单选题、多选题和填空题在高考数学试卷中占有重要的比重，通常按照由易到难的顺序排列，每道题目一般是多个知识点的小型综合，其中不乏渗透各种数学的思想和方法，基本上能够做到充分考查灵活应用基础知识解决数学问题的能力. 单选题、多选题和填空题多属于“小灵通”题，其解题过程可以说是“不讲道理”，本文试图以“小”题巧解，“小”题快解，“小”题解准为原则，探讨选择题和填空题的一些解题技巧，以帮助学生提高作答的速度和正确率. 需要说明的是，学生不能过度追求这些方法和技巧，毕竟有些方法和技巧适应的范围有限，只能作为通解通法的补充，最重要的还是要以扎扎实实的知识和技能作为基础.

一 单项选择题解法

数形结合法

中学数学研究的对象可分为数和形两大部分，数与形是有联系的，这个联系称之为数形结合，其应用大致又可分为两种情形：一是借助于数的精确性来阐明形的某些属性，即“以数解形”，坐标法就是典型的例子；二是借助形的几何直观性来阐明数之间的某种关系，即“以形助数”. 平时解题中更多的是借助图形的直观性，不仅直观，易发现解题途径，还能避免复杂的计算与推理，大大简化了解题过程.

例 1 已知 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，$|\overrightarrow{AB}|=\dfrac{1}{t}$，$|\overrightarrow{AC}|=t$. 若 P 是△ABC 所在平面内一点，且 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{9\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$，则 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的最大值为 ( )

A. 16　　B. 4　　C. 82　　D. 76

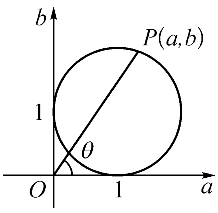
答案　D

解析　分别以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 为 x 轴、y 轴建立平面直角坐标系，则 $A(0,0)$，$B\left(\dfrac{1}{t},0\right)$，$C(0,t)$. 因为 $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$，$\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 分别为 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 方向上的单位向量，所以 $P(1,9)$. 所以 $\overrightarrow{PB}=\left(\dfrac{1}{t}-1,-9\right)$，$\overrightarrow{PC}=(-1,t-9)$，$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=82-\left(9t+\dfrac{1}{t}\right)\leqslant 82-2\sqrt{9t\cdot\dfrac{1}{t}}=76$，当且仅当 $9t=\dfrac{1}{t}$，即 $t=\dfrac{1}{3}$ 时取“=”. 所以 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的最大值为 76.

例 2 函数 $f(x)=\dfrac{\sin x-1}{\sqrt{3-2\cos x-2\sin x}}(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$的值域是 ( )

A. $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right]$　　B. $[-1,0]$　　C. $[-\sqrt{2},0]$　　D. $[-\sqrt{3},0]$

答案　B

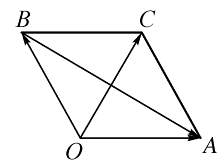


解析 注意到$3-2\cos x-2\sin x=(1-\sin x)^2+(1-\cos x)^2$，可设$1-\sin x=a$，$1-\cos x=b$，所以原式$=\dfrac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 又$(a-1)^2+(b-1)^2=1$，设$P(a,b)$，则点$P$在圆$(a-1)^2+(b-1)^2=1$上，如图所示. 则由三角函数的定义知$\dfrac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}=-\cos\angle aOP$. 由图可知，$\cos\angle aOP\in[0,1]$，所以函数$f(x)$的值域为$[-1,0]$.

例 3 若向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，则向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的夹角为 ( )

A. 30° B. 60° C. 120° D. 150°

答案 A

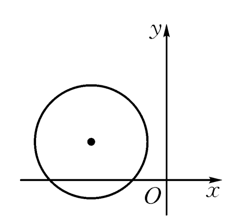


解析 因为向量可以用有向线段表示，所以向量的运算问题常可以转化为几何问题. 如图，在平行四边形$OACB$中，设向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 由$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，知$\triangle OAC$为等边三角形，四边形$OACB$为菱形，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的夹角为30°.

特殊求解法

在单项选择题中，当已知条件中含有某些不确定的量，但结论唯一或题设条件中提供的信息暗示答案是一个定值时，可以将题中变化的不定量选取一些符合条件的恰当特殊值（或特殊函数、特殊角、特殊数列、图形特殊位置、特殊点、特殊方程、特殊模型等）进行处理，从而得出探求的结论. 这样可大大地简化推理、论证的过程. 在运用这种方法时，应注意化抽象为具体，化整体为局部，化参量为常量，化较弱条件为较强条件等等. 通过对“特殊”的思考与解决，启发思维，达到对“一般”的解决.

例 4 如图，已知定圆的半径为a，圆心为(b,c)，则直线$ax+by+c=0$与直线$x-y+1=0$的交点在 ( )



A. 第四象限 B. 第三象限

C. 第二象限 D. 第一象限

答案 B

解析 本题隐含结果唯一，根据图示，取满足题设的特殊值：$a=2$，$b=-3$，$c=1$. 解方程组$\begin{cases}2x-3y+1=0,\\x-y+1=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=-2,\\y=-1.\end{cases}$即两直线的交点在第三象限.

例 5 定义域为$\mathbf{R}$的函数$f(x)$满足$f(3-x)=f(3+x)$，且当$x_2>x_1>3$时，$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$恒成立. 设$a=f(2x^2-x+5)$，$b=f\left(\dfrac{5}{2}\right)$，$c=f(x^2+4)$，则 ( )

A. $c>a>b$ B. $c>b>a$ C. $a>c>b$ D. $b>c>a$

答案 C

解析 题目隐含对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，a,b,c 的大小关系是确定不变的，可取特殊值 $x=0$，得 $a=f(5)$，$c=f(4)$，而 $x_2>x_1>3$ 时，$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在区间 $(3,+\infty)$ 上单调递增，易得 $a>c>b$.

例 6 已知函数 $f(x)$，任意 $x,y\in\mathbf{R}$，满足 $f(x+y)f(x-y)=f^2(x)-f^2(y)$，且 $f(1)=2$，$f(2)=0$，则 $f(1)+f(2)+\cdots+f(90)$ 的值为 ( )

A. -2　　B. 0　　C. 2　　D. 4

答案 C

解析 结合条件 $f(x+y)f(x-y)=f^2(x)-f^2(y)$，联想到正弦平方差公式(课后习题中出现)：$\sin(x+y)\sin(x-y)=\sin^2x-\sin^2y$，可取特殊函数 $f(x)=A\sin(\omega x)$，由 $f(1)=2$，$f(2)=0$，进一步取 $f(x)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$，此函数满足条件，易知 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，且 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0$，所以 $f(1)+f(2)+\cdots+f(90)=f(1)+f(2)=2$.

例 7 已知一个等差数列的前 n 项和为 48，前 $2n$ 项和为 60，则它的前 $3n$ 项和为 ( )

A. -24　　B. 84　　C. 72　　D. 36

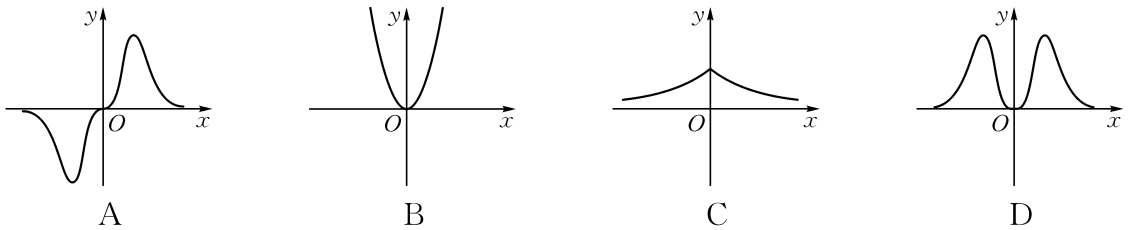
答案 D

解析 因为各选项中不含 n，所以题目隐含对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，结果是确定的，于是对 n 取特殊值，如 $n=1$，此时 $a_1=48$，$a_2=S_2-S_1=12$，则 $d=a_2-a_1=-36$，$a_3=a_1+2d=-24$，所以前 $3n$ 项和为 36.

极限思想

当题目中的变量趋近于无穷大或一个常数 c，或者图形趋近于某一极端情况，而题干中的信息却暗示了结论不变，则可利用极端情况直接得出结论.

例 8 函数 $f(x)=\dfrac{6x^6}{3^{|x|}}$ 的部分图象大致为 ( )



答案 D

解析 因为 $f(-x)=\dfrac{6(-x)^6}{3^{|-x|}}=\dfrac{6x^6}{3^{|x|}}=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，排除选项 A. 因为

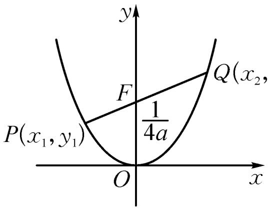
$f(0)=0$，所以排除选项 C. 当 x 趋于正无穷时，虽然 $f(x)$ 的分子和分母都趋于正无穷，但其分母"增加的速度"远大于分子"增加的速度"，所以函数值趋近于 0. 所以排除选项 B.

例 9 已知过抛物线 $y=ax^2(a>0)$ 的焦点 F 作一条直线交抛物线于 P,Q 两点. 若线段 PF 与 QF 的长分别是 p,q，则 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ 的值为 (　　)

A. $2a$　　B. $\frac{1}{2a}$　　C. $4a$　　D. $\frac{4}{a}$

答案　C

解析　如图，取 PQ 的极限位置：将直线 PQ 绕点 F 顺时针方向旋转到与 y 轴重合，此时点 Q 与点 O 重合，点 P 运动到无穷远处，虽不能再称它为抛物线的弦了，它是弦的一种极限情形. 因为 $|QF|=|OF|=\frac{1}{4a}$，而 $|PF|=q$ 趋近于正无穷，所以 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ 趋近于 $4a$.



例 10 已知 P 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 右支上一点，F_1,F_2 分别是左、右焦点，且焦距为 $2c$，则 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆圆心的横坐标为 (　　)

A. a　　B. b　　C. c　　D. $a+b-c$

答案　A

解析　当点 P 沿双曲线向右顶点无限接近时，$\triangle PF_1F_2$ 的内切圆越来越小，极限为"点圆"，此"点圆"应为右顶点，所以内切圆圆心的横坐标为 a.

例 11 函数 $f(x)=\frac{1}{4^{x-1}+1}$ 图象的对称中心是 (　　)

A. $(0,1)$　　B. $\left(\frac{1}{2},1\right)$　　C. $(1,0)$　　D. $\left(1,\frac{1}{2}\right)$

答案　D

解析　当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to0$；当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to1$. 根据对称性可猜测函数 $f(x)$ 的对称中心的纵坐标为 $\frac{1}{2}$，从而选 D，经验证 D 正确.

排 除 法

利用已知条件和选项所提供的信息，剔除掉错误的答案，尤其是答案为定值或取值范围时，取特殊数或特殊点或利用特殊情况代入，得到条件成立的必要条件，排除错误选项，不能排除的选项再进行充分性验证.

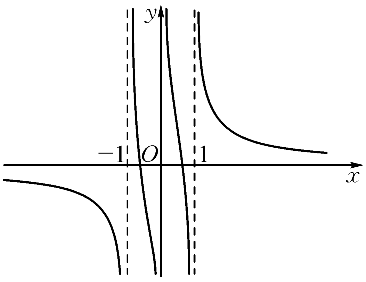
例 12 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\dfrac{n}{(n+1)!}$,则其前n项和为 ( )

A. $2-\dfrac{1}{(n+1)!}$ B. $\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{n!}$ C. $2-\dfrac{1}{n!}$ D. $1-\dfrac{1}{(n+1)!}$

答案 D

解析 设$\{a_n\}$的前n项和为S_n,则$S_1=a_1=\dfrac{1}{1\times2}=\dfrac{1}{2}$,$S_2=a_1+a_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{1\times2\times3}=\dfrac{5}{6}$.对于选项A,令$n=1$,其值为$\dfrac{3}{2}$,故A错误.对于选项B,令$n=1$,其值为$\dfrac{1}{2}$,令$n=2$,其值为1,故B错误.对于选项C,令$n=1$,其值为1,故C错误.由单项选择题有且只有一个正确选项知D正确.

例 13 函数$y=f(x)$的部分图象如图所示,则 ( )



A. $f(x)=\dfrac{1}{2(x+1)}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2(x-1)}$ B. $f(x)=\dfrac{1}{2(x+1)}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2(x-1)}$

C. $f(x)=\dfrac{1}{2(x+1)}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2(x-1)}$ D. $f(x)=-\dfrac{1}{2(x+1)}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2(x-1)}$

答案 A

解析 由函数$f(x)$的图象可得函数$f(x)$为奇函数.

对于A,$f(-2)=-\dfrac{7}{6}$,$f(2)=\dfrac{7}{6}$,对于B,$f(-2)=-\dfrac{1}{6}$,$f(2)=\dfrac{1}{6}$,故A,B可能正确;对于C,$f(-2)=-\dfrac{5}{6}$,$f(2)=\dfrac{1}{6}$,$f(x)$不是奇函数,对于D,$f(-2)=\dfrac{5}{6}$,$f(2)=-\dfrac{1}{6}$,$f(x)$不是奇函数,故排除C,D选项.

又当$x=0.1$时,代入B中函数解析式,即$f(0.1)=\dfrac{1}{2\times(0.1+1)}-\dfrac{1}{0.1}+\dfrac{1}{2\times(0.1-1)}=\dfrac{5}{11}-10-\dfrac{5}{9}<0$,不符合题意,故排除B选项,答案选A.

例 14 已知函数$f(x)=(4a^2-1)e^x+(4a+2)x$.若$f(x)\leqslant0$,则a的取值范围是 ( )

A. $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{e-2}{2e}\right]$ B. $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ C. $\left[-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{e}\right]$ D. $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{2-e}{2e}\right]$

答案 A

解析 函数的定义域为 $\mathbf{R}$，若 $a=0$，则 $f(x)\leqslant 0$，即 $e^x\geqslant 2x$，此不等式显然恒成立，故排除 C，D 选项. 比较 A，B 选项，由 $\frac{e-2}{2e}<\frac{1}{2}$，取 $a=\frac{1}{2}$，则 $f(x)\leqslant 0$，即 $4x\leqslant 0$，此不等式显然不恒成立，故排除 B 选项.

例 15 当 $x\in[-2,1]$时，不等式 $ax^3-x^2+4x+3\geqslant 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是 （　　）

A. $[-5,-3]$　　B. $\left[-6,-\frac{9}{8}\right]$　　C. $[-6,-2]$　　D. $[-4,-3]$

答案 C

解析 设 $f(x)=ax^3-x^2+4x+3$. 由 $f(-1)=-a-2\geqslant 0$，得 $a\leqslant -2$，即 $a\leqslant -2$ 是 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立的必要条件，排除 B. 当 $a=-2$ 时，$f(x)=-2x^3-x^2+4x+3$，则 $f'(x)=-6x^2-2x+4=-2(x+1)(3x-2)$. 令 $f'(x)=0$，得 $x=-1$ 或 $x=\frac{2}{3}$，则 $f(x)$在$[-2,-1)$和$\left(\frac{2}{3},1\right]$上单调递减，在$\left(-1,\frac{2}{3}\right)$上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=\min\{f(-1),f(1)\}=0$，符合条件，排除 A，D.

估 算 法

由于单项选择题提供了唯一正确的选项，解答又无需过程. 因此，对于一些问题，如果直接求值，其运算量比较大，而又不必进行准确的计算，故通过观察、分析、比较、对其数值特点和取值界限作出适当的估计，估算出其值所属的区间，从而快速作出判断，这就是估算法.

例 16 某棋手与甲、乙、丙三位棋手各比赛一盘，各盘比赛结果相互独立. 已知该棋手与甲、乙、丙比赛获胜的概率分别为 p_1,p_2,p_3，且 $p_3>p_2>p_1>0$. 记该棋手连胜两盘的概率为 p，则 （　　）

A. p 与该棋手和甲、乙、丙的比赛次序无关　　B. 该棋手在第二盘与甲比赛，p 最大

C. 该棋手在第二盘与乙比赛，p 最大　　D. 该棋手在第二盘与丙比赛，p 最大

答案 D

解析 本题若要把各种可能的情况下该棋手连胜两盘的概率为 p 计算出来较为费时，该棋手若要连胜两盘，中间一盘必须要赢，因此中间一盘赢的概率大，才能使连胜两盘的概率大，即中间一盘要安排实力最弱的棋手丙，所以选 D.

例 17 现有 1，2，3，4，5 这五个数字组成没有重复数字的三位数，其中奇数共有 （　　）

A. 36 个　　B. 60 个　　C. 24 个　　D. 28 个

答案 A