

高中数学

小题为王[®]

..... 全程提优

选择性必修第二册 SJ

主 编 恩波教育研究中心
编 委 梁家斌 邹广银 苗 勇
周家忠 刘伟华

 南京大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高中数学小题狂做全程提优·选择性必修 第二册 SJ/
恩波教育研究中心主编. --南京: 南京大学出版社,
2025. 1

ISBN 978-7-305-27871-6

I. ①高… II. ①恩… III. ①中学数学课—高中—教
学参考资料 IV. ①G634.603

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2024)第 035755 号

出版发行 南京大学出版社
社 址 南京市汉口路 22 号 邮 编 210093

GAOZHONG SHUXUE XIAOTI KUANGZUO QUANCHENG TIYOU • XUANZEXING BIXIU • DI-ER CE • SJ

书 名 高中数学小题狂做全程提优·选择性必修·第二册·SJ
主 编 恩波教育研究中心
责任编辑 刘 琦 编辑热线 025-83530763

印 刷 句容市和平印务有限公司
开 本 880 mm×1230 mm 1/16 开 印张 18.5 字数 520 千
版 次 2025 年 1 月第 1 版 2025 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-27871-6
定 价 62.80 元

网 址 <http://www.njupco.com>
官方微博 <http://weibo.com/njupco>
官方微信 njupress
销售咨询热线 025-83594756

-
- * 版权所有,侵权必究
 - * 凡购买南大版图书,如有印装质量问题,请与所购
图书销售部门联系调换

Contents 目录

第6章 空间向量与立体几何

►见答案

课时提优 1	6.1.1 空间向量的线性运算	1
课时提优 2	6.1.2 空间向量的数量积	3
课时提优 3	6.1.3 共面向量定理	5
课时提优 4	6.2.1 空间向量基本定理	7
课时提优 5	6.2.2 空间向量的坐标表示	9
课时提优 6	6.3.1 直线的方向向量与平面的法向量	
	6.3.2 空间线面关系的判定	12
单元综合练 1	空间向量的运算及其空间位置关系的向量证法	14
课时提优 7	6.3.3 空间角的计算	16
课时提优 8	6.3.4 空间距离的计算	18
单元综合练 2	用空间向量研究空间角与距离的综合问题	20
培优突破练 1	立体几何中的存在性问题的向量解法	22
章末提优		25
感悟真题		27

方法	向量共线的判定及应用/1
方法	利用数乘运算进行向量表示的注意点/1
方法	证明空间三个向量共面、四个点共面的常用方法/5
方法	利用基底表示空间向量的方法与步骤/7
方法	用空间向量基本定理解决几何问题的注意点/8
方法	求解空间点对称问题的两个技巧/8
方法	求平面法向量的方法与步骤/11
方法	利用空间向量证明平行、垂直的一般步骤/13
方法	求异面直线所成角、直线与平面所成角大小的方法/16
方法	求点到平面距离的向量法/21
方法	解决立体几何存在性问题的两种基本方法/32

第7章 计数原理

课时提优 9	7.1 两个基本计数原理	28
课时提优 10	7.2 排列	30
课时提优 11	7.3 组合	32
课时提优 12	7.4.1 二项式定理	34
课时提优 13	7.4.2 二项式系数的性质及应用	36
单元综合练 3	排列、组合与二项式定理的综合	39
培优突破练 2	排列组合的常见解题策略(优先、整体、插空、分组、捆绑等)	41
培优突破练 3	赋值法、通项法在二项展开式及多项展开式中的应用	43
章末提优		45
阶段滚动 1(第6章)		48
感悟真题		48

方法	利用分类计数原理、分步计数原理解题的步骤/39
方法	解决涂色问题的两种方法/40
方法	应用排列处理计数问题常见的四种模型/42
方法	求解多面手问题的两种方式/44
方法	分组和分配问题的联系与区别/44
方法	证明组合数恒等式问题的两种基本方法/45
易错	未区分二项式系数与项的系数致误/47
方法	求解定序问题的三种方法/52
方法	求解多项展开式的系数的方法/55

第8章 概 率

课时提优 14	8.1.1 条件概率	49
课时提优 15	8.1.2 全概率公式	51
单元综合练 4	条件概率与全概率公式的应用	54
课时提优 16	8.2.1 随机变量及其分布列	56
课时提优 17	8.2.2 离散型随机变量的数字特征	58
课时提优 18	8.2.3 二项分布	61
课时提优 19	8.2.4 超几何分布	64
课时提优 20	8.3 正态分布	67
单元综合练 5	离散型随机变量及概率分布的综合	70
培优突破练 4	利用均值和方差解决风险评估和决策型问题	72
培优突破练 5	概率中递推关系的应用	75
章末提优		78
阶段滚动 2(第6章—第7章)		81
感悟真题		81

方法 两个事件的全概率问题求解策略/63

误区 求解概率分布时需检验每个概率值均为非负数/66

误区 求解概率分布时需检验所有概率之和是否为1/67

方法 求随机变量 $Y=aX+b$ 方差的方法/69

方法 利用二项分布求解“至多”“至少”问题概率的方法/70

方法 求解二项分布概率最大问题的思路/71

误区 判断一个随机变量是否服从超几何分布需注意的三点/72

反思 概率与数列的综合应用问题的解题关键点/81

第9章 统 计

课时提优 21	9.1.1 变量的相关性	83
课时提优 22	9.1.2 一元线性回归模型	86
课时提优 23	9.2 独立性检验	90
章末提优		94
阶段滚动 3(第6章—第8章)		98
感悟真题		99

易错 未确定两变量是正相关还是负相关致误/87

答案全解精析(另册)

阶段测评卷(另册)

小帮手——思维导图+专题突破(另册)

第6章 空间向量与立体几何

课时提优 1 6.1.1 空间向量的线性运算

答案见 P1

题型索引

- 题型 1 利用空间向量有关概念判断命题真假(题 1,4) 题型 2 利用空间向量的加减法运算化简求值(题 2,5)
 题型 3 利用空间向量数乘运算化简求解空间向量(题 7) 题型 4 向量共线的判定(题 8)
 题型 5 由空间向量共线求参数(题 11) 题型 6 由三点共线求参数(题 6)

基础强化

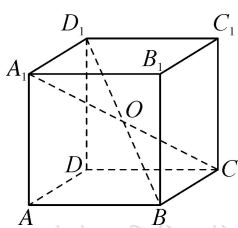
1. (2024 广东阶段练习) 如图, 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的中心为 O , 则下列结论正确的是 ()

A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$ 与 $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OD_1}$ 是一对相反向量

B. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC_1}$ 与 $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB_1}$ 是一对相反向量

C. $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1}$ 与 $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$ 是一对相反向量

D. $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OA_1}$ 是一对相反向量



2. (2024 安徽亳州阶段检测) 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, O 为线段 AC 的中点, 则 $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} =$ ()

A. $\overrightarrow{AD_1}$

B. $\overrightarrow{OB_1}$

C. $\overrightarrow{OC_1}$

D. $\overrightarrow{OD_1}$

3. (2024 江苏淮安联考) 已知空间四边形 $ABCD$, E, F 分别是边 AB 与 AD 上的点, M, N 分别是边 BC 与 CD 上的点. 若 $\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CM} = \mu \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CN} = \mu \overrightarrow{CD}$, 则向量 $\overrightarrow{EF}$ 与 $\overrightarrow{MN}$ 满足的关系为 ()

A. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{MN}$

B. $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{MN}$

C. $|\overrightarrow{EF}| = |\overrightarrow{MN}|$

D. $|\overrightarrow{EF}| \neq |\overrightarrow{MN}|$

4. (多选题, 2024 四川期中) 下列说法正确的是 ()

A. 零向量没有方向

B. 空间向量不能比较大小, 空间向量的模可以

比较大小

C. 如果两个向量不相同, 那么它们的长度不相等

D. 同向且等长的有向线段表示同一向量

5. (2024 江西景德镇期末) 在空间四边形 $OABC$ 中, 化简 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} =$ _____.

6. (2024 上海浦东阶段检测) 设 e_1, e_2 是空间两个不共线的非零向量, 已知 $\overrightarrow{AB} = 2e_1 + ke_2$, $\overrightarrow{BC} = e_1 + 3e_2$, $\overrightarrow{DC} = 2e_1 - e_2$, 且 A, B, D 三点共线, 则实数 k 的值为 _____.

综合提升

7. (2024 辽宁沈阳阶段检测) 已知正方体 $ABCD-A'B'C'D'$, E 是 $A'C'$ 的中点, F 是 AE 的三等分点, 且 $AF = \frac{1}{2}EF$, 则 $\overrightarrow{AF} =$ ()

A. $\overrightarrow{AA'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

B. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

C. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$

D. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AA'} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$

8. (2024 福建莆田阶段练习) 已知不共线向量 e_1, e_2, e_3 , $\overrightarrow{OP} = e_1 - 2e_2 + e_3$, $\overrightarrow{PQ} = -5e_1 - 6e_2 + 4e_3$, $\overrightarrow{QR} = 7e_1 + 2e_2 - 2e_3$, 则一定共线的三个点是 ()

A. O, P, Q

B. P, Q, R

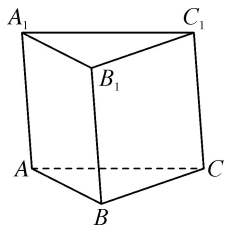
C. O, Q, R

D. O, P, R

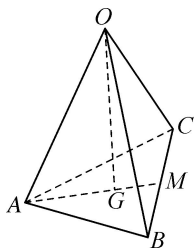
9. (多选题, 2024 河北唐山联考) 已知平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, 则下列各式运算结果是 $\overrightarrow{AC_1}$ 的有 ()

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$
 B. $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1D_1}$
 C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1}$
 D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1}$

10. (多选题, 2024 贵州阶段检测) 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, P 为空间一点, 且满足 $\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BC} + \mu \overrightarrow{BB_1}$, $\lambda, \mu \in [0, 1]$, 则下列说法正确的是 ()

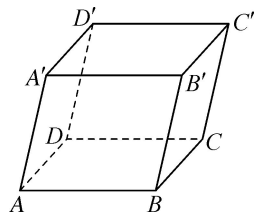


- A. 当 $\lambda = 0$ 时, 点 P 在棱 BB_1 上
 B. 当 $\lambda = \mu$ 时, 点 P 在线段 B_1C 上
 C. 当 $\mu = 1$ 时, 点 P 在棱 B_1C_1 上
 D. 当 $\lambda + \mu = 1$ 时, 点 P 在线段 B_1C 上
11. (2024 云南保山期中) 若空间非零向量 e_1, e_2 不共线, 则使 $2ke_1 - e_2$ 与 $e_1 + 2(k+1)e_2$ 共线的 k 的值为_____.
12. (2024 广东佛山南海期中) 如图, O 为 $\triangle ABC$ 所在平面外的一点, M 为 BC 的中点, $\overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AM}$, 且 $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$, 则实数 λ 的值为_____.

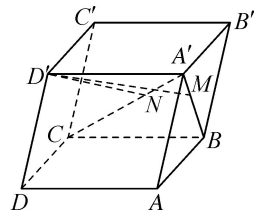


13. (2024 江苏徐州联考) 已知平行六面体 $ABCD - A'B'C'D'$, 化简下列向量表达式, 并在图中标出化简得到的向量.

- (1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$;
 (2) $\overrightarrow{DD'} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$;
 (3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DD'} - \overrightarrow{BC})$.



14. (2024 四川泸县联考) 如图, 已知四棱柱 $ABCD - A'B'C'D'$ 的六个面都是平行四边形, 点 M 在对角线 $A'B$ 上, 且 $A'M = \frac{1}{2}MB$, 点 N 在体对角线 $A'C$ 上, 且 $A'N = \frac{1}{3}NC$.
- (1) 设向量 $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AD} = b, \overrightarrow{AA'} = c$, 用 a, b, c 表示向量 $\overrightarrow{D'M}, \overrightarrow{D'N}$;
 (2) 求证: M, N, D' 三点共线.



应用·创新

15. (2024 山东威海阶段检测) 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = AA_1 = 1$, 点 P 满足 $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + n\overrightarrow{BB_1}$, 其中 $n \in [0, 1]$, 则 $\triangle AB_1P$ 周长的最小值是_____.

单元综合练 1 空间向量的运算及其空间位置关系的向量证法

答案见 P14

综合提升

- (2024 山东青岛期末) 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (-1, \lambda, 2)$, 且 $7\mathbf{a} + 5\mathbf{b}$ 与 $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 互相垂直, 则实数 $\lambda =$ ()
A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ 或 $\frac{7}{5}$ C. 0 或 $\frac{3}{5}$ D. 0 或 $\frac{7}{5}$
- (2023 江苏淮安模拟) 设 x, y 是实数, 已知 $A(1, 5, -2), B(2, 4, 1), C(x, 3, y+2)$ 三点在同一条直线上, 那么 $x+y =$ ()
A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
- (多选题, 2024 山东菏泽期末) 已知 P 是平行四边形 $ABCD$ 所在平面外一点. 若 $\overrightarrow{AB} = (2, -1, -4), \overrightarrow{AD} = (4, 2, 0), \overrightarrow{AP} = (-1, 2, -1)$, 则下列结论正确的有 ()
A. $AP \perp AB$
B. $AP \parallel BD$
C. $AP \perp$ 平面 $ABCD$
D. 四边形 $ABCD$ 为矩形
- (多选题, 2024 河北沧州期末) 在棱长为 2 的正四面体 $A-BCD$ 中, E, F 分别是 AD, BC 的中点, G 是 $\triangle BCD$ 的重心, 则下列结论正确的是 ()
A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$
B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} = 2$
C. $\overrightarrow{EF}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量为 $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
D. $\overrightarrow{EG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})$
- (2024 江苏常州期中) 一种糖果的包装纸由一个边长为 6 的正方形和 2 个等腰直角三角形组成(如图 1), 沿 AD, BC 将 2 个三角形折起到与平面 $ABCD$ 垂直(如图 2), 连接 EF, AE, CF, AC . 若点 P 满足 $\overrightarrow{DP} = x\overrightarrow{DA} + y\overrightarrow{DC} + z\overrightarrow{DF}$ 且 $x+y+z=1$, 则 $|\overrightarrow{EP}|$ 的最小值为 _____.

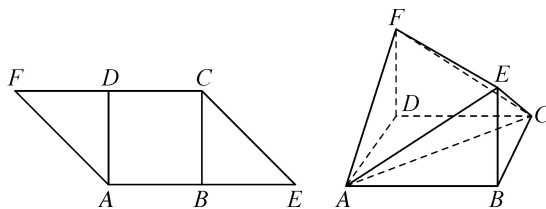
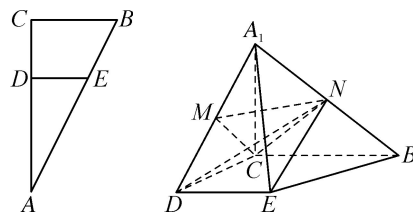


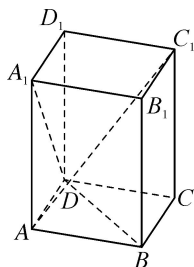
图 1

图 2

- (2024 四川绵阳期中) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ, BC = 3, AC = 6, D, E$ 分别是 AC, AB 上的一点, 满足 $DE \parallel BC$ 且 DE 经过 $\triangle ABC$ 的重心. 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起到 $\triangle A_1DE$ 的位置, 使 $A_1C \perp CD, M$ 是 A_1D 的中点, 如图所示. 点 N 在线段 A_1B 上 (N 不与端点 A_1, B 重合), 使平面 CMN 与平面 DEN 垂直, 则 $\frac{A_1N}{BN} =$ _____.



- (2023 湖南浏阳期中) 如图, 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, $AA_1 = 2, \angle A_1AB = \angle A_1AD = 120^\circ$.
(1) 求线段 AC_1 的长;
(2) 求异面直线 AC_1 与 A_1D 所成角的余弦值;
(3) 求证: $AA_1 \perp BD$.



8. (2024 河北邢台二模)在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$, $AB=AC=2$, $AA_1=3$.

- (1) 如图 1, E 为 C_1A 上的一动点, F 为棱 BC 上的一动点, 且 $\frac{AE}{AC_1} = \frac{CF}{BC}$, 求线段 EF 长的最小值.
- (2) 如图 2, M 是棱 AB 的中点, N 是棱 B_1C_1 的中点, P 是 BC_1 与 B_1C 的交点. 线段 A_1N 上是否存在点 Q , 使得 $PQ \parallel$ 平面 A_1CM ? 若存在, 请确定点 Q 的位置; 若不存在, 请说明理由.

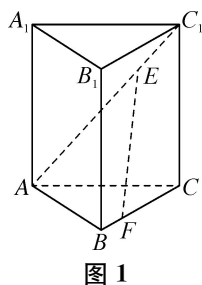


图 1

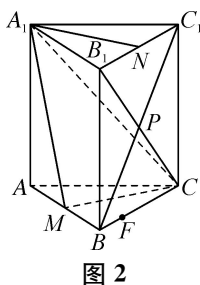


图 2

应用 · 创新

9. (2024 上海浦东期末)已知棱长均为 1 的正 n 棱柱有 $2n$ 个顶点, 从中任取两个顶点作为向量 $\mathbf{a}$ 的起点与终点, 设底面的一条棱为 AB . 若集合 $A_n = \{x \mid x = \mathbf{a} \cdot \overrightarrow{AB}\}$, 则当 A_n 中的元素个数最少时, n 的值为 ()
- A. 3 B. 4 C. 6 D. 8

培优突破练 1 立体几何中的存在性问题的向量解法

答案见 P27

1. (2023 山东临沂月考)若直线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{m}$, 平面 α 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}$, 则可能使 $l \parallel \alpha$ 的是 ()

A. $\boldsymbol{m}=(1,0,0), \boldsymbol{n}=(-2,0,0)$
 B. $\boldsymbol{m}=(1,3,5), \boldsymbol{n}=(1,0,1)$,
 C. $\boldsymbol{m}=(0,2,1), \boldsymbol{n}=(-1,0,-1)$
 D. $\boldsymbol{m}=(1,-1,3), \boldsymbol{n}=(0,3,1)$

2. (2024 江苏淮安联考)在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1=2AB=2$, E 为 AB 的中点. 若线段 BB_1 上存在点 F , 使得 $A_1C \perp EF$, 则 $\frac{B_1F}{FB} =$ ()

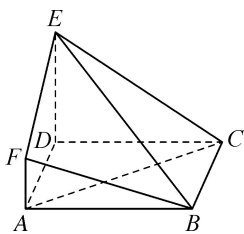
A. 10 B. 12 C. 15 D. 20

3. (2023 河南安阳阶段练习)已知在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=AB=2$. 若棱 AB 上存在点 P , 使得 $D_1P \perp PC$, 则 AD 的取值范围是 ()

A. $[1,2)$ B. $(1,\sqrt{2}]$
 C. $(0,1]$ D. $(0,2)$

4. (2023 江苏泰州阶段检测)

如图, 四边形 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形, $DE \perp$ 平面 $ABCD$, $AF \parallel DE$, 且 $DE=3AF=3$. 若线段 AC

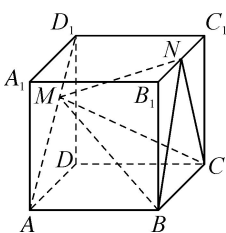


上存在一点 P , 使得点 P 到平面 BEF 的距离为 $\frac{5\sqrt{21}}{21}$, 则线段 AP 的长为 ()

A. $4\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{21}$

5. (2024 广东潮州期末)如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 M, N 分别在线段 AD_1 和 B_1C_1 上, 则下列结论错误的是 ()

A. MN 的最小值为 2
 B. 四面体 $NMBC$ 的体积为 $\frac{4}{3}$



C. 有且仅有一条直线 MN 与 AD_1 垂直

D. 存在点 M, N , 使 $\triangle MBN$ 为等边三角形

6. (2023 北京海淀阶段练习)如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N 分别是棱 A_1B_1, A_1D_1 的中点, 点 P 在线段 CM 上运动, 则下列结论错误的是 ()

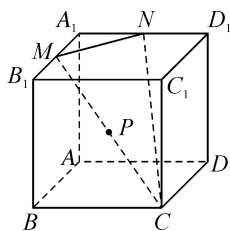
A. 平面 CMN 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得的截面图形是五边形

B. 直线 B_1D_1 到平面 CMN

的距离为 $\frac{2\sqrt{17}}{17}$

C. 存在点 P , 使得 $\angle B_1PD_1 = 90^\circ$

D. $\triangle PDD_1$ 面积的最小值为 $\frac{5\sqrt{5}}{6}$



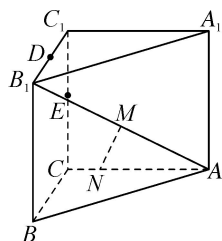
7. (多选题, 2024 福建厦门期末)如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $CA \perp CB$, $CA=CB=CC_1$, D, E, M 分别为 B_1C_1, CC_1, AB_1 的中点, N 是棱 AC 上一动点, 则 ()

A. $MN \perp BC_1$

B. 存在点 N , 使得 $MN \perp$ 平面 BC_1N

C. $MN \parallel$ 平面 A_1DE

D. 存在点 N , 使得 $MN \parallel DE$

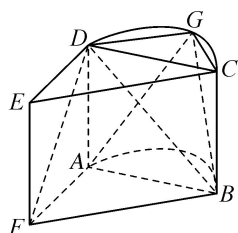


8. (多选题, 2024 河南漯河期末)如图所示的空间几何体是由高度相等的半个圆柱和直三棱柱 $ABF-DCE$ 组合而成. 若 $AB \perp AF$, $AB=AD=AF=4$, G 是弧 $\widehat{CD}$ 上的动点, 则 ()

A. 当 G 为弧 $\widehat{CD}$ 的中点时, 平面 $EFBC \perp$ 平面 BCG

B. 当 G 为弧 $\widehat{CD}$ 的中点时, $BF \parallel$ 平面 ADG

C. 存在点 G , 使得三棱锥 $E-ACG$ 的体积为 8



D. 存在点 G , 使得直线 CF 与平面 BCG 所成的角为 60°

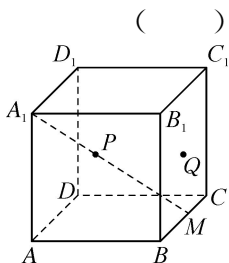
9. (多选题, 2024 广东湛江期末) 如图, 在棱长为 6 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 是棱 BC 的中点, P 是线段 A_1M 上的动点, 点 Q 在正方形 DCC_1D_1 内(含边界)运动, 则下列结论正确的有 ()

A. 存在点 Q , 使得 $QC \perp A_1M$

B. 存在点 P , 使得 $\angle BPD = 90^\circ$

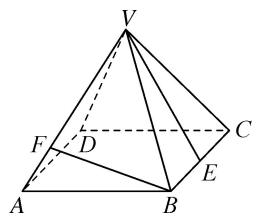
C. $\triangle PDD_1$ 面积的最小值为 $\frac{36\sqrt{5}}{5}$

D. 若 $\angle AQD = \angle MQC$, 则三棱锥 $Q-ABD$ 体积的最大值为 $12\sqrt{3}$



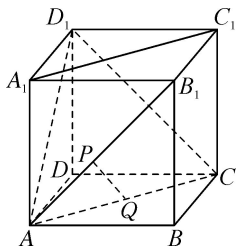
10. (2024 辽宁大连月考) 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=AA_1=1$, 点 P 满足 $\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BC} + \mu \overrightarrow{BB_1}$, 当 $\lambda =$ _____ 时, 存在两个点 P , 使得 $AP \perp BP$.

11. (2024 吉林通化期末) 如图, 在正四棱锥 $V-ABCD$ 中, 二面角 $V-BC-D$ 的大小为 60° , E 为 BC 的中点. 若



直线 VA 上存在一点 F (F 与 A 不重合), 使得异面直线 BF 与 VE 所成的角为 60° , 则 $\frac{VF}{VA} =$ _____.

12. (2024 四川雅安一模) 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, Q 是线段 AC 的中点, 若线段 AB_1 上存在一点 P (含端点), 使得 PQ



与平面 ACD_1 所成角的余弦值的最小值为 $\frac{1}{3}$, 则

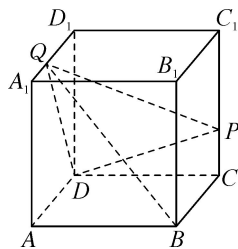
$$\frac{AP}{AB_1} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

13. (2024 山东滨州期末) 如图, 已知在正方

体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P, Q 分别在棱 CC_1 和 A_1D_1 上, $CP:CC_1 = A_1Q:A_1D_1 = 1:3$.

(1) 求平面 $ABCD$ 与平面 DPQ 的夹角的余弦值.

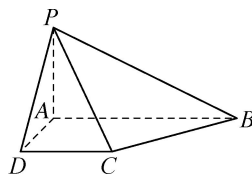
(2) 线段 BQ 上是否存在点 M , 使得 $CM \parallel$ 平面 DPQ ? 若存在, 请求出 $\frac{BM}{BQ}$ 的值; 若不存在, 请说明理由.



14. (2024 江苏南通阶段练习) 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为直角梯形, $AB \parallel DC$, $\angle DAB = 90^\circ$, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA = AD = DC = \frac{1}{2}AB = 1$.

(1) 若 M 是棱 PB 上的动点, 且满足 $\frac{PM}{MB} = \frac{1}{2}$, 求证: $PD \parallel$ 平面 ACM .

(2) 若 N 为棱 PC 上一点 (不含端点), 试探究 PC 上是否存在一点 N , 使得平面 $ADN \perp$ 平面 BDN . 若存在, 请求出 $\frac{PN}{NC}$ 的值; 若不存在, 请说明理由.



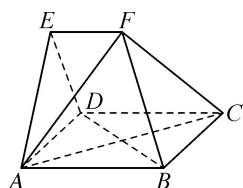
15. (2024 山东济宁期末) 如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 平面 $ADE \perp$ 平面 $ABCD$, $\triangle ADE$ 是边长为 2 的等边三角形, 四边形 $ABCD$ 是菱形, 且 $\angle BAD = 60^\circ$, $EF \parallel AB$, $AB = 2EF$.

(1) 求证: $BD \perp$ 平面 ACF .

(2) 线段 AE 上是否存在点 M , 使平面 MAD

与平面 MBC 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$? 若存

在, 请确定点 M 的位置; 若不存在, 请说明理由.



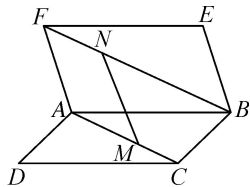
章末提优

答案见 P32

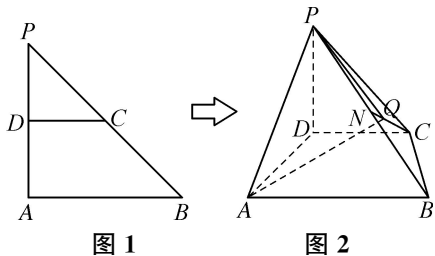
- (2024 江苏扬州期末)已知一直线经过点 $A(2, 3, 2)$, $B(-1, 0, -1)$, 则下列向量是该直线的方向向量的为 ()
 A. $\mathbf{a}=(-1, 1, 1)$ B. $\mathbf{a}=(1, -1, 1)$
 C. $\mathbf{a}=(1, 1, -1)$ D. $\mathbf{a}=(1, 1, 1)$
- (2024 山东菏泽期末)已知 $\mathbf{n}_1=(\sqrt{3}, x, 2)$, $\mathbf{n}_2=(-3, \sqrt{3}, -2\sqrt{3})$ 分别是平面 α, β 的法向量. 若 $\alpha \perp \beta$, 则 $x=$ ()
 A. -7 B. -1 C. 1 D. 7
- (2024 广东江门期末)若 $\mathbf{a}=(-1, 2, -1)$, $\mathbf{b}=(1, 3, -2)$, 则 $(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a}-\mathbf{b})=$ ()
 A. -8 B. -10 C. 8 D. 10
- (2024 河北邯郸期末)已知 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ 是不共面的空间向量. 若 $\mathbf{p}=3\mathbf{x}-2\mathbf{y}-4\mathbf{z}$ 与 $\mathbf{q}=(m+1)\mathbf{x}+8\mathbf{y}+n\mathbf{z}$ (m, n 是实数) 是平行向量, 则 $m+n$ 的值为 ()
 A. 16 B. -13 C. 3 D. -3
- (2024 广东佛山期末)在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, E 是 CC' 的中点. 设 $\overrightarrow{AE}$ 在 $\overrightarrow{A'D}$ 上的投影向量为 $\mathbf{a}$, 则 $|\mathbf{a}|=$ ()
 A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\sqrt{2}$
- (2024 广东清远期末)已知空间向量 $\overrightarrow{OA}=(2, 0, 2)$, $\overrightarrow{OB}=(2, 1, 0)$, $\overrightarrow{OC}=(0, 2, 0)$, $\overrightarrow{OD}=(0, 1, 2)$, 则下列说法正确的是 ()
 A. $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形
 B. 若 $\overrightarrow{OE}=(1, 1, 1)$, 则 A, B, C, E 四点共面
 C. 四边形 $ABCD$ 是矩形
 D. 若 $\overrightarrow{CD}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 分别是异面直线 l_1 与 l_2 的方向向量, 则 l_1 与 l_2 所成角的余弦值为 $-\frac{\sqrt{5}}{5}$
- (多选题, 2024 广东潮州期末)在空间直角坐标系中, 向量 $\mathbf{a}=(m, 2, 2)$, $\mathbf{b}=(-2, 1, 1)$, 则下列结论正确的是 ()
 A. $|\mathbf{b}|=\sqrt{6}$
 B. 若 $m=-4$, 则 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$
 C. 若 $m=1$, 则 $\mathbf{a}-\mathbf{b}=(-3, -1, -1)$
 D. 若 $m=2$, 则 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$
- (多选题, 2024 河北张家口期末)在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 四边形 $ABCD$ 为正方形, $AB=2$, $AA_1=\sqrt{2}$, O 为 BD 的中点, M 是 A_1C 上一点, 且 $\overrightarrow{A_1M}=2\overrightarrow{MC}$, 则下列选项正确的有 ()
 A. $AB_1 \parallel$ 平面 BDC_1
 B. $\overrightarrow{A_1C}$ 为平面 BDC_1 的法向量
 C. $\overrightarrow{OM}$ 为平面 A_1BD 的法向量
 D. $\overrightarrow{D_1M} \cdot \overrightarrow{CB_1}=0$
- (多选题, 2024 广东广州期末)已知正四面体 $ABCD$ 的棱长为 2, 点 M, N 分别为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 的重心, P 为线段 CN 上一点, 则下列结论正确的是 ()
 A. 直线 MN 与 BD 所成角的大小为 60°
 B. 点 A 到直线 MN 的距离为 $\frac{\sqrt{11}}{3}$
 C. 直线 MN 到平面 ACD 的距离为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
 D. 若 $BP \perp$ 平面 ACD , 则三棱锥 $P-ACD$ 外接球的表面积为 $\frac{27\pi}{2}$
- (2023 云南临沧月考)已知 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 是空间向量的单位正交基底, $\{\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{b}, 3\mathbf{c}\}$ 是空间向量的另一个基底. 若向量 $\mathbf{p}$ 在基底 $\{\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{b}, 3\mathbf{c}\}$ 下的坐标是 $(1, 2, 2)$, 则向量 $\mathbf{p}$ 在基底 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 下的坐标是_____.
- (2024 河北保定期末)在空间直角坐标系中, 过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 且一个法向量为 $\mathbf{n}=(a, b, c)$ 的平面 α 的方程可写为 $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$. 已知直线 AB 的方向向量为 $(1, 1, 1)$, 平面 α 的方程为 $3x+4y-5z=0$, 则直线 AB 与平面 α 所成角的正弦值

为_____.

12. (2024 广东广州期末) 如图, 正方形 $ABCD$ 和正方形 $ABEF$ 的边长都是 1, 且它们所在的平面所成二面角 $D-AB-F$ 的大小是 60° , 则直线 AC 和 BF 夹角的余弦值为_____. 若 M, N 分别是 AC, BF 上的动点, 且 $AM = BN$, 则 MN 的最小值是_____.



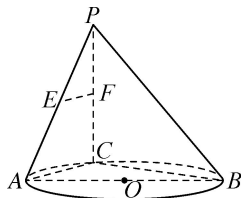
13. (2024 山东济南期末) 在如图 1 所示的 $\triangle PAB$ 中, $AP \perp AB$, $AB = AP = 12$, D, C 分别为 PA, PB 的中点. 将 $\triangle PDC$ 沿 DC 向平面 $ABCD$ 上方翻折至图 2 所示的位置, 使得 $PA = 6\sqrt{2}$, 连接 PA, PB , 得到四棱锥 $P-ABCD$, 记 PB 的中点为 N , 连接 CN .



- (1) 求证: $CN \perp$ 平面 PAB ;
(2) 点 Q 在线段 CN 上, 且 $QC = 2QN$, 连接 AQ, PQ , 求平面 PAQ 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值.

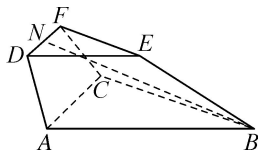
14. (2024 湖南邵阳期末) 如图所示, AB 是圆 O 的直径, C 是圆 O 上异于点 A 的一点, $PC \perp$ 平面 ABC , E, F 分别为 PA, PC 的中点.

- (1) 求证: $EF \perp$ 平面 PBC ;
(2) 若 $PC = 2, AB = 2\sqrt{2}$, 二面角 $B-PA-C$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 求 BC 的长.



15. (2024 江苏宿迁期末) 如图, 在三棱台 $ABC-DEF$ 中, $AB = BC = AC = 2, AD = DF = FC = 1$, N 为 DF 的中点, 二面角 $D-AC-B$ 的大小为 θ .

- (1) 求证: $AC \perp BN$;
(2) 若 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 求三棱台 $ABC-DEF$ 的体积;
(3) 若点 A 到平面 $BCFE$ 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$, 求 $\cos \theta$ 的值.

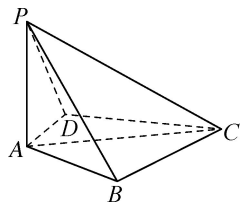


感悟真题

└答案见 P36

- (2023 全国甲卷理, 11) 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 4 的正方形, $PC=PD=3$, $\angle PCA=45^\circ$, 则 $\triangle PBC$ 的面积为 ()
A. $2\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $4\sqrt{2}$ D. $6\sqrt{2}$
- (2022 全国乙卷理, 7) 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为 AB, BC 的中点, 则 ()
A. 平面 $B_1EF \perp$ 平面 BDD_1
B. 平面 $B_1EF \perp$ 平面 A_1BD
C. 平面 $B_1EF \parallel$ 平面 A_1AC
D. 平面 $B_1EF \parallel$ 平面 A_1C_1D
- (多选题, 2021 新高考 I 卷, 12) 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=AA_1=1$, 点 P 满足 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$, 其中 $\lambda \in [0, 1], \mu \in [0, 1]$, 则 ()
A. 当 $\lambda=1$ 时, $\triangle AB_1P$ 的周长为定值
B. 当 $\mu=1$ 时, 三棱锥 $P-A_1BC$ 的体积为定值
C. 当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时, 有且仅有一个点 P , 使得 $A_1P \perp BP$
D. 当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时, 有且仅有一个点 P , 使得 $A_1B \perp$ 平面 AB_1P

- (2024 新高考 I 卷, 17) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $PA=AC=2, BC=1, AB=\sqrt{3}$.
(1) 若 $AD \perp PB$, 求证: $AD \parallel$ 平面 PBC ;
(2) 若 $AD \perp DC$, 且二面角 $A-CP-D$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$, 求 AD .



第7章 计数原理

课时提优9 7.1 两个基本计数原理

答案见 P39

题型索引

- 题型1 分类计数原理(加法原理)的简单应用(题1,7,11)
题型2 分步计数原理(乘法原理)的简单应用(题2,5,6,9,12,14)
题型3 分类计数原理与分步计数原理综合应用问题(题3,4,8,13)

基础强化

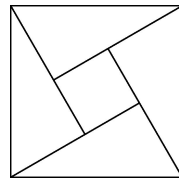
- (2024 辽宁抚顺阶段练习)书架上有10本不同的自然科学图书和9本不同的社会科学图书,甲同学想从中选出1本阅读,则不同的选法共有 ()
A. 9种 B. 10种 C. 19种 D. 90种
- 已知集合 $A = \{-4, 1, 2, 3\}$, $B = \{-2, -1, 0, 3\}$. 现从集合 A 中取一个元素作为点 P 的横坐标,从集合 B 中取一个元素作为点 P 的纵坐标,则位于第四象限的点 P 有 ()
A. 16个 B. 12个 C. 9个 D. 6个
- (2025 吉林长春开学考试)我校某班举办新年联欢班会,抽奖项目设置了特等奖、一等奖、二等奖、三等奖、鼓励奖,共五种奖项. 甲、乙、丙、丁、戊每人抽取一张奖票,开奖后发现这5人的奖项都不相同. 甲说“我不是鼓励奖”;乙说“我不是特等奖”;丙说“我的奖没有戊好但是比丁的强”. 根据以上信息,这5人的奖项的所有可能的种数是 ()
A. 12 B. 13 C. 24 D. 26
- (多选题, 2024 广东东莞阶段练习)某市地铁按照乘客乘坐的站数实施分段优惠政策,不超过9站的地铁票价如表所示. 现有小明、小华两位乘客同时从首站乘坐同一辆地铁,已知他们乘坐地铁都不超过9站,且他们各自在每个站下地铁的可能性相同,则下列结论正确的是 ()

站数 x	$0 < x \leq 3$	$3 < x \leq 6$	$6 < x \leq 9$
票价/元	2	3	4

- 若小明、小华两人共花费5元,则小明、小华下地铁的方案共有9种
 - 若小明、小华两人共花费5元,则小明、小华下地铁的方案共有18种
 - 若小明、小华两人共花费6元,则小明、小华下地铁的方案共有27种
 - 若小明、小华两人共花费6元,则小明比小华先下地铁的方案共有12种(同一地铁站出站不分先后)
- (2024 江苏徐州期末)甲、乙、丙、丁四人打算从北京、上海、西安、长沙四个城市中任选一个前去游玩,其中甲去过北京,所以甲不去北京,则不同的选法有_____种.
 - (2024 江西萍乡期末)从数字1,2,3,4,5,6,7,8,9中任选4个组成无重复数字的四位数,满足千位和百位上的数字之和为5,则这样的偶数共有_____个.

综合提升

- (2023 四川德阳五中校考)某小区有5个区域要种上鲜花(如图),现有四种不同品种的鲜花可供选择,每个区域只能种一种鲜花,要求相邻区域不能种同一种鲜花,则符合条件的方案种数为 ()
A. 36 B. 48 C. 54 D. 72
- (2023 江苏淮安淮阴中学等校联考)自然数 n 是一个三位数,其十位与个位、百位的差的绝对值均不超过1,我们就把 n 叫作“集中数”. 那



么,大于 600 的“集中数”的个数是 ()

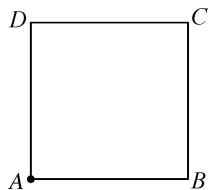
A. 30 B. 31 C. 32 D. 33

9. (多选题, 2024 湖北武汉阶段练习) 数学中蕴含着无穷无尽的美, 尤以对称美最为直观和显著. 回文数是对称美的一种体现, 它是从左到右与从右到左读都一样的正整数, 如 22, 121, 3443, 94249 等. 显然两位回文数有 9 个: 11, 22, 33, ..., 99. 三位回文数有 90 个: 101, 111, 121, ..., 191, 202, ..., 999. 则下列说法正确的是 ()

A. 四位回文数有 45 个
B. 四位回文数有 90 个
C. $2n(n \in \mathbf{N}^*)$ 位回文数有 10^n 个
D. $(2n+1)(n \in \mathbf{N}^*)$ 位回文数有 9×10^n 个

10. (多选题, 2024 福建泉州阶段练习) 某人设计一项单人游戏, 规则如下: 先将一棋子放在如图所示正方形 $ABCD$ (边长为 2 个单位) 的顶点 A 处, 然后通过掷骰子来确定棋子沿正方形的边按逆时针方向行走的单位, 如果掷出的点数为 $i(i=1, 2, \dots, 6)$, 那么棋子就按逆时针方向行走 i 个单位, 一直循环下去. 某人抛掷三次骰子后棋子恰好又回到点 A 处, 则 ()

A. 抛掷三次骰子后所走的步数可以是 12
B. 三次骰子的点数之和只可能有两种结果
C. 三次骰子的点数之和超过 10 的走法有 6 种
D. 回到点 A 处的所有不同走法共有 27 种



11. (2023 浙江温州乐清市知临中学校考) 一个圆的圆周上均匀分布 6 个点, 从这些点与圆心共 7 个点中, 任取 3 个点, 这 3 个点能构成不同的等边三角形的个数为 _____.

12. 2160 的不同正因数的个数为 _____.

13. (2024 四川眉山期中) 已知 0, 1, 2, 3, 4, 5 这六个数字.

(1) 可以组成多少个无重复数字的三位数?
(2) 可以组成多少个无重复数字的三位奇数?
(3) 可以组成多少个无重复数字的小于 1000

的自然数?

(4) 可以组成多少个无重复数字的大于 3000 且小于 5421 的四位数?

14. 用 $n(n \geq 3, n \in \mathbf{N}^*)$ 种不同的颜色给如图所示的 A, B, C, D 四个区域涂色, 要求相邻区域不能用同一种颜色.

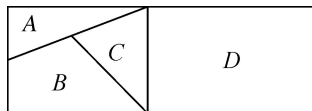


图 1

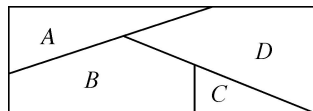


图 2

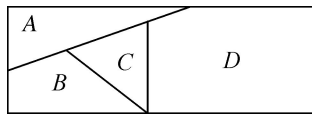


图 3

(1) 当 $n=6$ 时, 图 1、图 2 各有多少种不同的涂色方案?

(2) 若图 3 有 180 种不同的涂色方案, 求 n 的值.

应用 · 创新

15. (2024 重庆沙坪坝模拟) 用 a 代表红球, b 代表蓝球, c 代表黑球, 由加法原理及乘法原理知, 从 1 个红球和 1 个蓝球中取出若干个球的所有取法可由 $(1+a)(1+b)$ 的展开式 $1+a+b+ab$ 表示出来, 如“1”表示一个球都不取, “ a ”表示取出一个红球, 而“ ab ”表示把红球和蓝球都取出来, 以此类推. 下列各式, 其展开式可用来表示从 3 个无区别的红球、3 个无区别的蓝球、2 个有区别的黑球中取出若干个球, 且所有蓝球都取出或都不取出的所有取法的是 ()

A. $(1+a+a^2+a^3)(1+b^3)(1+c)^2$
B. $(1+a^3)(1+b+b^2+b^3)(1+c)^2$
C. $(1+a)^3(1+b+b^2+b^3)(1+c^2)$
D. $(1+a^3)(1+b)^3(1+c+c^2)$

阶段滚动 1(第 6 章)

答案见 P59

1. (2024 江苏连云港期中)已知向量 $\mathbf{a}=(1,3,1)$, $\mathbf{b}=(2,1,1)$, $\mathbf{c}=(t,5,1)$ 共面,则实数 t 的值是

()

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

2. (2025 宁夏银川阶段练习)如图,在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$

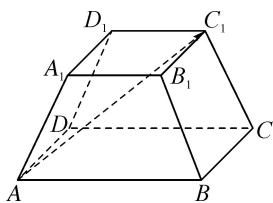
中, $AB=2$, $A_1B_1=1$, 则 $\overrightarrow{AC_1}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量是

()

A. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ B. $\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$ C. $\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$ D. $\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}$

3. (多选题, 2024 江苏连云港期中)已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 动点 M, N 在对角线 AC, C_1D 上移动, 且 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DN}=\lambda\overrightarrow{DC_1}$, $\lambda\in(0,1)$, 则下列结论正确的是

()

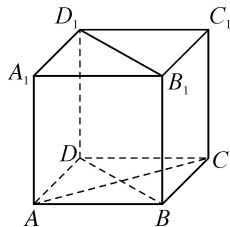
A. 异面直线 AC 与 C_1D 所成的角为 60° B. 线段 MN 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. MN 与平面 AA_1D_1D 不平行D. 存在 $\lambda\in(0,1)$, 使得 $MN\perp AC$

4. (2024 福建厦门期中)如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=2$, $AA_1=4$, $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AA_1}$, D 为 BC 的中点. 当 $AD\parallel$ 平面 BC_1E 时, $\lambda=$ _____, 此时,

直线 AD 与直线 EC_1 所成的角的余弦值为 _____.

5. (2024 江苏宿迁期中)如图, 直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱长都为 2, $\angle BAD=\frac{\pi}{3}$, 点 P 在四边形 BDD_1B_1

及其内部运动, 且满足 $PA+PC=4$, 则点 P 到平面 AD_1B_1 的距离的最小值为 _____.



感悟真题

1. (2023 新高考 II 卷, 3) 某学校为了了解学生参加体育运动的情况, 用比例分配的分层随机抽样方法作抽样调查, 拟从初中部和高中部共抽取 60 名学生, 已知该校初中部和高中部分别有 400 名和 200 名学生, 则不同的抽样结果共有

()

A. $C_{400}^{45} \cdot C_{200}^{15}$ 种 B. $C_{400}^{20} \cdot C_{200}^{40}$ 种C. $C_{400}^{30} \cdot C_{200}^{30}$ 种 D. $C_{400}^{40} \cdot C_{200}^{20}$ 种

2. (2024 全国甲卷文, 4) 甲、乙、丙、丁四人排成一列, 则丙不在排头, 且甲或乙在排尾的概率是

()

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

3. (2022 新高考 I 卷, 13) $(1-\frac{y}{x})(x+y)^8$ 的展

开式中, x^2y^6 的系数为 _____ (用数字作答).

答案见 P60

4. (2024 全国甲卷理, 13) $(\frac{1}{3}+x)^{10}$ 的展开式中, 各项系数中的最大值为 _____.

5. (2024 新高考 II 卷, 14) 在如图所示的 4×4 的方格表中选 4 个方格, 要求每行和每列均恰有一个方格被选中, 则共有 _____ 种选法; 在所有符合上述要求的选法中, 选中方格中的 4 个数之和的最大值是 _____.

11	21	31	40
12	22	33	42
13	22	33	43
15	24	34	44

第8章 概 率

课时提优 14 8.1.1 条件概率

答案见 P61

题型索引

题型 1 由样本点个数求条件概率(题 2,9)

题型 2 利用定义求条件概率(题 1,5,6)

题型 3 条件概率的性质及其应用(题 4,12)

题型 4 概率的乘法公式及其应用(题 3,13)

基础强化

- (2024 江苏泰州期中)元末明初诗人高启在他的《田园书事》中这样描述谷雨时节:叶过谷雨花犹在,衣近梅天润易生.谷雨时节,已知甲、乙两地每天下雨的概率分别为 $\frac{2}{5}$ 和 $\frac{3}{7}$,且两地同时下雨的概率为 $\frac{1}{6}$.则在甲地下雨的条件下,乙地也下雨的概率为 ()
A. $\frac{1}{15}$ B. $\frac{1}{14}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $\frac{7}{18}$
- (2024 百师联盟期末联考)已知有 7 件产品,其中 4 件正品,3 件次品,每次从中随机取出 1 件产品,抽出的产品不再放回,那么在第一次取得次品的条件下,第二次取得正品的概率为 ()
A. $\frac{4}{7}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{6}$
- (2024 安徽安庆期中)质监部门对某种建筑构件的抗压能力进行检测,对此建筑构件实施两次打击,若没有受损,则认为该构件通过质检.若第一次打击后该构件没有受损的概率为 0.85,第一次打击后没有受损且第二次实施打击也没有受损的概率为 0.80,则该构件通过质检的概率为 ()
A. 0.4 B. 0.16 C. 0.68 D. 0.17
- (多选题,2024 广东惠州期中)已知随机事件 A, B 发生的概率分别为 $P(A), P(B)$, 且 $P(A) \cdot P(B) \neq 0$, 则下列说法不正确的是 ()
A. $P(A|B) < P(AB)$
B. $P(B|A) = P(A|B)$

$$C. P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

$$D. P(B|B) = 0$$

- (2024 山东泰安期末)已知 5 道试题中有 3 道代数题和 2 道几何题,每次从中抽取一道题,抽出的题不再放回,在第 1 次抽到代数题的条件下,第 2 次抽到几何题的概率为_____.
- (2024 江西新余第一中学月考)6 名同学相约在周末参加创建全国文明城市志愿活动,现有交通值守、文明劝导、文艺宣讲三种岗位需要志愿者,其中交通值守、文明劝导岗位各需 2 人,文艺宣讲岗位需 1 人.已知这 6 名同学中有 4 名男生、2 名女生,现要从这 6 名同学中选出 5 人上岗,剩下 1 人留守值班.若 2 名女生都已经到岗,则她们不在同一岗位的概率为_____.

综合提升

- (2023 重庆沙坪坝月考)在医学生物学试验中,经常以果蝇作为试验对象,一个关有 6 只果蝇的笼子里,不慎混入了两只苍蝇(此时笼内共有 8 只蝇子:6 只果蝇和 2 只苍蝇),只好把笼子打开一个小孔,让蝇子一只一只地往外飞,直到两只苍蝇都飞出,再关闭小孔.记事件 A_k 表示“第 k 只飞出笼的是苍蝇”, $k=1,2,\dots,8$, 则 $P(A_5|A_2) =$ ()
A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{7}$ D. $\frac{2}{5}$
- (2024 山东烟台阶段调研)质数(Prime number)又称素数,一个大于 1 的自然数,除了 1 和它本身外,不能被其他自然数整除,则

这个数为质数,数学上把相差为 2 的两个素数叫作“孪生素数”.在不超过 30 的自然数中,随机选取两个不同的数,记事件 A = “这两个数都是素数”;事件 B = “这两个数不是孪生素数”,则 $P(B|A) =$ ()

- A. $\frac{11}{15}$ B. $\frac{37}{45}$ C. $\frac{41}{45}$ D. $\frac{43}{45}$

9. (多选题, 2024 广东茂名期末) 掷一枚质地均匀的骰子两次, 记向上的点数分别为 m, n , 记事件 $A = “m+n > 9”$, 事件 $B = “mn$ 为偶数”, 事件 $C = “m+n$ 为奇数”, 则 ()

A. $P(A) = \frac{1}{6}$ B. $P(A|B) = \frac{1}{5}$

C. $P(A|C) = \frac{1}{9}$ D. 事件 B 与 C 互斥

10. (多选题, 2024 湖南常德第一中学月考) 将甲、乙、丙、丁 4 名医生随机派往①②③三个村庄进行义诊活动, 每个村庄至少派 1 名医生, 事件 A 表示“医生甲派往①村庄”; 事件 B 表示“医生乙派往①村庄”; 事件 C 表示“医生乙派往②村庄”, 则 ()

A. 事件 A 与 B 相互独立

B. 事件 A 与 C 不相互独立

C. $P(B|A) = \frac{5}{12}$

D. $P(C|A) = \frac{5}{12}$

11. (2024 辽宁沈阳期末) 端午节期间, 小王、小李、小张和小刘四人分别计划去游玩, 现有三个出游的景点: 沈阳故宫、张学良旧居、辽宁大剧院. 假设每人随机选择一处景点, 在至少有两人去沈阳故宫的条件下有人去辽宁大剧院的概率为_____.

12. (2024 江苏常州期中) 已知随机事件 A, B ,

$P(A) = P(B|A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}$, 则

$P(AB) =$ _____, $P(A|\bar{B}) =$ _____.

13. 在某次抽奖活动中, 在甲、乙两人先后进行抽奖前, 还有 20 张奖券, 其中共有 3 张写有“中

奖”字样. 假设抽完的奖券不放回, 甲抽完之后乙再抽, 求:

(1) 甲中奖且乙也中奖的概率;

(2) 甲没中奖但乙中奖的概率.

14. (2024 山东聊城第一中学期中) 某校从学生文艺部 7 名成员(4 男 3 女) 中, 挑选 2 人参加学校举办的文艺会演活动.

(1) 求男生甲被选中的概率;

(2) 在已知男生甲被选中的条件下, 求女生乙被选中的概率;

(3) 在已知被选中的 2 人为一男一女的条件下, 求女生乙被选中的概率.

应用·创新

15. (2024 河北张家口期末) 在不透明的盒子中有 8 个相同的乒乓球, 球上标有数字 $1, 2, 3, \dots, 8$, 有放回地随机抽取两次(每次抽取 1 个球), 记下球上的数字 a, b , 即 $N(a, b)$. 已知原点 $O(0, 0)$ 和点 $M(1, -1)$, 记事件 $A = “\angle MON$ 是锐角”, 事件 $B = “\triangle MON$ 是锐角三角形”. 求在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率 $P(B|A)$.