江苏省苏州市2025届高三上学期开学考试

（满分150分，考试时间120分钟）

答案见P1

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知i是虚数单位，则$\frac{2-i}{i}=$（　　）

A. $1+2i$　　B. $1-2i$

C. $-1-2i$　　D. $-1+2i$

2. 已知集合$A=\{x|2\leqslant x<6\}$，$B=\{x|x^2-4x<0\}$，则$A\cap B=$（　　）

A. $(0,6)$

B. $(4,6)$

C. $[2,4)$

D. $(-\infty,0)\cup[2,+\infty)$

3. 将函数$f(x)=\sin x$的图象先向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度，再将所得图象上所有点的纵坐标保持不变，横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$，得到函数$y=g(x)$的图象，则$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=$（　　）

A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. 1

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. -1

4. 已知向量$\boldsymbol{a}=(1,-1)$，$\boldsymbol{b}=(x-2,x^2)$，则“$x=-2$”是“$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$”的（　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. “绿水青山就是金山银山”的理念深入人心，人民群众的生态环境获得感、幸福感、安全感不断提升.某校高一年级举行环保知识竞赛，共500人参加，若参赛学生成绩的第60百分位数是80分，则关于竞赛成绩不低于80分的人数的说法正确的是（　　）

A. 至少为300

B. 至少为200

C. 至多为300

D. 至多为200

6. 已知正四棱锥的侧面积是底面积的2倍，则该正四棱锥侧棱和底面所成角的余弦值为（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{15}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

7. 已知函数$f(x)=e^x+e(x-a-1)$（e为自然对数的底数），$g(x)=\ln(xe^x)-a$的零点分别为x_1，x_2，则$\frac{x_1}{x_2}$的最大值为（　　）

A. e　　B. $\frac{1}{e}$

C. 1　　D. $\frac{2}{e}$

8. 在平面直角坐标系xOy中，A，B为双曲线C：$x^2-y^2=1$右支上两点.若$|AB|=6$，则AB中点的横坐标的最小值为（　　）

A. $2\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{10}$　　C. $\frac{4\sqrt{5}}{3}$　　D. $\frac{16}{3}$

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.

9. 已知二项式$\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$的展开式，则（　　）

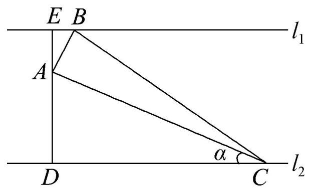
A. 二项式系数最大的项为第3项

B. 常数项为第5项

C. 展开式中含x^3的项为$60x^3$

D. 展开式中所有项的系数和为64

10. 如图,直线 $l_1 /\!/ l_2$,A 是 l_1, l_2 之间的一定点,点 A 到 l_1 的距离 $AE=1$,点 A 到 l_2 的距离 $AD=2$,点 B,C 分别在 l_1, l_2 上,设 $\angle ACD=\alpha$,则 ( )



A. 若 $\alpha=30^\circ$,$AB\perp AC$,则 $AB=2$

B. 若 $AB\perp AC$,则 $\triangle ABC$ 面积的最小值为 2

C. 若 $\triangle ABC$ 为等边三角形,则 $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

D. 若 $\angle BAC=60^\circ$,则 $\dfrac{1}{AB}+\dfrac{2}{AC}$ 的最大值为 1

11. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$,$\forall m,n\in\mathbf{N}^*$,有 $\dfrac{1}{a_{n+m}}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_m}$ 成立,则 ( )

A. $a_{2024}=\dfrac{1}{2024}$

B. $\exists n\in\mathbf{N}^*$,使得 $a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{n+1}^2>\dfrac{2}{3}$

C. $\forall n\in\mathbf{N}^*$,都有 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n>\ln(n+1)$

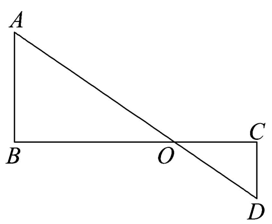
D. $\forall n\in\mathbf{N}^*$,都有 $a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{n+1}<\ln(n+1)$

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. 已知 $\triangle ABC$ 内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 若 $B=30^\circ$,$b=\sqrt{13}$,$c=2$,则 $a=$________.

13. 已知直线 $l:(2k+1)x-ky-1=0$(其中 k 为常数),圆 $O:x^2+y^2=8$,直线 l 与圆 O 交于 A,B 两点,则 AB 长的最小值为________.

14. 如图,线段 AD,BC 相交于点 O,且 AB,AD,BC,CD 的长度构成集合 $\{1,5,9,x\}$,$\angle ABO=\angle DCO=90^\circ$,则 x 的取值个数为________.



四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

2024 年 7 月 26 日,第 33 届夏季奥林匹克运动会在法国巴黎开幕,为了保证奥运赛事的顺利组织和进行,以及做好文化交流、信息咨询、观众引导等多方面的工作,每项比赛都需要若干名志愿者参加服务,每名志愿者可服务多个项目. 8 月 7 日,100 米跨栏、200 米、400 米、800 米、1500 米、5000 米比赛在法兰西体育场举行.

(1) 志愿者汤姆可以在以上 6 个项目中选择 3 个参加服务,求汤姆在选择 200 米服务的条件下,选择 1500 米服务的概率.

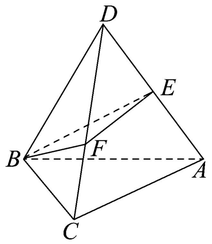
(2) 为了调查志愿者参加服务的情况,从仅参加 1 个项目服务的志愿者中抽取 10 名,其中有 6 名参加 5000 米服务,4 名参加 800 米服务. 现从这 10 名志愿者中再选 3 名做进一步调查,将其中参加 800 米服务的人数记作 X,求随机变量 X 的分布列和数学期望.

16.（本小题满分 15 分）

如图，在三棱锥 $D-ABC$ 中，$\triangle ABC$ 是以 AB 为斜边的等腰直角三角形，$\triangle ABD$ 是边长为 2 的正三角形，E 为 AD 的中点，F 为 DC 上一点，且平面 $BEF\perp$ 平面 ABD.

(1) 求证：$AD\perp$ 平面 BEF；

(2) 若平面 $ABC\perp$ 平面 ABD，求平面 BEF 与平面 BCD 夹角的余弦值.



17.（本小题满分 15 分）

已知函数 $f(x)=\sin x+e^{x}-4x$，e 为自然对数的底数，函数 $g(x)=x^{3}-ax+3$.

(1) 若 $f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线也是 $g(x)$ 的切线，求实数 a 的值；

(2) 求 $f(x)$ 在 $(-\pi,+\infty)$ 上的零点个数.

函数中的切线与
零点个数问题

18.（本小题满分 17 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$A$ 为椭圆的左顶点. 已知点 $P(1,2)$，且直线 PA 的斜率为$\frac{2}{3}$. 过点 $M(t,0)$作直线 l 交椭圆于 B，C 两点（点 B 在 x 轴上方，点 C 在 x 轴下方），设 PB，PC 两直线分别交椭圆于另一点 D，E（点 B，E 分别在线段 PD，PC 上）.

(1) 求椭圆的标准方程；

(2) 当 $t=1$ 时，若直线 l 的斜率小于零，且△PBC 的面积为 $\frac{8}{5}$，求证：$\angle BMD=\angle BPC$；

(3) 若存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{DC}$，求此时直线 DC 的斜率.

19.（本小题满分 17 分）

如果数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}^2\leqslant a_na_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$，那么称之为凸数列. 现给定函数 $f(x)$及凸数列$\{a_n\}$，它们满足以下两个条件：① $0<a_n<a_{n+1}$；② $\forall n\geqslant2$，有 $|f(a_n)-f(a_{n+1})|\leqslant\lambda^n|a_n-a_{n+1}|\leqslant|f(a_{n-1})-f(a_n)|$（$\lambda$ 为正常数）.

(1) 若数列$\{b_n\}$满足 $b_n>1$，$b_{n+1}=\frac{1}{2}\left(b_n+\frac{1}{b_n}\right)$，且数列$\{c_n\}$满足 $c_n=\ln\frac{b_n+1}{b_n-1}$，请判断$\{c_n\}$是否为凸数列，并说明理由；

(2) 若$|f(a_2)-f(a_3)|=2$，求证：$\sum\limits_{i=2}^{10}|a_{i+1}-a_i|>18$；

(3) 对任何大于等于 2 的正整数 i，j，且 $i\leqslant j$，求证：$|f(a_i)-f(a_j)|\leqslant|a_i-a_j|$.

八省联考（山西、河南、陕西、内蒙古、四川、云南、宁夏、青海 2025 年 1 月适应性测试）

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）

答案见 P17

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1\}$，$B=\{0,1,4\}$，则 $A\cap B=$ （　　）

A. $\{0\}$　　B. $\{1\}$

C. $\{0,1\}$　　D. $\{-1,0,1,4\}$

2. 函数 $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的最小正周期是 （　　）

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. π　　D. 2π

3. $|2-4\mathrm{i}|=$ （　　）

A. 2　　B. 4

C. $2\sqrt{5}$　　D. 6

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(0,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,0)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$ （　　）

A. 2　　B. 1

C. 0　　D. -1

5. 双曲线 $x^2-\frac{y^2}{9}=1$ 的渐近线方程为 （　　）

A. $y=\pm x$　　B. $y=\pm 2x$

C. $y=\pm 3x$　　D. $y=\pm 4x$

6. 底面直径和母线长均为 2 的圆锥的体积为（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$　　B. π

C. 2π　　D. 3π

7. 已知在$\triangle ABC$ 中，$BC=8$，$AC=10$，$\cos\angle BAC=\frac{3}{5}$，则$\triangle ABC$ 的面积为 （　　）

A. 6　　B. 8

C. 24　　D. 48

8. 已知函数 $f(x)=x|x-a|-2a^2$，若当 $x>2$ 时，$f(x)>0$，则实数 a 的取值范围是 （　　）

A. $(-\infty,1]$　　B. $[-2,1]$

C. $[-1,2]$　　D. $[-1,+\infty)$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 已知 $F(2,0)$是抛物线 $C:y^2=2px$ 的焦点，M 是抛物线C 上的点，O 为坐标原点，则 （　　）

A. $p=4$

B. $|MF|\geqslant|OF|$

C. 以点 M 为圆心且过点 F 的圆与抛物线C 的准线相切

D. 当$\angle OFM=120^\circ$时，$\triangle OFM$ 的面积为 $2\sqrt{3}$

10. 在人工神经网络中，单个神经元输入与输出的函数关系可以称为激励函数. 双曲正切函数是一种激励函数. 定义双曲正弦函数 $\sinh x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$，双曲余弦函数 $\cosh x=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$，双曲正切函数 $\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}$，则 （　　）

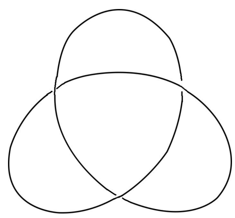
A. 双曲正弦函数是增函数

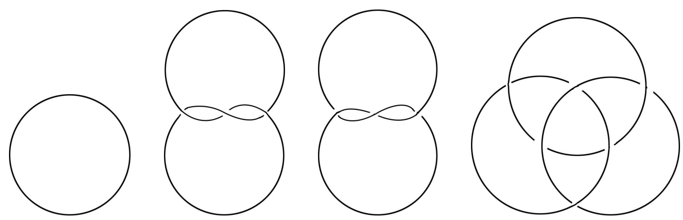
B. 双曲余弦函数是增函数

C. 双曲正切函数是增函数

D. $\tanh(x+y)=\frac{\tanh x+\tanh y}{1+\tanh x\tanh y}$

11. 下面四个绳结中，不能无损伤地变为图中的绳结的有 （　　）





A　　B　　C　　D

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. 已知函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$,若 $f(\ln 2)\cdot f(\ln 4)=8$,则 $a=$________.

13. 有 8 张卡片,分别标有数字 1,2,3,4,5,6,7,8,现从这 8 张卡片中随机抽出 3 张,则抽出的 3 张卡片上的数字之和与其余 5 张卡片上的数字之和相等的概率为________.

14. 已知曲线 $C:y=x^3-\dfrac{2}{x}$,直线 l_1,l_2 均过坐标原点 O,l_1 和曲线 C 交于 M,N 两点,l_2 和曲线 C 交于 P,Q 两点. 若 $\triangle OPM$ 的面积为 $\sqrt{2}$,则 $\triangle MNQ$ 的面积为________.

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

为考察某种药物 A 对预防疾病 B 的效果,进行了动物(单位:只)试验,得到如下列联表:

药物	疾病		合计
	未患病	患病	
未服用	100	80	s
服用	150	70	220
合计	250	t	400

(1) 求 s,t.

(2) 记未服用药物 A 的动物患疾病 B 的概率为 P,给出 P 的估计值.

(3) 根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验,能否认为药物 A 对预防疾病 B 有效?

附:$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

α	0.050	0.010	0.001
x_α	3.841	6.635	10.828

16.（本小题满分 15 分）

已知在数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{3a_n}{a_n+2}$.

（1）求证：数列$\left\{1-\dfrac{1}{a_n}\right\}$为等比数列；

（2）求$\{a_n\}$的通项公式；

（3）令 $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，求证：$b_n<b_{n+1}<1$.

17.（本小题满分 15 分）

已知函数 $f(x)=a\ln x+\dfrac{b}{x}-x$.

（1）设 $a=1$，$b=-2$，求曲线 $y=f(x)$的斜率为 2 的切线方程；

（2）若 $x=1$ 是 $f(x)$的极小值点，求实数 b 的取值范围.

18.（本小题满分 17 分）

已知椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$，左、右焦点分别为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 已知点 $M_0(1,4)$，求证：线段 F_1M_0 的垂直平分线与 C 恰有一个公共点；

(3) 设 M 是坐标平面上的动点，且线段 F_1M 的垂直平分线与椭圆 C 恰有一个公共点，求证 M 的轨迹为圆，并求该圆的方程.

椭圆与圆的综合

19.（本小题满分 17 分）

在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=AC=CD=1$，$\angle ADC=30°$，$\angle DAB=120°$，将$\triangle ACD$ 沿 AC 翻折至$\triangle ACP$，其中 P 为动点.

(1) 设 $PC\perp AB$，三棱锥 $P-ABC$ 的各个顶点都在球 O 的球面上.

① 求证：平面 $PAC\perp$平面 ABC；

② 求球 O 的半径.

(2) 求二面角 $A-CP-B$ 的余弦值的最小值.

江苏省南京市、盐城市2025届高三第一次模拟考试

（满分150分，考试时间120分钟）

答案见P92

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x\mid x^2-4\leqslant 0\}$，$B=\{x\mid x+a\leqslant 0\}$. 若 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是 （　　）

A. $(-\infty,2)$　　B. $(-\infty,2]$

C. $(-\infty,-2)$　　D. $(-\infty,-2]$

2. 已知复数 z 满足 $\dfrac{1}{z+\mathrm{i}}=\mathrm{i}$（i为虚数单位），则 $|z|=$ （　　）

A. 4　　B. 2

C. 1　　D. $\dfrac{1}{2}$

3. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 均为单位向量. 若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 夹角的大小是 （　　）

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$

C. $\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $\dfrac{5\pi}{6}$

4. 某项比赛共有10个评委评分，若去掉一个最高分与一个最低分，则与原始数据相比，一定不变的是 （　　）

A. 极差　　B. 第45百分位数

C. 平均数　　D. 众数

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，公比为2，且 $a_1+a_2=3$. 若 $a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{k+9}=2^{14}-2^4$，则正整数 k 的值是 （　　）

A. 4　　B. 5

C. 6　　D. 7

6. 在锐角三角形 ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c. 若 $b-2c=a\cos C-2a\cos B$，则 $\dfrac{c}{b}=$ （　　）

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{1}{2}$

C. 1　　D. 2

7. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点、右顶点分别为 F，A，过点 F 且倾斜角为 $\dfrac{\pi}{6}$ 的直线分别交双曲线 C 的两条渐近线于点 M，N. 若 $\triangle AMN$ 为等边三角形，则双曲线 C 的渐近线方程是 （　　）

A. $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

B. $y=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x$

C. $y=\pm\sqrt{3}x$

D. $y=\pm\dfrac{4\sqrt{3}}{3}x$

8. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{a^{2x}+1}-ax^3$，$a>1$，则关于 x 的不等式 $f(x^2)+f(5x-6)>1$ 的解集是 （　　）

A. $(-6,1)$　　B. $(2,3)$

C. $(-\infty,1)$　　D. $(2,+\infty)$

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.

9. 已知 $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{4}$，$\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{3}$，则 （　　）

A. $\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{12}$

B. $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{6}$

C. $\tan\alpha\tan\beta=-\dfrac{1}{3}$

D. $\sin 2\alpha\sin 2\beta=\dfrac{1}{12}$

10. 在边长为 2 的菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，将菱形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折成四面体 $A'BCD$，使得 $\angle A'BC=\frac{\pi}{2}$，则（　　）

A. 直线 $A'C$ 与直线 BD 所成的角为 $\frac{\pi}{2}$

B. 直线 $A'C$ 与平面 BCD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

C. 四面体 $A'BCD$ 的体积为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

D. 四面体 $A'BCD$ 外接球的表面积为 8π

11. 已知函数 $f(x)$ 满足对任意 $x,y\in\mathbf{R}$，$xf(y)+yf(x)=f(xy)$，且当 $0<x<1$ 时，$f(x)>0$，则下列说法正确的是（　　）

A. $f(0)+f(1)=0$

B. $f(x)$ 为偶函数

C. 当 $|x|>1$ 时，$xf(x)<0$

D. $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 若函数 $f(x)=\sin x+a\cos x$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称，则实数 a 的值是________.

13. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的上顶点为 A，直线 l：$y=kx+m$ 交椭圆 C 于 M，N 两点. 若 $\triangle AMN$ 的重心为 $\left(\frac{1}{2},0\right)$，则实数 k 的值是________.

14. 将 9 个互不相同的向量 $\boldsymbol{a}_i=(x_i,y_i)$，$x_i,y_i\in\{-1,0,1\}$，$i=1,2,\cdots,9$，填入 3×3 的方格中，使得每行、每列的三个向量的和都相等，则不同的填法种数是________.

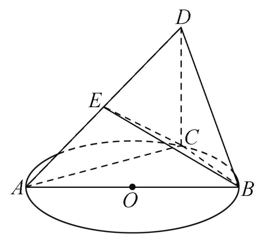
四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）

如图，$\triangle ABC$ 内接于圆 O，AB 为圆 O 的直径，$CD\perp$ 平面 ABC，E 为线段 AD 的中点.

（1）求证：平面 $BCE\perp$ 平面 ACD；

（2）若 $AB=\sqrt{5}$，$BC=1$，$CD=2\sqrt{3}$，求平面 BCE 与平面 BDE 所成锐二面角的余弦值.



16.（本小题满分 15 分）

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 满足$\dfrac{S_n}{n}=a_n+(1-n)t$，$n\in\mathbf{N}^*$，$t$ 为常数，且 $a_2=a_1+2$.

(1) 求 t 的值；

(2) 求证：$\{a_n\}$为等差数列；

(3) 若 $n^2<S_n<(n+1)^2$，$n\in\mathbf{N}^*$，求 a_1 的取值范围.

17.（本小题满分 15 分）

甲、乙两人组队准备参加一项挑战比赛，该挑战比赛共分 $n(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2)$关，规则如下：首先某队员先上场从第一关开始挑战，若挑战成功，则该队员继续挑战下一关；否则该队员被淘汰，并由第二名队员接力，从上一名队员失败的关卡开始继续挑战；当两名队员均被淘汰或者 n 关都挑战成功时，挑战比赛结束. 若甲每一关挑战成功的概率均为 $p(0<p<1)$，乙每一关挑战成功的概率均为 $q(0<q<1)$，且甲、乙两人每关挑战成功与否互不影响，每关挑战成功与否也互不影响.

(1) 已知甲先上场，$p=\dfrac{1}{2}$，$q=\dfrac{1}{3}$，$n=2$.

① 求挑战没有一关成功的概率；

② 设 X 为挑战比赛结束时挑战成功的关卡数，求 $E(X)$.

(2) 如果 n 关都挑战成功，那么比赛挑战成功. 试判断甲先上场与乙先上场比赛，挑战成功的概率是否相同，并说明理由.

18.（本小题满分 17 分）

已知函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{x}+a\sin x$，$a\in\mathbf{R}$.

(1) 当 $a=0$ 时，求证：$\dfrac{f(x)}{x}>x+1$；

(2) 若 $f(x)>0$ 对于 $x\in(0,\pi)$ 恒成立，求 a 的取值范围；

(3) 若存在 $x_1,x_2\in(0,\pi)$，使得 $f(x_1)=f'(x_2)=0$，求证：$x_1<2x_2$.

极值点偏移

19.（本小题满分 17 分）

设 M 是由直线构成的集合，对于曲线 C，若 C 上任意一点处的切线均在 M 中，且 M 中的任意一条直线都是曲线 C 上某点处的切线，则称 C 为 M 的包络曲线.

(1) 已知圆 C_1：$x^2+y^2=1$ 为 M_1 的包络曲线，判断直线 l：$x\sin\theta-y\cos\theta=1$（$\theta$ 为常数，$\theta\in\mathbf{R}$）与集合 M_1 的关系.

(2) 已知 M_2 的包络曲线为 C_2：$x^2=4y$，直线 l_1，$l_2\in M_2$. 设 l_1，l_2 与 C_2 的公共点分别为 P，Q，记 $l_1\cap l_2=A$，C_2 的焦点为 F.

① 求证：$|FA|$ 是 $|FP|$，$|FQ|$ 的等比中项；

② 若点 A 在圆 $x^2+(y+1)^2=1$ 上，求 $\dfrac{|FA|}{|FP|}$ 的最大值.