 知 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=-\frac{3}{5}$. 当 $\cos\beta=\frac{4}{5}$ 时，$\sin(2\alpha-\beta)=$

$\sin 2\alpha\cos\beta-\cos 2\alpha\sin\beta=-\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}-\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{3}{5}=-\frac{7}{25}$；当 $\cos\beta=-\frac{4}{5}$ 时，$\sin(2\alpha-\beta)=\sin 2\alpha\cos\beta-\cos 2\alpha\sin\beta=-\frac{4}{5}\times\left(-\frac{4}{5}\right)-\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{3}{5}=1$.

培优突破练 8　三角函数的最值与范围问题

1. A　设扇形的半径为 r，弧长为 l，则 $l+2r=6$，所以 $l=6-2r$. 由 $\begin{cases}r>0,\\ l=6-2r>0,\end{cases}$ 可得 $0<r<3$，所以扇形的面积为 $S=\frac{1}{2}lr=(3-r)r\leqslant\left(\frac{3-r+r}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$，当且仅当 $3-r=r$，即 $r=\frac{3}{2}$ 时，等号成立，所以扇形的面积的最大值为 $\frac{9}{4}$.

2. B　因为 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos\theta\in(0,1)$，$\sin\theta\in(0,1)$. 因为 $2k\sin^2\theta\cos^2\theta=\sin^2\theta+9\cos^2\theta$，所以 $k=\frac{\sin^2\theta+9\cos^2\theta}{2\sin^2\theta\cos^2\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{9}{\sin^2\theta}\right)=\frac{1}{2}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\left(\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{9}{\sin^2\theta}\right)=\frac{1}{2}\left(10+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{9\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)\geqslant\frac{1}{2}(10+2\sqrt{9})=8$，当且仅当 $\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{9\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$，即 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时，等号成立，故 k 的最小值是 8.

3. D　由质点运动一圈的时间为 4π s 可得 $\omega=\frac{2\pi}{4\pi}=\frac{1}{2}$，由初始位移为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 可得 $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{1}{2}\times 0+\varphi\right)$，因为 $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\varphi=\pm\frac{\pi}{6}$. 因为随后一段时间内位移开始增加，所以 $s(t)=\cos\left(\frac{1}{2}t-\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $s(t)\leqslant\frac{1}{2}$，即 $\cos\left(\frac{1}{2}t-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant\frac{1}{2}$，由余弦函数的性质可得 $2k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{1}{2}t-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{3}$，$k\in\mathbf{N}$. 因为 $t\geqslant 0$，所以 $4k\pi+\pi\leqslant t\leqslant 4k\pi+\frac{11\pi}{3}$，$k\in\mathbf{N}$.

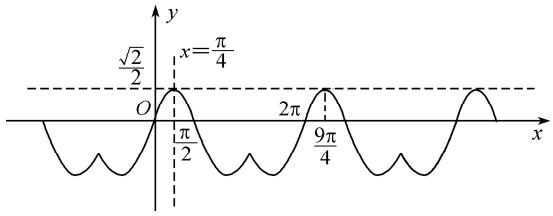
4. D　根据题意可知，若 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则可得 $\omega x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\omega-\frac{\pi}{3}\right]$. 显然当 $x=0$ 时，可得 $2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$. 由 $f(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{3},2]$，利用三角函数图象的性质可得 $\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}\omega-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{3}+\pi$，解得 $\frac{5}{3}\leqslant\omega\leqslant\frac{10}{3}$，即 ω 的取值范围是 $\left[\frac{5}{3},\frac{10}{3}\right]$.

5. B　由题意，函数 $f(x)=\cos(2x+\varphi)$，因为 $f\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 图象的对称轴为直线 $x=\frac{\pi}{6}$，所以 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2\times\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=\pm 1$，所以 $2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $\varphi=-\frac{\pi}{3}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 又因为 $f(\pi)>f\left(\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos(2\pi+\varphi)>\cos(\pi+\varphi)$，即 $\cos\varphi>-\cos\varphi$，可得 $\cos\varphi>0$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，所以当 $f(x)$ 取到最大值时，$2x-\frac{\pi}{3}=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 当 k 取适当的整数时，只有 $x=\frac{\pi}{6}$ 符合条件.

6. C　因为函数 $f(x)$ 的图象过点 $(0,1)$，所以 $f(0)=2\sin\varphi=1$，即 $\sin\varphi=\frac{1}{2}$. 因为 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，当 $x\in\left(\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{4}\right)$ 时，$\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\omega\pi}{8}+\frac{\pi}{6},\frac{\omega\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$，因为 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{4}\right)$ 上具有单调性，所以 $\left(\frac{\omega\pi}{8}+\frac{\pi}{6},\frac{\omega\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\subseteq\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $\frac{\omega\pi}{8}+\frac{\pi}{6}\geqslant-\frac{\pi}{2}+k\pi$ 且 $\frac{\omega\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $-\frac{16}{3}+8k\leqslant\omega\leqslant\frac{4}{3}+4k$，$k\in\mathbf{Z}$，因为 $-\frac{16}{3}+8k\leqslant\frac{4}{3}+4k$，得 $k\leqslant\frac{5}{3}$，因为 $\omega>0$，所以 $k=0$ 时，$\omega\in\left[-\frac{16}{3},\frac{4}{3}\right]$，则 $\omega\in\left(0,\frac{4}{3}\right]$；当 $k=1$ 时，$\omega\in\left[\frac{8}{3},\frac{16}{3}\right]$. 综上，$\omega\in\left(0,\frac{4}{3}\right]\cup\left[\frac{8}{3},\frac{16}{3}\right]$，即 ω 的最大值为 $\frac{16}{3}$.

7. ABC　由题意知，函数 $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 在区间 I 上的最小值为 -2，令 $2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $x=-\frac{\pi}{12}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，当 $k=0$ 时，$x=-\frac{\pi}{12}\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$，$-\frac{\pi}{12}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，当 $k=1$ 时，$x=\frac{11\pi}{12}\in[0,\pi]$，故区间 I 可以为 $[0,\pi]$，$\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$，$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，A，B，C 正确；当 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$，此时 $2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in[1,2]$，$y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的值取不到 -2，D 错误.

8. AD　对于 A，当 $\sin x\geqslant\cos x$ 时，$f(x)=\cos x$，当 $\sin x<\cos x$ 时，$f(x)=\sin x$，由此可作出函数 $f(x)$ 的图象如图所示，结合图象可知 $f(x)$ 的最小正周期为 2π，A 正确；对于 B，结合图象可知 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，B 错误；对于 C，当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$ 时，$f(x)=\sin x$ 单调递增，当 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)=\cos x$ 单调递减，即 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上不单调，C 错误；对于 D，结合函数 $f(x)$ 的图象，可知 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称，D 正确.



9. BCD　$y=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\pi x\right)=\sin\pi x$，令 $m=\pi x$，则由 $x\in\left[\frac{5}{6},t\right)\left(t>\frac{5}{6}\right)$ 可得 $m\in\left[\frac{5\pi}{6},t\pi\right)$，则 $y=\sin m$，$m\in\left[\frac{5\pi}{6},t\pi\right)$，要使其既有最小值又有最大值，若最大值为 $\frac{1}{2}$，则 $\frac{3\pi}{2}<t\pi\leqslant\frac{13\pi}{6}$，解得 $\frac{3}{2}<t\leqslant\frac{13}{6}$；若最大值为 1，则 $t\pi>\frac{5\pi}{2}$，解得 $t>\frac{5}{2}$. 综上所述，$\frac{3}{2}<t\leqslant\frac{13}{6}$ 或 $t>\frac{5}{2}$.

10. $\left[-\frac{3}{2},3\right]$　因为 $f(x)=3\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)=3\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)\right]=3\cos\left(\omega x-\frac{2\pi}{3}\right)$，所以 $\omega=2$，则 $f(x)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$. 因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $-\frac{\pi}{6}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}$，所以 $-\frac{1}{2}\leqslant\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$，所以 $-\frac{3}{2}\leqslant f(x)\leqslant 3$.

11. 1　$f(x)=\sin 2x+2\sqrt{3}\sin^2 x+n=\sin 2x+2\sqrt{3}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+n=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x+\sqrt{3}+n=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}+n$，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 时，$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$，则 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}+n\in[n,n+2\sqrt{3}]$，故 $n+2\sqrt{3}=1+2\sqrt{3}$，解得 $n=1$.

12. $12\sqrt{2}$　因为 x_1,x_2 为方程 $x^2-\left[\frac{1}{\tan\beta}-\frac{1}{\tan(\alpha+\beta)}\right]x+\frac{2}{3}=0$ 的两个实数根，$x_1=3x_2$，所以 $\begin{cases}x_1x_2=\frac{2}{3},\\x_1=3x_2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=\sqrt{2},\\x_2=\frac{\sqrt{2}}{3},\end{cases}$ $x_1+x_2=\frac{1}{\tan\beta}-\frac{1}{\tan(\alpha+\beta)}>0$，所以 $x_1+x_2=\frac{1}{\tan\beta}-\frac{1}{\tan(\alpha+\beta)}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$，则 $\frac{1}{\tan\beta}-\frac{1-\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$，则 $\tan\alpha+\tan\beta-(1-\tan\alpha\tan\beta)\tan\beta=\frac{4\sqrt{2}}{3}(\tan\alpha+\tan\beta)\cdot\tan\beta$，化简可得 $\left(\tan\alpha-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)\tan^2\beta-\frac{4\sqrt{2}}{3}\tan\alpha\tan\beta+\tan\alpha=0$，由方程有解，可知 $\Delta=\frac{32}{9}\tan^2\alpha-4\tan\alpha\left(\tan\alpha-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)\geqslant 0$，即 $\tan^2\alpha-12\sqrt{2}\tan\alpha\leqslant 0$，解得 $0\leqslant\tan\alpha\leqslant 12\sqrt{2}$，则 $\tan\alpha$ 的最大值为 $12\sqrt{2}$.

13. 解：(1)因为单位圆上点 A 的横坐标为 $\frac{1}{3}$，且点 A 在第一象限，所以点 $A\left(\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$，即有 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\cos\alpha=\frac{1}{3}$. 因为 $OA\perp OB$ 且 α 为锐角，β 为钝角，所以 $\beta=\alpha+\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

(2) 由(1)知，$\sin\beta=\cos\alpha$，则 $y=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\alpha\sin\beta=\sin\alpha+\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha$，设 $t=\sin\alpha+\cos\alpha$，则 $t=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$. 因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{4}<\alpha+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$，则 $\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$，所以 $1<t\leqslant\sqrt{2}$. 因为 $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha$，所以 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{t^2-1}{2}$，所以 $y=t+\frac{t^2-1}{2}=\frac{1}{2}(t+1)^2-1\in\left(1,\frac{2\sqrt{2}+1}{2}\right]$，所以 $y=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\alpha\sin\beta$ 的取值范围是 $\left(1,\frac{2\sqrt{2}+1}{2}\right]$.

14. 解：(1)因为 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的最大值为 1，所以 $f(x)_{\max}=2\times 1+a=1$，解得 $a=-1$.

(2)由(1)可知 $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1$. 根据正弦函数的性质可得 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，解得 $2k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{4\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

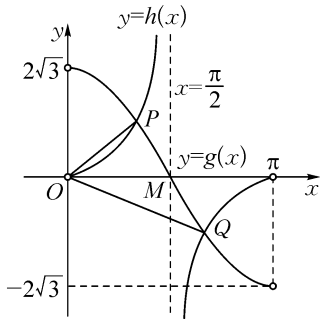
(3) 由题意 $f(x)\geqslant 0$，即 $2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1\geqslant 0$，可得 $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\geqslant\frac{1}{2}$，所以 $2k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，解得 $2k\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，所以使 $f(x)\geqslant 0$ 成立的 x 的取值范围是 $\left\{x\,\middle|\,2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

15. 解：(1)因为 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 中心对称，所以 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\omega\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)=0$，即 $\cos\left(\frac{\omega\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)=0$，可得 $\frac{\omega\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\omega=4+3k(k\in\mathbf{Z})$，且 $0<\omega\leqslant 3$，所以 $k=-1$，$\omega=1$.

(2)由(1)可知 $f(x)=2\sqrt{3}\cos\left(x-\frac{5\pi}{6}\right)$，当 $x\in[-\pi,\pi]$ 时，$x-\frac{5\pi}{6}\in\left[-\frac{11\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$，函数 $y=\cos x$ 在区间 $\left[-\frac{11\pi}{6},-\pi\right]$ 上单调递减，在区间 $(-\pi,0)$ 上单调递增，在区间 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递减. 令 $x-\frac{5\pi}{6}=-\pi$，可得 $x=-\frac{\pi}{6}$，令 $x-\frac{5\pi}{6}=0$，可得 $x=\frac{5\pi}{6}$，所以 $f(x)$ 在区间 $\left[-\pi,-\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递减，在区间

$\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$上单调递增，在区间$\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$上单调递减.

(3)由(2)可知 $g(x)=f\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}\cos x$，$x\in(0,\pi)$. 令 $2\sqrt{3}\cos x=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$，可得 $2\sqrt{3}\cos^2 x=\sin x$，即 $2\sqrt{3}(1-\sin^2 x)=\sin x$，解得 $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$或$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$(舍去). 又因为 $0<x<\pi$，所以 $x=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$. 因为 $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，$\tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$，如图，不妨设 $P\left(\frac{\pi}{3},\sqrt{3}\right)$，$Q\left(\frac{2\pi}{3},-\sqrt{3}\right)$，则 P，Q 两点关于点 $M\left(\frac{\pi}{2},0\right)$对称，所以$\triangle OPQ$ 的面积 $S=2S_{\triangle OPM}=2\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$.



章末提优

1. A　设圆的半径为 r，剪下的扇形的圆心角为 α，则圆面剩余部分的圆心角为 $2\pi-\alpha$，由题意可得$\frac{\frac{1}{2}\alpha r^2}{\frac{1}{2}(2\pi-\alpha)r^2}=\frac{\alpha}{2\pi-\alpha}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，解得 $\alpha=(3-\sqrt{5})\pi$.

2. D　因为 $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{4}{5}$，所以 $\cos\frac{\pi}{4}\cos\theta-\sin\frac{\pi}{4}\sin\theta=\frac{4}{5}$，即 $\cos\theta-\sin\theta=\frac{4\sqrt{2}}{5}$，两边同时平方，由平方关系可得 $1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{32}{25}$，所以 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=1-\frac{32}{25}=-\frac{7}{25}$.

3. B　根据任意角三角函数定义，$\tan\theta=\frac{-5}{x}=\frac{5}{12}$，所以 $x=-12$.

4. A　因为 $\tan 2\alpha=\frac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$，所以 $\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}=\frac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$. 因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos\alpha\neq 0$，所以 $\frac{2\sin\alpha}{1-2\sin^2\alpha}=\frac{1}{2-\sin\alpha}$，解得 $\sin\alpha=\frac{1}{4}$，所以 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{15}}{15}$.

5. B　等式 $\cos\alpha-\sin\alpha=2\sin\alpha\tan\alpha$ 两边同除 $\cos\alpha$，得 $1-\tan\alpha=2\tan^2\alpha$，解得 $\tan\alpha=-1$ 或 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$. 因为 α 为第一象限角，则 $\tan\alpha>0$，所以 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$.

6. C　将函数 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，得到 $y=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象，再向上平移 1 个单位长度，得到 $g(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$ 的图象. 因为 $g(x_1)+g(x_2)=6$，$g(x)$的最大值为 3，所以 $g(x_1)=g(x_2)=3$. 因为 $x_1,x_2\in[-2\pi,2\pi]$，所以 $2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $x=k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $x=-2\pi+\frac{\pi}{6}$或$-\pi+\frac{\pi}{6}$或$\frac{\pi}{6}$或 $\pi+\frac{\pi}{6}$. 所以 x_1-x_2 的最大值为 $\pi+\frac{\pi}{6}-\left(-2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=3\pi$.

7. AC　$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故 A 正确；由 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的所有对称轴为 $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，其中不包含直线 $x=-\frac{\pi}{6}$，故 B 错误；由 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的所有单调递减区间为$\left[\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{7\pi}{12}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，当 $k=0$ 时，$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\subseteq\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$，故 C 正确；$f(x)$的图象可由 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得到，故 D 错误.

8. AB　由图象可得 $f(x)$的最大值为 3，又 $A>0$，所以 $A=3$，又根据图象可得 $T=4\times\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}\right)=\pi$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\pi}=2$. 又 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\sin\left(2\times\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=3$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$. 对于 A，$f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=3\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=3\cos 2x$ 为偶函数，故 A 正确；对于 B，$f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，得到 $y=f\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=3\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=3\sin 2x$ 的图象，故 B 正确；对于 C，令 $2x-\frac{\pi}{6}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，所以 $f(x)$图象的对称中心为$\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},0\right)(k\in\mathbf{Z})$，故 C 错误；对于 D，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$，当 $2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$，即 $x=0$ 时，$f(x)_{\min}=f(0)=3\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{3}{2}$，故 D 错误.

9. ACD　函数 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$. 对于 A，$f\left(\frac{4\pi}{3}\right)=$

$\sin\left(\frac{8\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=1$，故 A 正确；对于 B，由于 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{12}\right]$，所以 $2x-\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$，故函数 $f(x)$ 在该区间上不单调，故 B 错误；对于 C，将函数 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象上的所有点向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，故 C 正确；对于 D，函数 $f(x)-a>f\left(\frac{\pi}{6}\right)$，整理得 $a<\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$，即求出函数 $g(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$ 的最小值即可，由于 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$，故当 $x=0$ 时取得最小值 -1，故 $a<-1$，故 D 正确.

10. $\frac{11}{4}$　$f(x)=\sin^2x+4\cos x=1-\cos^2x+4\cos x=-(\cos x-2)^2+5$，因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，所以 $\cos x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，$\cos x-2\in\left[-\frac{3}{2},-1\right]$，$f(x)=-(\cos x-2)^2+5\in\left[\frac{11}{4},4\right]$，故 $f(x)$ 的最小值为 $\frac{11}{4}$.

11. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　因为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{7\pi}{6}\right)$，且 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right)$ 上恰有一个最大值和一个最小值，所以函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 的最小正周期 $T=\frac{7\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\pi$，则 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得 $\omega=2$，可得 $f(x)=\sin 2x$，所以 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

12. $\frac{3\sqrt{17}}{4}$　由 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{3}$，得 $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\frac{1}{9}$，即 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{9}$，所以 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{4}{9}>0$. 又 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+4\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{16}{9}}=\frac{\sqrt{17}}{3}$，所以 $\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{17}}{3}}{\frac{4}{9}}=\frac{3\sqrt{17}}{4}$.

13. 解：(1) $f(x)=2a(\cos x-\sqrt{3}\sin x)\cos x=a(2\cos^2x-2\sqrt{3}\sin x\cos x)=a(1+\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x)=a+2a\cdot\left(\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)=a+2a\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$. 因为 $f(x)$ 的最大值为 2，所以 $|2a|+a=2$，若 $a>0$，则 $3a=2$，$a=\frac{2}{3}$；若 $a<0$，则 $-a=2$，即 $a=-2$. 综上所述，a 的值为 $\frac{2}{3}$ 或 -2.

(2) 若 $a=\frac{2}{3}$，则 $f(x)=\frac{4}{3}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{2}{3}$，由 $2k\pi-\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $k\pi-\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi-\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{2\pi}{3},k\pi-\frac{\pi}{6}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$. 若 $a=-2$，则 $f(x)=-4\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-2$，由 $2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{3}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

14. 解：(1) 因为 $\tan\alpha=2$，所以 $\cos(\pi+2\alpha)=-\cos 2\alpha=-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=-\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=-\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-\frac{1-2^2}{1+2^2}=\frac{3}{5}$.

(2) 因为 $\beta\in(0,\pi)$，且 $\sin\beta-\cos\beta=\frac{\sqrt{10}}{5}$，所以 $1-2\sin\beta\cdot\cos\beta=\frac{2}{5}$，所以 $2\sin\beta\cos\beta=\frac{3}{5}>0$，所以 $\sin\beta>0$，$\cos\beta>0$，所以 $\sin\beta+\cos\beta=\sqrt{(\sin\beta+\cos\beta)^2}=\sqrt{1+2\sin\beta\cos\beta}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$，所以 $\sin\beta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$，所以 $\tan\beta=3$. 因为 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times 2}{1-2^2}=-\frac{4}{3}$，所以 $\tan(2\alpha+\beta)=\frac{\tan 2\alpha+\tan\beta}{1-\tan 2\alpha\tan\beta}=\frac{-\frac{4}{3}+3}{1+\frac{4}{3}\times 3}=\frac{1}{3}$.

15. 解：(1) 因为摩天轮最高点距离地面的高度为 90 m，转盘直径为 80 m，所以 $y_{\max}=90$，$y_{\min}=10$，且当 $t=0$ 时，$y=10$. 又转一周需要 48 min，所以周期 $T=48$，所以 $\begin{cases}A+m=90,\\-A+m=10,\\\frac{2\pi}{\omega}=48,\\A\sin\varphi+m=10,\end{cases}$ 其中 $A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $A=40$，$m=50$，$\omega=\frac{\pi}{24}$，$\varphi=-\frac{\pi}{2}$，所以 $y=40\sin\left(\frac{\pi}{24}t-\frac{\pi}{2}\right)+50(0\leqslant t\leqslant 48)$.

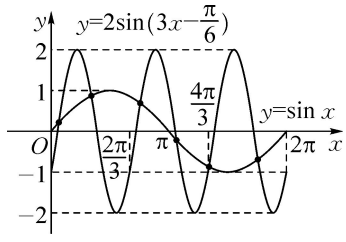
(2) 由 (1) 知，$y=40\sin\left(\frac{\pi}{24}t-\frac{\pi}{2}\right)+50(0\leqslant t\leqslant 48)$，当 $t=8$ 时，$y=40\sin\left(\frac{\pi}{24}\times 8-\frac{\pi}{2}\right)+50=40\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+50=30$，所以游客甲在开始转动 8 min 后距离地面的高度为 30 m.

(3) 设甲、乙都坐进座舱，并记两人位置为点 A，B，摩天轮的轴心为 O，则 $\angle AOB=2\times\frac{2\pi}{24}=\frac{\pi}{6}$，结合 (1)，当乙坐进座舱，运行 $x(0\leqslant x\leqslant 48)$ min 后，乙距离地面的高度 $y_1=40\sin\left(\frac{\pi}{24}x-\frac{\pi}{2}\right)+50$，甲距离地面的高度 $y_2=40\sin\left(\frac{\pi}{24}x-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+50=40\sin\left(\frac{\pi}{24}x-\frac{\pi}{3}\right)+50$，所以甲、乙两人距离地面的高度差 $h=|y_1-y_2|=\left|40\sin\left(\frac{\pi}{24}x-\frac{\pi}{2}\right)-40\sin\left(\frac{\pi}{24}x-\frac{\pi}{3}\right)\right|=40\times 2\left|\sin\frac{\left(\frac{\pi}{24}x-\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{24}x-\frac{\pi}{3}\right)}{2}\right|\cdot$

$\cos\dfrac{\left(\frac{\pi}{24}x-\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{24}x-\frac{\pi}{3}\right)}{2}\Bigg|=80\left|\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{24}x-\frac{5\pi}{12}\right)\right|=80\sin\frac{\pi}{12}\left|\cos\left(\frac{\pi}{24}x-\frac{5\pi}{12}\right)\right|$，当 $0\leqslant x\leqslant 48$ 时，$-\frac{5\pi}{12}\leqslant\frac{\pi}{24}x-\frac{5\pi}{12}\leqslant\frac{19\pi}{12}$，所以当 $\frac{\pi}{24}x-\frac{5\pi}{12}=0$ 或 $\frac{\pi}{24}x-\frac{5\pi}{12}=\pi$，即 $x=10$ 或 $x=34$ 时，$\left|\cos\left(\frac{\pi}{24}x-\frac{5\pi}{12}\right)\right|$ 取得最大值 1，所以当甲、乙两人距离地面的高度差 h 最大时，运行时间 x 的值为 10 或 34.

感悟真题

1. C　因为函数 $y=\sin x$ 的的最小正周期为 $T=2\pi$，函数 $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{3}$，所以在 $x\in[0,2\pi]$ 上函数 $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ 有三个周期的图象，在平面直角坐标系中结合五点法画出两函数图象，如图所示.



由图可知，两函数图象有 6 个交点.

2. B　因为 $\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\sqrt{3}$，所以 $\frac{1}{1-\tan\alpha}=\sqrt{3}$，解得 $\tan\alpha=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=2\sqrt{3}-1$.

3. B　因为 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}$，而 $\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{6}$，所以 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}$，则 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{2}{3}$，所以 $\cos(2\alpha+2\beta)=\cos[2(\alpha+\beta)]=1-2\sin^2(\alpha+\beta)=1-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$.

4. C　**解法 1（直接法）**　由已知得 $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=2(\cos\alpha-\sin\alpha)\sin\beta$，即 $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=0$，即 $\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha-\beta)=0$，所以 $\tan(\alpha-\beta)=-1$.

解法 2（特殊值排除法）　设 $\beta=0$，则 $\sin\alpha+\cos\alpha=0$，取 $\alpha=-\frac{\pi}{4}$，排除 A，B；取 $\alpha=0$，则 $\sin\beta+\cos\beta=2\sin\beta$，取 $\beta=\frac{\pi}{4}$，排除 D.

解法 3（三角恒等变换）　$\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\beta\right]=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\beta+\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\beta=2\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\beta$，所以 $\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\beta=\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\beta$，所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\beta-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\beta=0$，即 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}-\beta\right)=0$，所以 $\sin\left[(\alpha-\beta)+\frac{\pi}{4}\right]=\sin(\alpha-\beta)\cos\frac{\pi}{4}+\cos(\alpha-\beta)\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\alpha-\beta)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\alpha-\beta)=0$，所以 $\sin(\alpha-\beta)=-\cos(\alpha-\beta)$，即 $\tan(\alpha-\beta)=-1$.

5. BC　对于 A，令 $f(x)=\sin 2x=0$，解得 $x=\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，即为 $f(x)$ 的零点，令 $g(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$，解得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$，即为 $g(x)$ 的零点，显然 $f(x)$，$g(x)$ 的零点不同，故 A 错误；对于 B，显然 $f(x)_{\max}=g(x)_{\max}=1$，故 B 正确；对于 C，$f(x)$，$g(x)$ 的最小正周期均为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，故 C 正确；对于 D，根据正弦函数的性质知，$f(x)$ 图象的对称轴满足 $2x=k\pi+\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，$g(x)$ 图象的对称轴满足 $2x-\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$，显然 $f(x)$，$g(x)$ 的图象对称轴不同，故 D 错误.

6. 2　$f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，当 $x\in[0,\pi]$ 时，$x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，当 $x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{5\pi}{6}$ 时，$f(x)_{\max}=2$.

7. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　设 $A\left(x_1,\frac{1}{2}\right)$，$B\left(x_2,\frac{1}{2}\right)$，由 $|AB|=\frac{\pi}{6}$ 可得 $x_2-x_1=\frac{\pi}{6}$，由 $\sin x=\frac{1}{2}$ 可知，$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ 或 $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，由图可知，$\omega x_2+\varphi-(\omega x_1+\varphi)=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$，即 $\omega(x_2-x_1)=\frac{2\pi}{3}$，所以 $\omega=4$. 因为 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{8\pi}{3}+\varphi\right)=0$，所以 $\frac{8\pi}{3}+\varphi=k\pi$，即 $\varphi=-\frac{8\pi}{3}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $f(x)=\sin\left(4x-\frac{8\pi}{3}+k\pi\right)=\sin\left(4x-\frac{2\pi}{3}+k\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $f(x)=\sin\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)$ 或 $f(x)=-\sin\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)$. 又因为 $f(0)<0$，所以 $f(x)=\sin\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)$，所以 $f(\pi)=\sin\left(4\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

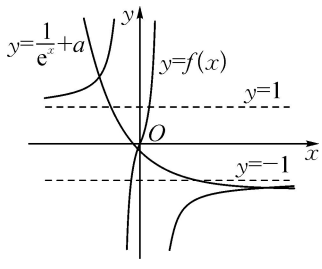
阶段滚动（第一章—第四章）

1. D　因为 $y=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ 单调递增，$y=\log_3 x$，$x\in(0,+\infty)$ 单调递增，所以 $a=2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{4}>\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}=b>1$，$c=\log_3 2<\log_3 3=1$，则 $a>b>c$.

2. A　由题意，对任意 $x_1,x_2\in[1,+\infty)$，且当 $x_1\neq x_2$ 时，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 成立，所以函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调

递增. 又 $f(1+x)=-f(1-x)$,所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称,所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上单调递增,即函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 又 $a=\log_5 3>\log_5\sqrt{5}=\frac{1}{2}$,$b=\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}<\frac{1}{2}$,而 $c=\left(\frac{1}{36}\right)^{\frac{3}{5}}=\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{6}{5}}<\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{2}}=b$,所以 $c<b<a$,则 $f(c)<f(b)<f(a)$.

3. BCD　函数 $f(x)=\frac{2x}{1-2|x|}$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\neq\pm\frac{1}{2}\right\}$,又 $f(-x)=\frac{2(-x)}{1-2|-x|}=-\frac{2x}{1-2|x|}=-f(x)$,所以函数 $f(x)$ 为奇函数,所以函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称,故 A 错误;当 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 时,$f(x)=\frac{2x}{1-2x}$,$\forall x_1,x_2\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$,且 $x_1<x_2$,$f(x_1)-f(x_2)=\frac{2x_1}{1-2x_1}-\frac{2x_2}{1-2x_2}=\frac{2x_1(1-2x_2)-2x_2(1-2x_1)}{(1-2x_1)(1-2x_2)}=\frac{2(x_1-x_2)}{(1-2x_1)(1-2x_2)}$,因为 $x_1,x_2\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$,所以 $(1-2x_1)(1-2x_2)>0$,又 $x_1<x_2$,所以 $x_1-x_2<0$,所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$,所以 $f(x_1)<f(x_2)$,所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增,又函数 $f(x)$ 为奇函数,所以 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增,故 B 正确;因为 $f\left(\frac{k}{2\,025}\right)+f\left(\frac{2\,025-k}{2\,025}\right)=\frac{2\times\frac{k}{2\,025}}{1-2\times\frac{k}{2\,025}}+\frac{2\times\frac{2\,025-k}{2\,025}}{1-2\times\frac{2\,025-k}{2\,025}}=\frac{2k}{2\,025-2k}+\frac{4\,050-2k}{2\,025-4\,050+2k}=\frac{2k}{2\,025-2k}-\frac{4\,050-2k}{2\,025-2k}=\frac{4k-4\,050}{2\,025-2k}=-2$,$k\in\mathbf{N}_+$,所以 $f\left(\frac{1}{2\,025}\right)+f\left(\frac{2}{2\,025}\right)+f\left(\frac{3}{2\,025}\right)+\cdots+f\left(\frac{2\,024}{2\,025}\right)=-2\,024$,故 C 正确;关于 x 的方程 $f(x)-\frac{1}{e^x}-a=0$ 有 3 个解,则关于 x 的方程 $f(x)=\frac{1}{e^x}+a$ 有 3 个解,所以 $y=f(x)$ 与 $y=\frac{1}{e^x}+a$ 的图象有 3 个交点,作出图象,如图:



由图象可得 $a<-1$,所以关于 x 的方程 $f(x)-\frac{1}{e^x}-a=0$ 有 3 个解的充要条件是 $a<-1$,故 D 正确.

4. 1　依题意,a,b 可分别看作函数 $f(x)=\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$ 与 $g(x)=2^x$ 和 $h(x)=\log_2 x$ 的图象交点的横坐标. 又函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称,$g(x)$,$h(x)$ 的图象也关于直线 $y=x$ 对称,所以两个交点 $(a,2^a)$,$(b,\log_2 b)$ 也关于直线 $y=x$ 对称,则 $a=\log_2 b$,$b=2^a$,由 $\frac{a}{a-1}=2^a=b$,得 $a+b=ab$,所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$.

5. 解:(1) $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 证明如下:$\forall x_1,x_2\in(1,+\infty)$,且 $1<x_1<x_2$,$f(x_2)-f(x_1)=\left(a-\frac{2}{2^{x_2-1}-1}\right)-\left(a-\frac{2}{2^{x_1-1}-1}\right)=\frac{2}{2^{x_1-1}-1}-\frac{2}{2^{x_2-1}-1}=\frac{2^{x_2}-2^{x_1}}{(2^{x_1-1}-1)(2^{x_2-1}-1)}$. 因为 $1<x_1<x_2$,所以 $2^{x_2}-2^{x_1}>0$,$2^{x_1-1}-1>0$,$2^{x_2-1}-1>0$,所以 $f(x_2)-f(x_1)>0$,即 $f(x_2)>f(x_1)$,所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

(2)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. 令 $p(x)=f(x+1)-a-1=\frac{1+2^x}{1-2^x}$,其定义域为 $\{x\,|\,x\neq0\}$,则 $p(-x)=\frac{1+2^{-x}}{1-2^{-x}}=-\frac{1+2^x}{1-2^x}=-p(x)$,所以 $p(x)=f(x+1)-a-1$ 为奇函数,所以 $y=f(x)$ 图象的对称中心为 $P(1,a+1)$.

(3)假设存在 a,使得 $y=f(x)$ 关于 $y=2^x$ 在 $(-\infty,0)$ 上的 a^2 倍集不为空集,则不等式 $f(x)<a^2\cdot2^x$ 有解,所以 $a-\frac{2}{2^{x-1}-1}<a^2\cdot2^x\ (x<0)$ 有解. 令 $t=2^x\ (0<t<1)$,则 $a-\frac{4}{t-2}<a^2\cdot t$,即 $a(t-2)-4>a^2t(t-2)$,整理得 $a^2t^2-a(2a+1)t+(2a+4)<0$. 设函数 $h(t)=a^2t^2-a(2a+1)t+(2a+4)$,则 $h(t)<0$ 在 $(0,1)$ 内有解. 当 $a=0$ 时,$h(t)=4>0$,不合题意,所以 $a\neq0$,此时抛物线 $y=h(t)$ 的开口向上. 又因为 $h(t)<0$ 有解,所以 $\Delta=a^2(2a+1)^2-4a^2(2a+4)>0$,化简得 $(2a+3)(2a-5)>0$,解得 $a<-\frac{3}{2}$ 或 $a>\frac{5}{2}$.

①当 $a<-\frac{3}{2}$ 时,抛物线 $y=h(t)$ 的对称轴 $t_0=\frac{a(2a+1)}{2a^2}=1+\frac{1}{2a}\in\left(\frac{2}{3},1\right)$. 所以 $h(t)<0$ 在 $(0,1)$ 内恒有解(至少有 $h(t_0)<0$).

②当 $a>\frac{5}{2}$ 时,抛物线 $y=h(t)$ 的对称轴 $t_1=\frac{a(2a+1)}{2a^2}=1+\frac{1}{2a}\in\left(1,\frac{6}{5}\right)$,$h(0)=2a+4>0$. 要使 $h(t)<0$ 在 $(0,1)$ 内有解,则 $h(1)=-a^2+a+4<0$,解得 $a<\frac{1-\sqrt{17}}{2}$ 或 $a>\frac{1+\sqrt{17}}{2}$. 又 $a>\frac{5}{2}$,所以 $a>\frac{1+\sqrt{17}}{2}$.

综上所述,存在常数 a,使 $y=f(x)$ 关于 $y=2^x$ 在 $(-\infty,0)$ 上的 a^2 倍集不为空集,且 a 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2},+\infty\right)$.