



省时高效得高分

真题 分类卷

数学

- ★以5年真题为主，按模块分类查漏补缺，熟悉命题规律。
- ★以基础题和中档题为主，适合在高二升高三暑假使用，也可在一轮期间弥补短板。

Contents
目录

专题 1	集合、常用逻辑用语与不等式	1
专题 2	函数的概念、图象与性质	3
专题 3	幂指对函数及函数的综合应用	5
专题 4	导数及其应用	7
专题 5	三角函数与三角变换	9
专题 6	解三角形及其应用	11
专题 7	平面向量与复数	13
专题 8	等差、等比数列及其综合问题	15
专题 9	空间向量与立体几何	17
专题 10	直线与圆	19
专题 11	圆锥曲线与方程	21
专题 12	计数原理、概率及其分布、统计与统计案例	23
答案与解析		26

专题1 集合、常用逻辑用语与不等式

答案见 P26

一、选择题: 本题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. (2024 新高考卷 I, 1) 已知集合 $A = \{x | -5 < x^3 < 5\}$, $B = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 A. $\{-1, 0\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{-3, -1, 0\}$ D. $\{-1, 0, 2\}$
2. (2024 全国甲卷理科, 2) 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $B = \{x | \sqrt{x} \in A\}$, 则 $\complement_A(A \cap B) =$ ()
 A. $\{1, 4, 9\}$ B. $\{3, 4, 9\}$ C. $\{1, 2, 3\}$ D. $\{2, 3, 5\}$
3. (2024 新高考卷 II, 2) 已知命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, |x+1| > 1$; 命题 $q: \exists x > 0, x^3 = x$, 则 ()
 A. p 和 q 都是真命题 B. $\neg p$ 和 q 都是真命题
 C. p 和 $\neg q$ 都是真命题 D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题
4. (2024 全国甲卷理科, 9) 已知向量 $\mathbf{a} = (x+1, x)$, $\mathbf{b} = (x, 2)$, 则 ()
 A. “ $x = -3$ ”是“ $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ ”的必要条件 B. “ $x = -3$ ”是“ $\mathbf{a} // \mathbf{b}$ ”的必要条件
 C. “ $x = 0$ ”是“ $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ ”的充分条件 D. “ $x = -1 + \sqrt{3}$ ”是“ $\mathbf{a} // \mathbf{b}$ ”的充分条件
5. (2023 新高考卷 I, 7) 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 设甲: $\{a_n\}$ 为等差数列, 乙: $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 则 ()
 A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件 B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件
 C. 甲是乙的充要条件 D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件
6. (2021 全国乙卷文, 8) 下列函数中最小值为 4 的是 ()
 A. $y = x^2 + 2x + 4$ B. $y = |\sin x| + \frac{4}{|\sin x|}$ C. $y = 2^x + 2^{2-x}$ D. $y = \ln x + \frac{4}{\ln x}$

二、选择题: 本题共 2 小题, 每小题 6 分, 共 12 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

7. (2022 全国甲卷理, 3 改编) 设全集 $U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, 集合 $A = \{-1, 2\}$, $B = \{x | x^2 - 4x + 3 = 0\}$, 记 $M = \complement_U(A \cup B)$, 下列说法正确的是 ()
 A. $-2 \in M$ B. $-1 \in M$ C. $0 \in M$ D. $3 \in M$
8. (2020 新高考卷 I, 11) 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = 1$, 则 ()
 A. $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$ B. $2^{a-b} > \frac{1}{2}$ C. $\log_2 a + \log_2 b \geq -2$ D. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

9. 若“ $x = \alpha$ ”是“ $\sin x + \cos x > 1$ ”的一个充分条件, 则 α 的一个可能值是_____.
10. 已知不等式 $ax^2 - x + 6 > 0$ 的解集为 $\{x | -3 < x < 2\}$, 则不等式 $x^2 + ax - 6 < 0$ 的解集为_____.
11. 已知 $1 < a < 4$, 则 $\frac{a}{4-a} + \frac{1}{a-1}$ 的最小值是_____.

四、解答题: 本题共 3 小题, 共 43 分. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

12. (本小题满分 13 分)

设集合 $A = \left\{x \mid \frac{2x-4}{x-5} \leq 1\right\}$, $B = \{x | x^2 - 2mx + m^2 - 1 \leq 0\}$, $C = \{x | x^2 - ax - a + 1 \geq 0\}$.

- (1) 若 $A \cup B = A$, 求实数 m 的取值范围;
- (2) 若 $A \cap C = A$, 求实数 a 的取值范围.

13. (本小题满分 15 分)

设 $y = ax^2 + (1-a)x + a - 2$.

- (1) 若 $a = -2$, 求 $y = ax^2 + (1-a)x + a - 2 \leq 0$ 的解集;
- (2) 若不等式 $y \geq -2$ 对一切实数 x 恒成立, 求实数 a 的取值范围;
- (3) 解关于 x 的不等式: $ax^2 + (1-a)x + a - 2 < a - 1 (a \in \mathbf{R})$.

14. (本小题满分 15 分)

某校地势较低, 一遇到雨水天气校园内会有大量积水, 不但不方便师生出行, 还存在严重的安全问题. 为此学校决定利用原水池改建一个深 3 米、底面面积 16 平方米的长方体蓄水池. 不但能解决积水问题, 同时还可以利用蓄水灌溉学校植被. 改建及蓄水池盖儿固定费用 800 元, 由招标公司承担. 现对水池内部地面及四周墙面铺设公开招标. 甲工程队给出的报价如下: 四周墙面每平方米 150 元, 地面每平方米 400 元. 设泳池宽为 x 米 ($2 \leq x \leq 6$).

- (1) 当宽为多少时, 甲工程队报价最低? 请求出最低报价.
- (2) 现有乙工程队也要参与竞标, 其给出的整体报价为 $\frac{900a(x+2)}{x}$ 元 ($a > 0$) (整体报价中含固定费用). 若无论宽为多少米, 乙工程队都能竞标成功, 试求 a 的取值范围.

专题2 函数的概念、图象与性质

答案见 P27

一、选择题:本题共6小题,每小题5分,共30分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. (2021 全国甲卷文,4)下列函数为增函数的是 ()
- A. $f(x) = -x$ B. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$
C. $f(x) = x^2$ D. $f(x) = \sqrt[3]{x}$
2. (2021 全国乙卷理,4)设函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 则下列函数为奇函数的是 ()
- A. $f(x-1)-1$ B. $f(x-1)+1$
C. $f(x+1)-1$ D. $f(x+1)+1$
3. (2023 新高考卷 I,4)设函数 $f(x) = 2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减, 则 a 的取值范围是 ()
- A. $(-\infty, -2]$ B. $[-2, 0)$
C. $(0, 2]$ D. $[2, +\infty)$
4. (2023 全国乙卷理,4)已知 $f(x) = \frac{xe^x}{e^{ax}-1}$ 为偶函数, 则 $a =$ ()
- A. -2 B. -1
C. 1 D. 2
5. (2024 新高考卷 I,6)已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2-2ax-a, & x < 0, \\ e^x + \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 则 a 的取值范围是 ()
- A. $(-\infty, 0]$ B. $[-1, 0]$
C. $[-1, 1]$ D. $[0, +\infty)$
6. (2024 新高考卷 II,6)设函数 $f(x) = a(x+1)^2 - 1$, $g(x) = \cos x + 2ax$. 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 恰有一个交点, 则 $a =$ ()
- A. -1 B. $\frac{1}{2}$
C. 1 D. 2

二、选择题:本题共2小题,每小题6分,共12分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得6分,部分选对的得部分分,有选错的得0分.

7. (2020 全国卷 II 理,9 改编)设函数 $f(x) = \ln|2x+1| - \ln|2x-1|$, 则 $f(x)$ ()
- A. 在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增 B. 在 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增
C. 在 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增 D. 在 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减
8. (2023 新高考卷 I,11)已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y)$, 则 ()
- A. $f(0) = 0$ B. $f(1) = 0$
C. $f(x)$ 是偶函数 D. $x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

三、填空题:本题共3小题,每小题5分,共15分.

9. (2023 全国甲卷理,13)若 $y = (x-1)^2 + ax + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 为偶函数, 则 $a =$ _____.
10. (2022 全国乙卷文,16)若 $f(x) = \ln\left|a + \frac{1}{1-x}\right| + b$ 是奇函数, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.
11. (2021 新高考卷 I,13)已知函数 $f(x) = x^3(a \cdot 2^x - 2^{-x})$ 是偶函数, 则 $a =$ _____.

四、解答题:本题共 3 小题,共 43 分.解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

12. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = \frac{2^x + a}{2^x + 1} (a \in \mathbf{R})$.

- (1) 当 $a < 1$ 时,利用单调性定义证明 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;
- (2) 若存在 $x_1 < 0 < x_2$,使 $f(x_1) + f(x_2) = 1$,求实数 a 的取值范围.

13. (本小题满分 15 分)

已知 $f(x), g(x)$ 分别是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数和奇函数,且 $f(x) + g(x) = e^x$.

- (1) 求函数 $f(x), g(x)$ 的解析式;
- (2) 设 $a > 0$,若关于 x 的不等式 $2f(x) - a[g(x)]^2 \geq 0$ 在区间 $(0, \ln 3)$ 上恒成立,求实数 a 的取值范围.

14. (本小题满分 15 分)

已知函数 $f(x) = \log_2(4^x + 1) + kx$ 为偶函数.

- (1) 求实数 k 的值;
- (2) 解关于 m 的不等式: $f(2m+1) > f(m-1)$;
- (3) 设 $g(x) = \log_2(a \cdot 2^x + a) (a \neq 0)$,若函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 有 2 个零点,求实数 a 的取值范围.

答案与解析

专题1 集合、常用逻辑用语与不等式

1. A 由题意, $A = \{x \mid -\sqrt[3]{5} < x < \sqrt[3]{5}\}$, 则 $A \cap B = \{-1, 0\}$.

2. D 因为 $B = \{x \mid \sqrt{x} \in A\} = \{1, 4, 9, 16, 25, 81\}$, 所以 $A \cap B = \{1, 4, 9\}$, 故 $\complement_A(A \cap B) = \{2, 3, 5\}$.

3. B 对于命题 p , 取 $x = -1$, 则有 $|x+1| = 0 < 1$, 故 p 是假命题, $\neg p$ 是真命题; 对于命题 q , 取 $x = 1$, 则有 $x^3 = x = 1$, 故 q 是真命题, $\neg q$ 是假命题. 综上, $\neg p$ 和 q 都是真命题.

4. C $a \perp b$ 的充分条件是 $a \cdot b = 0$, 即 $x \cdot (x+1) + 2x = 0$, 解得 $x = 0$ 或 $x = -3$, 故 A 错误, C 正确; $a \parallel b$ 的充要条件为 $2(x+1) = x^2$, 解得 $x = 1 \pm \sqrt{3}$, 故 B, D 错误.

5. C 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, 设公差为 d , 则 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$, $\frac{S_n}{n} = a_1 + \frac{n-1}{2}d$, 则 $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = \frac{d}{2}$, 故甲是乙的充分条件. 若 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 设公差为 d' , 则 $\frac{S_n}{n} = S_1 + (n-1)d'$, 则 $S_n = nS_1 + n(n-1)d'$, 当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = (n-1)S_1 + (n-1)(n-2)d'$, 两式相减得 $a_n = a_1 + (n-1) \cdot 2d'$, 上式对 $n=1$ 也成立, 故 $a_n = a_1 + (n-1) \cdot 2d'$, $n \in \mathbf{N}^*$, 则 $a_{n+1} - a_n = 2d'$, 所以 $\{a_n\}$ 为等差数列, 故甲是乙的必要条件, 所以甲是乙的充要条件.

解后反思 判断数列 $\{a_n\}$ 是等差数列的常用方法有以下四种: ①定义法: 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $a_{n+1} - a_n$ 是同一常数. ②等差中项法: 对任意 $n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$, 满足 $2a_n = a_{n+1} + a_{n-1}$. ③通项公式法: 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 满足 $a_n = pn + q$ (p, q 为常数). ④前 n 项和公式法: 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 满足 $S_n = An^2 + Bn$ (A, B 为常数). 其中③④两种方法, 适用于小题, 在求解中, 较为快捷. 本题中, 在判定必要条件时, $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 可以直接设为 $\frac{S_n}{n} = kn + b$, 则 $S_n = kn^2 + bn$, 就可以得到 $\{a_n\}$ 为等差数列, 避免了烦琐的计算.

6. C 函数 $y = x + \frac{4}{x}$ 在 $(-\infty, -2), (2, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-2, 0), (0, 2)$ 上单调递减. 对于 A, $y = (x+1)^2 + 3 \geq 3$, 即最小值为 3, 故 A 不符合; 对于 B, $0 < |\sin x| \leq 1$, 当 $|\sin x| = 1$ 时, $y_{\min} = 5$, 故 B 不符合; 对于 C, $y = 2^x + \frac{4}{2^x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot \frac{4}{2^x}} = 4$, 当且仅当 $2^x = \frac{4}{2^x}$, 即 $x = 1$ 时, 取等号, 即最小值为 4, 故 C 符合; 对于 D, $\ln x \in \mathbf{R}, \ln x \neq 0$, 故该函数无最小值, 故 D 不符合.

7. AC 由 $B = \{1, 3\}$ 得 $A \cup B = \{-1, 1, 2, 3\}$, 从而 $M = \complement_U(A \cup B) = \{-2, 0\}$.

8. ABD 因为 $a^2 + b^2 \geq 2ab$, 所以 $2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2 = 1$, 所以 $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$, 故 A 正确; $2^{a-b} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^{a-b} > 2^{-1}$, 即 $a > b-1$, 显然成立, 故 B 正确; $\log_2 a + \log_2 b \geq -2$, 即 $ab \geq$

$\frac{1}{4}$, 又 $a+b=1 \geq 2\sqrt{ab}$, 所以 $ab \leq \frac{1}{4}$, 故 C 错误; 因为 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a+b+2\sqrt{ab} \leq 2(a+b) = 2$, 所以 $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}$, 故 D 正确.

9. $\frac{\pi}{4}$ (只需满足 $\alpha \in (2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}) (k \in \mathbf{Z})$ 即可) 由 $\sin x + \cos x > 1$, 可得 $\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) > 1$, 则 $\sin(x + \frac{\pi}{4}) > \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $2k\pi + \frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < 2k\pi + \frac{3\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $2k\pi < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$. 因为“ $x = \alpha$ ”是“ $\sin x + \cos x > 1$ ”的一个充分条件, 所以 α 的一个可能取值为 $\frac{\pi}{4}$ (只需满足 $\alpha \in (2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}) (k \in \mathbf{Z})$ 即可).

10. $(-2, 3)$ 因为不等式 $ax^2 - x + 6 > 0$ 的解集为 $\{x \mid -3 < x < 2\}$, 所以 $a < 0$ 且方程 $ax^2 - x + 6 = 0$ 的解为 $-3, 2$, 则 $\frac{1}{a} = -1$, 所以 $a = -1$, 则不等式 $x^2 + ax - 6 < 0$ 即为不等式 $x^2 - x - 6 < 0$, 解得 $-2 < x < 3$, 即不等式 $x^2 + ax - 6 < 0$ 的解集为 $(-2, 3)$.

11. 2 解法 1 (分离常数+常数代换) 因为 $1 < a < 4$, 所以 $4-a > 0, a-1 > 0$, 所以 $\frac{a}{4-a} + \frac{1}{a-1} = \frac{4}{4-a} + \frac{1}{a-1} - 1 = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{4-a} + \frac{1}{a-1} \right) (4-a+a-1) - 1 = \frac{1}{3} \left[5 + \frac{4(a-1)}{4-a} + \frac{4-a}{a-1} \right] - 1 \geq \frac{1}{3} \left[5 + 2\sqrt{\frac{4(a-1)}{4-a} \cdot \frac{4-a}{a-1}} \right] - 1 = 2$, 当且仅当 $\frac{4(a-1)}{4-a} = \frac{4-a}{a-1}$, 即 $a = 2$ 时, 等号成立, 所以 $\frac{a}{4-a} + \frac{1}{a-1}$ 的最小值是 2.

解法 2 (换元法) 因为 $1 < a < 4$, 所以 $4-a > 0, a-1 > 0$. 令 $x = 4-a, y = a-1$, 则 $x+y=3$, 故 $\frac{a}{4-a} + \frac{1}{a-1} = \frac{4-x}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{x} + \frac{1}{y} - 1 = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{x} + \frac{1}{y} \right) (x+y) - 1 = \frac{1}{3} \left(5 + \frac{4y}{x} + \frac{x}{y} \right) - 1 \geq \frac{1}{3} \left(5 + 2\sqrt{\frac{4y}{x} \cdot \frac{x}{y}} \right) - 1 = 2$, 当且仅当 $\frac{4y}{x} = \frac{x}{y}$, 即 $x = 2y, a = 2$ 时, 等号成立, 故 $\frac{a}{4-a} + \frac{1}{a-1}$ 的最小值是 2.

12. 解: (1) $A = \left\{ x \mid \frac{2x-4}{x-5} \leq 1 \right\} = \{x \mid -1 \leq x < 5\}$,

$B = \{x \mid x^2 - 2mx + m^2 - 1 \leq 0\} = \{x \mid m-1 \leq x \leq m+1\}$.

因为 $A \cup B = A$, 所以 $B \subseteq A$, 所以 $\begin{cases} m-1 \geq -1, \\ m+1 < 5, \end{cases}$ 解得 $0 \leq m < 4$.

即实数 m 的取值范围是 $[0, 4)$.

(2) 因为 $A \cap C = A$, 所以 $A \subseteq C$,

所以 $x^2 - ax - a + 1 \geq 0$ 在 $\{x | -1 \leq x < 5\}$ 上恒成立,

即 $a(x+1) \leq x^2 + 1$ 在 $\{x | -1 \leq x < 5\}$ 上恒成立,

① 当 $x = -1$ 时, $a \in \mathbf{R}$;

② 当 $-1 < x < 5$ 时, $a \leq \frac{x^2+1}{x+1}$ 恒成立,

而 $\frac{x^2+1}{x+1} = (x+1) + \frac{2}{x+1} - 2 \geq 2\sqrt{2} - 2$,

当且仅当 $x+1 = \frac{2}{x+1}$, 即 $x = \sqrt{2} - 1$ 时, 等号成立,

所以 $\frac{x^2+1}{x+1}$ 的最小值为 $2\sqrt{2} - 2$, 故 $a \leq 2\sqrt{2} - 2$.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 2\sqrt{2} - 2]$.

13. 解: (1) 若 $a = -2$, 则 $y = -2x^2 + 3x - 4 < 0$, 对应的函数的图象开口向下. 因为 $\Delta = 9 - 4 \times 2 \times 4 < 0$, 所以所求不等式的解集为 $\mathbf{R}$.

(2) 由题意, 得 $ax^2 + (1-a)x + a - 2 \geq -2$, 即 $ax^2 + (1-a)x + a \geq 0$ 对一切实数 x 恒成立.

当 $a = 0$ 时, $x \geq 0$, 不满足题意;

当 $a \neq 0$ 时, $\begin{cases} a > 0, \\ \Delta = (1-a)^2 - 4a^2 \leq 0, \end{cases}$ 解得 $a \geq \frac{1}{3}$.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $\left\{a \mid a \geq \frac{1}{3}\right\}$.

(3) 由题意可得 $ax^2 + (1-a)x + a - 2 < a - 1$, 即 $ax^2 + (1-a)x - 1 < 0$.

当 $a = 0$ 时, 不等式可化为 $x < 1$, 所以不等式的解集为 $\{x | x < 1\}$.

当 $a > 0$ 时, $ax^2 + (1-a)x - 1 < 0$, 即 $(ax+1)(x-1) < 0$, 解得 $-\frac{1}{a} < x < 1$.

当 $a < 0$ 时, $ax^2 + (1-a)x - 1 < 0$, 即 $(ax+1)(x-1) < 0$.

① 当 $a = -1$ 时, 解集为 $\{x | x \neq 1\}$;

② 当 $-1 < a < 0$ 时, 解集为 $\left\{x \mid x < 1 \text{ 或 } x > -\frac{1}{a}\right\}$;

③ 当 $a < -1$ 时, 解集为 $\left\{x \mid x > 1 \text{ 或 } x < -\frac{1}{a}\right\}$.

综上所述,

当 $a < -1$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid x > 1 \text{ 或 } x < -\frac{1}{a}\right\}$;

当 $a = -1$ 时, 不等式的解集为 $\{x | x \neq 1\}$;

当 $-1 < a < 0$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid x < 1 \text{ 或 } x > -\frac{1}{a}\right\}$;

当 $a = 0$ 时, 不等式的解集为 $\{x | x < 1\}$;

当 $a > 0$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid -\frac{1}{a} < x < 1\right\}$.

14. 解: (1) 设甲工程队的总报价为 y 元, 则

$$y = 150 \times 2 \left(x + \frac{16}{x}\right) \times 3 + 400 \times 16 + 800$$

$$= 900 \left(x + \frac{16}{x}\right) + 7200 \geq 900 \times 2 \sqrt{x \cdot \frac{16}{x}} + 7200$$

$$= 14400,$$

当且仅当 $x = \frac{16}{x}$, 即 $x = 4$ 时, 等号成立.

即当宽为 4 米时, 甲工程队的报价最低, 最低为 14400 元.

(2) 由题意, 得 $900 \left(x + \frac{16}{x}\right) + 7200 > \frac{900a(x+2)}{x}$ 对 $x \in [2, 6]$ 恒成立.

$$\text{即 } a < \frac{x^2 + 8x + 16}{x + 2}.$$

$$\text{令 } y = \frac{x^2 + 8x + 16}{x + 2} = (x + 2) + \frac{4}{x + 2} + 4.$$

因为 $2 \leq x \leq 6$, 所以 $4 \leq x + 2 \leq 8$.

令 $t = x + 2$, $t \in [4, 8]$,

则 $y = t + \frac{4}{t} + 4$ 在 $[4, 8]$ 上单调递增,

所以当 $t = 4$ 时, $y_{\min} = 9$.

所以 $0 < a < 9$.

即 a 的取值范围是 $(0, 9)$.

专题 2 函数的概念、图象与性质

1. D 函数 $f(x) = -x$, $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ 都是 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 所以排除 A, B. 函数 $f(x) = x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 排除 C.

2. B 解法 1 (排除法) $f(x) = \frac{1-x}{1+x} = \frac{-(x+1)+2}{1+x} = -1 + \frac{2}{1+x}$, 对于 A, $f(x-1) - 1 = \frac{2}{x} - 2$, 不是奇函数; 对于 B, $f(x-1) + 1 = \frac{2}{x}$, 是奇函数; 对于 C, $f(x+1) - 1 = \frac{2}{x+2} - 2$, 不是奇函数; 对于 D, $f(x+1) + 1 = \frac{2}{x+2}$, 不是奇函数.

解法 2 (直接法) $f(x) = \frac{1-x}{1+x} = \frac{-(x+1)+2}{1+x} = -1 + \frac{2}{1+x}$ 的图象关于点 $(-1, -1)$ 中心对称, 该图象向右平移 1 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度后得到的图象关于点 $(0, 0)$ 中心对称.

3. D 令 $t = x(x-a)$, 则 $f(t) = 2^t$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递增, 根据复合函数的单调性可知, $t = x(x-a)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 则对称轴 $x = \frac{a}{2} \geq 1$, 所以 $a \geq 2$.

4. D 因为 $f(x) = \frac{x e^x}{e^{ax} - 1}$, 所以 $f(-x) = \frac{-x e^{-x}}{e^{-ax} - 1} = \frac{-x e^{ax-x}}{1 - e^{ax}} = \frac{x e^{ax-x}}{e^{ax} - 1}$. 因为 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(-x) = f(x)$. 所以 $e^x = e^{ax-x}$, 即 $x = (a-1)x$. 所以 $a-1=1$, 即 $a=2$.

5. B 当 $x \geq 0$ 时, 由 $y_1 = e^x$, $y_2 = \ln(x+1)$ 均单调递增,