江苏省苏州市2025届高三上学期开学考试

（满分150分，考试时间120分钟）

答案见P1

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知i是虚数单位，则$\frac{2-i}{i}=$ （　　）

A. $1+2i$　　B. $1-2i$

C. $-1-2i$　　D. $-1+2i$

2. 已知集合$A=\{x|2\leqslant x<6\}$，$B=\{x|x^2-4x<0\}$，则$A\cap B=$ （　　）

A. $(0,6)$

B. $(4,6)$

C. $[2,4)$

D. $(-\infty,0)\cup[2,+\infty)$

3. 将函数$f(x)=\sin x$的图象先向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度，再将所得图象上所有点的纵坐标保持不变，横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$，得到函数$y=g(x)$的图象，则$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=$ （　　）

A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. 1

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. -1

4. 已知向量$\boldsymbol{a}=(1,-1)$，$\boldsymbol{b}=(x-2,x^2)$，则“$x=-2$”是“$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$”的 （　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. “绿水青山就是金山银山”的理念深入人心，人民群众的生态环境获得感、幸福感、安全感不断提升.某校高一年级举行环保知识竞赛，共500人参加，若参赛学生成绩的第60百分位数是80分，则关于竞赛成绩不低于80分的人数的说法正确的是 （　　）

A. 至少为300

B. 至少为200

C. 至多为300

D. 至多为200

6. 已知正四棱锥的侧面积是底面积的2倍，则该正四棱锥侧棱和底面所成角的余弦值为 （　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{15}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

7. 已知函数$f(x)=e^x+e(x-a-1)$（e为自然对数的底数），$g(x)=\ln(xe^x)-a$的零点分别为x_1，x_2，则$\frac{x_1}{x_2}$的最大值为 （　　）

A. e　　B. $\frac{1}{e}$

C. 1　　D. $\frac{2}{e}$

8. 在平面直角坐标系xOy中，A，B为双曲线C：$x^2-y^2=1$右支上两点.若$|AB|=6$，则AB中点的横坐标的最小值为 （　　）

A. $2\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{10}$　　C. $\frac{4\sqrt{5}}{3}$　　D. $\frac{16}{3}$

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.

9. 已知二项式$\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$的展开式，则 （　　）

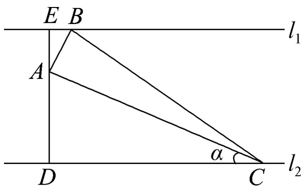
A. 二项式系数最大的项为第3项

B. 常数项为第5项

C. 展开式中含x^3的项为$60x^3$

D. 展开式中所有项的系数和为64

10. 如图,直线 $l_1 // l_2$,A 是 l_1,l_2 之间的一定点,点 A 到 l_1 的距离 $AE=1$,点 A 到 l_2 的距离 $AD=2$,点 B,C 分别在 l_1,l_2 上,设 $\angle ACD=\alpha$,则 ( )



A. 若 $\alpha=30°$,$AB\perp AC$,则 $AB=2$

B. 若 $AB\perp AC$,则 $\triangle ABC$ 面积的最小值为 2

C. 若 $\triangle ABC$ 为等边三角形,则 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. 若 $\angle BAC=60°$,则 $\frac{1}{AB}+\frac{2}{AC}$ 的最大值为 1

11. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$,$\forall m,n\in\mathbf{N}^*$,有 $\frac{1}{a_{n+m}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_m}$ 成立,则 ( )

A. $a_{2024}=\frac{1}{2024}$

B. $\exists n\in\mathbf{N}^*$,使得 $a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{n+1}^2>\frac{2}{3}$

C. $\forall n\in\mathbf{N}^*$,都有 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n>\ln(n+1)$

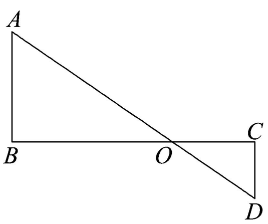
D. $\forall n\in\mathbf{N}^*$,都有 $a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{n+1}<\ln(n+1)$

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. 已知 $\triangle ABC$ 内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 若 $B=30°$,$b=\sqrt{13}$,$c=2$,则 $a=$________.

13. 已知直线 l:$(2k+1)x-ky-1=0$(其中 k 为常数),圆 O:$x^2+y^2=8$,直线 l 与圆 O 交于 A,B 两点,则 AB 长的最小值为________.

14. 如图,线段 AD,BC 相交于点 O,且 AB,AD,BC,CD 的长度构成集合 $\{1,5,9,x\}$,$\angle ABO=\angle DCO=90°$,则 x 的取值个数为________.



四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

2024 年 7 月 26 日,第 33 届夏季奥林匹克运动会在法国巴黎开幕,为了保证奥运赛事的顺利组织和进行,以及做好文化交流、信息咨询、观众引导等多方面的工作,每项比赛都需要若干名志愿者参加服务,每名志愿者可服务多个项目. 8 月 7 日,100 米跨栏、200 米、400 米、800 米、1500 米、5000 米比赛在法兰西体育场举行.

(1) 志愿者汤姆可以在以上 6 个项目中选择 3 个参加服务,求汤姆在选择 200 米服务的条件下,选择 1500 米服务的概率.

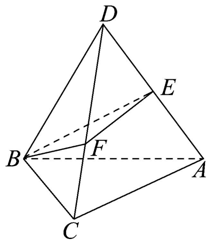
(2) 为了调查志愿者参加服务的情况,从仅参加 1 个项目服务的志愿者中抽取 10 名,其中有 6 名参加 5000 米服务,4 名参加 800 米服务. 现从这 10 名志愿者中再选 3 名做进一步调查,将其中参加 800 米服务的人数记作 X,求随机变量 X 的分布列和数学期望.

16.（本小题满分 15 分）

如图，在三棱锥 $D-ABC$ 中，$\triangle ABC$ 是以 AB 为斜边的等腰直角三角形，$\triangle ABD$ 是边长为 2 的正三角形，E 为 AD 的中点，F 为 DC 上一点，且平面 $BEF\perp$ 平面 ABD.

（1）求证：$AD\perp$ 平面 BEF；

（2）若平面 $ABC\perp$ 平面 ABD，求平面 BEF 与平面 BCD 夹角的余弦值.



17.（本小题满分 15 分）

已知函数 $f(x)=\sin x+e^{x}-4x$，e 为自然对数的底数，函数 $g(x)=x^{3}-ax+3$.

（1）若 $f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线也是 $g(x)$ 的切线，求实数 a 的值；

（2）求 $f(x)$ 在 $(-\pi,+\infty)$ 上的零点个数.

函数中的切线与
零点个数问题

18.（本小题满分 17 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，A 为椭圆的左顶点. 已知点 $P(1,2)$，且直线 PA 的斜率为 $\frac{2}{3}$. 过点 $M(t,0)$ 作直线 l 交椭圆于 B,C 两点(点 B 在 x 轴上方，点 C 在 x 轴下方)，设 PB,PC 两直线分别交椭圆于另一点 D,E(点 B,E 分别在线段 PD,PC 上).

(1) 求椭圆的标准方程；

(2) 当 $t=1$ 时，若直线 l 的斜率小于零，且 $\triangle PBC$ 的面积为 $\frac{8}{5}$，求证：$\angle BMD=\angle BPC$；

(3) 若存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{DC}$，求此时直线 DC 的斜率.

19.（本小题满分 17 分）

如果数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}^2\leqslant a_na_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$，那么称之为凸数列. 现给定函数 $f(x)$ 及凸数列 $\{a_n\}$，它们满足以下两个条件：① $0<a_n<a_{n+1}$；② $\forall n\geqslant 2$，有 $|f(a_n)-f(a_{n+1})|\leqslant\lambda^n|a_n-a_{n+1}|\leqslant|f(a_{n-1})-f(a_n)|$($\lambda$ 为正常数).

(1) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n>1$，$b_{n+1}=\frac{1}{2}\left(b_n+\frac{1}{b_n}\right)$，且数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n=\ln\frac{b_n+1}{b_n-1}$，请判断 $\{c_n\}$ 是否为凸数列，并说明理由；

(2) 若 $|f(a_2)-f(a_3)|=2$，求证：$\sum\limits_{i=2}^{10}|a_{i+1}-a_i|>18$；

(3) 对任何大于等于 2 的正整数 i,j，且 $i\leqslant j$，求证：$|f(a_i)-f(a_j)|\leqslant|a_i-a_j|$.

八省联考(山西、河南、陕西、内蒙古、四川、云南、宁夏、青海2025年1月适应性测试)

(满分150分,考试时间120分钟)

答案见P17

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1\}$,$B=\{0,1,4\}$,则 $A\cap B=$ (　　)

A. $\{0\}$　　B. $\{1\}$

C. $\{0,1\}$　　D. $\{-1,0,1,4\}$

2. 函数 $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的最小正周期是 (　　)

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. π　　D. 2π

3. $|2-4\mathrm{i}|=$ (　　)

A. 2　　B. 4

C. $2\sqrt{5}$　　D. 6

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(0,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,0)$,则 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$ (　　)

A. 2　　B. 1

C. 0　　D. -1

5. 双曲线 $x^2-\frac{y^2}{9}=1$ 的渐近线方程为 (　　)

A. $y=\pm x$　　B. $y=\pm 2x$

C. $y=\pm 3x$　　D. $y=\pm 4x$

6. 底面直径和母线长均为2的圆锥的体积为 (　　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$　　B. π

C. 2π　　D. 3π

7. 已知在$\triangle ABC$ 中,$BC=8$,$AC=10$,$\cos\angle BAC=\frac{3}{5}$,则$\triangle ABC$ 的面积为 (　　)

A. 6　　B. 8

C. 24　　D. 48

8. 已知函数 $f(x)=x|x-a|-2a^2$,若当 $x>2$ 时,$f(x)>0$,则实数 a 的取值范围是 (　　)

A. $(-\infty,1]$　　B. $[-2,1]$

C. $[-1,2]$　　D. $[-1,+\infty)$

二、选择题:本题共3小题,每小题6分,共18分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得6分,部分选对的得部分分,有选错的得0分.

9. 已知 $F(2,0)$是抛物线 $C:y^2=2px$ 的焦点,M 是抛物线C 上的点,O 为坐标原点,则 (　　)

A. $p=4$

B. $|MF|\geqslant|OF|$

C. 以点 M 为圆心且过点 F 的圆与抛物线 C 的准线相切

D. 当$\angle OFM=120^\circ$时,$\triangle OFM$ 的面积为 $2\sqrt{3}$

10. 在人工神经网络中,单个神经元输入与输出的函数关系可以称为激励函数.双曲正切函数是一种激励函数.定义双曲正弦函数 $\sinh x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$,双曲余弦函数 $\cosh x=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$,双曲正切函数 $\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}$,则 (　　)

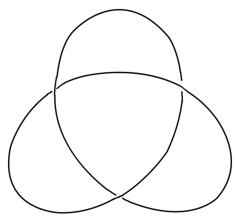
A. 双曲正弦函数是增函数

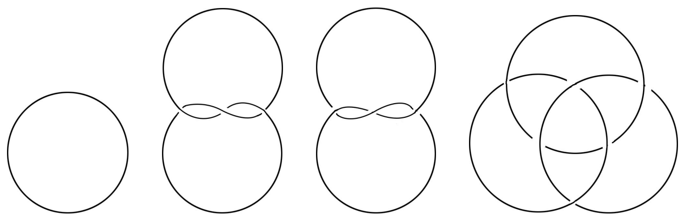
B. 双曲余弦函数是增函数

C. 双曲正切函数是增函数

D. $\tanh(x+y)=\frac{\tanh x+\tanh y}{1+\tanh x\tanh y}$

11. 下面四个绳结中,不能无损伤地变为图中的绳结的有 (　　)





A　　B　　C　　D

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$，若 $f(\ln 2)\cdot f(\ln 4)=8$，则 $a=$________.

13. 有 8 张卡片，分别标有数字 1，2，3，4，5，6，7，8，现从这 8 张卡片中随机抽出 3 张，则抽出的 3 张卡片上的数字之和与其余 5 张卡片上的数字之和相等的概率为________.

14. 已知曲线 $C: y=x^3-\dfrac{2}{x}$，直线 l_1, l_2 均过坐标原点 O，l_1 和曲线 C 交于 M, N 两点，l_2 和曲线 C 交于 P, Q 两点. 若 $\triangle OPM$ 的面积为 $\sqrt{2}$，则 $\triangle MNQ$ 的面积为________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. （本小题满分 13 分）

为考察某种药物 A 对预防疾病 B 的效果，进行了动物（单位：只）试验，得到如下列联表：

药物	疾病		合计
	未患病	患病	
未服用	100	80	s
服用	150	70	220
合计	250	t	400

(1) 求 s, t.

(2) 记未服用药物 A 的动物患疾病 B 的概率为 P，给出 P 的估计值.

(3) 根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，能否认为药物 A 对预防疾病 B 有效？

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

α	0.050	0.010	0.001
x_α	3.841	6.635	10.828

16. （本小题满分 15 分）

已知在数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{3a_n}{a_n+2}$.

（1）求证：数列$\left\{1-\dfrac{1}{a_n}\right\}$为等比数列；

（2）求$\{a_n\}$的通项公式；

（3）令$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，求证：$b_n<b_{n+1}<1$.

17. （本小题满分 15 分）

已知函数 $f(x)=a\ln x+\dfrac{b}{x}-x$.

（1）设 $a=1$，$b=-2$，求曲线 $y=f(x)$的斜率为 2 的切线方程；

（2）若 $x=1$ 是 $f(x)$的极小值点，求实数 b 的取值范围.

18.（本小题满分 17 分）

已知椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$，左、右焦点分别为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 已知点 $M_0(1,4)$，求证：线段 F_1M_0 的垂直平分线与 C 恰有一个公共点；

(3) 设 M 是坐标平面上的动点，且线段 F_1M 的垂直平分线与椭圆 C 恰有一个公共点，求证 M 的轨迹为圆，并求该圆的方程.

椭圆与圆的综合

19.（本小题满分 17 分）

在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=AC=CD=1$，$\angle ADC=30^\circ$，$\angle DAB=120^\circ$，将 $\triangle ACD$ 沿 AC 翻折至 $\triangle ACP$，其中 P 为动点.

(1) 设 $PC\perp AB$，三棱锥 $P-ABC$ 的各个顶点都在球 O 的球面上.

① 求证：平面 $PAC\perp$ 平面 ABC；

② 求球 O 的半径.

(2) 求二面角 $A-CP-B$ 的余弦值的最小值.

江苏省苏锡常镇四市 2025 届高三教学情况调研(二)

(满分 150 分,考试时间 120 分钟)

答案见 P188

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$,$B=\{x\mid 0<\log_2 x<2\}$,则 $A\cap B=$ ( )

A. $\{2,3\}$　B. $\{2,3,4\}$

C. $\{1,2,3\}$　D. $\{1,2,3,4\}$

2. 已知 $z+2\mathrm{i}=\dfrac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}+1}$,则 $z=$ ( )

A. $-2\mathrm{i}$　B. $-\mathrm{i}$

C. i　D. $2\mathrm{i}$

3. 诗歌朗诵比赛共有八位评委分别给出某选手的原始评分. 评定该选手的成绩时,从 8 个原始评分中去掉 1 个最高分和 1 个最低分,得到 6 个有效评分. 6 个有效评分与 8 个原始评分相比,一定不变的数字特征是 ( )

A. 极差　B. 平均数

C. 中位数　D. 标准差

4. 已知圆 $C:x^2+(y-2)^2=\dfrac{10}{3}$,将直线 $l_1:\sqrt{3}x-y=0$ 绕原点按顺时针方向旋转 30°后得到直线 l_2,则 ( )

A. 直线 l_2 过圆心 C

B. 直线 l_2 与圆 C 相交,但不过圆心

C. 直线 l_2 与圆 C 相切

D. 直线 l_2 与圆 C 无公共点

5. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}(0<\alpha<\pi)$,则 $\tan 2\alpha=$ ( )

A. $-\dfrac{24}{7}$　B. $\dfrac{24}{7}$

C. $-\dfrac{24}{25}$　D. $\dfrac{24}{25}$

6. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q\neq-1$,前 n 项和为 S_n,则 $\forall n\in\mathbf{N}^*$,下列结论一定正确的是( )

A. $S_n+S_{3n}=2S_{2n}$

B. $3S_n+S_{3n}=2S_{2n}$

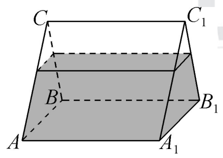
C. $S_{2n}^2=S_nS_{3n}$

D. $S_{2n}(S_{2n}-S_n)=S_n(S_{3n}-S_n)$

7. 已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$. 若 $f(x+1)$ 是奇函数,$g(x)$ 是偶函数,且 $f(x)-g(x-2)=2-x$,则 $f(g(-1))=$ ( )

A. -1　B. 0　C. 1　D. 2

8. 一个底面边长和侧棱长均为 4 的正三棱柱密闭容器 $ABC-A_1B_1C_1$,其中盛有一定体积的水,当底面 ABC 水平放置时,水面高为 $\dfrac{15}{4}$. 当侧面 AA_1B_1B 水平放置时(如图),容器内的水形成新的几何体. 若该几何体的所有顶点均在同一个球面上,则该球的表面积为 ( )



A. $\dfrac{100}{3}\pi$　B. $\dfrac{200}{3}\pi$

C. 100π　D. $\dfrac{400}{3}\pi$

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

9. 在 $(1-2x)^5$ 的展开式中,则 ( )

A. x 的系数为 -10

B. 第 3 项与第 4 项的二项式系数相等

C. 所有项的二项式系数和为 32

D. 所有项的系数和为 32

10. 已知函数 $f(x)=\sin x+\cos x+|\sin x-\cos x|$,则 ( )

A. $f(x)$的图象关于点$(\pi,0)$对称

B. $f(x)$的最小正周期为 2π

C. $f(x)$的最小值为-2

D. $f(x)=\sqrt{3}$在$[0,2\pi]$上有四个不同的实数解

11. 已知P为曲线$E:y^4=4x$上一个动点(异于原点),曲线E在$P(x,y)(y\neq0)$处的切线是指曲线$y=\pm\sqrt[4]{4x}$在点P处的切线.直线m为曲线E在点P处的切线,过点P作m的垂线n.若直线m,n分别与x轴交于A,B两点,则 ( )

A. 曲线E关于x轴对称

B. 点P到点$F(1,0)$的距离不小于点P到直线$x=-1$的距离

C. 存在点P,使得$2|PA|=|PB|$

D. 当$|AB|$取得最小值时,直线OP的斜率为$\pm4\sqrt{2}$

三、填空题:本题共3小题,每小题5分,共15分.

12. 已知平面向量$\boldsymbol{a}=(1,2)$,$\boldsymbol{b}=(x,3)$.若$\boldsymbol{a}\parallel(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$,则实数$x$的值为________.

13. 在平面直角坐标系xOy中,双曲线C的中心在原点,焦点在x轴上,焦距长为$4\sqrt{3}$.若双曲线C和抛物线$y^2=x$交于A,B两点,且$\triangle OAB$为正三角形,则双曲线C的离心率为________.

14. 已知随机变量X,Y相互独立,且$X\sim N(4,4)$,$Y\sim B\left(8,\frac{1}{2}\right)$,则$P(X\leqslant4,Y\leqslant4)=$________;若$Z=X+Y$,则$\sum_{t=1}^{15}P(Z\leqslant t)=$________.

正态分布与二项分布的综合

四、解答题:本题共5小题,共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分13分)

某种产品可以采用甲、乙两种工艺来生产,为了研究产品的质量与所采用的生产工艺之间的关联性,现对该种产品进行随机抽查,得到的结果如表所示.

	工艺甲	工艺乙	合计
合格	60	40	100
不合格	20	30	50
合计	80	70	150

(1) 依据小概率值$\alpha=0.05$的独立性检验,分析产品的质量是否与采用的生产工艺有关;

(2) 在不合格的50件样本产品中任选3件,求在这3件样本产品中至少有1件是采用工艺甲生产的条件下,这3件样本产品中恰有一件是采用工艺乙生产的概率.

附:$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,$n=a+b+c+d$.

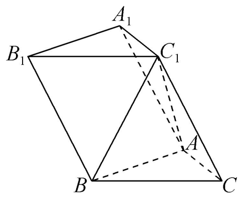
α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_{α}	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

16. （本小题满分 15 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=2$，$BC=2\sqrt{2}$，$\angle ABC=45°$，$BC_1\perp AC$.

(1) 求证：$AC\perp$ 平面 ABC_1；

(2) 若 $CC_1=2\sqrt{2}$，二面角 C_1-AC-B 的大小为 $60°$，求直线 BC_1 与平面 AA_1B_1B 所成角的正弦值.



17. （本小题满分 15 分）

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{3}{5}$，且经过点 $\left(3,\frac{16}{5}\right)$，$F_1$，$F_2$ 分别是椭圆 E 的左、右焦点.

(1) 求椭圆 E 的标准方程.

(2) 过点 F_2 的直线与椭圆 E 交于 P，Q 两点. 若 $\triangle F_1PQ$ 的内切圆半径为 r，且 $r=\frac{\sqrt{3}}{10}|PQ|$，求 $|F_2P|\cdot|F_2Q|$ 的值.

18.（本小题满分 17 分）

已知函数 $f(x)=\sin x$，$g(x)=e^{ax}$，$a\in\mathbf{R}$.

(1) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $O(0,0)$ 处的切线也是曲线 $y=g(x)$ 的切线，求 a 的值；

(2) 讨论函数 $h(x)=\dfrac{x-1}{g(x)}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的单调性；

(3) 若 $f(x)g(x)<x$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，求 a 的取值范围.

19.（本小题满分 17 分）

若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足：$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_1>\dfrac{a_1+a_2}{2}>\cdots>\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}>\cdots$，则称 $\{a_n\}$ 为"均值递减数列".

(1) 已知无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $\{a_n\}$ 为"均值递减数列"，求证：$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$S_n>na_{n+1}$；

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=-6(n-4)^3+n^2$，判断 $\{b_n\}$ 是否为"均值递减数列"，并说明理由；

(3) 若两个正项数列 $\{c_n\}$ 和 $\{d_n\}$ 均为"均值递减数列"，求证：数列 $\{c_nd_n\}$ 也为"均值递减数列".

2025 年普通高等学校招生全国统一考试

（新高考卷Ⅰ）

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. $(1+5\mathrm{i})\mathrm{i}$ 的虚部为（　　）

A. -1　　B. 0

C. 1　　D. 6

2. 已知集合 $U=\{x\mid x$ 是小于 9 的正整数$\}$，$A=\{1,3,5\}$，则 $\complement_U A$ 中元素的个数为（　　）

A. 0　　B. 3

C. 5　　D. 8

3. 已知双曲线 C 的虚轴长是实轴长的 $\sqrt{7}$ 倍，则 C 的离心率为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. 2

C. $\sqrt{7}$　　D. $2\sqrt{2}$

4. 已知点 $(a,0)(a>0)$ 是函数 $y=2\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象的一个对称中心，则 a 的最小值为（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{4\pi}{3}$

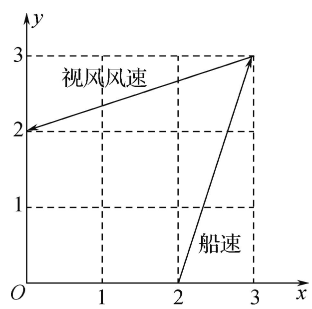
5. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 2 的偶函数，当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时，$f(x)=5-2x$，则 $f\left(-\frac{3}{4}\right)=$（　　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$

6. 帆船比赛中，运动员可借助风力计测定风速的大小和方向，测出的结果在航海学中称为视风风速. 视风风速对应的向量是真风风速对应的向量与船行风风速对应的向量之和，其中船行风风速对应的向量与船速对应的向量大小相等、方向相反. 下表给出了部分风力等级、名称与风速大小的对应关系. 已知某帆船运动员在某时刻测得的视风风速对应的向量与船速对应的向量如图所示（线段长度代表速度大小，单位：m/s），则该时刻的真风为（　　）

级数	名称	风速大小（单位：m/s）
2	轻风	1.6～3.3
3	微风	3.4～5.4
4	和风	5.5～7.9
5	劲风	8.0～10.7



A. 轻风　　B. 微风　　C. 和风　　D. 劲风

7. 已知圆 $x^2+(y+2)^2=r^2(r>0)$ 上到直线 $y=\sqrt{3}x+2$ 的距离为 1 的点有且仅有 2 个，则 r 的取值范围是（　　）

A. $(0,1)$　　B. $(1,3)$

C. $(3,+\infty)$　　D. $(0,+\infty)$

8. 已知 $2+\log_2 x=3+\log_3 y=5+\log_5 z$，则 x,y,z 的大小关系不可能为（　　）

A. $x>y>z$　　B. $x>z>y$

C. $y>x>z$　　D. $y>z>x$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 为 BC 的中点，则（　　）

A. $AD\perp A_1C$　　B. $B_1C_1\perp$平面 AA_1D

C. $AD /\!/ A_1B_1$　　D. $CC_1 /\!/$ 平面 AA_1D

10. 设抛物线 C：$y^2=6x$ 的焦点为 F，过点 F 的一条直线交抛物线 C 于 A，B 两点，过点 A 作直线 l：$x=-\frac{3}{2}$的垂线，垂足为 D，过点 F 且垂直于 AB 的直线交 l 于点 E，则（　　）

A. $|AD|=|AF|$　　B. $|AE|=|AB|$

C. $|AB|\geqslant 6$　　D. $|AE|\cdot|BE|\geqslant 18$

11. 已知△ABC 的面积为$\frac{1}{4}$，$\cos 2A+\cos 2B+2\sin C=2$，$\cos A\cos B\sin C=\frac{1}{4}$，则（　　）

A. $\sin C=\sin^2 A+\sin^2 B$

B. $AB=\sqrt{2}$

C. $\sin A+\sin B=\frac{\sqrt{6}}{2}$

D. $AC^2+BC^2=3$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 若直线 $y=2x+5$ 是曲线 $y=e^x+x+a$ 的一条切线，则 $a=$________.

13. 若一个等比数列的各项均为正数，且前 4 项和为 4，前 8 项和为 68，则这个数列的公比为________.

14. 有 5 个相同的球，分别标有数字 1，2，3，4，5，现从中有放回地随机取 3 次，每次取 1 个球. 记 X 为这 5 个球中至少被取出 1 次的球的个数，则 X 的数学期望 $E(X)=$________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）

为研究某疾病与超声波检查结果的关系，从做过超声波检查的人群中随机调查了 1000 人，得到如下列联表：

组别 \ 超声波检查结果	正常	不正常	合计
患该疾病	20	180	200
未患该疾病	780	20	800
合计	800	200	1000

(1) 记超声波检查结果不正常者患该疾病的概率为 p，求 p 的估计值；

(2) 根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，分析超声波检查结果是否与患该疾病有关.

附：$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

$P(\chi^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

16. （本小题满分 15 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=3$ ，$\frac{a_{n+1}}{n}=\frac{a_n}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$.

(1) 求证：数列 $\{na_n\}$ 是等差数列；

(2) 给定正整数 m，设函数 $f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$，求 $f'(-2)$.

17. （本小题满分 15 分）

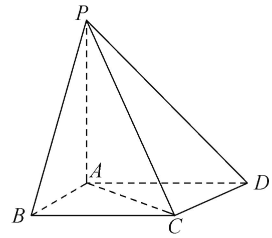
如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$AB\perp AD$，$BC/\!/AD$.

(1) 求证：平面 $PAB\perp$ 平面 PAD.

(2) 若 $PA=AB=\sqrt{2}$，$BC=2$，$AD=\sqrt{3}+1$，且点 P，B，C，D 均在球 O 的球面上.

① 求证：点 O 在平面 $ABCD$ 内；

② 求直线 AC 与直线 PO 所成角的余弦值.



18.（本小题满分 17 分）

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$，下顶点为 A，右顶点为 B，$|AB|=\sqrt{10}$.

（1）求椭圆 C 的标准方程.

（2）已知动点 P 不在 y 轴上，点 R 在射线 AP 上，且满足$|AP|\cdot|AR|=3$.

① 设 $P(m,n)$，求 R 的坐标(用 m，n 表示)；

② 设 O 为坐标原点，Q 是椭圆 C 上的一动点，直线 OR 的斜率是直线 OP 的斜率的 3 倍，求$|PQ|$的最大值.

19.（本小题满分 17 分）

（1）求函数 $f(x)=5\cos x-\cos 5x$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上的最大值；

（2）给定 $\theta\in(0,\pi)$和 $a\in\mathbf{R}$，求证：存在 $y\in[a-\theta,a+\theta]$使得 $\cos y\leqslant\cos\theta$；

（3）设 $b\in\mathbf{R}$，若存在 $\varphi\in\mathbf{R}$ 使得 $5\cos x-\cos(5x+\varphi)\leqslant b$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求 b 的最小值.

2025 年普通高等学校招生全国统一考试

（新高考卷Ⅱ）

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）

答案见 P221

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 样本数据 2，8，14，16，20 的平均数为 （　　）

A. 8　　B. 9　　C. 12　　D. 18

2. 已知复数 $z=1+\mathrm{i}$，则 $\dfrac{1}{z-1}=$ （　　）

A. $-\mathrm{i}$　　B. i

C. -1　　D. 1

3. 已知集合 $A=\{-4,0,1,2,8\}$，$B=\{x\mid x^3=x\}$，则 $A\cap B=$ （　　）

A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{1,2,8\}$

C. $\{2,8\}$　　D. $\{0,1\}$

4. 不等式 $\dfrac{x-4}{x-1}\geqslant 2$ 的解集是 （　　）

A. $\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 1\}$　　B. $\{x\mid x\leqslant -2\}$

C. $\{x\mid -2\leqslant x<1\}$　　D. $\{x\mid x>1\}$

5. 在 $\triangle ABC$ 中，$BC=2$，$AC=1+\sqrt{3}$，$AB=\sqrt{6}$，则 $A=$ （　　）

A. 45°　　B. 60°

C. 120°　　D. 135°

6. 设抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 A 在抛物线 C 上，过点 A 作抛物线 C 的准线的垂线，垂足为 B. 若直线 BF 的方程为 $y=-2x+2$，则 $|AF|=$ （　　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

7. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_3=6$，$S_5=-5$，则 $S_6=$ （　　）

A. -20　　B. -15

C. -10　　D. -5

8. 已知 $0<\alpha<\pi$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，则 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=$ （　　）

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$　　D. $\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，q 为 $\{a_n\}$ 的公比，$q>0$. 若 $S_3=7$，$a_3=1$，则 （　　）

A. $q=\dfrac{1}{2}$　　B. $a_5=\dfrac{1}{9}$

C. $S_5=8$　　D. $a_n+S_n=8$

10. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=(x^2-3)\mathrm{e}^x+2$，则 （　　）

A. $f(0)=0$

B. 当 $x<0$ 时，$f(x)=-(x^2-3)\mathrm{e}^{-x}-2$

C. $f(x)\geqslant 2$，当且仅当 $x\geqslant\sqrt{3}$

D. $x=-1$ 是 $f(x)$ 的极大值点

11. 双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 左、右焦点分别为 F_1，F_2，左、右顶点分别为 A_1，A_2，以 F_1F_2 为直径的圆与双曲线 C 的一条渐近线交于 M，N 两点，且 $\angle NA_1M=\dfrac{5\pi}{6}$，则 （　　）

A. $\angle A_1MA_2=\dfrac{\pi}{6}$

B. $|MA_1|=2|MA_2|$

C. 双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{13}$

D. 当 $a=\sqrt{2}$ 时，四边形 NA_1MA_2 的面积为 $8\sqrt{3}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(x,1)$，$\boldsymbol{b}=(x-1,2x)$，若 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，则 $|\boldsymbol{a}|=$________.

13. 若 $x=2$ 是函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$ 的极值点，则 $f(0)=$________.

14. 一个底面半径为 4 cm，高为 9 cm 的封闭圆柱形容器(容器壁厚度忽略不计)内有两个半径相等的铁球，则铁球半径的最大值为________cm.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x)=\cos(2x+\varphi)(0\leqslant\varphi<\pi)$，$f(0)=\frac{1}{2}$.

(1) 求 φ 的值；

(2) 设函数 $g(x)=f(x)+f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，求 $g(x)$ 的值域和单调区间.

16. (本小题满分 15 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，长轴长为 4.

(1) 求椭圆 C 的方程；

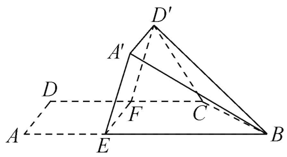
(2) 过点 $(0,-2)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 A,B 两点，O 为坐标原点，若 $S_{\triangle OAB}=\sqrt{2}$，求 $|AB|$.

17.（本小题满分15分）

如图，在四边形$ABCD$中，$AB\parallel CD$，$\angle DAB=90^\circ$，F为CD的中点，点E在线段AB上，$EF\parallel AD$，$AB=3AD$，$CD=2AD$．将四边形$EFDA$沿EF翻折至四边形$EFD'A'$，使得平面$EFD'A'$与平面$EFCB$所成二面角为60°．

（1）求证：$A'B\parallel$平面$CD'F$；

（2）求平面BCD'与平面$EFD'A'$所成二面角的正弦值．



18.（本小题满分17分）

已知函数$f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-kx^3$，其中$0<k<\frac{1}{3}$．

（1）求证：$f(x)$在$(0,+\infty)$上存在唯一的极值点和唯一的零点．

（2）设x_1,x_2分别为$f(x)$在$(0,+\infty)$上的极值点和零点．

① 设函数$g(t)=f(x_1+t)-f(x_1-t)$，求证：$g(t)$在$(0,x_1)$上单调递减；

② 比较$2x_1$与x_2的大小，并证明．

19.（本小题满分 17 分）

甲、乙两人进行乒乓球练习，每个球胜者得 1 分，负者得 0 分. 设每个球甲获胜的概率为 $p\left(\frac{1}{2}<p<1\right)$. 乙获胜的概率为 q，$p+q=1$，且各球胜负独立. 对正整数 $k\geqslant 2$，记 p_k 为打完 k 个球后甲比乙至少多得 2 分的概率，q_k 为打完 k 个球后乙比甲至少多得 2 分的概率.

(1) 求 p_3，p_4（用 p 表示）；

(2) 若 $\dfrac{p_4-p_3}{q_4-q_3}=4$，求 p；

(3) 求证：对任意正整数 m，$p_{2m+1}-q_{2m+1}<p_{2m}-q_{2m}<p_{2m+2}-q_{2m+2}$.