

Contents 目录

第 6 章 空间向量与立体几何

题型一	空间向量的线性运算	2
题型二	空间向量基本定理及其应用	2
题型三	空间向量数量积及其应用	4
题型四	向量法证明平行、垂直	5
题型五	空间角	5
题型六	空间距离	7
题型七	立体几何中的探索性问题	10

第 7 章 计数原理

题型一	分类计数原理与分步计数原理	15
题型二	排列数、组合数的计算、化简、证明问题	16
题型三	计数问题的基本类型及常用方法	16
题型四	二项式定理及其应用	19
题型五	杨辉三角问题	21

第 8 章 概 率

题型一	条件概率的求解	24
题型二	全概率公式	25
题型三	贝叶斯公式	25
题型四	随机变量的概念	25
题型五	离散型随机变量的概率分布	26
题型六	二项分布概率求解、期望和方差	27
题型七	超几何分布概率求解、期望和方差	28
题型八	正态分布	29

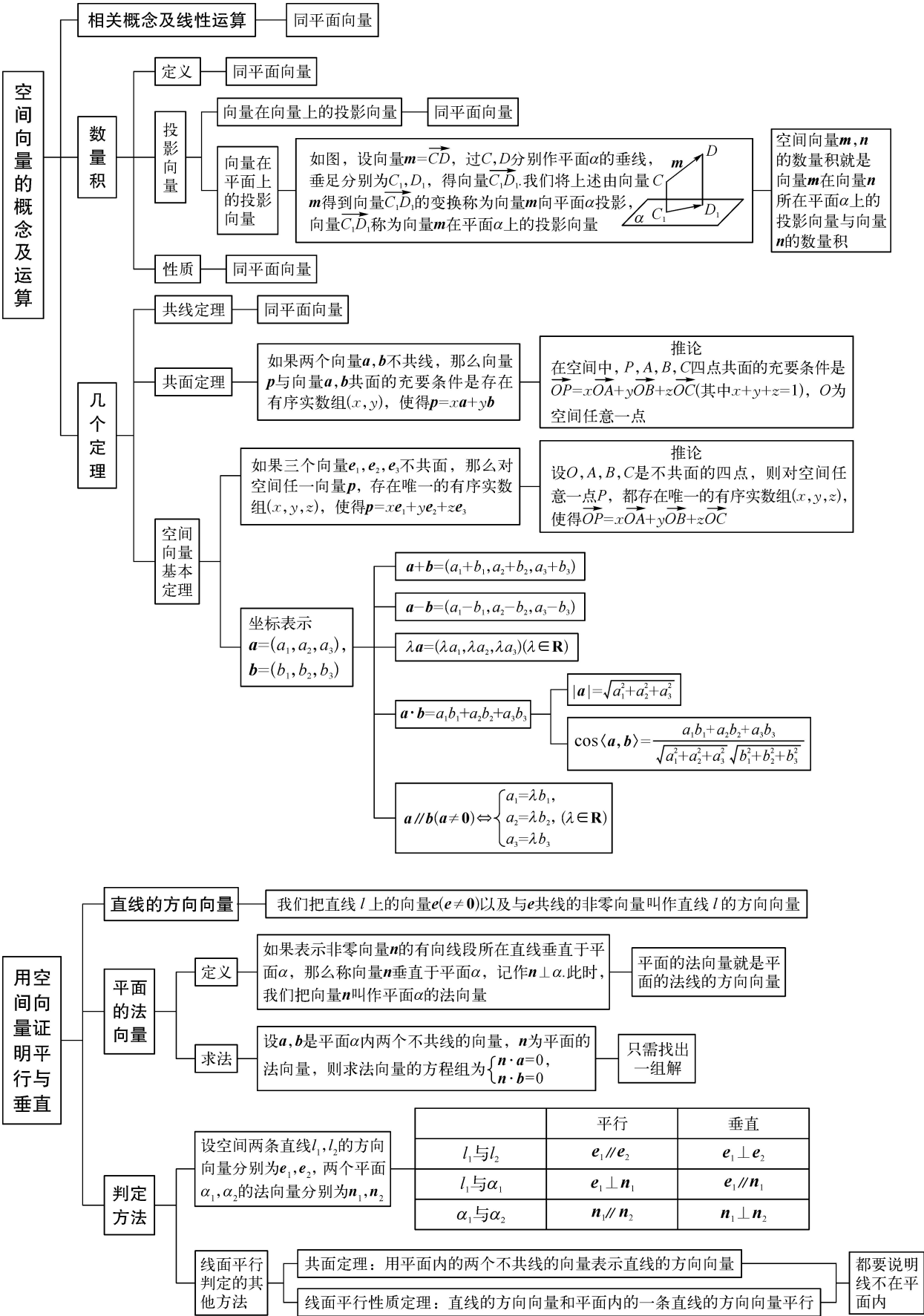
题型九	利用均值和方差解决风险评估与决策性问题	30
题型十	概率与数列的交汇问题	31

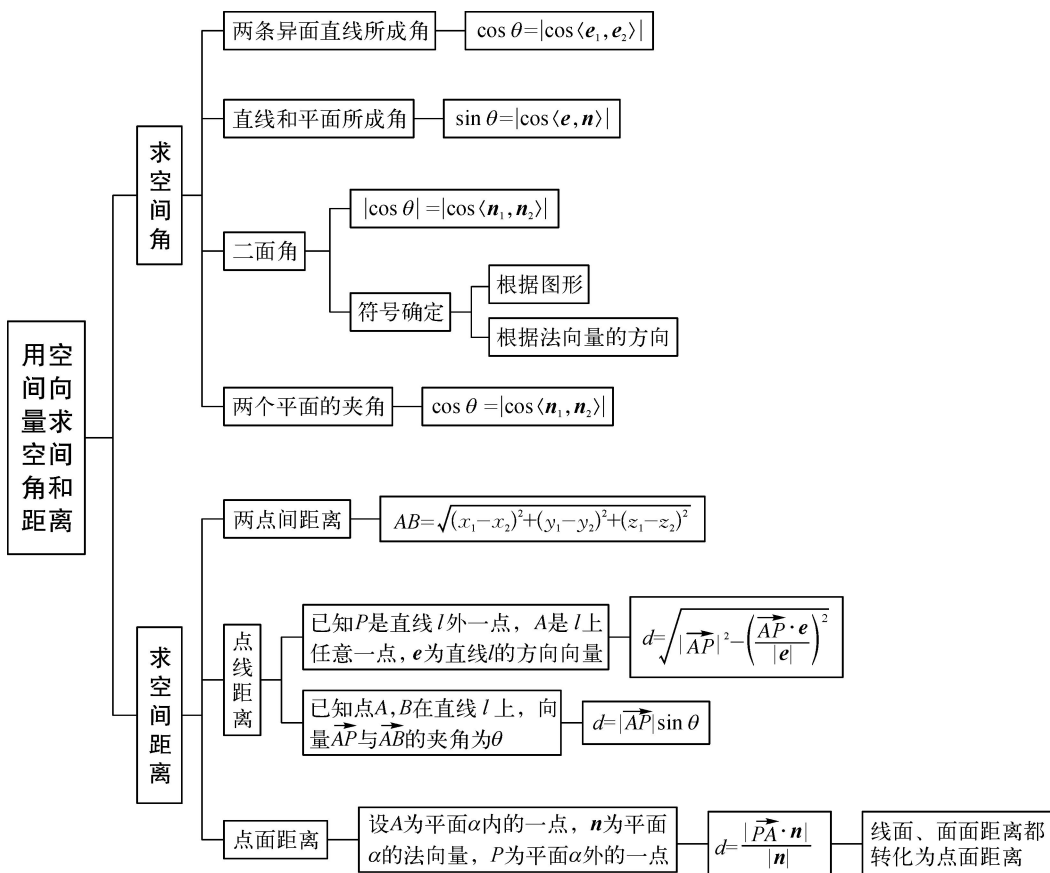
第 9 章 统 计

题型一	相关关系的判断	32
题型二	线性回归分析	33
题型三	可转化为线性相关的非线性相关关系	35
题型四	独立性检验	36

第 6 章 空间向量与立体几何

思维导图





专题突破

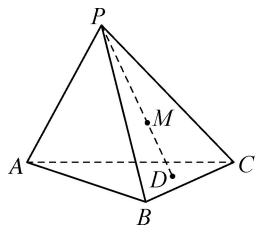
题型一 空间向量的线性运算

例 1 已知三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 15, M 是空间中的点, 且 $\overrightarrow{PM} = -\frac{1}{15}\overrightarrow{PA} + \frac{3}{15}\overrightarrow{PB} + \frac{4}{15}\overrightarrow{PC}$, 则三棱锥 $A-MBC$ 的体积是 ()

A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

答案 C

解析 因为 $\overrightarrow{PM} = -\frac{1}{15}\overrightarrow{PA} + \frac{3}{15}\overrightarrow{PB} + \frac{4}{15}\overrightarrow{PC}$, 所以 $15\overrightarrow{PM} = -\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC}$, 即 $15\overrightarrow{PM} = -\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{PM} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{PM} + 4\overrightarrow{MC}$,



即 $9\overrightarrow{PM} = -\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}$, 所以 $\frac{3}{2}\overrightarrow{PM} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MC}$.

因为 $-\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = 1$, 所以由空间向量基本定理可知, 在平面 ABC 内存在一点 D , 使得 $\overrightarrow{MD} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MC}$ 成立, 即 $\frac{3}{2}\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MD}$, 所以 $\overrightarrow{PM} =$

$\frac{2}{3}\overrightarrow{MD}$, 即 $\overrightarrow{PD} = \frac{5}{3}\overrightarrow{MD}$, 则 $\overrightarrow{MD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{PD}$. 又三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 15, 所以 $V_{\text{三棱锥 } A-MBC} = \frac{3}{5}V_{\text{三棱锥 } P-ABC} = \frac{3}{5} \times 15 = 9$.

方法总结 空间向量线性运算的三个关键点

关键点一	结合图形, 明确图形中各线段之间的几何关系
关键点二	正确运用向量的加法、减法、数乘运算的几何意义
关键点三	平面向量的三角形法则、平行四边形法则在空间向量中仍然成立

题型二 空间向量基本定理及其应用

例 2 (1) 已知点 D 在 $\triangle ABC$ 确定的平面内, O 是平面 ABC 外任意一点, 实数 x, y 满足 $\overrightarrow{DO} = x\overrightarrow{OA} + 2y\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC}$, 则 $x^2 + y^2$ 的最小值为 ()

A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. 1 D. 2

答案 A

解析 因为 $\overrightarrow{DO} = x\overrightarrow{OA} + 2y\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC}$, 所以 $\overrightarrow{OD} = -x\overrightarrow{OA} - 2y\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}$.

又点 D 在 $\triangle ABC$ 确定的平面内, O 是平面 ABC 外任

意一点,

所以 $-x - 2y + 3 = 1$, 即 $x = 2 - 2y$, 所以 $x^2 + y^2 = (2 - 2y)^2 + y^2 = 5y^2 - 8y + 4 = 5\left(y - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{5} \geq \frac{4}{5}$,

即 $(x^2 + y^2)_{\min} = \frac{4}{5}$.

(2) (多选) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为平行四边形, 且 $\angle APD = \angle APC = \angle DPC = \frac{\pi}{3}$, $PA = 2$, $PC = PD = 3$, G 为 $\triangle PCD$ 的重心, M 为 BG 的中点. 若 $\overrightarrow{BG} = m\overrightarrow{PA} + n\overrightarrow{PC} + p\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{PT} = \lambda\overrightarrow{PD}$,

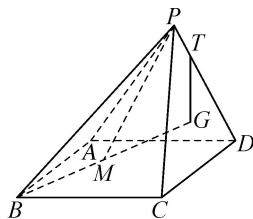
则下列结论正确的是 ()

A. $m + n + p = -\frac{1}{3}$

B. $PM = 5$

C. 若 $\lambda = \frac{1}{4}$, 则向量 $\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{GT}$ 共面

D. 若 $\overrightarrow{BG} \perp \overrightarrow{GT}$, 则 $\lambda = \frac{1}{6}$



答案 ACD

解析 如图, 连接 PG 并延长 PG 交 CD 于点 F .

因为 G 为 $\triangle PCD$ 的重心,

$$\text{所以 } \overrightarrow{PG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PF} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PG} = \overrightarrow{BP} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{PA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{PA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) = \overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}),$$

$$\text{即 } \overrightarrow{BG} = -\overrightarrow{PA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{PC} + \frac{4}{3}\overrightarrow{PD}.$$

$$\text{又 } \overrightarrow{BG} = m\overrightarrow{PA} + n\overrightarrow{PC} + p\overrightarrow{PD},$$

$$\text{所以 } m = -1, n = -\frac{2}{3}, p = \frac{4}{3}, \text{ 所以 } m + n + p = -\frac{1}{3},$$

故 A 正确.

$$\text{因为 } \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{BG} =$$

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) - \frac{2}{3}\overrightarrow{PD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PA},$$

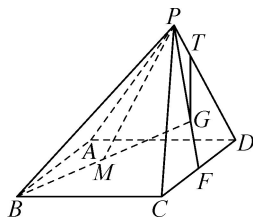
$$\text{所以 } \overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{PC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{PD}, \text{ 所以 } |\overrightarrow{PM}|^2 =$$

$$\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{PA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{PC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{PD}\right)^2,$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{PM}|^2 = \frac{1}{9}\overrightarrow{PD}^2 + \frac{4}{9}\overrightarrow{PC}^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{PA}^2 - \frac{4}{9}\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{PC}$$

$$- \frac{1}{3}\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{PA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA}.$$

由题知 $|\overrightarrow{PA}|^2 = 4$, $|\overrightarrow{PC}|^2 = |\overrightarrow{PD}|^2 = 9$, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PD} = 2 \times 3 \times \cos 60^\circ = 3$, $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD} = 3 \times 3 \times \cos 60^\circ = \frac{9}{2}$,



所以 $|\overrightarrow{PM}|^2 = 1 + 4 + 1 - 2 - 1 + 2 = 5$, 所以 $|\overrightarrow{PM}| = \sqrt{5}$, 即 $PM = \sqrt{5}$, 故 B 错误.

$$\text{因为 } \overrightarrow{GT} = \overrightarrow{PT} - \overrightarrow{PG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{PD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{PC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{PD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{PC} - \frac{1}{12}\overrightarrow{PD},$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{PC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{PD},$$

$$\text{设 } \overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{GT} + y\overrightarrow{PM}, \text{ 所以 } \frac{1}{2}y = -1, -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y =$$

$$0, -\frac{1}{12}x - \frac{1}{3}y = 1, \text{ 解得 } x = -4, y = -2,$$

所以 $\overrightarrow{AD} = -4\overrightarrow{GT} - 2\overrightarrow{PM}$, 所以向量 $\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{GT}$ 共面, 故 C 正确.

$$\text{由题知 } \overrightarrow{GT} = \overrightarrow{PT} - \overrightarrow{PG} = \lambda\overrightarrow{PD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{PC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{PD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{PC} + \left(\lambda - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{PD},$$

$$\text{由选项 A 分析知 } \overrightarrow{BG} = -\overrightarrow{PA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{PC} + \frac{4}{3}\overrightarrow{PD},$$

$$\text{由 } \overrightarrow{BG} \perp \overrightarrow{GT} \text{ 可得, } \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{GT} = \left(-\overrightarrow{PA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{PC} + \frac{4}{3}\overrightarrow{PD}\right) \cdot \left[-\frac{1}{3}\overrightarrow{PC} + \left(\lambda - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{PD}\right] = 0,$$

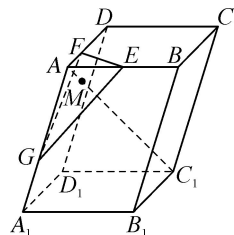
$$\text{又 } |\overrightarrow{PA}|^2 = 4, |\overrightarrow{PC}|^2 = |\overrightarrow{PD}|^2 = 9, \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PD} = 3, \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD} = \frac{9}{2},$$

$$\text{所以 } 1 - 3\left(\lambda - \frac{1}{3}\right) + 2 - 3\left(\lambda - \frac{1}{3}\right) - 2 + 12\left(\lambda - \frac{1}{3}\right) = 0,$$

$$\text{解得 } \lambda = \frac{1}{6}, \text{ 故 D 正确.}$$

(3) 如图, 已知四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $A_1B_1C_1D_1$ 为平行四边形, E 为棱 AB 的中点,

$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GA_1}$, AC_1 与平面 EFG 交于点 M , 则 $\frac{AM}{AC_1} =$ _____.



答案 $\frac{2}{13}$

解析 设 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AC_1}$ ($0 < \lambda < 1$),

由已知, 得 $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} = 2\overrightarrow{AE} + 3\overrightarrow{AF} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$, 所以 $\overrightarrow{AM} = 2\lambda\overrightarrow{AE} + 3\lambda\overrightarrow{AF} + \frac{3\lambda}{2}\overrightarrow{AG}$.

因为 M, E, F, G 四点共面, 所以 $2\lambda + 3\lambda + \frac{3\lambda}{2} = 1$, 解得 $\lambda = \frac{2}{13}$.

方法总结 证明三点共线和空间四点共面的方法比较

三点 (P, A, B) 共线	空间四点 (M, P, A, B) 共面
$\overrightarrow{PA} = \lambda \overrightarrow{PB}$	$\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB}$
对空间任一点 $O, \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$	对空间任一点 $O, \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB}$
对空间任一点 $O, \overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + (1-x)\overrightarrow{OB}$	对空间任一点 $O, \overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OM} + y\overrightarrow{OA} + (1-x-y)\overrightarrow{OB}$

题型三 空间向量数量积及其应用

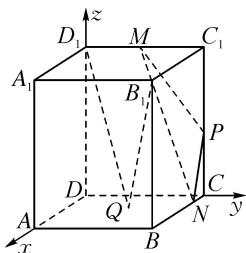
角度1 坐标法

例3-1 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = 5$, $AD = AB = 4$, M, N, P 分别是棱 C_1D_1, BC, CC_1 上的点, 且 $C_1M = MD_1, C_1P = \frac{3}{5}C_1C, CN = \frac{1}{4}CB$, Q 是平面 $ABCD$ 内一动点. 若直线 D_1Q 与平面 MNP 平行, 则 $\overrightarrow{QB_1} \cdot \overrightarrow{QD_1}$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{441}{25}$ B. 17 C. $\frac{89}{5}$ D. $\frac{16}{25}$

答案 A

解析 以 $\{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1}\}$ 为正交基底建立如图所示的空间直角坐标系 $D - xyz$,



则 $D_1(0, 0, 5), N(1, 4, 0), M(0, 2, 5), P(0, 4, 2), B_1(4, 4, 5)$,

所以 $\overrightarrow{MN} = (1, 2, -5), \overrightarrow{MP} = (0, 2, -3)$.

设平面 MNP 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{MN} = (x, y, z) \cdot (1, 2, -5) = x + 2y - 5z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{MP} = (x, y, z) \cdot (0, 2, -3) = 2y - 3z = 0, \end{cases}$$

令 $y = 3$, 则 $z = 2, x = 4$, 所以 $\mathbf{n} = (4, 3, 2)$.

设 $Q(s, t, 0)$, 则 $\overrightarrow{D_1Q} = (s, t, -5), \overrightarrow{QB_1} = (4-s, 4-t, 5)$.

因为直线 D_1Q 与平面 MNP 平行,

所以 $\overrightarrow{D_1Q} \cdot \mathbf{n} = (s, t, -5) \cdot (4, 3, 2) = 4s + 3t - 10 = 0$,

所以 $4s + 3t = 10$, 所以 $s = \frac{10-3t}{4}$.

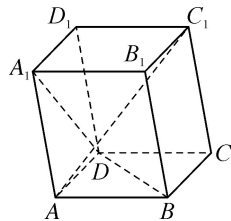
又 $\overrightarrow{QB_1} \cdot \overrightarrow{QD_1} = (4-s, 4-t, 5) \cdot (-s, -t, 5) = s^2 - 4s + t^2 - 4t + 25$

$$= \left(\frac{10-3t}{4}\right)^2 - 10 + 3t + t^2 - 4t + 25 = \frac{25}{16} \left(t - \frac{38}{25}\right)^2 + \frac{441}{25},$$

所以当 $t = \frac{38}{25}$ 时, $\overrightarrow{QB_1} \cdot \overrightarrow{QD_1}$ 取得最小值, 最小值为 $\frac{441}{25}$.

角度2 基向量法

例3-2 如图, 在平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, $AA_1 = 2, \angle A_1AB = \angle A_1AD = 120^\circ$.



- (1) 求 $|\overrightarrow{AC_1}|$;
- (2) 求向量 $\overrightarrow{AC_1}$ 与 $\overrightarrow{A_1D}$ 夹角的余弦值;
- (3) 求证: $\overrightarrow{AA_1} \perp \overrightarrow{BD}$.

解析 (1) 设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \overrightarrow{AD} = \mathbf{b}, \overrightarrow{AA_1} = \mathbf{c}$, 则 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1, |\mathbf{c}| = 2$.

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0, \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 2 \times 1 \times \cos 120^\circ = -1$.

因为 $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$,

所以 $|\overrightarrow{AC_1}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 1 + 1 + 2^2 - 2 - 2 = 2$.

所以 $|\overrightarrow{AC_1}| = \sqrt{2}$.

(2) 因为 $\overrightarrow{AC_1} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \overrightarrow{A_1D} = \mathbf{b} - \mathbf{c}$,

所以 $\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{A_1D} = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b}^2 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c}^2 = 1 + 1^2 - 2^2 = -2$.

又 $|\overrightarrow{A_1D}|^2 = (\mathbf{b} - \mathbf{c})^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 1 + 4 + 2 = 7$,

所以 $|\overrightarrow{A_1D}| = \sqrt{7}$.

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{A_1D} \rangle = \frac{\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{A_1D}}{|\overrightarrow{AC_1}| |\overrightarrow{A_1D}|} = \frac{-2}{\sqrt{2} \times \sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{14}}{7}.$$

(3) 证明: 因为 $\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{c}, \overrightarrow{BD} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$,

所以 $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BD} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = -1 -$

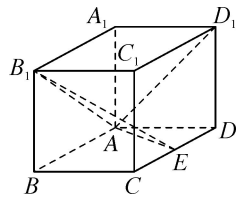
$(-1)=0$,所以 $\overrightarrow{AA_1}\perp\overrightarrow{BD}$.

方法总结 空间向量数量积的三个应用

求夹角	设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ , 则 $\cos \theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{ \boldsymbol{a} \boldsymbol{b} }$, 进而可求两异面直线所成的角
求长度 (距离)	利用公式 $ \boldsymbol{a} ^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$, 可将线段长度的计算问题转化为向量数量积的计算问题
解决垂直问题	利用 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ ($\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$), 可将垂直问题转化为向量数量积的计算问题

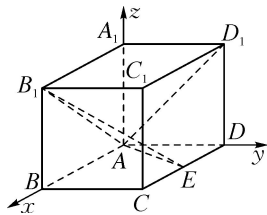
题型四 向量法证明平行、垂直

例4 如图所示,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=AD=1$, E 为 CD 的中点.



- (1) 求证: $B_1E \perp AD_1$.
- (2) 在棱 AA_1 上是否存在一点 P , 使得 $DP \parallel$ 平面 B_1AE ? 若存在, 求 AP 的长; 若不存在, 请说明理由.

解析 (1) 证明: 以 $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}\}$ 为正交基底建立如图所示的空间直角坐标系. 设 $AB=a$,



则 $A(0,0,0), D(0,1,0), D_1(0,1,1), E\left(\frac{a}{2}, 1, 0\right), B_1(a, 0, 1)$,

所以 $\overrightarrow{AD_1}=(0,1,1), \overrightarrow{B_1E}=\left(-\frac{a}{2}, 1, -1\right)$.

因为 $\overrightarrow{B_1E} \cdot \overrightarrow{AD_1} = -\frac{a}{2} \times 0 + 1 \times 1 + (-1) \times 1 = 0$,

所以 $\overrightarrow{B_1E} \perp \overrightarrow{AD_1}$, 即 $B_1E \perp AD_1$.

(2) 存在满足要求的点 P .

假设在棱 AA_1 上存在一点 $P(0,0,z_0)$, 使得 $DP \parallel$ 平面 B_1AE , 此时 $\overrightarrow{DP}=(0,-1,z_0)$.

设平面 B_1AE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$. $\overrightarrow{AB_1}=(a,0,1), \overrightarrow{AE}=\left(\frac{a}{2}, 1, 0\right)$,

则 $\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} ax + z = 0, \\ \frac{ax}{2} + y = 0, \end{cases}$ 令 $x=1$, 则 $y=-\frac{a}{2}, z=-a$,

所以 $\boldsymbol{n}=\left(1, -\frac{a}{2}, -a\right)$. 要使 $DP \parallel$ 平面 B_1AE , 只需 $\boldsymbol{n} \perp \overrightarrow{DP}$, 则 $\frac{a}{2} - az_0 = 0$, 解得 $z_0 = \frac{1}{2}$, 所以存在点 P , 使得 $DP \parallel$ 平面 B_1AE , 此时 $AP = \frac{1}{2}$.

方法总结 1. 用向量法证明平行问题的类型及常用方法

线线平行	证明两直线的方向向量共线
线面平行	①证明该直线的方向向量与平面的某一法向量垂直; ②证明该直线的方向向量与平面内某一直线的方向向量平行; ③证明该直线的方向向量可以用平面内的两个不共线的向量表示
面面平行	①证明两平面的法向量平行(即为共线向量); ②转化为线面平行、线线平行问题

2. 利用向量法证明垂直问题的类型及常用方法

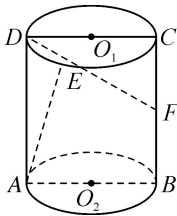
线线垂直	证明两直线的方向向量互相垂直, 即证它们的数量积为零
线面垂直	直线的方向向量与平面的法向量共线, 或利用线面垂直的判定定理转化为证明线线垂直
面面垂直	证明两个平面的法向量垂直, 或利用面面垂直的判定定理转化为证明线面垂直

注意: 运用向量知识判定空间位置关系时, 仍然离不开几何定理. 如用直线的方向向量与平面的法向量垂直来证明线面平行时, 仍需强调直线在平面外.

题型五 空间角

命题点1 异面直线所成角

例5-1 (1) 如图, 矩形 $ABCD$ 是圆柱 O_1O_2 的轴截面, $AB=AD=2$, 点 E 在上底面圆周上, 且 E 为弧 $\widehat{DC}$ 的三等分点(靠近 D), F 为线段 BC 的中点, 则异面直线 AE 与 DF 所成角的余弦值为_____.



答案 $\frac{1}{5}$

解析 连接 O_1O_2 , 过点 E 作 $EE_1 \parallel O_1O_2$, 交下底面于点 E_1 , 连接 O_2E_1 , 易知 $\angle E_1O_2A = \frac{\pi}{3}$.

以 O_2 为坐标原点, 在下底面内, 过点 O_2 作 AB 的垂线于 G , 分别以 $\{\overrightarrow{O_2G}, \overrightarrow{O_2B}, \overrightarrow{O_2O_1}\}$ 为正交基底建立如图所示的空间直角坐标系.

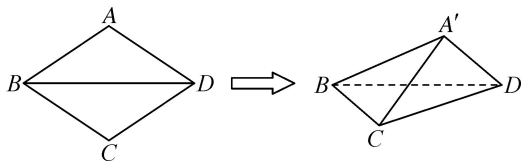
则由已知可得 $A(0, -1, 0), D(0, -1, 2), F(0, 1, 1), E_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right), E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 2\right)$.

所以 $\overrightarrow{AE} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 2\right), \overrightarrow{DF} = (0, 2, -1)$.

所以 $\cos\langle\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{DF}\rangle = \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DF}}{|\overrightarrow{AE}| |\overrightarrow{DF}|} = \frac{-1}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = -\frac{1}{5}$,

所以异面直线 AE 与 DF 所成角的余弦值为 $\frac{1}{5}$.

(2) 如图, 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 3, 对角线 BD 长为 5, 将 $\triangle ABD$ 沿着对角线 BD 翻折至 $\triangle A'BD$, 使得线段 $A'C$ 长为 3, 则异面直线 $A'B$ 与 CD 所成角的余弦值为 ()



- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{4}$ C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{8}{9}$

答案 D

解析 因为 $A'C = A'D = CD = 3$, 所以 $\triangle A'CD$ 为等边三角形, 所以 $\angle A'CD = \frac{\pi}{3}$.

所以 $\overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{A'C}| \cdot |\overrightarrow{CD}| \cdot \cos(\pi - \angle A'CD) = 3 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{2}$.

因为 $CB = CD = 3, BD = 5$,

所以 $2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB}^2 + \overrightarrow{CD}^2 - (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD})^2 = \overrightarrow{CB}^2 + \overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{DB}^2 = 9 + 9 - 25 = -7$, 即 $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = -\frac{7}{2}$.

所以 $\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = -\frac{9}{2} - \frac{7}{2} = -8$.

设异面直线 $A'B$ 与 CD 所成的角为 θ ,

则 $\cos \theta = |\cos\langle\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{CD}\rangle| = \frac{|\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{A'B}| |\overrightarrow{CD}|} = \frac{|-8|}{3 \times 3} = \frac{8}{9}$.

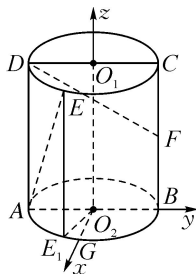
所以异面直线 $A'B$ 与 CD 所成角的余弦值为 $\frac{8}{9}$.

方法总结 用向量法求异面直线所成角的一般步骤

(1) 选好基底或建立空间直角坐标系;

(2) 求出两直线的方向向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$;

(3) 代入公式 $\cos \theta = |\cos\langle\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle| = \frac{|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2|}{|\mathbf{v}_1| |\mathbf{v}_2|}$ 求解 (θ 为两异面直线所成的角).



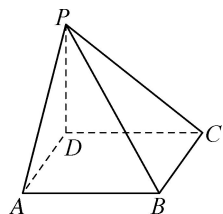
注意: 两异面直线所成角的范围是 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, 即两异面直线所成角的余弦值等于两向量夹角的余弦值的绝对值.

命题点 2 直线与平面所成的角

例 5-2 (2020 新高考 I 卷) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为正方形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$. 设平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l .

(1) 求证: $l \perp$ 平面 PDC ;

(2) 已知 $PD = AD = 1$, Q 为直线 l 上的一点, 求 PB 与平面 QCD 所成角的正弦值的最大值.



解析 (1) **证明:** 在正方形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD \perp DC$.

因为 $AD \not\subset$ 平面 PBC , $BC \subset$ 平面 PBC , 所以 $AD \parallel$ 平面 PBC .

又因为 $AD \subset$ 平面 PAD , 平面 $PAD \cap$ 平面 $PBC = l$, 所以 $AD \parallel l$, 所以 $l \perp DC$.

又 $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $AD \perp PD$, 所以 $l \perp PD$.

因为 $DC \cap PD = D$, $DC, PD \subset$ 平面 PDC , 所以 $l \perp$ 平面 PDC .

(2) 以 $\{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DP}\}$ 为正交基底建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$. 因为 $PD = AD = 1$,

所以 $D(0, 0, 0), C(0, 1, 0), P(0, 0, 1), B(1, 1, 0)$.

设 $Q(m, 0, 1)$, 则 $\overrightarrow{DC} = (0, 1, 0)$,

$\overrightarrow{DQ} = (m, 0, 1), \overrightarrow{PB} = (1, 1, -1)$.

设平面 QCD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \overrightarrow{DC} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{DQ} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} y = 0, \\ mx + z = 0, \end{cases}$$

令 $x = 1$, 则 $z = -m$, 所以平面 QCD 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (1, 0, -m)$.

设 PB 与平面 QCD 所成的角为 θ ,

$$\sin \theta = |\cos\langle\mathbf{n}, \overrightarrow{PB}\rangle| = \frac{|1+m|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{m^2+1}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\sqrt{\frac{1+2m+m^2}{m^2+1}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{1+\frac{2m}{m^2+1}} \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{1+1} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

当且仅当 $m = 1$ 时, 取等号, 所以直线 PB 与平面 QCD 所成角的正弦值的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.