

阶段测评卷(1)

(第6章)

(满分:150分,考试时间:120分钟)

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. (2024 江苏盐城期中)已知空间四面体 $O-ABC$ 中,对空间内任一点 M ,满足 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \lambda\overrightarrow{OC}$,则下列条件中能确定 M, A, B, C 四点共面的是 ()

A. $\lambda = \frac{1}{2}$ B. $\lambda = \frac{1}{6}$ C. $\lambda = \frac{5}{12}$ D. $\lambda = \frac{7}{12}$

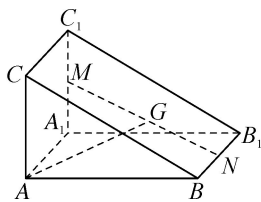
2. (2024 江西南昌师范大学附中月考)已知平面 α 内一点 $P(1, 1, 2)$,平面 α 的一个法向量为 $\boldsymbol{n} = (-2, 3, 1)$,则下列点不在平面 α 内的是 ()

A. $(3, 2, 3)$ B. $(0, 0, 3)$
C. $(2, 1, 1)$ D. $(2, 1, 4)$

3. (2024 河南南阳期末)在空间直角坐标系中, $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$, $\triangle ABC$ 的重心为 G ,则点 O 到直线 AG 的距离为 ()

A. $\frac{6}{7}$ B. $\frac{\sqrt{221}}{17}$ C. $\frac{2\sqrt{17}}{17}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

4. (2024 山东东营期末)《九章算术·商功》主要讲述了以立体几何为主的各种形体体积的计算,其中堑堵是指底面为直角三角形的直棱柱.如图,在堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, M, N 分别是 A_1C_1, BB_1 的中点, G 是 MN 的中点,若 $\overrightarrow{AG} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AA_1} + z\overrightarrow{AC}$,则 $x + y + z =$ ()

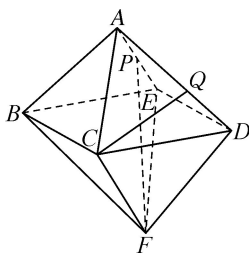


A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{3}{4}$

5. (2024 湖南阶段练习)正多面体也称柏拉图立体,被誉为最有规律的立体结构,是所有面都只由一种正多边形构成的多面体(各面都是全等的正多边形).数学家已经证明世界上只存在五种柏拉图立体,即正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体.如图,已知一个正八面体 $ABCDEF$ 的棱长为1, P 为棱 AE 的中点, $\overrightarrow{DQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$,设直线 FP 与 CQ

的夹角为 θ , 则 $\tan \theta =$

()



A. $\frac{\sqrt{26}}{3}$

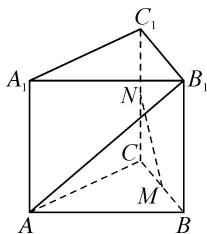
B. $\frac{3\sqrt{26}}{26}$

C. $\frac{\sqrt{21}}{6}$

D. $\frac{\sqrt{15}}{6}$

6. (2024 广东茂名电白期末) 如图, 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的棱长都是 1, M 是 BC 的中点, $\overrightarrow{CN} = \lambda \overrightarrow{CC_1}$ ($0 < \lambda < 1$), 且 $MN \perp AB_1$, 则 $\lambda =$

()



A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{5}$

7. (2024 广东梅州期末) 在空间直角坐标系中, 已知点 $P(0, 3, -1)$, 向量 $\mathbf{u} = (2, -1, 1)$, 则过点 P 且以 $\mathbf{u}$ 为法向量的平面方程为

()

A. $2x - y + z = -4$

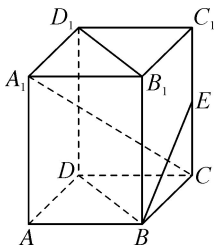
B. $x + 2y - z = 7$

C. $x - y + 2z = -5$

D. $-x + 2y + z = 5$

8. (2024 山东滨州期末) 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = BC = 2$, $AA_1 = 2\sqrt{2}$, E 是棱 CC_1 的中点, 设直线 BE 与 A_1C 所成的角为 α , 直线 A_1C 与平面 BDD_1B_1 所成的角为 β , 则 $\alpha + \beta =$

()



A. 105°

B. 120°

C. 135°

D. 150°

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. (2024 山东德州期末) 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, E, O 分别是 A_1B_1, A_1C_1 的中点, P 为正方体的中

心,则下列说法正确的是

()

A. 线段 CP 的长为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. 点 P 到直线 EO 的距离为 $\frac{1}{2}$

C. 平面 A_1BD 与平面 B_1CD_1 间的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. 直线 B_1P 与平面 B_1CD_1 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$

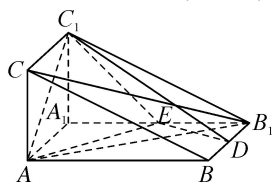
10. (2024 山东聊城期末)如图,在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, $AB=2AC=2AA_1$, D, E 分别为 BB_1, A_1B_1 的中点,则下列说法正确的是 ()

A. $B_1C \parallel$ 平面 AEC_1

B. $AB_1 \perp$ 平面 DEC_1

C. 平面 $AEC_1 \perp$ 平面 DEC_1

D. 直线 AC_1 与 ED 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$



11. (2024 江苏盐城期末)已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, M 为平面 $ABCD$ 内一动点,则下列结论正确的有 ()

A. $B_1D \perp$ 平面 A_1C_1B

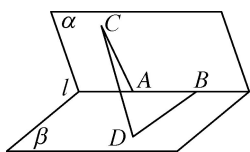
B. 若直线 D_1M 与平面 $ABCD$ 所成角为 $\frac{\pi}{3}$, 则点 M 的轨迹是椭圆

C. 存在点 M , 使得 $\overrightarrow{D_1M} = \overrightarrow{D_1D} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

D. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球被平面 A_1C_1B 所截得的截面面积为 $\frac{2\pi}{3}$

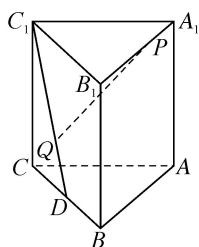
三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. (2024 浙江宁波奉化期末)如图,大小为 60° 的二面角的棱上有 A, B 两点,直线 AC, BD 分别在这个二面角的两个半平面内,且都垂直于 AB . 已知 $AB=4, AC=6, BD=7$, 则 CD 的长为_____.



13. (2024 河北承德期末)如图,正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长为 2,侧棱长为 3, D 为 BC 的中点,设 $\overrightarrow{A_1P} =$

$\lambda \overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{DQ} = \lambda \overrightarrow{DC_1} (0 \leq \lambda \leq 1)$, 则 PQ 的最小值为 _____.



14. (2024 山东潍坊期末) 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 = 4, AB = 2\sqrt{3}$, 平面 α 经过点 A , 且直线 AA_1 与平面 α 所成的角为 30° , 过点 A_1 作平面 α 的垂线, 垂足为 H , 则点 A_1 到平面 α 的距离为 _____, 直线 AA_1 与 BH 所成角的范围是 _____.

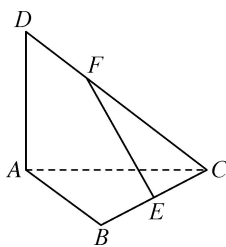
四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

如图, 在空间四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \overrightarrow{AC} = \mathbf{b}, \overrightarrow{AD} = \mathbf{c}$, E 为 BC 的中点, F 在 CD 上, 且 $CF = 2FD$.

(1) 以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为基底, 表示 $\overrightarrow{EF}$;

(2) $\angle BAD = \angle CAD = \frac{\pi}{2}, \angle CAB = \frac{\pi}{3}, AB = 2, AD = 2, AC = 2$, 求 $|\overrightarrow{EF}|$.

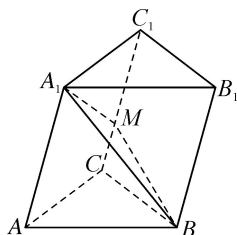


16. (本小题满分 15 分)

(2024 江苏扬州期末)如图,已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的棱长均为 2, $\angle A_1AC = 60^\circ$, $A_1B = \sqrt{6}$.

(1) 求证:平面 $A_1ACC_1 \perp$ 平面 ABC ;

(2) 若 $\overrightarrow{CM} = \lambda \overrightarrow{CC_1}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$), 且直线 AC 与平面 A_1BM 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$, 求点 M 到直线 A_1B_1 的距离.

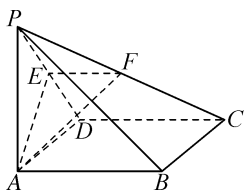


17. (本小题满分 15 分)

(2024 湖南郴州期末)如图,在四棱锥 $P - ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为正方形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA = AD = 2$, E 为线段 PD 的中点, F 为线段 PC (不含端点)上的动点.

(1) 求证:平面 $AEF \perp$ 平面 PCD .

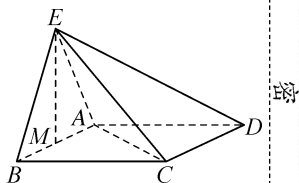
(2) 是否存在点 F , 使二面角 $P - AF - E$ 的大小为 45° ? 若存在, 求出 $\frac{PF}{PC}$ 的值; 若不存在, 请说明理由.



18. (本小题满分 17 分)

(2024 湖南浏阳期末) 如图, 正三角形 ABE 与菱形 $ABCD$ 所在的平面互相垂直, $AB = 2$, $\angle ABC = 60^\circ$, M 是 AB 的中点.

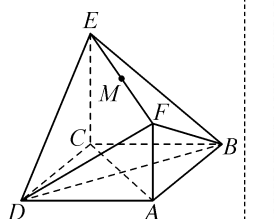
- (1) 求点 B 到平面 EAC 的距离;
- (2) 已知点 P 在线段 EC 上, 且直线 AP 与平面 ABE 所成的角为 45° , 求 $\frac{EP}{EC}$ 的值.



19. (本小题满分 17 分)

(2024 山东淄博期末) 如图, 已知正方形 $ABCD$ 和矩形 $ACEF$ 所在的平面互相垂直, $AB = \sqrt{2}$, $AF = t$ ($t > 0$), M 是线段 EF 的中点.

- (1) 求证: $AM \parallel$ 平面 BDE ;
- (2) 若 $t = 1$, 求平面 ADF 与平面 BDF 夹角的大小;
- (3) 若线段 AC 上总存在一点 P , 使得 $PF \perp BE$, 求 t 的最大值.



期中综合测评卷(1)

(满分:150 分,考试时间:120 分钟)

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. (2024 河北保定期末)在空间直角坐标系中,点 $(1,2,3)$ 关于 xOy 平面的对称点坐标为 ()

- A. $(1,2,-3)$ B. $(-1,2,-3)$
C. $(-1,-2,3)$ D. $(-1,-2,-3)$

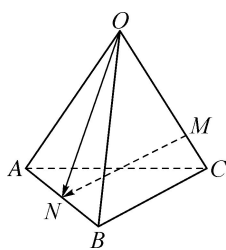
2. (2024 江苏徐州期中) $(x-2)(x-3)(x-4)\cdots(x-16)(x\in\mathbf{N}^*,x>16)$ 可表示为 ()

- A. A_{x-2}^{14} B. A_{x-2}^{15}
C. A_{x-16}^{14} D. A_{x-16}^{15}

3. (2024 江苏连云港期末) $\left(x+\frac{4}{x}-4\right)^3$ 的展开式中的常数项为 ()

- A. -80 B. 80 C. -160 D. 160

4. (2024 河南焦作期末)如图所示,在三棱锥 $O-ABC$ 中, $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a},\overrightarrow{OB}=\mathbf{b},\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$,点 M,N 满足 $\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{MC},\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,则 $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ON}=\quad$ ()



- A. $\mathbf{a}+\mathbf{b}-\frac{3}{4}\mathbf{c}$ B. $\frac{1}{2}\mathbf{a}-\frac{3}{4}\mathbf{b}+\frac{1}{2}\mathbf{c}$
C. $-\frac{2}{3}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}+\frac{1}{2}\mathbf{c}$ D. $\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}-\frac{3}{4}\mathbf{c}$

5. (2024 江苏徐州期中)房间里有 6 盏电灯,分别由 6 个开关控制,至少开 1 盏灯用以照明,则不同的方法种数是 ()

- A. 31 B. 32 C. 63 D. 64

6. (2024 山东菏泽期末)一平面截正四棱锥 $P-ABCD$,与棱 PA,PB,PC,PD 的交点依次为 A_1,B_1,C_1,D_1 ,已知 PA_1

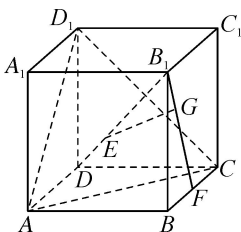
$=\frac{1}{3}PA, PB_1=\frac{1}{2}PB, PC_1=\frac{1}{4}PC, PD_1=\lambda PD$, 则 λ 的值为 ()

- A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{2}{11}$

7. (2024 北京东城期末)《孙子算经》是中国南北朝时期重要的数学著作,书中的“中国剩余定理”对同余除法进行了深入的研究.现给出一个同余问题:如果 a 和 b 被 m 除得的余数相同,那么称 a 和 b 对模 m 同余,记为 $a \equiv b \pmod{m}$.若 $a = C_{2024}^0 + C_{2024}^1 \times 3 + C_{2024}^2 \times 3^2 + \cdots + C_{2024}^{2024} \times 3^{2024}$, $a \equiv b \pmod{5}$, 则 b 的值可以是 ()

- A. 2023 B. 2024 C. 2025 D. 2026

8. (2024 四川期末)如图所示,在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中,直线 $B_1D \cap$ 平面 $ACD_1 = E$, F 是 BC 的中点, G 是线段 B_1F 上的动点,则直线 GE 与侧面 ADD_1A_1 的交点 P 的轨迹长为 ()



- A. $\sqrt{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{2}$

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

9. (2024 湖南阶段练习)设 $(3x-2)(1+x)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_7x^7$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $a_0 = -2$
 B. $a_3 = 85$
 C. $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 32$
 D. $a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + 2^3a_3 + \cdots + 2^7a_7 = 2916$

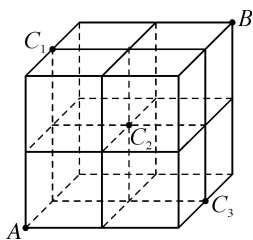
10. (2024 青海海南期中)已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$, P 为空间内一点,若 $\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BB_1} + \mu \overrightarrow{BC}$, 其中 $\lambda, \mu \in [0, 1]$, 则 ()

- A. 若 $\lambda = 1$, 则点 P 在棱 B_1C_1 上
 B. 若 $\lambda = \mu$, 则点 P 在线段 BC_1 上

C. 若 $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$, 则 P 为棱 CC_1 的中点

D. 若 $\lambda + \mu = 1$, 则点 P 在线段 B_1C 上

11. (2023 山西运城期末) 商场某区域的行走路线图可以抽象为一个 2×2 的正方体道路网(如图, 图中线段均为可行走的通道), 甲、乙两人分别从 A, B 两点出发, 随机地选择一条最短路径, 以相同的速度同时出发, 直到到达 B, A 为止. 下列说法正确的是 ()



A. 甲从 A 必须经过 C_1 到达 B 的方法共有 9 种

B. 甲从 A 到 B 的方法共有 180 种

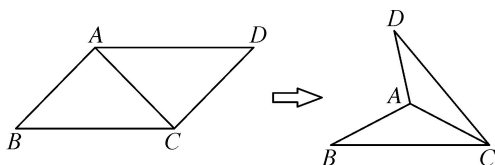
C. 甲、乙两人在 C_2 处相遇的概率为 $\frac{4}{25}$

D. 甲、乙两人相遇的概率为 $\frac{11}{50}$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. (2024 福建期末) 某快件从甲送到乙需要 5 个转运环节, 其中第 1, 2 两个环节各有 a, b 两种方式, 第 3, 4 两个环节各有 b, c 两种方式, 第 5 个环节有 d, e 两种方式, 则快件从甲送到乙, 第 1 个环节使用 a 方式的送达方式有 _____ 种; 从甲到乙恰好用到 4 种方式的送达方式有 _____ 种.

13. (2025 广东深圳阶段练习) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = AC = 1, \angle ACD = 90^\circ$, 沿着它的对角线 AC 将 $\triangle ACD$ 折起, 当二面角 $B-AC-D$ 的大小是 60° 时, B, D 两点间的距离为 _____.



14. (2024 福建龙岩期末) 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, $AB \perp AC, AB = AC = AA_1 = 2$, E 为侧棱 AA_1 的中点, 过点 E 作平面 α 与平面 BCE 垂直, 当平面 α 与该直三棱柱所成截面为三角形时, 顶点 A_1 与该截面构成的三棱锥体积的最小值为 _____.

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分.解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

(2024 辽宁沈阳期末)(1) 已知 $C_6^m = C_6^{3m-2}$ ($m \neq 1$), 计算:

$$C_6^m + C_6^{m+1} + C_7^{m+2} + C_8^{m+3}.$$

(2) 解方程: $3C_{x-3}^{x-7} = 5A_{x-4}^2$.

16. (本小题满分 15 分)

(2024 安徽亳州期初) 已知空间三点 $A(-2, 0, 2)$, $B(-1, 1, 2)$, $C(-3, 0, 4)$, 设 $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$.

(1) 若 $|\mathbf{c}| = 3$, $\mathbf{c} \parallel \overrightarrow{BC}$, 求 $\mathbf{c}$;

(2) 求 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角的余弦值;

(3) 若 $k\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 与 $k\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ 互相垂直, 求 k .

17. (本小题满分 15 分)

(2024 江苏常州期末)已知 m, n 是正整数, $(1+x)^m + (1+x)^n$ 的展开式中 x 的系数为 15.

(1) 求展开式中 x^2 的系数的最小值;

(2) 已知 $(2+3x)^{\frac{m+n-1}{2}}$ 展开式中二项式系数的最大值为 a , 项的系数的最大值为 b , 求 $a+b$.

18. (本小题满分 17 分)

(2024 湖北武汉期中)为庆祝三八妇女节,东湖中学举行了教职工排球比赛,赛制要求每个年级派出 10 名成员分为两支队伍,每支队伍 5 人,并要求每支队伍至少有 2 名女老师,现高二年级共有 4 名男老师、6 名女老师报名参加比赛.

(1) 一共有多少种不同的分组方案?

(2) 在进入决赛后,每个年级只派出一支队伍参加,在比赛时须按照 1, 2, 3, 4, 5 号位站好,为争取最好成绩,高二年级选择了 A, B, C, D, E, F 六名女老师进行训练,经训练发现 E 不能站在 5 号位,若 A, B 同时上场,必须站在相邻的位置,则一共有多少种排列方式?

19. (本小题满分 17 分)

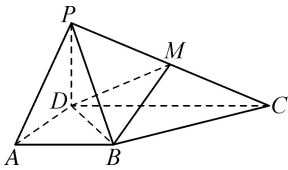
(2024 江苏盐城阶段练习)如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,平面 $PDC \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \perp DC$, $AB \parallel DC$, $AB = \frac{1}{2}CD = AD = 1$, M 为棱 PC 的中点.

(1) 证明: $BM \parallel$ 平面 PAD .

(2) 若 $PC = \sqrt{5}$, $PD = 1$.

① 求平面 PDM 与平面 BDM 夹角的余弦值.

② 在线段 PA 上是否存在点 Q , 使得点 Q 到平面 BDM 的距离是 $\frac{2\sqrt{6}}{9}$? 若存在, 求出 PQ 的值; 若不存在, 请说明理由.



阶段测评卷(3)

(第6章—第8章)

(满分:150分,考试时间:120分钟)

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. (2024 山东青岛期中)已知随机变量 X 的分布列如下表所示,且 $E(X) = \frac{13}{6}$,则 $m =$ ()

X	1	2	3
P	n	m	$\frac{1}{2}$

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{3}$

2. (2024 江苏常州期末)某市为了了解高一新生的身高情况,抽取了10000名高一新生的身高作为样本.若高一新生的身高 X 近似服从正态分布 $N(165, \sigma^2)$,且 $P(X \geq 180) = 0.1$,则在10000名高一新生中,身高在区间 $[150, 180]$ 内的人数约为 ()

- A. 2000 B. 4000 C. 6000 D. 8000

3. (2024 福建莆田期末)在斜三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中,设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{c}$,若 $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PC_1}$,则 $\overrightarrow{AP} =$ ()

- A. $\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b} + \frac{2}{3}\mathbf{c}$ B. $\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} + \frac{1}{3}\mathbf{c}$
C. $\frac{1}{3}\mathbf{a} - \frac{2}{3}\mathbf{b} - \frac{2}{3}\mathbf{c}$ D. $\frac{2}{3}\mathbf{a} - \frac{1}{3}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\mathbf{c}$

4. (2024 湖南师大附中期末)某一电子集成块由三个元件 a, b, c 并联构成,三个元件是否有故障相互独立.已知至少1个元件正常工作,该集成块就能正常运行.若每个元件能正常工作的概率均为 $\frac{4}{5}$,则在该集成块能够正常工作的情况下,有且仅有一个元件出现故障的概率为 ()

- A. $\frac{12}{31}$ B. $\frac{48}{125}$ C. $\frac{16}{25}$ D. $\frac{16}{125}$

5. (2024 江苏宿迁期末)已知 $(2x+1)^9 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_9x^9$,则 $\frac{a_2}{2^2} + \frac{a_4}{2^4} + \frac{a_6}{2^6} + \frac{a_8}{2^8}$ 的值为 ()

- A. 255 B. 256 C. 511 D. 512

6. (2024 重庆期中) 已知甲盒中有 2 个球且都为红球, 乙盒中有 3 个红球和 4 个蓝球, 从乙盒中随机抽取 $i (i=1, 2)$ 个球放入甲盒中.

(1) 放入 i 个球后, 甲盒中含有红球的个数记为 ξ_i ;

(2) 放入 i 个球后, 从甲盒中取 1 个球是红球的概率记为 P_i , 则 ()

A. $E(\xi_1) < E(\xi_2), P_1 > P_2$

B. $E(\xi_1) > E(\xi_2), P_1 < P_2$

C. $E(\xi_1) > E(\xi_2), P_1 > P_2$

D. $E(\xi_1) < E(\xi_2), P_1 < P_2$

7. (2023 河南开封期中) 将字母 a, a, b, b, c, c 放入如图所示的 3×2 的表格中, 每个格子放一个字母, 若字母相同的行的个数为 ξ , 则 ξ 的数学期望为 ()

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{4}{5}$

D. $\frac{3}{4}$

8. (2023 江苏泰州期末) 在概率论中, 马尔可夫不等式给出了随机变量的函数不小于某正数的概率的上界, 它以俄国数学家安德雷·马尔可夫命名. 由马尔可夫不等式知, 若 ξ 是只取非负值的随机变量, 则 $\forall a > 0$, 都有 $P(\xi \geq a) \leq \frac{E(\xi)}{a}$. 某市

去年的人均年收入为 10 万元, 记“从该市任意选取 3 名市民, 则恰有 1 名市民去年的年收入超过 100 万元”为事件 A ,

其概率为 $P(A)$, 则 $P(A)$ 的最大值为 ()

A. $\frac{27}{1000}$

B. $\frac{243}{1000}$

C. $\frac{4}{27}$

D. $\frac{4}{9}$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. (2024 天津河西期末) 某种产品的加工需要经过 5 道工序, 则以下说法正确的是 ()

A. 如果其中某道工序不能放在最后, 那么有 96 种加工顺序

B. 如果其中某 2 道工序不能放在最前, 也不能放在最后, 那么有 36 种加工顺序

C. 如果其中某 2 道工序必须相邻, 那么有 24 种加工顺序

D. 如果其中某 2 道工序不能相邻, 那么有 72 种加工顺序

10. (2024 四川攀枝花期末)如图,在棱长均为 2 的正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, M,N 分别是 AB, BB_1 的中点,则

()

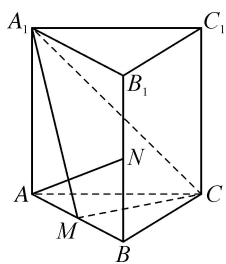
A. $B_1C_1 \parallel \text{平面 } A_1CM$

B. $AN \perp A_1C$

C. B_1 到平面 A_1CM 的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

D. 直线 A_1M 与 B_1C_1 所成角的余弦值

为 $\frac{\sqrt{5}}{10}$



11. (2024 河北石家庄期末)端午将至,超市特推出以“粽情一夏,情浓端午”为主题的甲、乙两款端午粽子礼盒,但是由于工作人员分装时的疏忽,礼盒内的粽子发生了错乱,此时甲款礼盒内已有 1 个肉粽,乙款礼盒内有 3 个肉粽和 3 个甜粽,现从乙款礼盒内随机取出 β 个粽子,其中含 γ 个肉粽,放入甲款礼盒后,再从甲款礼盒内随机取出 1 个粽子,记取到肉粽的个数为 α ,其中 $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^*$,下列说法不正确的是 ()

A. 当 $\beta=2$ 时,随机变量 γ 服从两点分布

B. 随着 β 的增大, $E(\alpha)$ 减小, $D(\alpha)$ 增大

C. 当 $\beta=2$ 时,随机变量 γ 服从二项分布

D. 随着 β 的增大, $E(\alpha)$ 增大, $D(\alpha)$ 减小

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. (2023 河北新乐一中月考)莫高窟坐落在甘肃敦煌,它是世界上现存规模最大、内容最丰富的佛教艺术胜地,每年都会吸引来自世界各地的游客参观旅游. 已知购买莫高窟正常参观套票可以参观 8 个开放洞窟,在这 8 个洞窟中,莫高窟九层楼 96 号窟、莫高窟三层楼 16 号窟、藏经洞 17 号窟被誉为最值得参观的洞窟. 根据安全需要,莫高窟改为极速参观模式,游客需从套票包含的开放洞窟中随机选择 4 个进行参观,所有选择中至少包含 2 个最值得参观洞窟的概率是_____.

13. (2024 吉林白山期中)若一个三位数的各位数字之和为 10, 则称这个三位数为“十全十美数”,如 208,136 都是“十全十美数”,则一共有_____个“十全十美数”.

14. (2024 河南商丘商师联盟期末联考)一质点在平面内每次只能向左或向右跳动 1 个单位长度,且第 1 次向左跳动. 若前一次向左跳动,则后一次向左跳动的概率为 $\frac{1}{3}$; 若前一次向

右跳动,则后一次向左跳动的概率为 $\frac{1}{2}$.记第 n 次向左跳动

的概率为 p_n ,则 $p_3 = \underline{\hspace{2cm}}$; $\sum_{i=1}^n p_i = \underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分.解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

(2024 江苏无锡期末)已知 $(1+m\sqrt{x})^n$ ($m \in \mathbf{R}^+$)展开式的二项式系数之和为 256,展开式中含 x 项的系数为 112.

(1) 求 m, n 的值;

(2) 求 $(1+m\sqrt{x})^n(1-\sqrt[3]{x})^6$ 展开式中含 x^2 项的系数.

16. (本小题满分 15 分)

(2024 浙江绍兴期末)有 A 和 B 两道谜语,张某猜对 A 谜语的的概率为 0.8,猜对得奖金 10 元;猜对 B 谜语的的概率为 0.5,猜对得奖金 20 元.每次猜谜的结果相互独立.

(1) 若张某猜完了这两道谜语,记张某猜对谜语的道数为随机变量 X ,求随机变量 X 的分布列与期望.

(2) 现规定:只有在猜对第一道谜语的情况下,才有资格猜第二道.如果猜谜顺序由张某选择,为了获得更多的奖金,他应该选择先猜哪一道谜语?

17. (本小题满分 15 分)

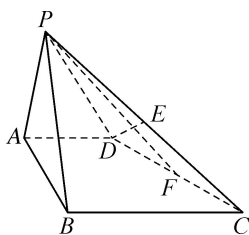
(2024 辽宁大连期末)盒中有标记数字 1, 2 的小球各 3 个, 标记数字 3 的小球 2 个, 随机一次性取出 3 个小球.

- (1) 求取出的 3 个小球上的数字互不相同的概率;
- (2) 记取出的 3 个小球上的最大数字为 X , 求 X 的分布列及数学期望 $E(X)$.

18. (本小题满分 17 分)

(2024 湖北重点高中联合体期中)在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $AD \parallel BC$, $AD \perp AB$, 侧面 $PAB \perp$ 底面 $ABCD$, $PA = PB = AD = \frac{1}{2}BC = 2$, 且 E, F 分别为 PC, CD 的中点.

- (1) 求证: $DE \parallel$ 平面 PAB ;
- (2) 若直线 PF 与平面 PAB 所成的角为 60° , 求平面 PAB 与平面 PCD 所成锐二面角的余弦值.



19. (本小题满分 17 分)

(2024 江苏南通海安中学期中)近年来,某大学为响应国家号召,大力推行全民健身运动,向全校学生开放了 A,B 两个健身中心,要求全校学生每周都必须利用课外时间去健身中心进行适当的体育锻炼.

(1) 该校学生甲、乙、丙三人某周均从 A,B 两个健身中心中选择其中一个进行健身,若甲、乙、丙该周选择 A 健身中心健身的概率分别为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, 求这三人中这一周恰好有一人选择 A 健身中心健身的概率.

(2) 该校学生丁每周六、日均去健身中心进行体育锻炼,且这两天中每天只选择两个健身中心的其中一个,其中周六选择 A 健身中心的概率为 $\frac{1}{2}$. 若丁周六选择 A 健身中心,则周日仍选择 A 健身中心的概率为 $\frac{1}{4}$; 若周六选择 B 健身中心,则周日选择 A 健身中心的概率为 $\frac{2}{3}$. 求丁周日选择 B 健身中心健身的概率.

(3) 现用健身指数 $k(k \in [0, 10])$ 来衡量各学生在一个月的健身运动后的健身效果,并规定 k 值低于 1 分的学生为健身效果不佳的学生. 经统计发现,从全校学生中随机抽取一人,其 k 值低于 1 分的概率为 0.02. 现从全校学生中随机抽取一人,如果抽取到的学生不是健身效果不佳的学生,那么继续抽取下一个,直至抽取到一个健身效果不佳的学生为止,但抽取的总次数不超过 n . 若抽取次数的期望值不超过 23,求 n 的最大值.

参考数据: $0.98^{29} \approx 0.557, 0.98^{30} \approx 0.545, 0.98^{31} \approx 0.535$.

答案全解精析

阶段测评卷(1)

1. B $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \lambda\overrightarrow{OC}$, M, A, B, C 四点共面, 由空间向量基本定理可知, 需 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \lambda = 1$, 解得 $\lambda = \frac{1}{6}$.

2. C 记选项中的四个点依次为 A, B, C, D , 则 $\overrightarrow{PA} = (2, 1, 1)$, $\overrightarrow{PB} = (-1, -1, 1)$, $\overrightarrow{PC} = (1, 0, -1)$, $\overrightarrow{PD} = (1, 0, 2)$, 又 $\mathbf{n} = (-2, 3, 1)$, $\overrightarrow{PA} \cdot \mathbf{n} = 2 \times (-2) + 1 \times 3 + 1 \times 1 = 0$, 故 $\overrightarrow{PA}$ 与 $\mathbf{n}$ 垂直, 即点 A 在平面 α 内, 故 A 错误; $\overrightarrow{PB} \cdot \mathbf{n} = (-1) \times (-2) + (-1) \times 3 + 1 \times 1 = 0$, 故 $\overrightarrow{PB}$ 与 $\mathbf{n}$ 垂直, 即点 B 在平面 α 内, 故 B 错误; $\overrightarrow{PC} \cdot \mathbf{n} = 1 \times (-2) + 0 \times 3 + (-1) \times 1 = -3 \neq 0$, 故 $\overrightarrow{PC}$ 与 $\mathbf{n}$ 不垂直, 即点 C 不在平面 α 内, 故 C 正确; $\overrightarrow{PD} \cdot \mathbf{n} = 1 \times (-2) + 0 \times 3 + 2 \times 1 = 0$, 故 $\overrightarrow{PD}$ 与 $\mathbf{n}$ 垂直, 即点 D 在平面 α 内, 故 D 错误.

3. B 在空间直角坐标系中, $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$, $\triangle ABC$ 的重心为 G , 所以 $G\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$, $\overrightarrow{OA} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{AG} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$, 所以 $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{AG}$ 上的投影向量的模为 $\frac{|\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AG}|}{|\overrightarrow{AG}|} = \frac{\left|-\frac{2}{3}\right|}{\frac{\sqrt{17}}{3}} = \frac{2\sqrt{17}}{17}$, 所以点 O 到直线 AG 的距

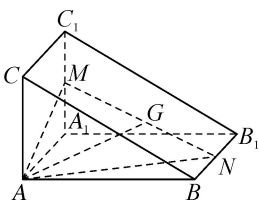
离为 $\sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{17}}{17}\right)^2} = \frac{\sqrt{221}}{17}$.

4. C 如图, 连接 AM, AN . 因为 G 是 MN 的中点, 所以 $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN})$.

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

又 $\overrightarrow{AG} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AA_1} + z\overrightarrow{AC}$, 所以 $x + y + z = \frac{3}{2}$.

5. A 由题意, $\overrightarrow{FP} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EP} = -\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$. 又由正八面体 $ABCDEF$ 的棱长都是 1, 且各个面都是等边三角形, 在 $\triangle ACE$ 中, 由 $AC = AE = 1$, $CE = \sqrt{2}$, 可得 $AC^2 + AE^2 = CE^2$, 所以 $AC \perp AE$. 所以 $\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{CQ} = \left(-\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(-\frac{2}{3}\right) \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} + 1^2 - \frac{1}{3} \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$, $|\overrightarrow{FP}| = \sqrt{\left(-\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)^2} = \sqrt{\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}^2} = \sqrt{1^2 + 0 + \frac{1}{4} \times 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $|\overrightarrow{CQ}| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9}\overrightarrow{AD}^2 - \frac{4}{3}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2} =$



$\sqrt{\frac{4}{9} \times 1^2 - \frac{4}{3} \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} + 1^2} = \frac{\sqrt{7}}{3}$, 所以 $\cos \theta = |\cos \langle \overrightarrow{FP}, \overrightarrow{CQ} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{CQ}|}{|\overrightarrow{FP}| |\overrightarrow{CQ}|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{7}}{3}} = \frac{3\sqrt{35}}{35}$. 所以 $\sin \theta = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{35}}$.

$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{35}}}{\frac{3\sqrt{35}}{35}} = \frac{\sqrt{26}}{3}$.

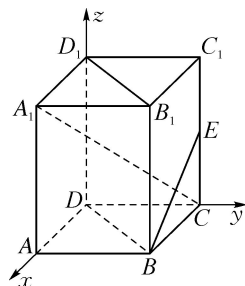
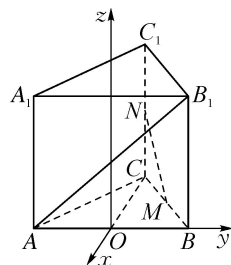
6. C 设 $N(x, y, z)$. 由题意可取 AB 中点 O , 连接 CO , 过点 O 作垂直于平面 ABC 的直线, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $A\left(0, -\frac{1}{2}, 0\right)$, $B_1\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$, $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$, $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right)$, $C_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 1\right)$, 所以 $\overrightarrow{CN} = \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}, y, z\right)$, $\overrightarrow{CC_1} = (0, 0, 1)$.

1). 由 $\overrightarrow{CN} = \lambda \overrightarrow{CC_1}$, 得 $\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}, y, z\right) = \lambda(0, 0, 1)$, 所以 $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y = 0$, $z = \lambda$. 所以 $N\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \lambda\right)$. 因为 $\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{4}, \lambda\right)$, $\overrightarrow{AB_1} = (0, 1, 1)$, 又 $MN \perp AB_1$, 所以 $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0$, 即 $-\frac{1}{4} + \lambda = 0$, 即 $\lambda = \frac{1}{4}$.

7. A 设过点 P 且以 $\mathbf{u}$ 为法向量的平面上不同于 P 的任一点 $A(x, y, z)$, 则 $\overrightarrow{PA} = (x, y - 3, z + 1)$, 所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \mathbf{u} = 2x - (y - 3) + (z + 1) = 2x - y + z + 4 = 0$, 所以过点 P 且以 $\mathbf{u}$ 为法向量的平面方程为 $2x - y + z = -4$.

8. C 如图, 以 $\{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1}\}$ 为正交基底建立空间直角坐标系 $D - xyz$, 则 $B(2, 2, 0)$, $E(0, 2, \sqrt{2})$, $A_1(2, 0, 2\sqrt{2})$, $C(0, 2, 0)$, $A(2, 0, 0)$, 所以 $\overrightarrow{BE} = (-2, 0, \sqrt{2})$, $\overrightarrow{A_1C} = (-2, 2, -2\sqrt{2})$, 易知 $\cos \alpha = |\cos \langle \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{A_1C} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{A_1C}|}{|\overrightarrow{BE}| |\overrightarrow{A_1C}|} = \frac{|4 + 0 - 4|}{\sqrt{6} \times 4} = 0$, 且 $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$, 所以 $\alpha = 90^\circ$. 易得平面 BDD_1B_1 的一个法向量为 $\overrightarrow{AC}$, 所以 $\sin \beta = |\cos \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A_1C} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{A_1C}|}{|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{A_1C}|} = \frac{8}{2\sqrt{2} \times 4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 又 $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$, 所以 $\beta = 45^\circ$. 所以 $\alpha + \beta = 135^\circ$.

9. BCD 如图, 以 $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}\}$ 为单位正交基底建立空间直角坐标系, 则 $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(1, 1, 0)$, $D(0, 1, 0)$, $A_1(0, 0, 1)$, $B_1(1, 0, 1)$, $C_1(1, 1, 1)$, $D_1(0, 1, 1)$, $E\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$,



$O\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$. 连接 A_1C_1, B_1D_1 ,

$OE, OP, A_1B, A_1D, BD, B_1C, CD_1, A_1C, B_1D$. A 中, 因为 P 为正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的中

心, 即为 A_1C 的中点, 所以 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$, 则 $CP = |\overrightarrow{CP}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故 A 错误. B 中, 因为 $\overrightarrow{OP} = \left(0, 0, -\frac{1}{2}\right)$, 又 $\overrightarrow{EO} = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$, 则 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{EO} = 0$, 所以 $OP \perp EO$, 又 $|\overrightarrow{OP}| = \frac{1}{2}$, 所以点 P 到直线 EO 的距离为 $\frac{1}{2}$, 故 B 正确. C 中, $\overrightarrow{A_1B} = (1, 0, -1)$, $\overrightarrow{A_1D} = (0, 1, -1)$, $\overrightarrow{A_1D_1} = (0, 1, 0)$. 设平面 A_1BD 的法向量为 $n = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{A_1B} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{A_1D} = 0, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} x - z = 0, \\ y - z = 0, \end{cases}$ 令 $z = 1$, 得 $y = 1, x = 1$, 所以 $n = (1, 1, 1)$, 所以点 D_1 到平面 A_1BD 的距离 $d = \frac{|\overrightarrow{A_1D_1} \cdot n|}{|n|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 又 $\overrightarrow{D_1C} = (1, 0, -1) = \overrightarrow{A_1B}$, 所以 $D_1C \parallel A_1B$, 又因为 $D_1C \not\subset$ 平面 $A_1BD, A_1B \subset$ 平面 A_1BD , 所以 $D_1C \parallel$ 平面 A_1BD , 同理 $B_1C \parallel$ 平面 A_1BD . $D_1C \subset$ 平面 $B_1CD_1, B_1C \subset$ 平面 $B_1CD_1, B_1C \cap D_1C = C$, 所以平面 $A_1BD \parallel$ 平面 B_1CD_1 , 所以平面 A_1BD 与平面 B_1CD_1 间的距离等于点 D_1 到平面 A_1BD 的距离, 所以平面 A_1BD 与平面 B_1CD_1 间的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 故 C 正确. 由选项 C 可知平面 B_1CD_1 的一个法向量为 $n = (1, 1, 1), \overrightarrow{B_1P} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, 设直线 B_1P 与平面 B_1CD_1 所成角为 θ , 则 $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{B_1P}, n \rangle| = \frac{|\overrightarrow{B_1P} \cdot n|}{|\overrightarrow{B_1P}| |n|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$, 故 D 正确.

10. AC 因为三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 为直棱柱, $\angle BAC = 90^\circ$, 以 $\{\overrightarrow{A_1A}, \overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1C_1}\}$ 为正交基底, 建立如图所示的空间直角坐标系 $A_1 - xyz$, 设 $AB = 2AC = 2AA_1 = 2$, 则 $A_1(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B_1(0, 2, 0), B(1, 2, 0), D\left(\frac{1}{2}, 2, 0\right), C(1, 0, 1), C_1(0, 0, 1), E(0, 1, 0)$. 设平面 AEC_1 的法向量为 $n = (x, y, z)$, $\overrightarrow{AE} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{EC_1} = (0, -1, 1)$, 所以 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{AE} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{EC_1} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -x + y = 0, \\ -y + z = 0, \end{cases}$ 令 $x = 1$, 则 $y = z = 1$, 所以 $n = (1, 1, 1)$. 设平面 DEC_1 的法向量为 $m = (x_1, y_1, z_1)$, 因为 $\overrightarrow{DE} = \left(-\frac{1}{2}, -1, 0\right), \overrightarrow{EC_1} = (0, -1, 1)$, 所以 $\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{DE} = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{EC_1} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 - y_1 = 0, \\ -y_1 + z_1 = 0, \end{cases}$ 令 $x_1 = 2$, 则 $y_1 = -1, z_1 = -1$, 所以 $m = (2, -1, -1)$. 对于 A, 因为 $\overrightarrow{B_1C} = (1, -2, 1)$, 所以 $\overrightarrow{B_1C} \cdot n = 1 \times 1 + 1 \times (-2) + 1 \times 1 = 0$. 又 $B_1C \not\subset$ 平面 AEC_1 , 所以 $B_1C \parallel$ 平面 AEC_1 , 故 A 正确; 对于 B, 因为 $\overrightarrow{AB_1} = (-1, 2, 0)$, 且 $\frac{-1}{2} \neq \frac{2}{-1} \neq \frac{0}{-1}$, 所以 AB_1 不垂直于平面 DEC_1 , 故 B 错误; 对于 C, $m \cdot n = 2 \times 1 + (-1) \times 1 + (-1) \times 1 = 0$, 所以平面 $AEC_1 \perp$ 平面 DEC_1 , 故 C 正确; 对于 D, $\overrightarrow{ED} = \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right), \overrightarrow{AC_1} = (-1, 0, 1)$, 则 $\cos \langle \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{AC_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{ED}| |\overrightarrow{AC_1}|} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2} \times \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, 故直线 AC_1 与 ED 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$, 故 D 错误.

11. ACD 如图, 以 $\{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1}\}$ 为单位正交基底建立空间直角坐标系 $D - xyz$, 则 $D(0, 0, 0), B(1, 1, 0), A_1(1, 0, 1), C_1(0, 1, 1), D_1(0, 0, 1), C(0, 1, 0), A(1, 0, 0), B_1(1, 1, 1)$, 所以 $\overrightarrow{A_1C_1} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{BA_1} = (0, -1, 1), \overrightarrow{DB_1} = (1, 1, 1)$, 所以 $\overrightarrow{DB_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = 0, \overrightarrow{DB_1} \cdot \overrightarrow{BA_1} = 0$, 所以 $\overrightarrow{DB_1} \perp \overrightarrow{A_1C_1}, \overrightarrow{DB_1} \perp \overrightarrow{BA_1}$, 即 $DB_1 \perp A_1C_1, DB_1 \perp BA_1$, 又 $BA_1 \cap A_1C_1 = A_1, BA_1 \subset$ 平面 $A_1C_1B, A_1C_1 \subset$ 平面 A_1C_1B , 所以 $B_1D \perp$ 平面 A_1C_1B , 故 A 正确; 设 $M(x, y, 0)$, 则 $\overrightarrow{D_1M} = (x, y, -1)$, 又平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $n = (0, 0, 1)$, 依题意 $|\cos \langle \overrightarrow{D_1M}, n \rangle| = \frac{|\overrightarrow{D_1M} \cdot n|}{|\overrightarrow{D_1M}| |n|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}$, 所以若直线 D_1M 与平面 $ABCD$ 所成角为 $\frac{\pi}{3}$, 则点 M 的轨迹是圆, 故 B 错误; 因为 $\overrightarrow{D_1D} = (0, 0, -1), \overrightarrow{DA} = (1, 0, 0), \overrightarrow{DC} = (0, 1, 0)$, 所以 $\overrightarrow{D_1D} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = (0, 0, -1) + \frac{1}{2}(1, 0, 0) + \frac{1}{2}(0, 1, 0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right), \overrightarrow{D_1M} = (x, y, -1)$, 所以当 $x = y = \frac{1}{2}$ 时, 满足 $\overrightarrow{D_1M} = \overrightarrow{D_1D} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$, 故 C 正确; 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的外接球的直径为正方体的体对角线, 则外接球的半径 $R = \frac{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 球心为 DB_1 的中点, 设为点 O , 则 $O\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 由 $B_1D \perp$ 平面 A_1C_1B , 所以平面 A_1C_1B 的一个法向量为 $m = \overrightarrow{DB_1} = (1, 1, 1)$, 又 $\overrightarrow{BO} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, 所以点 O 到平面 A_1C_1B 的距离 $d = \frac{|m \cdot \overrightarrow{BO}|}{|m|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$, 设平面 A_1C_1B 截外接球所得的截面圆的半径为 r , 则 $r =$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 - y_1 = 0, \\ -y_1 + z_1 = 0, \end{cases} \text{ 令 } x_1 = 2, \text{ 则 } y_1 = -1, z_1 = -1, \text{ 所以 } m = (2, -1, -1).$$

对于 A, 因为 $\overrightarrow{B_1C} = (1, -2, 1)$, 所以 $\overrightarrow{B_1C} \cdot n = 1 \times 1 + 1 \times (-2) + 1 \times 1 = 0$. 又 $B_1C \not\subset$ 平面 AEC_1 , 所以 $B_1C \parallel$ 平面 AEC_1 , 故 A 正确; 对于 B, 因为 $\overrightarrow{AB_1} = (-1, 2, 0)$, 且 $\frac{-1}{2} \neq \frac{2}{-1} \neq \frac{0}{-1}$, 所以 AB_1 不垂直于平面 DEC_1 , 故 B 错误; 对于 C, $m \cdot n = 2 \times 1 + (-1) \times 1 + (-1) \times 1 = 0$, 所以平面 $AEC_1 \perp$ 平面 DEC_1 , 故 C 正确; 对于 D, $\overrightarrow{ED} = \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right), \overrightarrow{AC_1} = (-1, 0, 1)$, 则 $\cos \langle \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{AC_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{ED}| |\overrightarrow{AC_1}|} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2} \times \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, 故

直线 AC_1 与 ED 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$, 故 D 错误.

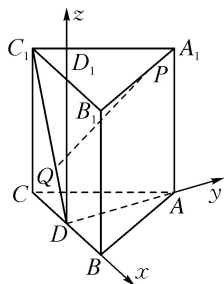
11. ACD 如图, 以 $\{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1}\}$ 为单位正交基底建立空间直角坐标系 $D - xyz$, 则 $D(0, 0, 0), B(1, 1, 0), A_1(1, 0, 1), C_1(0, 1, 1), D_1(0, 0, 1), C(0, 1, 0), A(1, 0, 0), B_1(1, 1, 1)$, 所以 $\overrightarrow{A_1C_1} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{BA_1} = (0, -1, 1), \overrightarrow{DB_1} = (1, 1, 1)$, 所以 $\overrightarrow{DB_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = 0, \overrightarrow{DB_1} \cdot \overrightarrow{BA_1} = 0$, 所以 $\overrightarrow{DB_1} \perp \overrightarrow{A_1C_1}, \overrightarrow{DB_1} \perp \overrightarrow{BA_1}$, 即 $DB_1 \perp A_1C_1, DB_1 \perp BA_1$, 又 $BA_1 \cap A_1C_1 = A_1, BA_1 \subset$ 平面 $A_1C_1B, A_1C_1 \subset$ 平面 A_1C_1B , 所以 $B_1D \perp$ 平面 A_1C_1B , 故 A 正确; 设 $M(x, y, 0)$, 则 $\overrightarrow{D_1M} = (x, y, -1)$, 又平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $n = (0, 0, 1)$, 依题意 $|\cos \langle \overrightarrow{D_1M}, n \rangle| = \frac{|\overrightarrow{D_1M} \cdot n|}{|\overrightarrow{D_1M}| |n|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}$, 所以若直线 D_1M 与平面 $ABCD$ 所成角为 $\frac{\pi}{3}$, 则点 M 的轨迹是圆, 故 B 错误; 因为 $\overrightarrow{D_1D} = (0, 0, -1), \overrightarrow{DA} = (1, 0, 0), \overrightarrow{DC} = (0, 1, 0)$, 所以 $\overrightarrow{D_1D} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = (0, 0, -1) + \frac{1}{2}(1, 0, 0) + \frac{1}{2}(0, 1, 0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right), \overrightarrow{D_1M} = (x, y, -1)$, 所以当 $x = y = \frac{1}{2}$ 时, 满足 $\overrightarrow{D_1M} = \overrightarrow{D_1D} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$, 故 C 正确; 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的外接球的直径为正方体的体对角线, 则外接球的半径 $R = \frac{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 球心为 DB_1 的中点, 设为点 O , 则 $O\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 由 $B_1D \perp$ 平面 A_1C_1B , 所以平面 A_1C_1B 的一个法向量为 $m = \overrightarrow{DB_1} = (1, 1, 1)$, 又 $\overrightarrow{BO} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, 所以点 O 到平面 A_1C_1B 的距离 $d = \frac{|m \cdot \overrightarrow{BO}|}{|m|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$, 设平面 A_1C_1B 截外接球所得的截面圆的半径为 r , 则 $r =$

$\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}$, 所以截面圆的面积

$S=\pi r^2=\frac{2\pi}{3}$, 故 D 正确.

12. $\sqrt{59}$ 由已知 $\vec{CA} \cdot \vec{AB} = 0, \vec{AB} \cdot \vec{BD} = 0, \vec{CD} = \vec{CA} + \vec{AB} + \vec{BD}, \langle \vec{CA}, \vec{BD} \rangle = 120^\circ$, 所以 $|\vec{CD}|^2 = |\vec{CA}|^2 + |\vec{AB}|^2 + |\vec{BD}|^2 + 2\vec{CA} \cdot \vec{AB} + 2\vec{AB} \cdot \vec{BD} + 2\vec{CA} \cdot \vec{BD} = 6^2 + 4^2 + 7^2 + 2 \times 6 \times 7 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 59$, 所以 $|\vec{CD}| = \sqrt{59}$.

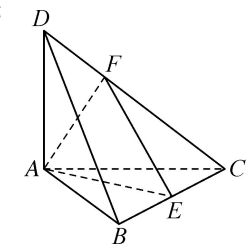
13. $\sqrt{3}$ 如图, 设 B_1C_1 的中点为 D_1 , 以 $\{\vec{DB}, \vec{DA}, \vec{DD_1}\}$ 为正交基底建立空间直角坐标系 $D-xyz$, 则 $A_1(0, \sqrt{3}, 3), B_1(1, 0, 3), D(0, 0, 0), C_1(-1, 0, 3)$. 由 $\vec{A_1P} = \lambda \vec{A_1B_1}, \vec{DQ} = \lambda \vec{DC_1}$, 可得 $P(\lambda, \sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda, 3), Q(-\lambda, 0, 3\lambda)$, 则 $|\vec{PQ}| = 2\sqrt{4\lambda^2-6\lambda+3} = 2\sqrt{4\left(\lambda-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{3}{4}}$, 所以当 $\lambda = \frac{3}{4}$ 时, PQ 取最小值 $\sqrt{3}$.



14. 2 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 如图, 连接 AH ,

因为 $A_1H \perp \alpha, AH \subset \alpha$, 所以 $A_1H \perp AH$, 所以 H 在以 AA_1 为直径的球面上, 又直线 AA_1 与平面 α 所成角为 30° , 而 $\angle A_1AH$ 即为直线 AA_1 与平面 α 所成的角, 所以 $\angle A_1AH = 30^\circ$, 因此 H 在以 AA_1 为轴, 顶角为 60° 的圆锥面上, 过点 H 作 $HO \perp AA_1$ 于点 O , 则 $HA_1 = 2, HA = 2\sqrt{3}, HO = \sqrt{3}, A_1O = 1, AO = 3$, 其中 HA_1 的长即为 A_1 到平面 α 的距离. 所以 H 在圆锥 AO 的底面圆上, O 为圆心, 半径为 $\sqrt{3}$. 过点 A 作与平面 ABB_1A_1 垂直的直线, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $B(0, 2\sqrt{3}, 0)$, 设 $H(\sqrt{3}\cos\theta, \sqrt{3}\sin\theta, 3), \vec{BH} = (\sqrt{3}\cos\theta, \sqrt{3}\sin\theta - 2\sqrt{3}, 3)$, 取 $\vec{AA_1}$ 的一个方向向量为 $\vec{n} = (0, 0, 1)$, $\cos\langle \vec{BH}, \vec{n} \rangle = \frac{|\vec{BH} \cdot \vec{n}|}{|\vec{BH}| |\vec{n}|} = \frac{3}{\sqrt{3\cos^2\theta + 3(\sin\theta - 2)^2 + 9}} = \frac{3}{\sqrt{24 - 12\sin\theta}} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. 又 $0 \leq \langle \vec{BH}, \vec{n} \rangle \leq \pi$, 所以 $\langle \vec{BH}, \vec{n} \rangle \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, 所以以直线 BH 与 AA_1 所成角的范围是 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$.

15. 解: (1) 如图, 连接 AE, AF , 则 $\vec{EF} = \vec{AF} - \vec{AE} = (\vec{AD} + \vec{DF}) - \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AB}) = \left(\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{DC}\right) - \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AB}) = \left[\vec{AD} + \frac{1}{3}(\vec{AC} - \vec{AD})\right] - \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AB}) = \frac{2}{3}\vec{AD} - \frac{1}{6}\vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{2}{3}\vec{c} - \frac{1}{6}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$.



$$(2) |\vec{EF}| = \sqrt{\vec{EF}^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\vec{AD} - \frac{1}{6}\vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{AB}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9}\vec{AD}^2 + \frac{1}{36}\vec{AC}^2 + \frac{1}{4}\vec{AB}^2 - \frac{2}{9}\vec{AD} \cdot \vec{AC} - \frac{2}{3}\vec{AD} \cdot \vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC} \cdot \vec{AB}} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{1}{9} + 1 - 0 - 0 + \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{29}}{3}.$$

16. (1) 证明: 如图, 取 AC 的中点 O , 连接 A_1O, BO . 因为 $\angle A_1AC = 60^\circ, A_1A = 2, AO = 1$, 所以 $A_1O = \sqrt{AA_1^2 + AO^2 - 2AO \cdot AA_1 \cos \angle A_1AC} =$

$$\sqrt{4 + 1 - 2 \times 2 \times 1 \times \frac{1}{2}} = \sqrt{3}, \text{ 所以 } AO^2 + A_1O^2 = AA_1^2, \text{ 所以 } A_1O \perp AC.$$

因为 $\triangle ABC$ 为边长为 2 的等边三角形, 所以 $BO = \sqrt{3}$. 因为 $A_1B = \sqrt{6}$, 所以 $A_1B^2 = A_1O^2 + BO^2$, 所以 $A_1O \perp BO$. 又因为 $AC \cap BO = O, AC \subset \text{平面 } ABC, BO \subset \text{平面 } ABC$, 所以 $A_1O \perp \text{平面 } ABC$. 又因为 $A_1O \subset \text{平面 } A_1ACC_1$, 所以平面 $A_1ACC_1 \perp \text{平面 } ABC$.

(2) 解: 由 (1) 可知 OA, OB, OA_1 两两垂直, 所以以 $\{\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OA_1}\}$ 为正交基底, 建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$, 所以 $A(1, 0, 0), B(0, \sqrt{3}, 0), C(-1, 0, 0), C_1(-2, 0, \sqrt{3}), A_1(0, 0, \sqrt{3}), \vec{CA} = (2, 0, 0), \vec{BA_1} = (0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}), \vec{CC_1} = (-1, 0, \sqrt{3})$. 因为 $\vec{CM} = \lambda \vec{CC_1} (0 \leq \lambda \leq 1)$, 所以 $M(-\lambda - 1, 0, \sqrt{3}\lambda), \vec{BM} = (-\lambda - 1, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\lambda)$. 设平面 A_1BM 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{BA_1} = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{BM} = 0, \end{cases}$ 即

$$\begin{cases} -y + z = 0, \\ (1 + \lambda)x + \sqrt{3}y - \sqrt{3}\lambda z = 0, \end{cases}$$

$$\text{取 } y = \lambda + 1, \text{ 得 } z = \lambda + 1, x = \sqrt{3}(\lambda - 1),$$

所以 $\vec{n} = (\sqrt{3}\lambda - \sqrt{3}, \lambda + 1, \lambda + 1)$ 是平面 A_1BM 的一个法向量.

$$\text{设直线 } AC \text{ 与平面 } A_1BM \text{ 所成角为 } \theta, \text{ 则 } \sin \theta = |\cos \langle \vec{CA}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{CA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{CA}| |\vec{n}|} = \frac{|2\sqrt{3}(\lambda - 1)|}{2\sqrt{3}(\lambda - 1)^2 + 2(\lambda + 1)^2} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

化简整理得 $9(\lambda - 1)^2 = 4(\lambda + 1)^2$, 解得 $\lambda = \frac{1}{5}$ 或 $\lambda = 5$ (舍去),

$$\text{所以 } M\left(-\frac{6}{5}, 0, \frac{\sqrt{3}}{5}\right).$$

$$\text{又因为 } \vec{MA_1} = \left(\frac{6}{5}, 0, \frac{4\sqrt{3}}{5}\right), \vec{B_1A_1} = \vec{BA} = (1, -\sqrt{3}, 0),$$

$$\text{所以 } \frac{\vec{MA_1} \cdot \vec{B_1A_1}}{|\vec{B_1A_1}|} = \frac{\frac{6}{5}}{2} = \frac{3}{5}.$$

设点 M 到直线 A_1B_1 的距离为 d ,

$$\text{则 } d^2 = |\vec{MA_1}|^2 - \left(\frac{\vec{MA_1} \cdot \vec{B_1A_1}}{|\vec{B_1A_1}|}\right)^2 = \frac{36}{25} + \frac{48}{25} - \frac{9}{25} = 3.$$

所以 $d = \sqrt{3}$, 即点 M 到直线 A_1B_1 的距离为 $\sqrt{3}$.

17. (1) 证明: 因为底面 $ABCD$ 为正方形, 所以 $CD \perp AD$. 因为 $PA \perp \text{平面 } ABCD, CD \subset \text{平面 } ABCD$, 所以 $PA \perp CD$. 又 $PA \cap AD = A, PA \subset \text{平面 } PAD, AD \subset \text{平面 } PAD$, 所以 $CD \perp \text{平面 } PAD$.

因为 $AE \subset \text{平面 } PAD$, 所以 $CD \perp AE$.

因为 $PA = PD$, 且 E 为 PD 的中点, 所以 $AE \perp PD$.

因为 $CD \cap PD = D, CD \subset \text{平面 } PCD, PD \subset \text{平面 } PCD$,
所以 $AE \perp \text{平面 } PCD$.

又 $AE \subset \text{平面 } AEF$, 所以 $\text{平面 } AEF \perp \text{平面 } PCD$.

(2) 解: 如图, 以 $\{\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AP}\}$ 为正

交基底建立空间直角坐标系 $A - xyz$,

则 $A(0,0,0), B(2,0,0), C(2,2,0),$

$D(0,2,0), P(0,0,2), E(0,1,1).$

设 $\vec{PF} = \lambda \vec{PC} (0 < \lambda < 1)$, 则 $\vec{AF} = \vec{AP}$

$+ \vec{PF} = \vec{AP} + \lambda \vec{PC} = (2\lambda, 2\lambda, 2 - 2\lambda), \vec{AE} = (0, 1, 1).$

设平面 AEF 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$, 则

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{AE} = y_1 + z_1 = 0, \\ \vec{m} \cdot \vec{AF} = 2\lambda x_1 + 2\lambda y_1 + (2 - 2\lambda)z_1 = 0. \end{cases}$$

令 $y_1 = \lambda$, 则 $x_1 = 1 - 2\lambda, z_1 = -\lambda$, 可得 $\vec{m} = (1 - 2\lambda, \lambda, -\lambda)$.

又因为 $\vec{AC} = (2, 2, 0), \vec{AP} = (0, 0, 2)$,

设平面 APF 的法向量为 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AC} = 2x_2 + 2y_2 = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{AP} = 2z_2 = 0. \end{cases}$$

令 $x_2 = 1$, 则 $y_2 = -1, z_2 = 0$, 可得 $\vec{n} = (1, -1, 0)$.

由题意得 $|\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \cos 45^\circ$,

$$\text{即 } \frac{|1 - 3\lambda|}{\sqrt{6\lambda^2 - 4\lambda + 1} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

整理得 $3\lambda^2 - 2\lambda = 0$, 解得 $\lambda = \frac{2}{3}$ 或 $\lambda = 0$ (舍去).

所以存在, 此时 $\frac{PF}{PC} = \frac{2}{3}$.

18. 解: (1) 如图, 连接 MC , 因为 $EA = EB, M$ 是 AB 的中点, 所以 $EM \perp AB$. 因为平面 $ABE \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $ABE \cap$ 平面 $ABCD = AB, EM \subset$ 平面 ABE , 所以 $EM \perp$ 平面 $ABCD$. 又 $CM \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $EM \perp CM$. 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 60^\circ$, 所以 $\triangle ABC$ 是正三角形, 所以 $MC \perp AB$, 所以 ME, MC, MB 两两垂直. 以 $\{\vec{MB}, \vec{MC}, \vec{ME}\}$ 为正交基底建立如图

所示的空间直角坐标系 $M - xyz$, 则 $M(0,0,0), A(-1,0,0), B(1,0,0), C(0,\sqrt{3},0), E(0,0,\sqrt{3}), \vec{AC} = (1,\sqrt{3},0), \vec{AE} =$

$(1,0,\sqrt{3}), \vec{BA} = (-2,0,0)$. 设 $\vec{m} = (x,y,z)$ 是平面 ACE 的法

向量, 则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{AC} = x + \sqrt{3}y = 0, \\ \vec{m} \cdot \vec{AE} = x + \sqrt{3}z = 0, \end{cases}$ 令 $z = 1$, 得 $\vec{m} = (-\sqrt{3}, 1, 1)$.

设点 B 到平面 ACE 的距离为 d , 则 $d = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{BA}|}{|\vec{m}|} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} =$

$\frac{2\sqrt{15}}{5}$, 所以点 B 到平面 EAC 的距离为 $\frac{2\sqrt{15}}{5}$.

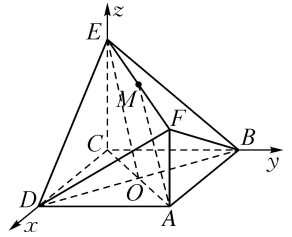
(2) 由题意可知, 平面 ABE 的一个法向量为 $\vec{n} = (0, 1, 0), \vec{AE} = (1, 0, \sqrt{3}), \vec{EC} = (0, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$. 设 $\vec{EP} = \lambda \vec{EC} = (0, \sqrt{3}\lambda, -\sqrt{3}\lambda) (0 \leq \lambda \leq 1)$, 则 $\vec{AP} = \vec{AE} + \vec{EP} = (1, \sqrt{3}\lambda, \sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda)$. 因为直线 AP 与平面 ABE 所成的角为 45° , 所以 $\sin 45^\circ =$

$$|\cos \langle \vec{AP}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{AP}| |\vec{n}|} = \frac{|\sqrt{3}\lambda|}{\sqrt{1 + 3\lambda^2 + 3 - 6\lambda + 3\lambda^2} \times 1} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

整理可得 $4 - 6\lambda = 0$, 解得 $\lambda = \frac{2}{3}$, 所以 $\frac{EP}{EC} = \frac{2}{3}$.

19. (1) 证明: 设 $AC \cap BD = O$, 连接 AM, EO . 在矩形 $ACEF$ 中, M 是线段 EF 的中点, O 是线段 AC 的中点, 所以 $EM \parallel AO, EM = AO$, 所以四边形 $OAME$ 为平行四边形, 所以 $AM \parallel EO$. 又 $AM \not\subset$ 平面 $BDE, EO \subset$ 平面 BDE , 所以 $AM \parallel$ 平面 BDE .

(2) 解: 由平面 $ABCD \perp$ 平面 $ACEF, EC \perp AC$, 平面 $ABCD \cap$ 平面 $ACEF = AC, EC \subset$ 平面 $ACEF$, 得 $EC \perp$ 平面 $ABCD$. 因为 $DC \subset$ 平面 $ABCD, BC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $EC \perp DC, EC \perp BC$. 又 $CD \perp CB$, 则直线 CD, CB, CE 两两垂直, 以 $\{\vec{CD}, \vec{CB}, \vec{CE}\}$ 为正交基底建立如图所示的空间直角



坐标系 $C - xyz$. 若 $t = 1$, 则 $C(0,0,0), D(\sqrt{2}, 0, 0), A(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), F(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1), E(0,0,1), B(0,\sqrt{2},0), \vec{BD} = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0), \vec{DF} = (0, \sqrt{2}, 1)$. 设平面 BDF 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{DF} = \sqrt{2}y + z = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{BD} = \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0, \end{cases} \text{ 令 } x = 1, \text{ 得 } \vec{n} = (1, 1, -\sqrt{2}). \text{ 同理,}$$

由 $\vec{AF} = (0,0,1), \vec{AD} = (0, -\sqrt{2}, 0)$, 得平面 ADF 的一个法向量为 $\vec{m} = (1, 0, 0)$. 设平面 ADF 与平面 BDF 夹角为 θ , 则 $\cos \theta =$

$$|\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{1}{2}, \text{ 解得 } \theta = \frac{\pi}{3}. \text{ 所以平面 } ADF \text{ 与}$$

平面 BDF 夹角的大小为 $\frac{\pi}{3}$.

(3) 解: 由(2)知, $C(0,0,0), A(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), F(\sqrt{2}, \sqrt{2}, t), E(0,0,t), B(0,\sqrt{2},0)$, 则 $\vec{BE} = (0, -\sqrt{2}, t), \vec{AC} = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$, 设 $\vec{AP} = \lambda \vec{AC} (0 \leq \lambda \leq 1)$, 则 $\vec{AP} = (-\sqrt{2}\lambda, -\sqrt{2}\lambda, 0), P(\sqrt{2} - \sqrt{2}\lambda, \sqrt{2} - \sqrt{2}\lambda, 0)$, 于是 $\vec{PF} = (\sqrt{2}\lambda, \sqrt{2}\lambda, t)$, 由 $PF \perp BE$, 得 $\vec{PF} \cdot \vec{BE} = 0$, 即 $-2\lambda + t^2 = 0$, 即 $t^2 = 2\lambda$. 又 $\lambda \in [0, 1]$, 所以 $0 < t^2 \leq 2$, 即 $0 < t \leq \sqrt{2}$, 即 t 的最大值为 $\sqrt{2}$.

阶段测评卷(2)

1. C 由空间向量 $\vec{a} = (2, x, 1), \vec{b} = (-1, 2, 1)$ 互相垂直, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times (-1) + 2x + 1 = 0$, 解得 $x = 0.5$.

2. D 由 $\left(\sqrt{x} + \frac{3}{x^2}\right)^n$ 的展开式中只有第 7 项的二项式系数最大, 得展开式共有 13 项, 所以 $n = 12$.

3. C 从左到右依次涂色, 第一个圆环可以涂 3 种颜色, 第二、三、四、五个圆环均可以涂 2 种颜色, 共有 $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$ (种) 不同的涂色方案.

4. A 由多项式乘法知, 只需求出 $(x+y)^6$ 展开式中 x^2y^4 项与 x^3y^3 项的系数, 即可得解, 由组合知识可知, x^2y^4 项的系数为 $C_6^2 = 15, x^3y^3$ 项的系数为 $C_6^3 = 20$, 故在 $(x-y)(x+y)^6$ 的展开式中, x^3y^4 的系数是 $15 - 20 = -5$.

5. A 由 $\angle A_1AB = \angle A_1AD = 60^\circ$, 得 $\vec{AA_1} \cdot \vec{AB} = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \vec{AA_1} \cdot \vec{AD} = 1 \times 2 \times \frac{1}{2} = 1$, 而 $\angle BAD = 90^\circ$, 则 $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$. 又 $\vec{AC_1} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CC_1} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1}$, 所以 $|\vec{AC_1}| = \sqrt{\vec{AB}^2 + \vec{AD}^2 + \vec{AA_1}^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} + 2\vec{AD} \cdot \vec{AA_1} + 2\vec{AB} \cdot \vec{AA_1}} = \sqrt{1 + 4 + 1 + 2 + 1} = 3$.

6. B 【分析】注意到直接确定异面直线的对数有难度, 为此, 采用转化的方法, 将一对异面直线转化为所构成的图形——四面体来进行研究, 为此, 只需研究构成多少个四面体.