第一篇
初高中衔接

第 1 练　乘 法 公 式

衔接高中

在初中,我们学习了多项式的乘法运算,其中主要学习的两个基本乘法公式是:

(1) 平方差公式:$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

(2) 完全平方公式:$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

常见变形:$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$,$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

进入高中之后,我们将面临更多更复杂的运算,教材第一章第四节,主书第 7 练等用到更多的乘法公式,因此本练我们将拓展乘法公式的内容,补充高中常用的乘法公式,如两数和(差)立方公式、立方和(差)公式及三数和平方公式等.

知识要点

(1) 两数和立方公式:$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

常见变形:$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$,$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

(2) 两数差立方公式:$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(3) 立方和公式:$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(4) 立方差公式:$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(5) 三数和平方公式:$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$

经典示例

例 1　已知 $x+y=1$,求 x^3+y^3+3xy 的值.

解:因为 $x+y=1$,所以 $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=1$,即 $x^3+3xy(x+y)+y^3=1$,所以 $x^3+3xy+y^3=1$.

例 2　已知 $x^2+3x-1=0$,求:(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$;(2) $x^3-\dfrac{1}{x^3}$.

解:因为 $x^2+3x-1=0$,所以 $x\neq 0$,所以 $x^2-1=-3x$,所以 $x-\dfrac{1}{x}=-3$.

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2=(-3)^2+2=11$.

(2) $x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2+1+\dfrac{1}{x^2}\right)=-3\times(11+1)=-36$.

例 3　当 $a+b+c=0$,$a^2+b^2+c^2=1$ 时,求下列各式的值:

(1) $bc+ca+ab$;(2) $a^4+b^4+c^4$.

解:(1) 因为 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$,且 $a+b+c=0$,$a^2+b^2+c^2=1$,所以 $0^2=1+2(ab+bc+ca)$,即 $bc+ca+ab=-\dfrac{1}{2}$.

(2) 因为 $(bc+ca+ab)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2(a^2bc+ab^2c+abc^2)=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2abc(a+b+c)$,所以 $b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2=\dfrac{1}{4}$.故 $a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2+$

成长笔记

小点拨

利用公式 $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ 求解.

小点拨

因为求值式的结构特点是两项之积为定值,所以考虑对条件式进行变形,再用"整体代换"的方法计算.

小点拨

(1) 将所求式子与已知联系,发现可将 $bc+ca+ab$ 用 $a+b+c$ 和 $a^2+b^2+c^2$ 表示.

$c^2)^2-2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)=1-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

练习巩固

题组 1　完全平方公式

1. 不论 a,b 为何实数，$a^2+b^2-2a-4b+8$ 的值（　　）

A. 总是正数　　B. 总是负数

C. 可以是零　　D. 可以是正数也可以是负数

2. 若 $x^2+y^2=169$，$x-y=7$，则 xy 的值为（　　）

A. 120　　B. 60　　C. 30　　D. 15

题组 2　立方和(差)公式

3. 计算：$(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)=$________.

4. 计算：

(1) $(4+m)(16-4m+m^2)$；　　(2) $\left(\frac{1}{5}m-\frac{1}{2}n\right)\left(\frac{1}{25}m^2+\frac{1}{10}mn+\frac{1}{4}n^2\right)$；

(3) $(a+2)(a-2)(a^4+4a^2+16)$；　　(4) $(x^2+2xy+y^2)(x^2-xy+y^2)^2$.

5. 已知 $x+\frac{1}{x}=3$，求 $x^3+\frac{1}{x^3}$.

题组 3　两数和(差)立方公式

6. (1) 已知 $(2x-3)^3=2$，则 $8x^3-36x^2+54x=$________；

(2) 已知 $x^3+6x^2+12x+7=0$，则 $x=$________.

题组 4　三数和平方公式

7. 已知 $(x+y)^2-2x-2y+1=0$，计算 $(x+y)^{1\,021}$.

8. 已知 $a+b+c=0$，$ab+bc+ac=-3$，求下列各式的值：

(1) $a^2+b^2+c^2$；　　(2) $a^4+b^4+c^4$.

成长笔记

(2) 由于 $a^4+b^4+c^4=(a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2$，由(1)得到启示，如果知道 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ 的值，就能得解.

第 2 练　因式分解

衔接高中

在初中,我们主要学习的两种因式分解的方法是:

(1) 提取公因式法:$am+bm=m(a+b)$.

(2) 公式法:利用乘法公式进行逆推.

常用公式有:$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$;$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$.

进入高中之后,因式分解仍然是数学学习的一个很重要的工具,且是科学运算的一种重要手段.教材第三章第二节等,主书第 6~7 练,第 11 练,第 16 练都涉及因式分解,因此初中学习的方法在高中是远远不够用的,所以本练我们将拓展因式分解的内容,补充高中常用因式分解的知识和方法.

知识要点

1. 常用公式:

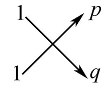
$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$;$a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$;

$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2$;

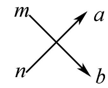
$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

2. 十字相乘法:

形如 $x^2+(p+q)x+pq$ 的二次三项式,它的特点是二次项系数是 1,常数 pq 与一次项系数 $p+q$ 可以通过如右图的"十字相乘,乘积相加"的方式建立联系,得到 $x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q)$.



下面来看二次三项式 $mnx^2+(mb+na)x+ab$,将其二次项系数 mn、常数项 ab 写成如右图的十字形式.发现"十字相乘,乘积相加",结果恰好为一次项的系数 $mb+na$,从而有 $mnx^2+(mb+na)x+ab=(mx+a)(nx+b)$.



像这样,通过十字交叉线帮助,把二次三项式分解因式的方法,叫作十字相乘法.

3. 分组分解法:

(1) 分组后能提取公因式;

(2) 分组后能直接用公式.

4. 其他方法:

(1) 配方法;

(2) 拆、添项法.

一般地,把一个多项式因式分解,可以按照下列步骤进行:

(1) 如果多项式各项有公因式,那么先提取公因式;

(2) 如果多项式各项没有公因式,那么可以尝试运用公式来分解;

(3) 如果用上述方法不能分解,那么可以尝试用分组或其他方法(如十字相乘法)来分解;

(4) 分解因式,必须进行到每一个多项式因式都不能再分解为止.

经典示例

例 1　(公式法)分解因式:(1) $8+x^3$;(2) $3a^3b-81b^4$.

解:(1) $8+x^3=2^3+x^3=(2+x)(4-2x+x^2)$.

(2) $3a^3b-81b^4=3b(a^3-27b^3)=3b(a-3b)(a^2+3ab+9b^2)$.

例 2　将下列各式分解因式:

(1) $2x^2+x-3$;

(2) $(x^2-x)^2-(x^2-x)-2$;

(3) $x^2-2xy-8y^2-x-14y-6$.

解:(1) $2x^2+x-3=(x-1)(2x+3)$.

成长笔记

小点拨

(1) 直接利用公式 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$分解;

(2) 先提取公因式 $3b$,再利用 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$分解.

小点拨

(1) 因为 $2=1\times 2$,$-3=(-1)\times 3$,且一次项系数是 1,所以可按下图用十字相乘法分解因式.

(2) $(x^2-x)^2-(x^2-x)-2=[(x^2-x)-2][(x^2-x)+1]=(x+1)(x-2)(x^2-x+1)$.

(3) $x^2-2xy-8y^2-x-14y-6=(x+2y)(x-4y)+(-x-14y)-6=(x+2y+2)(x-4y-3)$.

例 3 (分组分解法)

(1) 把 $2ax-10ay+5by-bx$ 分解因式.

解:$2ax-10ay+5by-bx=2a(x-5y)-b(x-5y)$
$=(x-5y)(2a-b)$.

(2) 把 $x^2-y^2+ax+ay$ 分解因式.

解:$x^2-y^2+ax+ay=(x+y)(x-y)+a(x+y)$
$=(x+y)(x-y+a)$.

例 4 (拆、添项法)分解因式:x^3-3x^2+4.

解法 1 $x^3-3x^2+4=(x^3+1)-(3x^2-3)=(x+1)(x^2-x+1)-3(x+1)(x-1)=(x+1)[(x^2-x+1)-3(x-1)]=(x+1)(x^2-4x+4)=(x+1)(x-2)^2$.

解法 2 $x^3-3x^2+4=(x^3+x^2)-(4x^2-4)=x^2(x+1)-4(x+1)(x-1)=(x+1)(x^2-4x+4)=(x+1)(x-2)^2$.

练习巩固

题组 1 公式法

1. 将多项式 a^3b-ab 因式分解,下列结果正确的是 ( )

A. $a(a^2b-b)$ B. $ab(a-1)^2$ C. $ab(a+1)(a-1)$ D. $ab(a^2-1)$

2. 将多项式 $ax^2-4ax+4a$ 因式分解,下列结果正确的是 ( )

A. $a(x-2)^2$ B. $a(x+2)^2$ C. $a(x-4)^2$ D. $a(x+2)(x-2)$

3. 分解因式:$x^4+27x=$______________.

题组 2 十字相乘法

4. 多项式 $3x^2-12x-36$ 因式分解正确的是 ( )

A. $3(x-6)(x+2)$ B. $3(x-3)(x+4)$

C. $3(x^2-4x-12)$ D. $3(x+6)(x-2)$

5. 分解因式:$3x^3-3x^2y-6xy^2=$____________.

6. 把下列各式因式分解.

(1) $12x^2-5x-2$; (2) $x^2+xy-6y^2$; (3) $(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12$.

题组 3 分组分解法

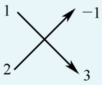
7. 分解因式.

(1) $a^2(b-5)+a(5-b)$; (2) x^3+9+3x^2+3x.

题组 4 拆、添项法

8. 分解因式:x^3-4x^2+x+6.

成长笔记



(2) 先将 x^2-x 视为一个整体,通过两次十字相乘法得到解决.

(3) 先将 $x^2-2xy-8y^2$ 用十字相乘法分解,并将分解得到的因式视为一个整体,再次用十字相乘法解决.

小点拨

例 3:(1) 把多项式的四项按前两项与后两项分成两组,并使两组的项按 x 的降幂排列,然后从两组分别提取公因式 $2a$ 与 $-b$,这时另一个因式正好都是 $x-5y$,这样可以继续提取公因式.

(2) 把第一、二项作为一组,这两项没有公因式,但可以运用平方差公式分解因式,其中一个因式是 $x+y$;把第三、四项作为另一组,在提取公因式 a 后,另一个因式也是 $x+y$.

小妙招

例 4:把常数 4 拆成 1 与 3 的和,将多项式分成两组 x^3+1 和 $-(3x^2-3)$,或将 $-3x^2$ 拆成 x^2-4x^2,将多项式分成两组 x^3+x^2 和 $-(4x^2-4)$,再用公式法及提取公因式法求解.