

第6章 空间向量与立体几何

课时提优 1 6.1.1 空间向量的线性运算

1. C 设 E, F 分别为 AD 和 A_1D_1 的中点. 对于 A, $\vec{OA} + \vec{OD} = 2\vec{OE}$ 与

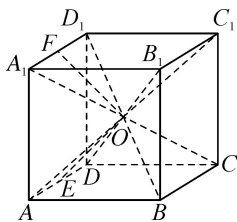
$\vec{OA}_1 + \vec{OD}_1 = 2\vec{OF}$ 不是一对相反向量, 错误; 对于 B, $\vec{OB} - \vec{OC}_1 = \vec{C}_1B$ 与

$\vec{OC} - \vec{OB}_1 = \vec{B}_1C$ 不是一对相反向量, 错误; 对于 C, $\vec{OA}_1 + \vec{OB}_1 + \vec{OC}_1 + \vec{OD}_1 = -\vec{OC} - \vec{OD} -$

$\vec{OA} - \vec{OB} = -(\vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OA} + \vec{OB})$ 与 $\vec{OD} + \vec{OC} + \vec{OA} + \vec{OB}$

是一对相反向量, 正确; 对于 D, $\vec{OC} - \vec{OA} = \vec{AC}$ 与 $\vec{OC}_1 - \vec{OA}_1 = \vec{A_1C_1}$ 不是一对相反向量, 是一对相等向量, 错误.

2. C 因为 O 为线段 AC 的中点, 所以 $\vec{AB} + \vec{AD} = 2\vec{AO}$, 所以 $\vec{OA}_1 + \vec{AD} + \vec{AB} = 2\vec{AO} + \vec{OA}_1 = \vec{AO} + \vec{AA}_1$. 因为在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $\vec{AO} = \vec{OC}$, $\vec{AA}_1 = \vec{CC}_1$, 所以 $\vec{AO} + \vec{AA}_1 = \vec{OC} + \vec{CC}_1 = \vec{OC}_1$, 即 $\vec{OA}_1 + \vec{AD} + \vec{AB} = \vec{OC}_1$.



方法总结 空间向量加法、减法运算的两个技巧

(1) 巧用相反向量: 向量的三角形法则是解决空间向量加法、减法运算的关键, 灵活运用相反向量可使向量首尾相接.

(2) 巧用平移: 利用三角形法则和平行四边形法则进行向量加、减法运算时, 务必注意和向量、差向量的方向, 必要时可采用空间向量的自由平移获得运算结果.

3. B 由 $\vec{AE} = \lambda\vec{AB}$, $\vec{AF} = \lambda\vec{AD}$, 得 $\vec{EF} = \vec{AF} - \vec{AE} = \lambda(\vec{AD} - \vec{AB}) = \lambda\vec{BD}$, 所以 $\vec{EF}, \vec{BD}$ 共线, 同理, 由 $\vec{CM} = \mu\vec{CB}$, $\vec{CN} = \mu\vec{CD}$, 得 $\vec{MN} = \mu\vec{BD}$, 所以 $\vec{MN}, \vec{BD}$ 共线, 所以 $\vec{EF}, \vec{MN}$ 共线, 即 $\vec{EF} \parallel \vec{MN}$.

方法总结 向量共线的判定及应用: 判断或证明两向量 $\vec{a}, \vec{b}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$) 共线, 就是寻找实数 λ , 使 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ 成立.

4. BD 对于 A, 零向量的方向是任意的, A 错误; B 正确; 对于 C, D, 长度相等、方向相同的两个向量为相等向量, 即同一向量, 所以 C 中向量长度可以相等, 只要方向不同即为不同向量, C 错误; D 符合定义, D 正确.

方法总结 (1) 判断有关向量的命题时, 要抓住向量的两个主要元素, 即长度和方向, 两者缺一不可.

(2) 要注意零向量的特殊性. 对于零向量, 我们应明确:

① 零向量不是没有方向, 它的方向是任意的;

② 零向量与任何向量都共线.

(3) 在空间中, 向量、向量的模、相等向量的概念和平面中向量的相关概念完全一致. 两个向量相等的充要条件是两个向量的方向相同、模相等. 两个向量互为相反向量的充要条件是模相等、方向相反.

5. $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AB} - \vec{CB} = \vec{OB} - \vec{CB} = \vec{BC} - \vec{BO} = \vec{OC}$.

6. -8 因为 $\vec{BC} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, $\vec{DC} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, 所以 $\vec{BD} = \vec{BC} + \vec{CD} = (\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) - (2\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = -\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$. 又因为 A, B, D 三点共线, 所以可设 $\vec{AB} = \lambda\vec{BD}$, 即 $2\vec{e}_1 + k\vec{e}_2 = \lambda(-\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2)$. 因为 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 不共线, 所以 $\begin{cases} 2 = -\lambda, \\ k = 4\lambda, \end{cases}$ 解得 $k = -8$.

方法总结 A, B, C 三点共线 $\Leftrightarrow$ 存在实数 λ , 使 $\vec{AB} = \lambda\vec{BC}$ 或 $\vec{AB} = \lambda\vec{AC}$.

7. D 如图所示, 由于 $AF = \frac{1}{2}EF$, 故

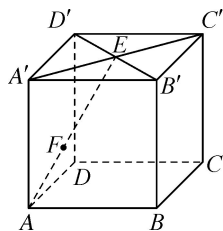
$\vec{AF} = \frac{1}{3}\vec{AE}$. 又 $\vec{AE} = \vec{AA'} + \vec{A'E}$,

$\vec{A'E} = \frac{1}{2}\vec{A'C'}$, $\vec{A'C'} = \vec{A'D'} + \vec{A'B'}$,

$\vec{A'D'} = \vec{AD}$, $\vec{A'B'} = \vec{AB}$, 所以 $\vec{AF} = \frac{1}{3}\vec{AE} = \frac{1}{3}(\vec{AA'} +$

$\frac{1}{2}\vec{A'C'}) = \frac{1}{3}\vec{AA'} + \frac{1}{6}(\vec{A'B'} + \vec{A'D'}) = \frac{1}{3}\vec{AA'} + \frac{1}{6}(\vec{AB} +$

$\vec{AD}) = \frac{1}{3}\vec{AA'} + \frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AD}$.



方法总结 (1) 利用数乘运算进行向量表示的注意事项:

① 数形结合: 利用数乘运算解题时, 要结合具体图形, 利用三角形法则、平行四边形法则, 将目标向量转化为已知向量.

② 明确目标: 在化简过程中要有目标意识, 巧妙利用线段的中点进行解题.

(2) 进行向量的线性运算, 实质上是在正确运用数乘运算律的基础上进行向量求和, 即通过作出向量, 运用平行四边形法则或三角形法则求和. 运算的关键是将相应的向量放到同一个三角形或平行四边形中.

8. D 若 $\vec{OP} \parallel \vec{PQ}$, 则存在唯一实数 λ , 使得 $\vec{OP} = \lambda\vec{PQ}$,

即 $\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \lambda(-5\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3)$, 所以 $\begin{cases} 1 = -5\lambda, \\ -2 = -6\lambda, \\ 1 = 4\lambda, \end{cases}$ 无解,

所以 $\vec{OP}, \vec{PQ}$ 不共线, 则 O, P, Q 三点不共线, 故 A 错误; 若 $\vec{QR} \parallel \vec{PQ}$, 则存在唯一实数 λ , 使得 $\vec{QR} = \lambda\vec{PQ}$, 即 $7\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 -$

$2\vec{e}_3 = \lambda(-5\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3)$, 所以 $\begin{cases} 7 = -5\lambda, \\ 2 = -6\lambda, \\ -2 = 4\lambda, \end{cases}$ 无解, 所以 $\vec{QR}, \vec{PQ}$

不共线, 则 P, Q, R 三点不共线, 故 B 错误; $\vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{PQ} =$

$-4\vec{e}_1 - 8\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$, 若 $\vec{OQ} \parallel \vec{QR}$, 则存在唯一实数 λ , 使得 $\vec{OQ} =$

$\lambda\vec{QR}$, 即 $-4\vec{e}_1 - 8\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 = \lambda(7\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3)$, 所以 $\begin{cases} -4 = 7\lambda, \\ -8 = 2\lambda, \\ 5 = -2\lambda, \end{cases}$ 无解, 所以 $\vec{OQ}, \vec{QR}$ 不共线, 则 O, Q, R 三点不共线,

故 C 错误; $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = 2\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 = 2\overrightarrow{OP}$, 所以 $\overrightarrow{OP} \parallel \overrightarrow{PR}$, 又 P 为两向量的公共端点, 所以 O, P, R 三点共线, 故 D 正确.

9. ABC 对于 A, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AC_1}$, 故 A 正确; 对于 B, $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC_1}$, 故 B 正确; 对于 C, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AC_1}$, 故 C 正确; 对于 D, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC_1} \neq \overrightarrow{AC_1}$, 故 D 错误.

10. ACD 对于 A, 当 $\lambda = 0$ 时, $\overrightarrow{BP} = \mu\overrightarrow{BB_1}$, $\mu \in [0, 1]$, 所以 $\overrightarrow{BP} \parallel \overrightarrow{BB_1}$, 则点 P 在棱 BB_1 上, 故 A 正确; 对于 B, 当 $\lambda = \mu$ 时, $\overrightarrow{BP} = \lambda(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1})$, $\lambda \in [0, 1]$, 即 $\overrightarrow{BP} = \lambda\overrightarrow{BC_1}$, 即 $\overrightarrow{BP} \parallel \overrightarrow{BC_1}$, 所以点 P 在线段 BC_1 上, 故 B 错误; 对于 C, 当 $\mu = 1$ 时, $\overrightarrow{BP} = \lambda\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}$, $\lambda \in [0, 1]$, 所以 $\lambda\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BB_1}$, 所以 $\overrightarrow{B_1P} = \lambda\overrightarrow{BC} = \lambda\overrightarrow{B_1C_1}$, 即 $\overrightarrow{B_1P} \parallel \overrightarrow{B_1C_1}$, 所以点 P 在棱 B_1C_1 上, 故 C 正确; 对于 D, 当 $\lambda + \mu = 1$ 时, $\overrightarrow{BP} = \lambda\overrightarrow{BC} + (1 - \lambda)\overrightarrow{BB_1}$, $\lambda \in [0, 1]$, 所以 $\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BB_1} = \lambda\overrightarrow{BC} - \lambda\overrightarrow{BB_1}$, 即 $\overrightarrow{B_1P} = \lambda\overrightarrow{B_1C}$, 即 $\overrightarrow{B_1P} \parallel \overrightarrow{B_1C}$, 所以点 P 在线段 B_1C 上, 故 D 正确.

11. $-\frac{1}{2}$ 由题意知, 存在实数 λ , 使得 $2k\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 = \lambda[\mathbf{e}_1 + 2(k+1)\mathbf{e}_2] = \lambda\mathbf{e}_1 + 2\lambda(k+1)\mathbf{e}_2$, 即 $\begin{cases} \lambda = 2k, \\ 2\lambda(k+1) = -1, \end{cases}$ 解

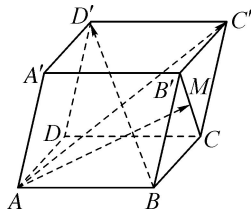
$$\begin{cases} \lambda = -1, \\ k = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

12. $\frac{1}{2}$ $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = (1 - \lambda)\overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{OC}$,

所以 $1 - \lambda = \frac{1}{2}$, 且 $\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{4}$, 解得 $\lambda = \frac{1}{2}$.

13. 解: (1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'}$.
(2) $\overrightarrow{DD'} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DD'} - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{DD'} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BD'}$.
(3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DD'} - \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB'}$. 设 M 是线段 CB' 的中点,

则 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DD'} - \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AM}$.
向量 $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{BD'}$, $\overrightarrow{AM}$ 如图所示.



14. (1) 解: 因为 $A'M = \frac{1}{2}MB$, 所以 $\overrightarrow{A'M} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'B} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$,

所以 $\overrightarrow{D'M} = \overrightarrow{D'A'} + \overrightarrow{A'M} = -\overrightarrow{AD} + \left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{3}\mathbf{a} - \mathbf{b} - \frac{1}{3}\mathbf{c}$.

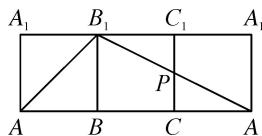
因为 $A'N = \frac{1}{3}NC$, 所以 $\overrightarrow{A'N} = \frac{1}{4}\overrightarrow{A'C} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$,

所以 $\overrightarrow{D'N} = \overrightarrow{D'A'} + \overrightarrow{A'N} = -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{4}\mathbf{a} - \frac{3}{4}\mathbf{b} - \frac{1}{4}\mathbf{c}$.

(2) 证明: 因为 $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{A'N} - \overrightarrow{A'M} = \frac{1}{4}\overrightarrow{A'C} - \frac{1}{3}\overrightarrow{A'B} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{A'C} - \overrightarrow{A'B}) - \frac{1}{12}\overrightarrow{A'B} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{12}\overrightarrow{A'B} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{A'B}\right)$, 且 $\overrightarrow{MD'} = \overrightarrow{A'D'} - \overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{A'D'} - \frac{1}{3}\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{A'B}$, 所以 $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{MD'}$.

又因为 M 为 $\overrightarrow{MN}$ 与 $\overrightarrow{MD'}$ 的公共起点, 所以 M, N, D' 三点共线.

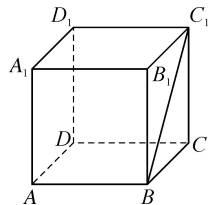
15. $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ 由题意得点 P 在线段 CC_1 上. 沿 AA_1 展开正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的侧面, 如图所示, 故 $\triangle AB_1P$ 的周长为 $AB_1 + AP + B_1P = \sqrt{2} + AP + B_1P \geq \sqrt{2} + \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{2} + \sqrt{5}$, 当且仅当 B_1, P, A 三点共线时, 取等号.



课时提优 2 6.1.2 空间向量的数量积

1. B 对于 A, 若 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ 且 $\mathbf{b} \parallel \mathbf{c}$, 不能得到 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{c}$, 故 A 错误; 对于 B, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, 故 B 正确; 对于 C, 若 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, 且 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, 则 $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}| |\mathbf{c}| \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle$, 则 $|\mathbf{b}| \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{c}| \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle$, 无法得出 $\mathbf{b} = \mathbf{c}$, 故 C 错误; 对于 D, $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ 表示与 $\mathbf{c}$ 共线的向量, 而 $\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ 表示与 $\mathbf{a}$ 共线的向量, 所以 $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ 与 $\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ 不一定相等, 故 D 错误.

2. D 在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 易知 $|\overrightarrow{AA_1}| = 2$, $|\overrightarrow{BC_1}| = 2\sqrt{2}$. 因为 $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ 与 $\overrightarrow{BC_1}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$, 所以 $\overrightarrow{AA_1}$ 与 $\overrightarrow{BC_1}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$,



所以 $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = |\overrightarrow{AA_1}| |\overrightarrow{BC_1}| \cos \frac{\pi}{4} = 2 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$.

方法总结 1. 空间向量数量积运算的两种方法

(1) 利用定义: 利用 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ 并结合运算律进行计算.

(2) 利用图形: 计算两个向量的数量积, 可先将各向量移到同一起点, 利用图形寻找夹角, 再代入数量积公式进行运算.

2. 求空间向量数量积的步骤

(1) 将各向量分解成已知模和夹角的向量的组合形式.

(2) 利用向量的运算律将数量积展开, 转化为已知模和夹角的向量的数量积.

(3) 代入 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ 求解.

3. C 由题设 $\mathbf{c} = -(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, 则 $\mathbf{c}^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} +$

$b^2=4+2\times 2\times 3\times \cos\langle a,b\rangle+9=7$,所以 $\cos\langle a,b\rangle=-\frac{1}{2}$. 又

$\langle a,b\rangle\in[0,\pi]$,所以 $\langle a,b\rangle=\frac{2\pi}{3}$,即 $\langle a,b\rangle=120^\circ$.

方法总结 求向量的夹角

由两个向量的数量积的定义得 $\cos\langle a,b\rangle=\frac{a\cdot b}{|a||b|}$,求 $\langle a,b\rangle$ 的大小,转化为求两个向量的数量积及两个向量的模,求出 $\langle a,b\rangle$ 的余弦值,进而得出 $\langle a,b\rangle$ 的大小.

4. BD 因为数量积不满足结合律,所以 A 错误;由数量积的性质可知 B 正确,C 中结论一定不成立,D 运算正确.

5. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{A_1C_1}$ 的夹角为 45° ,所以 $\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}}{|\overrightarrow{A_1C_1}|} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\langle\overrightarrow{A_1C_1},\overrightarrow{AB}\rangle = 1\times\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$,所以向量 $\overrightarrow{AB}$ 在向量 $\overrightarrow{A_1C_1}$ 方向上的投影向量是 $\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}}{|\overrightarrow{A_1C_1}|}\times\frac{\overrightarrow{A_1C_1}}{|\overrightarrow{A_1C_1}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\overrightarrow{A_1C_1}}{|\overrightarrow{A_1C_1}|}$,向量 $\overrightarrow{AB}$ 在向量 $\overrightarrow{A_1C_1}$ 方向上的投影向量的模是 $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\overrightarrow{A_1C_1}}{|\overrightarrow{A_1C_1}|}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

方法总结 在空间中,向量 a 向向量 b 投影,可以先将它们平移到同一个平面内,进而利用平面上向量的投影,得到与向量 b 共线的向量 c , $c=|a|\cos\langle a,b\rangle\frac{b}{|b|}$,则向量 c 称为向量 a 在向量 b 上的投影向量.同理向量 b 在向量 a 上的投影向量是 $|b|\cos\langle a,b\rangle\frac{a}{|a|}$.

6. $-\frac{3}{10}$ 因为 $m\perp n$,所以 $(a+b)\cdot(a+\lambda b)=0$,所以 $a^2+(\lambda+1)a\cdot b+\lambda b^2=0$,即 $18+(\lambda+1)\times 15\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+25\lambda=0$,故 $\lambda=-\frac{3}{10}$.

7. C 由题意可得 $a\cdot b=|a||b|\cos 60^\circ=1\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,所以 $|a+3b|=\sqrt{(a+3b)^2}=\sqrt{a^2+9b^2+6a\cdot b}=\sqrt{1+9+3}=\sqrt{13}$.

方法总结 求向量的模

(1) 求线段长度(距离):①取此线段对应的向量;②用其他已知夹角和模的向量表示该向量;③利用 $|a|=\sqrt{a^2}$,计算出 $|a|$,即得所求长度(距离).

(2) 线段长度的计算通常有两种方法:一是构造三角形,解三角形;二是向量法,计算相应向量的模,此时常需将待求向量转化为关系明确的向量(一般向几何体的棱上转化).

(3) 应牢记并能熟练应用的公式

$$|a+b|=\sqrt{(a+b)^2}=\sqrt{|a|^2+2a\cdot b+|b|^2}$$

$$|a+b+c|=\sqrt{(a+b+c)^2}=$$

$$\sqrt{|a|^2+|b|^2+|c|^2+2a\cdot c+2a\cdot b+2b\cdot c}.$$

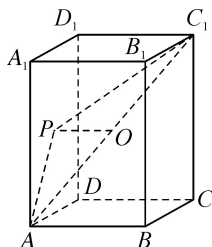
8. B 取 AC_1 的中点 O ,则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC_1}=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OC_1})=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{PO}^2-\overrightarrow{OA}^2$.当 P 为侧面中心时, $|\overrightarrow{PO}|_{\min}=\frac{1}{2}$, PO 的最大值为体对角线 AC_1 长的一半,

即 $|\overrightarrow{PO}|_{\max}=\frac{1}{2}\sqrt{1+1+2}=1$. 又

$|\overrightarrow{OA}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC_1}|=\frac{1}{2}\times 2=1$,所以

$\overrightarrow{PO}^2-\overrightarrow{OA}^2\in\left[-\frac{3}{4},0\right]$,即 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC_1}$

的取值范围是 $\left[-\frac{3}{4},0\right]$.



9. AD $\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AO}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,故 A 正

确; $\overrightarrow{EC_1}=\overrightarrow{EA_1}+\overrightarrow{A_1C_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$,故 B 错误;

$|\overrightarrow{EO}|^2=\left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)^2=\frac{4}{9}|\overrightarrow{AA_1}|^2+$

$\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{4}|\overrightarrow{AD}|^2-\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AD}+$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=4+1+1-\frac{2}{3}\times 3\times 2\times\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\times 3\times 2\times\frac{1}{2}+$

$\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\frac{1}{2}=3$,则 $|\overrightarrow{EO}|=\sqrt{3}$,故 C 错误; $\overrightarrow{EC_1}\cdot\overrightarrow{AA_1}=$

$\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{3}|\overrightarrow{AA_1}|^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}+$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{3}\times 9+3+3=9$,故 D 正确.

10. BD 因为 $BM=2A_1M$, $C_1N=2B_1N$,所以 $\overrightarrow{A_1M}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A_1B}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1})$, $\overrightarrow{A_1N}=\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1N}=\overrightarrow{AB}+$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$,所以 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{A_1N}-\overrightarrow{A_1M}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c$,故 A 错误. 因为 $|a|=$

$|b|=|c|=1$, $a\cdot b=0$, $a\cdot c=b\cdot c=\frac{1}{2}$,所以 $|\overrightarrow{MN}|^2=\frac{1}{9}(a+$

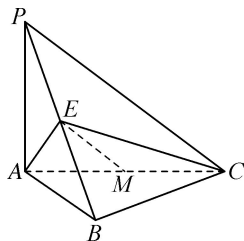
$b+c)^2=\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2+2a\cdot b+2a\cdot c+2b\cdot c)=$

$\frac{1}{9}(3+2)=\frac{5}{9}$,所以 $|\overrightarrow{MN}|=\frac{\sqrt{5}}{3}$,故 B 正确. 因为 $\overrightarrow{A_1B}=\overrightarrow{AB}-$

$\overrightarrow{AA_1}=a-c$, $\overrightarrow{A_1C_1}=b$,所以 $\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=(a-c)\cdot b=a\cdot$

$b-b \cdot c=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2} \neq 0$, 故 C 错误. 因为 $\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}=\mathbf{a}+\mathbf{c}$, $\overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}=\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{a}$, 所以 $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}=(\mathbf{a}+\mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{a})=\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}+\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}-\mathbf{a}^2+\mathbf{c}^2=\frac{1}{2}$. 因为 $|\overrightarrow{AB_1}|^2=(\mathbf{a}+\mathbf{c})^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{c}^2+2\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}=3$, 所以 $|\overrightarrow{AB_1}|=\sqrt{3}$. 又 $|\overrightarrow{BC_1}|^2=(\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{a})^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2-2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}-2\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}+2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}=3$, 所以 $|\overrightarrow{BC_1}|=\sqrt{3}$, 所以 $\cos \langle \overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{BC_1} \rangle=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}=\frac{1}{6}$, 故 D 正确.

11. $-\frac{1}{8}$ 连接 EC, 如图. 因为 PA $\perp$ 平面 ABC, BC $\subset$ 平面 ABC, 所以 PA $\perp$ BC. 又 AB $\perp$ BC, PA $\cap$ AB=A, PA, AB $\subset$ 平面 PAB, 所以 BC $\perp$ 平面 PAB. 又 PB $\subset$ 平面 PAB,



所以 BC $\perp$ PB. 因为 M 是 AC 的中点, 所以 $\overrightarrow{EM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{EA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC})$. 又 AE $\perp$ PB, $\overrightarrow{EP} \cdot \overrightarrow{EM}=\overrightarrow{EP} \cdot \left[\frac{1}{2}\overrightarrow{EA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC})\right]=\frac{1}{2}\overrightarrow{EP} \cdot \overrightarrow{EA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EP} \cdot \overrightarrow{EB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EP} \cdot \overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EP} \cdot \overrightarrow{EB}=-\frac{1}{2}|\overrightarrow{EP}| |\overrightarrow{EB}| \geq -\frac{1}{2}\left(\frac{|\overrightarrow{EP}|+|\overrightarrow{EB}|}{2}\right)^2=-\frac{1}{8}$, 当且仅当 $|\overrightarrow{EP}|=|\overrightarrow{EB}|=\frac{1}{2}$

时, 等号成立, 所以 $\overrightarrow{EP} \cdot \overrightarrow{EM}$ 的最小值为 $-\frac{1}{8}$.

12. 解: (1) 设 $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\mathbf{c}$,

则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}=|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos 60^\circ=\frac{1}{2}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}=|\mathbf{a}| |\mathbf{c}| \cos 60^\circ=1$,

$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}=|\mathbf{b}| |\mathbf{c}| \cos 60^\circ=1$.

因为 $\overrightarrow{AC}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$, 所以在平行四边形 AA_1C_1C 中, $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA_1}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$,

则 $|\overrightarrow{AC_1}|^2=\overrightarrow{AC_1}^2=(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2+2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}+2\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}+2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

$=1+1+4+2 \times \frac{1}{2}+2 \times 1+2 \times 1=11$,

所以 $|\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{11}$, 所以 AC_1 的长为 $\sqrt{11}$.

(2) 由 $\overrightarrow{AC}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$, 可得 $|\overrightarrow{AC}|^2=(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}=1+1+1=3$, 所以 $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3}$.

由 $\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{AD_1}-\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{a}$, 可得 $|\overrightarrow{BD_1}|^2=(\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{a})^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2-2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}-2\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}+2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}=1+1+4-1-2+2=5$,

所以 $|\overrightarrow{BD_1}|=\sqrt{5}$, $\cos \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD_1} \rangle=\frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD_1}}{|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{BD_1}|}=\frac{(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{a})}{\sqrt{3} \times \sqrt{5}}=\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}-\mathbf{a}^2+\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}{\sqrt{15}}=\frac{1-1+1+1}{\sqrt{15}}=\frac{2 \sqrt{15}}{15}$.

所以 BD_1 与 AC 所成角的余弦值为 $\frac{2 \sqrt{15}}{15}$.

13. (1) 证明: 设 $\overrightarrow{VA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{VB}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{VC}=\mathbf{c}$, 正四面体的棱长为 1.

因为 $\overrightarrow{VD}=\overrightarrow{VB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{VB}+\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{VB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{VA}-\overrightarrow{VB}+\overrightarrow{VC}-\overrightarrow{VB})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{VA}+\overrightarrow{VB}+\overrightarrow{VC})=\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$,

$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{VO}-\overrightarrow{VA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{VD}-\overrightarrow{VA}=\frac{1}{6}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})-\mathbf{a}=\frac{1}{6}(\mathbf{b}+\mathbf{c}-5\mathbf{a})$,

$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{VO}-\overrightarrow{VB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{VD}-\overrightarrow{VB}=\frac{1}{6}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})-\mathbf{b}=\frac{1}{6}(\mathbf{a}+\mathbf{c}-5\mathbf{b})$,

$\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{VO}-\overrightarrow{VC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{VD}-\overrightarrow{VC}=\frac{1}{6}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})-\mathbf{c}=\frac{1}{6}(\mathbf{a}+\mathbf{b}-5\mathbf{c})$,

所以 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BO}=\frac{1}{36}(\mathbf{b}+\mathbf{c}-5\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a}+\mathbf{c}-5\mathbf{b})=\frac{1}{36}(18\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}-9|\mathbf{a}|^2)=\frac{1}{36}\left(18 \times 1 \times 1 \times \cos \frac{\pi}{3}-9\right)=0$,

所以 $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{BO}$, 即 $AO \perp BO$.

同理, $AO \perp CO$, $BO \perp CO$, 所以 AO, BO, CO 两两垂直.

(2) 解: $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DV}+\overrightarrow{VM}=-\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})+\frac{1}{2}\mathbf{c}=\frac{1}{6}(-2\mathbf{a}-2\mathbf{b}+\mathbf{c})$,

所以 $|\overrightarrow{DM}|=\sqrt{\left[\frac{1}{6}(-2\mathbf{a}-2\mathbf{b}+\mathbf{c})\right]^2}=\sqrt{\frac{1}{36}(9\mathbf{a}^2+8\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}-4\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}-4\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})}=\sqrt{\frac{1}{36} \times 9}=\frac{1}{2}$.

又 $|\overrightarrow{AO}|=\sqrt{\left[\frac{1}{6}(\mathbf{b}+\mathbf{c}-5\mathbf{a})\right]^2}=\sqrt{\frac{1}{36}(27\mathbf{a}^2-18\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}=\sqrt{\frac{1}{36} \times (27-9)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AO}=\frac{1}{6}(-2\mathbf{a}-2\mathbf{b}+\mathbf{c}) \cdot \frac{1}{6}(\mathbf{b}+\mathbf{c}-5\mathbf{a})=\frac{1}{36} \times 9\mathbf{a}^2=\frac{1}{4}$,

所以 $\cos \langle \overrightarrow{DM}, \overrightarrow{AO} \rangle=\frac{\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AO}}{|\overrightarrow{DM}| |\overrightarrow{AO}|}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $\langle \overrightarrow{DM}, \overrightarrow{AO} \rangle \in [0, \pi]$, 所以 $\langle \overrightarrow{DM}, \overrightarrow{AO} \rangle=\frac{\pi}{4}$.

14. ACD 如图,设正方体的棱长为

1. 对于 A, 易知 $\langle \overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AC} \rangle = \langle \overrightarrow{D_1A}, \overrightarrow{D_1B_1} \rangle = \frac{\pi}{3}$, $|\overrightarrow{AB_1} \times \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB_1}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \sin \frac{\pi}{3} = (\sqrt{2})^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$,

$$|\overrightarrow{AD_1} \times \overrightarrow{D_1B_1}| = |\overrightarrow{AD_1}| \cdot |\overrightarrow{D_1B_1}| \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}, \text{ 所以 } |\overrightarrow{AB_1} \times \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD_1} \times \overrightarrow{D_1B_1}|, \text{ 所以 A 正确;}$$

对于 B, 由 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 构成右手系知, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ 方向相反, 即 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, 所以 B 错误; 对于 C, $A_1C_1 \perp B_1D_1$, $A_1C_1 \perp BB_1$, $B_1D_1 \cap BB_1 = B_1$, 则 $A_1C_1 \perp$ 平面 BB_1D_1D , 又 $BD_1 \subset$ 平面 BB_1D_1D , 所以 $BD_1 \perp A_1C_1$, 同理可得 $BD_1 \perp A_1D$, 再由右手系知, $\overrightarrow{A_1C_1} \times \overrightarrow{A_1D}$ 与 $\overrightarrow{BD_1}$ 共线, 所以 C 正确; 对于 D, $|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| |\overrightarrow{AC}| \cdot \sin \frac{\pi}{4} = 1 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$, $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{A_1A}$ 共线, $(\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{A_1A} = |\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{A_1A}| \cos \langle \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A_1A} \rangle = \cos \langle \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A_1A} \rangle = \cos 0 = 1$, 正方体体积为 1, 所以 D 正确.

课时提优 3 6.1.3 共面向量定理

1. D 对平面 ABC 外的任一点 O , 点 M, A, B, C 共面的充要条件是 $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, 且 $x + y + z = 1$. 对于 A, 由 $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, 得 $1 + 1 + 1 = 3 \neq 1$, 点 M, A, B, C 不共面, A 不符; 对于 B, 由 $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$, 得 $2 + (-1) + (-1) = 0 \neq 1$, 点 M, A, B, C 不共面, B 不符; 对于 C, 由 $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$, 得 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq 1$, 点 M, A, B, C 不共面, C 不符; 对于 D, 由 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$, 得 $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$, 点 M, A, B, C 共面, D 符合.

2. D 因为 $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$, 点 D 在 $\triangle ABC$ 确定的平面内, 所以 $x + y - 1 = 1$, 即 $x = 2 - y$, 所以 $x^2 + y^2 = (2 - y)^2 + y^2 = 2y^2 - 4y + 4 = 2(y - 1)^2 + 2 \geq 2$, 所以当 $y = 1$ 时, $x^2 + y^2$ 取最小值 2.

3. B 由题意知, $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不共线, $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = x(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + y(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = (x + y)\overrightarrow{OA} + (-x + y)\overrightarrow{OB} + (x + y)\overrightarrow{OC}$. 对于 A, 若 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 共面, 则存在唯一的有序实数对 (x, y) , 使 $\overrightarrow{OA} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$, 即 $\begin{cases} x + y = 1, \\ -x + y = 0, \end{cases}$ 该方程组无解, 故 A 错误; 对于 B, 若 $\overrightarrow{OB}$ 与 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 共面, 则存在唯一的有序实数对 (x, y) , 使 $\overrightarrow{OB} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$, 即 $\begin{cases} x + y = 0, \\ -x + y = 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}, \\ y = \frac{1}{2}, \end{cases}$ 即

$$\overrightarrow{OB} = -\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}, \overrightarrow{OB} \text{ 与 } \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ 共面, 故 B 正确; 对于 C, 若 } \overrightarrow{OC} \text{ 与 } \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ 共面, 则存在唯一的有序实数对 } (x, y), \text{ 使 } \overrightarrow{OC} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}, \text{ 即 } \begin{cases} x + y = 0, \\ -x + y = 0, \end{cases} \text{ 该方程组无解, 故 C 错误; 对于 D, 由 A, C 的判断知, D 错误.}$$

4. ACD 对于 A, $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AD}$, 一定有 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ 共面, 且有公共顶点 A, 故 A, B, C, D 四点共面, 故 A 正确; 对于 B, $\overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{DO} = 3\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$, $3 - 1 + 1 \neq 1$, 故 A, B, C, D 四点不共面, 故 B 错误; 对于 C, $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$, 可得 A, B, C 三点共线, 则 A, B, C, D 四点一定共面, 故 C 正确; 对于 D, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BO} + 3\overrightarrow{AO} - 5\overrightarrow{DO} = -\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OD}$, $-1 - 3 + 5 = 1$, 故 A, B, C, D 四点一定共面, 故 D 正确.

方法总结 证明空间向量共面、点共面的常用方法

(1) 证明空间三个向量共面的常用方法

① 证明其中一个空间向量可以表示成另两个空间向量的线性组合, 即若 $\mathbf{a} = x\mathbf{b} + y\mathbf{c}$, 则空间向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面;

② 寻找平面 α , 证明这些空间向量与平面 α 平行.

(2) 对于空间四点 P, M, A, B , 可通过证明下列结论成立来证明四点共面

$$\text{① } \overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB};$$

$$\text{② 对于空间任一点 } O, \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB};$$

$$\text{③ 对于空间任一点 } O, \overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} (x + y + z = 1);$$

$$\text{④ } \overrightarrow{PM} \parallel \overrightarrow{AB} (\text{或 } \overrightarrow{PA} \parallel \overrightarrow{MB}, \text{ 或 } \overrightarrow{PB} \parallel \overrightarrow{AM}).$$

5. 4 以 $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ 为空间一个基底. 因为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 三个向量共面, 所以存在 $x, y \in \mathbf{R}$, 使得 $\mathbf{a} = x\mathbf{b} + y\mathbf{c}$, 即 $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k} = x(-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) + y(7\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \lambda\mathbf{k})$, 整理得 $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k} = (-x + 7y)\mathbf{i} + (4x + 2y)\mathbf{j} + (-2x + \lambda y)\mathbf{k}$, 所以 $\begin{cases} -x + 7y = 1, \\ 4x + 2y = -1, \\ -2x + \lambda y = 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = -\frac{3}{10}, \\ y = \frac{1}{10}, \\ \lambda = 4. \end{cases}$

$$\text{6. } \frac{7}{15} \text{ 由 } P \text{ 与 } A, B, C \text{ 三点共面以及 } \overrightarrow{OP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \lambda\overrightarrow{OC}, \text{ 可得 } \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \lambda = 1, \text{ 所以 } \lambda = \frac{7}{15}.$$

7. C 若 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}$ 共线, 则可设 $\overrightarrow{MC} = \lambda\overrightarrow{MA} (\lambda \in \mathbf{R})$, 又 $\overrightarrow{MC} = 5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}$, 则 $\lambda\overrightarrow{MA} = 5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}$, 得 $\frac{5-\lambda}{3}\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$, 所以

$\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ 共线, 与条件矛盾, 故 A 错误; 同理若 $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ 共线, 则可设 $\overrightarrow{MC} = \lambda \overrightarrow{MB} (\lambda \in \mathbf{R})$, 又 $\overrightarrow{MC} = 5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}$, 则 $\lambda \overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}$, 得 $\frac{\lambda+3}{5}\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}$, 则 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ 共线, 与条件矛盾, 故 B 错误; 根据空间共面向量定理可知 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ 共面, 即 C 正确, D 错误.

8. B 由 A, B, C, D 四点共面, 可知 $x + 2y - 1 = 1$, 即 $x + 2y = 2$. 由 $x > 0, y > 0$ 得, $\frac{2x+y}{xy} = \frac{2}{y} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}(x + 2y)\left(\frac{2}{y} + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(5 + \frac{2x}{y} + \frac{2y}{x}\right) \geq \frac{1}{2}\left(5 + 2\sqrt{\frac{2x}{y} \cdot \frac{2y}{x}}\right) = \frac{9}{2}$, 当且仅当 $\frac{2x}{y} = \frac{2y}{x}$, 即 $x = y = \frac{2}{3}$ 时, 等号成立.

9. ABD 选项 A, 根据共面向量基本定理可知, p 与 x, y 共面, 所以选项 A 正确; 选项 B, 根据共面向量基本定理可知, $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ 共面, 由于它们有公共起点 M, 所以 M, P, A, B 共面, 所以选项 B 正确; 选项 C, 举反例说明, 若 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 是一个正方体同一个顶点 O 的三条棱所对应的向量, 则它们的和向量是以 O 为起点的体对角线向量, 而 $\overrightarrow{OD}$ 是该体对角线向量的相反向量, 此时 A, B, C, D 四个点显然不在同一个平面上, 所以选项 C 错误; 选项 D, 由 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{5}{6}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ 可得 $6\overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}$, 则 $\mathbf{0} = 3\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OP} + 5\overrightarrow{OB} - 5\overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OP} - 2\overrightarrow{OC}$, 即 $\mathbf{0} = 3\overrightarrow{PA} + 5\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{CP}$, 则 $\overrightarrow{PC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PA} + \frac{5}{2}\overrightarrow{PB}$, 此时与选项 B 一样, 可以判断四点共面, 所以选项 D 正确.

10. ACD 对于 A, 若 $AB \parallel CD$, 则一定有 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, 故 A 正确; 对于 B, 若 a, b 反向共线, 则 $||a| - |b|| = |a + b|$, 故 B 错误; 对于 C, $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}\right) + \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{OC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}\right)$, 即 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, 所以 P, A, B, C 四点共面, 故 C 正确; 对于 D, 当 $\lambda + \mu = 1$, 即 $\mu = 1 - \lambda$ 时, 可得 $\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC} = \lambda(\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC})$, 即 $\overrightarrow{CA} = \lambda\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 有公共起点 C, 所以 A, B, C 三点共线, 反之也成立, 即 $\lambda + \mu = 1$ 是 A, B, C 三点共线的充要条件, 故 D 正确.

11. $AB \subset$ 平面 CDE 或 $AB \parallel$ 平面 CDE 由 $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD} + \mu\overrightarrow{CE} (\lambda, \mu \in \mathbf{R})$ 及共面向量定理可知, 向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}$ 共面, 即直线 AB 可能在平面 CDE 内, 也可能和平面 CDE 平行.

12. $\frac{1}{6} \quad \frac{1}{3}$ 由点 A, B, C, D 共面, 得 $x + y = \frac{1}{2}$. 又由点 B, C, D, E 共面, 得 $2x + y = \frac{2}{3}$. 联立解得 $x = \frac{1}{6}, y = \frac{1}{3}$.

13. (1) 证明: 因为 $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$

$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1} \\ = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}) = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF},$$

所以 $\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}$ 共面且有公共起点 A,

所以 A, E, C₁, F 四点共面.

(2) 解: 因为 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}) - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DD_1} - \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BB_1} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}$, 所以 $x = -1, y = 1, z = \frac{1}{3}$, 所以 $x + y + z = \frac{1}{3}$.

14. (1) 证明: 如图, 延长 PE, PF, PG, PH 分别交 AB, BC, DC, AD 于点 M, N, Q, R.

因为 E, F, G, H 分别是所在三角形的重心,

所以 M, N, Q, R 分别为所在边的中点, 顺次连接点 M, N, Q, R 得到的四边形 MNQR 为平行四边形, 且有 $\overrightarrow{PE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PM}$,

$$\overrightarrow{PF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{PG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PR}.$$

因为四边形 MNQR 是平行四边形,

$$\text{所以 } \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MR} = (\overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM}) + (\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PM}) = \frac{3}{2}(\overrightarrow{PF} - \overrightarrow{PE}) + \frac{3}{2}(\overrightarrow{PH} - \overrightarrow{PE}) = \frac{3}{2}(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}).$$

$$\text{又 } \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PG} - \frac{3}{2}\overrightarrow{PE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{EG}, \text{ 所以 } \frac{3}{2}(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{EG}, \text{ 即 } \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EG},$$

所以 $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{EG}$ 共面且有公共起点 E, 所以 E, F, G, H 四点共面.

(2) 解: 平面 EFGH // 平面 ABCD, 证明如下:

$$\text{由 (1) 得 } \overrightarrow{MQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{EG},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{MQ} \parallel \overrightarrow{EG},$$

又 $MQ \subset$ 平面 ABCD, $EG \not\subset$ 平面 ABCD,

所以 $EG \parallel$ 平面 ABCD.

$$\text{又 } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PF} - \frac{3}{2}\overrightarrow{PE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{EF},$$

所以 $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{EF}$, 又 $MN \subset$ 平面 ABCD, $EF \not\subset$ 平面 ABCD, 所以 $EF \parallel$ 平面 ABCD.

又 $EG \cap EF = E, EF \subset$ 平面 EFGH, $EG \subset$ 平面 EFGH,

所以平面 EFGH // 平面 ABCD.

15. $\sqrt{3}$ 因为 $\overrightarrow{PQ} = x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} + (1-x-y)\overrightarrow{PC}$, 所以 $\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PC} = x\overrightarrow{PA} - x\overrightarrow{PC} + y\overrightarrow{PB} - y\overrightarrow{PC}$, 即 $\overrightarrow{CQ} = x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB}$, 所以 $\overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ 共面且有公共起点 C, 所以 A, B, C, Q 四点共面. 又 A, B, C 为底面圆周上三点, 所以 Q 为平面 ABC 上一点. 由题意知, $PO \perp$ 平面 ABC, 所以 $|\overrightarrow{PQ}| \geq |\overrightarrow{PO}|$. 又圆锥 PO 的轴

