第 1 章　一元二次方程

巅峰训练 1　一元二次方程

1. C　**2.** D　**3.** A

4. C　**提示**：令 $y=x-1$，则 $m(y-h)^2=k$ 与 $m(x-h)^2=k$ 有相同的解，即 $y_1=3$，$y_2=6$，所以关于 x 的一元二次方程 $m(x-h-1)^2=k$ 的解为 $x_1=4$，$x_2=7$.

5. D　**提示**：由条件可知，$a\neq0$，$c\neq0$. 因为 $a+c=0$，所以 $\frac{c}{a}=-1$. 所以题中所给的两个一元二次方程可化为 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$，$\frac{c}{a}x^2+\frac{b}{a}x+1=0$，即 $x^2+\frac{b}{a}x-1=0$，$x^2-\frac{b}{a}x-1=0$. 因为 $x=2$ 是方程 $x^2+\frac{b}{a}x-1=0$ 的一个根，所以 $x=-2$ 是方程 $x^2-\frac{b}{a}x-1=0$ 的一个根.

6. -1　**7.** $x=-\frac{1}{2}$

8. -3　**提示**：设 a 是方程 $x^2+3x-3=0$ 的一个根，则 $a^2+3a-3=0$，$(-a)^2-3(-a)+m=0$，所以 $m=-3$.

9. (1) 2 026　(2) 2 024　(3) 2 024　(4) 2 024　**提示**：因为 a 是方程 $2x^2+x-1=0$ 的一个根，所以 $2a^2+a-1=0$，且 $a\neq0$，所以 $2a^2+a=1$，$\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}=-2$. (1) 原式 $=2(2a^2+a)+2\ 024=2\times1+2\ 024=2\ 026$；(2) 原式 $=a(2a^2+a)+2\ 024-a=a+2\ 024-a=2\ 024$；(3) 原式 $=2+(-2)+2\ 024=2\ 024$；(4) 原式 $=2a^2+a+2a-\frac{1}{a}+2\ 024=1+2a-\frac{1}{a}+2\ 024=\frac{2a^2+a-1}{a}+2\ 024=2\ 024$.

10. $\frac{5}{2}$　**提示**：因为方程 $2(y-1)^2+3=0$ 和 $ay^2+y+c=0$ 是关于 y 的"同族二次方程"，所以 $ay^2+y+c=0$ 可表示为 $a(y-1)^2+3=0$，整理，得 $ay^2-2ay+a+3=0$，所以 $-2a=1$，$c=a+3$，解得 $a=-\frac{1}{2}$，所以 $c=-\frac{1}{2}+3=\frac{5}{2}$.

11. 解：(1) 化简，得 $(a-1)x^2+3ax-8a+16=0$. 因为方程 $(a-x)^2=a(x^2+x+a)-8a+16$ 是关于 x 的一元二次方程，所以 $a-1\neq0$，解得 $a\neq1$. 所以 a 的取值范围为 $a\neq1$.

(2) 由一次项系数为零，得 $a=0$. 则原方程是 $-x^2+16=0$，即 $x^2-16=0$. 解得 $x_1=-4$，$x_2=4$.

12. 解：存在.

联立两方程，可得 $\begin{cases}x^2+mx+2=0,\\x^2+2x+m=0.\end{cases}$ 当 $m\neq2$ 时，可解得唯一的公共根 $x=1$. 把 $x=1$ 代入 $x^2+mx+2=0$，得 $m=-3$. 故当 $m=-3$ 时，这两个方程有且只有一个公共根，公共根为 $x=1$.

13. (1) $-2x^2-3x+2=0$

(2) **解**：是. 证明如下：

把 $x=3$ 代入方程 $cx^2+bx+a=0$，得 $9c+3b+a=0$，即 $a+3b+9c=0$. 因为关于 x 的一元二次方程 $cx^2+bx+a=0$ 的"友好"方程为 $ax^2+bx+c=0$，把 $x=\frac{1}{3}$ 代入 ax^2+bx+c，得 $ax^2+bx+c=\frac{1}{9}a+\frac{1}{3}b+c=\frac{1}{9}(a+3b+9c)=0$，所以 $x=\frac{1}{3}$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个解，即 $\frac{1}{3}$ 为 $cx^2+bx+a=0$ 的"友好"方程的一个解.

14. -13　**提示**：设 m 是方程 $x^2-3x-1=0$ 的根，则 $m^2-3m-1=0$，所以 $m^2=3m+1$. 由题意可知，m 也是方程 $x^4+ax^2+bx+c=0$ 的根，所以 $m^4+am^2+bm+c=0$. 把 $m^2=3m+1$ 代入，得 $(3m+1)^2+am^2+bm+c=0$. 整理，得 $(9+a)m^2+(6+b)m+c+1=0$　①. 继续将 $m^2=3m+1$ 代入式①，得 $(33+3a+b)m+(10+a+c)=0$　②. 易知 $m\neq0$. 因为 a，b，c 为常数，且式②对 2 个不同的 m 值恒成立，所以 $b=-3a-33$，$c=-a-10$，所以 $a+b-2c=a+(-3a-33)-2(-a-10)=-13$.

为$(-m)^2-4(m+1)=(m-2)^2-8$.设$(m-2)^2-8=a^2$,则$(m-2+a)(m-2-a)=8$.又易知$m-2+a$与$m-2-a$同奇偶,所以$\begin{cases}m-2+a=4,\\m-2-a=2\end{cases}$或$\begin{cases}m-2+a=2,\\m-2-a=4\end{cases}$或$\begin{cases}m-2+a=-4,\\m-2-a=-2\end{cases}$或$\begin{cases}m-2+a=-2,\\m-2-a=-4.\end{cases}$解得$m=5$或$m=-1$,所以方程为$x^2-5x+6=0$或$x^2+x=0$.方程$x^2-(n+2)x+2n=0$的根的判别式为$(n-2)^2$,$F(1,-n-2,2n)=\frac{4\times1\times2n-(-n-2)^2}{4\times1}=-\frac{(n-2)^2}{4}$.当$m=5$时,$F(1,-5,6)=\frac{4\times1\times6-(-5)^2}{4\times1}=-\frac{1}{4}$.因为两方程的“快乐数”互为“开心数”,所以$-\frac{1}{4}\times2n=6\times\left[-\frac{(n-2)^2}{4}\right]$,解得$n=3$或$n=\frac{4}{3}$(舍去).当$m=-1$时,$F(1,1,0)=\frac{4\times1\times0-1^2}{4\times1}=-\frac{1}{4}$.因为两方程的“快乐数”互为“开心数”,所以$-\frac{1}{4}\times2n=0\times\left[-\frac{(n-2)^2}{4}\right]$,解得$n=0$.综上所述,$n$的值为0或3.

巅峰训练 4　一元二次方程的根与系数的关系

1. D

2. B　**提示:**因为$(a+c)(a+d)=2\,025$,$(b+c)(b+d)=2\,025$,所以$a^2+a(c+d)+cd-2\,025=0$,$b^2+b(c+d)+cd-2\,025=0$.因为a,b,c,d为互不相等的实数,所以a和b可以看作方程$x^2+(c+d)x+cd-2\,025=0$的两个根,所以$a+b=-\frac{c+d}{1}=-(c+d)$,所以$a+b+c+d=-(c+d)+c+d=0$.

3. -1

4. -20或2　**提示:**分两种情况讨论.①当$a\neq b$时,由题意,得a,b是方程$x^2-8x+5=0$的两个根,则$a+b=8$,$ab=5$,所以$\frac{b-1}{a-1}+\frac{a-1}{b-1}=\frac{(b-1)^2+(a-1)^2}{(a-1)(b-1)}=\frac{(a+b)^2-2ab-2(a+b)+2}{ab-(a+b)+1}=\frac{64-10-16+2}{5-8+1}=\frac{40}{-2}=-20$;②当$a=b$时,易知$a\neq1$,所以$\frac{b-1}{a-1}+\frac{a-1}{b-1}=\frac{a-1}{a-1}+\frac{a-1}{a-1}=1+1=2$.综上所述,$\frac{b-1}{a-1}+\frac{a-1}{b-1}$的值为$-20$或2.

5. 8　**提示:**由题意,得$x_1+x_2=-2k$,$x_1x_2=k^2+k+3$,且根的判别式$4k^2-4(k^2+k+3)=-4k-12\geqslant0$,所以$k\leqslant-3$.所以$(x_1-1)^2+(x_2-1)^2=x_1^2-2x_1+1+x_2^2-2x_2+1=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-2(x_1+x_2)+2=(-2k)^2-2(k^2+k+3)-2(-2k)+2=2k^2+2k-4=2\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{2}$.因为$k\leqslant-3$,所以$2\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{2}\geqslant8$,即$(x_1-1)^2+(x_2-1)^2$的最小值是8.

6. $3<k\leqslant4$　**提示:**由题意,得$x-1=0$或$x^2-2x+\frac{1}{4}k=0$,且方程$x^2-2x+\frac{1}{4}k=0$有两个根,设这两个根分别是$m,n(m\geqslant n>0)$,则根的判别式$(-2)^2-4\times1\times\frac{1}{4}k\geqslant0$,且$m+n=2$,$mn=\frac{1}{4}k>0$,所以$0<k\leqslant4$,所以$m-n=\sqrt{(m+n)^2-4mn}=\sqrt{4-k}$.根据三角形三边关系定理,得$m-n<1<m+n$,即$\sqrt{4-k}<1<2$,所以$3<k\leqslant4$.

7. (1) **解:**由题意,得根的判别式$3^2-4\times1\times(k-2)\geqslant0$,解得$k\leqslant\frac{17}{4}$.故$k$的取值范围是$k\leqslant\frac{17}{4}$.

(2) **证明:**由题意,得$x_1+x_2=-3$,$x_1x_2=k-2$,所以$\frac{x_1}{x_1+1}-\frac{1}{x_2+1}=1-\frac{1}{x_1+1}-\frac{1}{x_2+1}=1-\left(\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}\right)=1-\frac{x_1+x_2+2}{x_1x_2+x_1+x_2+1}=1-\frac{-3+2}{k-2-3+1}=1+\frac{1}{k-4}$.因为$4<k\leqslant\frac{17}{4}$,所以$1+\frac{1}{k-4}\geqslant5$,即$\frac{x_1}{x_1+1}-\frac{1}{x_2+1}\geqslant5$.

8. D　**提示**：由题意，得 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$. 设关于 x 的方程 $cx^2-bx+a=0$ 的两根分别为 m，n，则 $m+n=\frac{b}{c}=-\frac{b}{a}\cdot\left(-\frac{a}{c}\right)=-(x_1+x_2)\cdot\frac{1}{x_1x_2}=-\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\left(\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}\right)$，$mn=\frac{a}{c}=\frac{1}{x_1x_2}$. 所以方程 $cx^2-bx+a=0$ 的两根分别为 $-\frac{1}{x_1}$，$-\frac{1}{x_2}$. 因为 $1<x_1<2<x_2<4$，所以 $\frac{1}{2}<\frac{1}{x_1}<1$，$\frac{1}{4}<\frac{1}{x_2}<\frac{1}{2}$，所以 $-1<-\frac{1}{x_1}<-\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}<-\frac{1}{x_2}<-\frac{1}{4}$，所以 $-\frac{1}{x_1}<-\frac{1}{x_2}$，所以方程 $cx^2-bx+a=0$ 的较小根 x_3 的取值范围为 $-1<x_3<-\frac{1}{2}$.

9. 6　**提示**：不妨设 a 是 a,b,c 中的最大者，即 $a\geqslant b$，$a\geqslant c$，由题意知 $a>0$，且 $b+c=2-a$，$bc=\frac{4}{a}$，所以 b,c 可看作是一元二次方程 $x^2-(2-a)x+\frac{4}{a}=0$ 的两个实数根，所以 $(2-a)^2-4\times\frac{4}{a}\geqslant0$，即 $(a^2+4)(a-4)\geqslant0$，所以 $a\geqslant4$. 当 $a=4$ 时，$b=c=-1$，满足题意. 故 a 的最小值为 4. 因为 $abc=4>0$，所以 a,b,c 为全大于 0 或一正二负. ①若 a,b,c 均大于 0，因为 $a\geqslant4$，所以 $a+b+c>4$，这与 $a+b+c=2$ 矛盾. ②若 a,b,c 为一正二负，即 $b<0$，$c<0$，则 $|a|+|b|+|c|=a-b-c=a-(2-a)=2a-2$，因为 $a\geqslant4$，所以 $2a-2\geqslant6$，当 $a=4$，$b=c=-1$ 时，满足题设条件且使等号成立. 故 $|a|+|b|+|c|$ 的最小值为 6.

10. 解：(1) 3　**提示**：$m^2+n^2=(m+n)^2-2mn=3$.

(2) 因为 $a\neq b$，所以 $a^2\neq b^2$ 或 $a^2=b^2(a=-b)$.

①当 $a^2\neq b^2$ 时，令 $a^2=m$，$b^2=n$，则 $2m^2-7m+1=0$，$2n^2-7n+1=0$，所以 m,n 是方程 $2x^2-7x+1=0$ 的两个不相等的实数根，所以 $\begin{cases}m+n=\frac{7}{2},\\ mn=\frac{1}{2},\end{cases}$ 此时 $a^4+b^4=m^2+n^2=(m+n)^2-2mn=\frac{45}{4}$；②当 $a^2=b^2(a=-b)$ 时，$a^2=b^2=\frac{7\pm\sqrt{41}}{4}$，此时 $a^4+b^4=2a^4=2(a^2)^2=2\times\left(\frac{7\pm\sqrt{41}}{4}\right)^2=\frac{45\pm7\sqrt{41}}{4}$. 综上所述，$a^4+b^4=\frac{45}{4}$ 或 $\frac{45\pm7\sqrt{41}}{4}$.

(3) 因为 $a+b=c-5$，$ab=\frac{16}{5-c}$，所以将 a,b 看作是方程 $x^2-(c-5)x+\frac{16}{5-c}=0$ 的两个实数根. 因为 $(c-5)^2-4\times\frac{16}{5-c}\geqslant0$，且 $c<5$，所以 $(5-c)^3\geqslant64$，所以 $5-c\geqslant4$，即 $c\leqslant1$，所以 c 的最大值为 1.

巅峰训练 5　用一元二次方程解决问题

1. C　**2.** D　**3.** D

4. C　**提示**：由题意可知，将四个长为 $3x-n$，宽为 x 的长方形纸片拼成一个大正方形，则大正方形的边长是 $3x-n+x$，面积是四个矩形的面积与中间小正方形的面积之和. 因为 $x(3x-n)=24$，小正方形的面积为 4，所以大正方形的面积为 $4\times24+4=100$，所以大正方形的边长为 10，所以 $3x-n+x=4x-n=10$，所以 $n=4x-10$. 因为小正方形的边长为 $3x-n-x$，即 $10-2x$. 因为 $3x-n>x$，即 $10-2x>0$，又因为 $(10-2x)^2=4$，所以 $10-2x=2$，所以 $x=4$，所以 $n=4\times4-10=6$.

5. D　**6.** 23 或 32

7. 12　**提示**：设共有 x 个球队. 因为前半段比赛每一个球队都进行了 3 场比赛，所以用 $\frac{3}{2}x$ 场比赛淘汰了 6 个球队. 又因为后半段为单循环比赛，所以可列方程为 $\frac{(x-6)(x-7)}{2}=33-\frac{3}{2}x$. 整理，得 $x^2-10x-24=0$，解得 $x_1=-2$(舍去)，$x_2=12$. 所以共有 12 个球队.

8. 9

9. 3 或 6　**提示**：构造如图所示的图形，显然矩形 $CDEF$ 的面积为 $6\times3=18$. 因为直线 AB 将原图形

得 $k=\frac{25}{4}$，此时方程的根为 $x=\frac{5}{2}$，所以三角形的三条边长分别为 $2,\frac{5}{2},\frac{5}{2}$；当 $x^2-5x+k=0$ 有一个根是 2 时，$k=6$，此时方程的根为 $x=2$ 或 $x=3$，所以三角形的三条边长分别为 2,2,3. 综上所述，k 的值为 $\frac{25}{4}$ 或 6.

11. 解：(1) 根据题意，得 $(-8)^2-4\times18\times(a-6)\geqslant0$ 且 $a-6\neq0$，解得 $a\leqslant6\frac{8}{9}$ 且 $a\neq6$. 所以 a 的最大整数值为 5.

(2) 当 $a=5$ 时，原方程可化为 $x^2+8x-18=0$，所以 $x^2+8x=18$. 所以 $2x^2+\frac{32x}{x^2+8x-16}=2x^2+\frac{32x}{18-16}=2x^2+16x=2(x^2+8x)=36$.

12. 解：(1) 设售价为 x 元/套.

由题意，得 $12\ 000-\frac{x-40}{0.1}\times2\geqslant11\ 800$，解得 $x\leqslant50$.

答：该产品的售价最高为 50 元/套.

(2) 根据题意，得 $12\ 000(1+a\%)\left[50\times\left(1-\frac{2}{5}a\%\right)-20\times(1+35\%)\right]=252\ 000$. 设 $a\%=t$，则该方程可化为 $12\ 000(1+t)\times\left[50\left(1-\frac{2}{5}t\right)-20(1+35\%)\right]=252\ 000$. 化简，得 $(5t-2)(4t+1)=0$，解得 $t_1=\frac{2}{5}$，$t_2=-\frac{1}{4}$(舍去). 所以 $a\%=40\%$，即 a 的值为 40.

13. 解：(1) (1,2)

(2) $x^2-(5m+1)x+5m=0$ 的解为 $x_1=1$，$x_2=5m$. 由题意，得 $|5m|=1$，解得 $m=\pm\frac{1}{5}$.

(3) 存在.

因为 $y=kx+2k+3=k(x+2)+3$，所以直线经过定点 $(-2,3)$. 所以当方程 $x^2+bx+c=0$ 的“友好点”为 $P(-2,3)$ 时符合题意，所以 $b=-1$，$c=-6$.

第 1 章综合练(2)

1. A

2. C　**提示：**因为反比例函数 $y=\frac{m-3}{x}$ 的图像在第二、四象限，所以 $m-3<0$，解得 $m<3$. 关于 x 的方程 $2(m-2)x^2-2(2m-1)x+2m+1=0$ 有实数根，当方程是一元一次方程时，$m=2$，有实数根；当方程是一元二次方程时，$2(m-2)\neq0$，$m\neq2$，$[-2(2m-1)]^2-4\times2(m-2)\times(2m+1)\geqslant0$，解得 $m\geqslant-\frac{5}{2}$. 综上所述，m 可取的整数值有 $-2,-1,0,1,2$，它们的和为 0.

3. B　**提示：**根据题意，得 $(a+b)^2=b(a+2b)$. 因为 $a=1$，所以 $(1+b)^2=b(1+2b)$. 整理，得 $b^2-b-1=0$，解得 $b=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$(负值已舍).

4. D　**提示：**设两根分别为 x_1,x_2，则 $x_1^2+x_2^2=5$. 所以 $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=a^2-2\times2a=5$. 整理，得 $a^2-4a-5=0$，解得 $a_1=5$，$a_2=-1$. 当 $a=5$ 时，原方程无实数根；当 $a=-1$ 时，方程有两个不相等的实数根. 所以 $a=-1$.

5. $x^2-7x+6=0$(答案不唯一)

6. 0 或 1

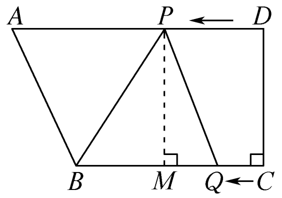
7. $\frac{7}{4}$ 或 $\frac{8}{3}$　**提示：**如图，过点 P 作 $PM\perp BC$ 于点 M，则四边形 $PDCM$ 为矩形. 由图可知，$CM=PD=2t$，$PM=DC=6$，$CQ=t$，所以 $QM=t$，$BQ=8-t$，$BM=|8-2t|$. 若以 B,P,Q 为顶点的三角形是等腰三角形，则 $0<t<8$，且可以分三种情况：

①若 $PQ=BQ$，在 $\mathrm{Rt}\triangle PQM$ 中，$PQ^2=t^2+6^2$，由 $PQ^2=BQ^2$，得 $t^2+6^2=(8-t)^2$，解得 $t=\frac{7}{4}$.

②若 $BP=BQ$，在 $\mathrm{Rt}\triangle PMB$ 中，$PB^2=(8-2t)^2+6^2$，由 $PB^2=BQ^2$，得 $(8-2t)^2+6^2=(8-t)^2$，即 $3t^2-16t+36=0$，此时 $(-16)^2-4\times3\times36<0$，所以此方程无解，所以 $BP\neq BQ$.

③若 $PB=PQ$，则 $BM=MQ$，即 $8-2t=t$，解得 $t=\frac{8}{3}$.

综上所述，当 $t=\frac{7}{4}$ 或 $t=\frac{8}{3}$ 时，以 B,P,Q 三点为顶点的三角形是等腰三角形.



8. 3　**提示**:由题意,得 $m^2+1=am$,$n^2+1=an$,且 m,n 可看作关于 x 的一元二次方程 $x^2-ax+1=0$ 的两根,所以 $m+n=a$,$(-a)^2-4\times1\times1>0$,即 $a>2$ 或 $a<-2$.所以 $(m-1)^2+(n-1)^2=m^2-2m+1+n^2-2n+1=am+an-2m-2n=a(m+n)-2(m+n)=(a-2)(m+n)=a(a-2)=a^2-2a=(a-1)^2-1$.因为 $a\geqslant3$,所以当 $a=3$ 时,$(m-1)^2+(n-1)^2$ 有最小值,且最小值为 $(3-1)^2-1=3$.

9. 4 或 $-\dfrac{5}{2}$　**提示**:当 $2x-1\geqslant x+2$,即 $x\geqslant3$ 时,根据题意,得 $(2x-1)(x+2)+(x+2)=48$,解得 $x_1=4$,$x_2=-6$(舍去);当 $2x-1<x+2$,即 $x<3$ 时,根据题意,得 $(2x-1)(x+2)-3[(2x-1)-9]=48$,解得 $x_1=-\dfrac{5}{2}$,$x_2=4$(舍去).综上所述,x 的值为 4 或 $-\dfrac{5}{2}$.

10. 9　**提示**:根据题意,得 $x(10x+90)=1\ 620$,解得 $x_1=9$,$x_2=-18$(舍去).所以前 9 个月的利润和等于 1 620 万元.

11. 0 或 16　**提示**:设这两个根分别为 x_1,$x_2(x_1\geqslant x_2)$,则 $x_1x_2+x_1+x_2=6$,即 $(x_1+1)(x_2+1)=7$.因为 x_1,x_2 都是整数,$x_1\geqslant x_2$,所以 $\begin{cases}x_1+1=7,\\x_2+1=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1+1=-1,\\x_2+1=-7,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x_1=6,\\x_2=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=-2,\\x_2=-8.\end{cases}$ 所以 $a=x_1x_2=0$ 或 $a=x_1x_2=16$.

12. (1) ③

(2) $\dfrac{27}{4}$　**提示**:设方程 $x^2-6x+c=0$ 的两根为 t,$3t$,根据根与系数的关系,得 $t+3t=6$,$t\cdot3t=c$,解得 $t=\dfrac{3}{2}$,所以 $c=3\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{27}{4}$.

(3) **解**:设方程的两根分别为 a,$3a$.根据根与系数的关系,得 $a+3a=m+n$,$a\cdot3a=mn$,即 $m+n=4a$,$mn=3a^2$,所以 $\dfrac{mn}{m^2+n^2}=\dfrac{mn}{(m+n)^2-2mn}=\dfrac{3a^2}{16a^2-2\times3a^2}=\dfrac{3}{10}$.

13. 解:(1) 由题意可知,此方程有两个相等的实数根,所以 $[-2(k+1)]^2-4(k^2+k+3)=0$,即 $4(k^2+2k+1)-4k^2-4k-12=0$.整理,得 $4k-8=0$,解得 $k=2$.

(2) 不存在.理由如下:

若该方程的两根是菱形的两对角线长,设菱形的两对角线长分别为 a,b,则 $a+b=2(k+1)$,$ab=k^2+k+3$.因为 $4k-8\geqslant0$,所以 $k\geqslant2$.因为菱形的两对角线互相垂直平分,所以由勾股定理,得 $\left(\dfrac{b}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=4$.整理,得 $b^2+a^2=16$,所以 $(a+b)^2-2ab=16$,即 $[2(k+1)]^2-2(k^2+k+3)=16$,解得 $k=\dfrac{-3\pm3\sqrt{5}}{2}$.因为 $k=\dfrac{-3\pm3\sqrt{5}}{2}<2$,所以不存在满足条件的常数 k.

14. 解:(1) 因为 $\alpha<\beta$,所以利用求根公式,得 $\alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$,$\beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$,所以 $\alpha+\beta=1$.

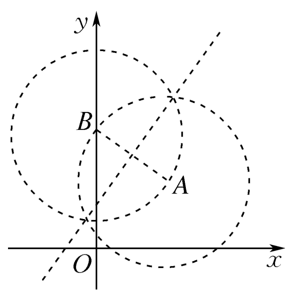
(2) ①由示例可得,$\alpha^2+\beta^2=3$,$\alpha^3+\beta^3=4$,$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^3+\alpha^2)+(\beta^3+\beta^2)=7$.所以 $\alpha^5+\beta^5=(\alpha^4+\alpha^3)+(\beta^4+\beta^3)=(\alpha^4+\beta^4)+(\alpha^3+\beta^3)=7+4=11$.

②123.

第 2 章　对称图形——圆

巅峰训练 6　圆

1. D　**提示**:当 $AC=CB$ 时,作 AB 的垂直平分线,交 x 轴、y 轴共有两个点 C;当 $AB=AC$ 时,以点 A 为圆心,AB 为半径作⊙A,交 y 轴、x 轴共有三个点 C;当 $AB=BC$ 时,以点 B 为圆心,AB 为半径作⊙B,交 y 轴有两个点 C.由作图可得,一共有 7 个满足条件的点 C.



2. A　提示：连接 OP. 由题意可知，$PA^2+PB^2=AB^2=OP^2$，所以 PA^2+PB^2 的值不变.

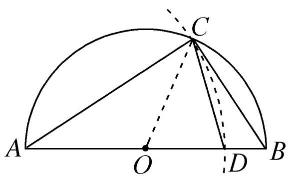
3. B　提示：分别计算除点 A 外的 8 个格点到点 A 的距离，并按距离的值从小到大的顺序排序为 $2\sqrt{2}$，$\sqrt{17}$，$\sqrt{17}$，$3\sqrt{2}$，5，5，5，$\sqrt{29}$，所以距离为 $2\sqrt{2}$，$\sqrt{17}$，$\sqrt{17}$ 的 3 个点在圆内，其余的点在圆上或圆外，所以 $\sqrt{17}<r\leqslant 3\sqrt{2}$.

4. C　提示：过点 D 作关于直线 BC 的对称点 F，连接 AF，交 BC 于点 P，交⊙A 于点 E，此时 $PE+PD$ 的值最小，为 EF 的长. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $\angle ADF=90^\circ$，$AB=CD=2$，$AD=BC=3$，所以 $DF=4$. 由勾股定理，得 $AF=\sqrt{AD^2+DF^2}=5$，所以 $AE+EF=5$，所以 $EF=5-1=4$，所以 $PE+PD$ 的最小值为 4.

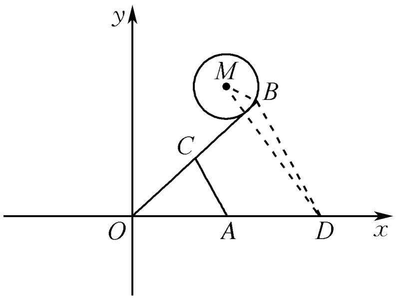
5. $(-3,4)$或$(-4,3)$

6. 18°　提示：连接 CE，DE，则 $AE=CE=DE=BD$，所以 $\angle ACE=\angle A=63^\circ$，$\angle DEB=\angle B$. 易得 $\angle ECD=\angle CDE=\angle DEB+\angle B=2\angle B$，所以 $\angle AEC=\angle ECD+\angle B=3\angle B$. 因为 $\angle A+\angle ACE+\angle AEC=180^\circ$，所以 $63^\circ+63^\circ+3\angle B=180^\circ$，所以 $\angle B=18^\circ$.

7. 18°　提示：如图，连接 OC，则 $OC=\frac{1}{2}AB=CD$，所以 $\angle COD=\angle CDO$. 设 $\angle A=x$，因为 $OA=OC$，$AC=AD$，所以 $\angle OCA=x$，$\angle ACD=\angle CDO=\angle COD=2x$，所以在 $\triangle ACD$ 中，$x+2x+2x=180^\circ$，解得 $x=36^\circ$，即 $\angle COD=\angle CDO=2x=72^\circ$，所以 $\angle OCD=36^\circ$. 因为 $OC=OB$，所以 $\angle OCB=\angle B=\frac{180^\circ-72^\circ}{2}=54^\circ$，所以 $\angle BCD=\angle OCB-\angle OCD=18^\circ$.



8. 2　提示：如图，在 x 轴上截取 $AD=OA$，连接 DB，MB，DM. 易知 AC 是 $\triangle ODB$ 的中位线，所以 $AC=\frac{1}{2}DB$，所以当线段 DB 的长最短时，线段 AC 的长最短. 因为 $DB\geqslant DM-MB=DM-1$，所以当点 D，B，M 依次共线时，线段 DB 的长最短. 因为点 $A(3,0)$，所以点 $D(6,0)$，所以 $DM=\sqrt{(6-3)^2+(0-4)^2}=5$，此时 $DB=5-1=4$. 所以线段 AC 长的最小值为 2.



9. (1) P_2，P_3　提示：根据“反演点”的定义可知，当 $0<OP\leqslant 2r$ 时，点 P 存在关于⊙O 的“反演点”. 因为 $OP_1=17$，$OP_2=12$，$OP_3=4$，$2r=2\times 8=16$，所以点 P_2，P_3 存在关于⊙O 的“反演点”.

(2) $8<OP\leqslant 16$

10. (1) **证明**：因为 $PO=PA+OA$，$PO<PC+OC$，$OA=OC$，所以 $PA<PC$.

(2) **解**：取 BC 的中点 E，连接 AE，交半圆于点 P_2. 由【问题情境】中给出的结论，易得 AP_2 的长是 AP 长的最小值. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，因为 $\angle ACB=90^\circ$，$AC=BC=4$，$P_2E=CE=\frac{1}{2}BC=2$，所以 $AE=\sqrt{AC^2+CE^2}=2\sqrt{5}$，所以 $AP_2=2\sqrt{5}-2$，即线段 AP 长度的最小值为 $2\sqrt{5}-2$.

(3) **解**：因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $AD=DC=6$，$\angle ADC=\angle DCF=90^\circ$. 由题意可知，$DE=CF$，易证 $\triangle ADE\cong\triangle DCF$ (SAS)，所以 $AE=DF$，$\angle DAE=\angle CDF$. 因为 $\angle CDF+\angle ADF=90^\circ$，所以 $\angle DAE+\angle ADF=90^\circ$，所以 $\angle APD=90^\circ$. 设 AD 的中点为 Q. 根据“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”可知 $QP=QD=QA$，所以点 P 在以 AD 为直径的圆弧上运动，$DQ=\frac{1}{2}AD=3$. 连接 QC 交弧于点 P，此时 CP 的长度最小. 在 Rt$\triangle QDC$ 中，$QC=\sqrt{DC^2+DQ^2}=3\sqrt{5}$，所以 $CP=QC-QP=3\sqrt{5}-3$，即线段 CP 长度的最小值为 $3\sqrt{5}-3$.

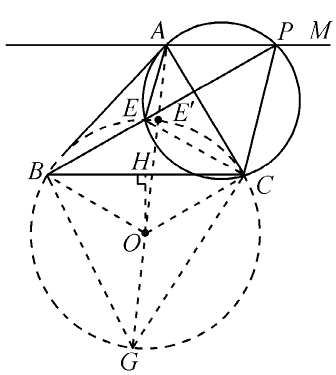
11. $3\sqrt{2}-1$　提示：如图，连接 OP 交⊙P 于点

10. 解：（1）$\angle AOD=\angle CGD$. 理由如下：

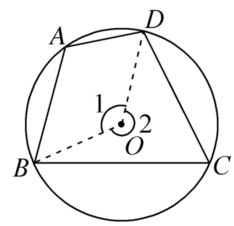
连接 OC，BC，BD. 因为 AB 是$\odot O$ 的直径，弦 $CD\perp AB$，所以$\angle AOD=\frac{1}{2}\angle COD=\angle CGD$，$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{BC}$，所以$\angle BCD=\angle BGD=\angle BDC$. 因为四边形 $BDCG$ 为$\odot O$ 的内接四边形，所以$\angle BGC+\angle BDC=180°$. 又因为$\angle BGC+\angle BGF=180°$，所以$\angle BGF=\angle BDC$. 所以$\angle BGD=\angle BGF$，即 GB 平分$\angle DGF$.

（2）根据题意，易证$\triangle BGD\cong\triangle BGF$，所以 $BD=BF=4\sqrt{5}$，所以 $BE=\sqrt{BD^2-DE^2}=8$. 设$\odot O$ 的半径为 r，则 $OD=r$，$OE=BE-OB=8-r$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ODE$ 中，由勾股定理，得 $OE^2+DE^2=OD^2$，即$(8-r)^2+4^2=r^2$，解得 $r=5$. 所以$\odot O$ 的半径为 5.

11. $2\sqrt{3}$　**提示**：如图，连接 CE. 因为 $AM/\!/BC$，所以$\angle MAC=\angle ACB=60°$，所以$\angle CEP=\angle MAC=60°$，所以$\angle BEC=120°$. 因为 $BC=9$，所以点 E 在所对弦 $BC=9$，含圆周角$\angle BEC=120°$的劣弧 BC 上运动. 设该劣弧所在的圆心为点 O，连接 OB，OC，OA，OA 交$\odot O$ 于点 E'，延长 AO 交$\odot O$ 于另一点 G，连接 BG，CG，过点 O 作 $OH\perp BC$ 于点 H. 易证 AE'的长为 AE 长的最小值. 易知$\angle BEC+\angle BGC=180°$，所以$\angle BGC=60°$，所以$\angle BOC=120°$. 又因为 $OB=OC$，$OH\perp BC$，所以 $BH=CH=\frac{1}{2}BC=\frac{9}{2}$，$\angle OBH=\angle OCH=30°$，所以 $OB=2OH$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle OHB$ 中，由勾股定理，得 $OH^2+BH^2=OB^2$，即 $OH^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2=(2OH)^2$，解得 $OH=\frac{3\sqrt{3}}{2}$（负值已舍）. 所以 $OE'=OC=OB=2OH=3\sqrt{3}$. 因为$\angle ACB=60°$，$\angle OCB=30°$，所以$\angle ACO=90°$. 所以 $OA=\sqrt{OC^2+AC^2}=5\sqrt{3}$. 所以 $AE'=OA-OE'=2\sqrt{3}$，即 AE 长的最小值为 $2\sqrt{3}$.



12.（1）**证明**：如图，连接 OB，OD. 因为$\angle A=\frac{1}{2}\angle 2$，$\angle C=\frac{1}{2}\angle 1$，且$\angle 1+\angle 2=360°$，所以$\angle A+\angle C=\frac{1}{2}\angle 1+\frac{1}{2}\angle 2=180°$. 同理$\angle ABC+\angle ADC=180°$. 所以$\angle A+\angle C=\angle ABC+\angle ADC=180°$.



（2）$\angle A+\angle BED$　$\angle C$

（3）$\frac{4\sqrt{3}}{3}$　**提示**：因为$\triangle DEF$ 是等边三角形，所以$\angle EDF=\angle EFD=60°$. 因为$\angle BAC=120°$，所以$\angle BAC+\angle EFD=180°$，所以 A，D，F，E 四点共圆. 连接 AF，则$\angle BAF=\angle EDF=60°$. 在$\angle BAC$ 内部作$\angle BAM=60°$，则点 F 始终在射线 AM 上运动. 由垂线段最短可知，当 $BF\perp AM$ 时，BF 的长最小. 此时，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABF$ 中，$\angle ABF=30°$，所以 $AF=\frac{1}{2}AB=\frac{4}{3}$，所以 $BF=\sqrt{AB^2-AF^2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，即 BF 长的最小值为$\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

巅峰训练 11　直线与圆的位置关系（1）

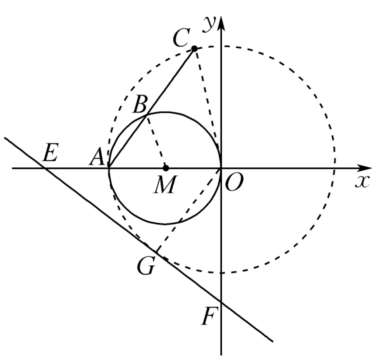
1. D　**2.** D

3. B　**提示**：过点 D 作 $DE\perp BC$ 于点 E，则 $DE=AB=4$，$BE=AD=2$，所以 $CE=4=DE$. 当$\odot O$ 与边 AD 相切，切点为 D 时，圆心 O 与点 E 重合，即 $OC=4$；当 $OA=OC$ 时，$\odot O$ 与 AD 交于点 A，设 $OA=OC=x$，则 $OB=6-x$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABO$ 中，由勾股定理，得 $4^2+(6-x)^2=x^2$，解得 $x=\frac{13}{3}$. 所以$\odot O$ 与边 AD 只有一个公共点时，OC 长的取值范围是 $4\leqslant OC\leqslant\frac{13}{3}$.

4. 2

5. $-\frac{12}{5}$　**提示**：如图，连接 BM，OC，设直线 $y=-\frac{3}{4}x-3$ 交 x 轴于点 E，交 y 轴于点 F. 易得 $OE=4$，$OF=3$，所以 $EF=\sqrt{OE^2+OF^2}=5$，所以 $EF=$

$\sqrt{OE^2+OF^2}=5$. 因为 $AB=BC$，$AM=OM$，点 $A(a,0)$，所以 $OC=2BM=-a$. 所以点 C 的运动轨迹是以点 O 为圆心，$-a$ 为半径的圆. 当⊙O 与直线 $y=-\frac{3}{4}x-3$ 相切时，⊙O 与直线 $y=-\frac{3}{4}x-3$ 有且只有一个公共点. 设切点为 G，连接 OG. 在 $\mathrm{Rt}\triangle EOF$ 中，易知 $OG\perp EF$，由等积法，得 $\frac{1}{2}OE\cdot OF=\frac{1}{2}EF\cdot OG$，所以 $OG=\frac{12}{5}$. 所以 $a=-\frac{12}{5}$.



6. $r=1$ 或 $2<r\leqslant 2\sqrt{7}$　**提示：**过点 D 作 $DE\perp BC$ 于点 E，过点 A 作 $AF\perp BC$ 于点 F，连接 CD. 因为 $AB=AC=4$，$\angle BAC=120°$，D 是 AB 的中点，所以 $\angle B=\angle C=30°$，$BD=2$. 所以 $DE=1$，$BE=\sqrt{3}$，$AF=2$，$BF=2\sqrt{3}$. 所以 $BC=2BF=4\sqrt{3}$，所以 $EC=BC-BE=3\sqrt{3}$，$CD=\sqrt{DE^2+EC^2}=2\sqrt{7}$. 当 $DE=r$，即 $r=1$ 时，⊙D 与边 BC 只有一个公共点；当点 B 在圆内部，点 C 在⊙D 上或在⊙D 外时，即 $2<r\leqslant 2\sqrt{7}$ 时，⊙D 与边 BC 同样只有一个公共点.

7. $\frac{20}{3}\leqslant CQ\leqslant 12$　**提示：**在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AC=5$，$BC=12$，$\angle ACB=90°$，所以 $AB=13$. 以 CQ 为直径作半圆 O. ①当半圆 O 与 AB 相切时，连接 OP，则 $OP\perp AB$，且 $AP=AC=5$，所以 $PB=AB-AP=8$. 设 $CO=x$，则 $OP=x$，$OB=12-x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle OPB$ 中，$OB^2=OP^2+PB^2$，即 $(12-x)^2=x^2+8^2$，解得 $x=\frac{10}{3}$，所以 $CQ=2x=\frac{20}{3}$. 故当 $CQ=\frac{20}{3}$ 且点 P 运动到切点的位置时，$\angle CPQ=90°$. ②当 $\frac{20}{3}<CQ<12$ 时，半圆 O 与直线 AB 有两个交点，当点 P 运动到这两个交点的位置时，$\angle CPQ=90°$. ③当 $CQ=12$ 时，点 Q 与点 B 重合，此时半圆 O 与 AB(除点 B 外)仅有一个交点，当点 P 运动到这个交点时，$\angle CPQ=90°$. ④当 $0<CQ<\frac{20}{3}$ 时，半圆 O 与直线 AB 相离，即当点 P 在边 AB 上运动时，均在半圆 O 外，$\angle CPQ<90°$，不合题意，舍去. 综上所述，线段 CQ 长的取值范围是 $\frac{20}{3}\leqslant CQ\leqslant 12$.

8. 解：(1) 如图 1，取 AB 的中点 G，作 $GF\perp AB$，交 DC 的延长线于点 F，交 BC 于点 E，则点 O 在线段 FG 上，$BG=\frac{1}{2}AB=2$，$GF\perp CD$. 所以 F 为直线 DC 与⊙O 的切点. 又因为 $\angle ABC=60°$，所以 $\angle BEG=30°$. 所以 $BE=2BG=4$. 所以 $EG=\sqrt{BE^2-BG^2}=2\sqrt{3}$，$EC=BC-BE=4=BE$. 可证 $\triangle BEG\cong\triangle CEF$. 所以 $EF=EG=2\sqrt{3}$. 所以 $FG=EF+EG=4\sqrt{3}$. 连接 OB，设⊙O 的半径为 r，则 $OB=OF=r$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle OBG$ 中，$OG=\sqrt{OB^2-BG^2}=\sqrt{r^2-4}$. 因为 $OG+OF=FG$，所以 $\sqrt{r^2-4}+r=4\sqrt{3}$，解得 $r=\frac{13\sqrt{3}}{6}$，经检验，符合要求. 所以⊙O 的半径为 $\frac{13\sqrt{3}}{6}$.

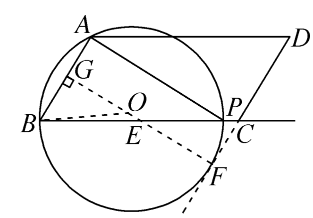


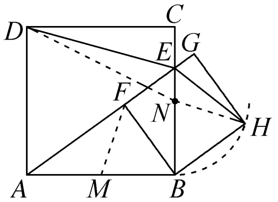
图 1

(2) 当⊙O 与▱$ABCD$ 的边的公共点个数为 2 时，$BP>12$；当⊙O 与▱$ABCD$ 的边的公共点个数为 3 时，$0<BP\leqslant 4$ 或 $BP=12$；当⊙O 与▱$ABCD$ 的边的公共点个数为 4 时，$4<BP<12$.　**提示：**当 AD 与⊙O 相切时，如图 2，此时切点必为 A. 连接 AO 并延长，交 BC 于点 H，则 $\angle DAH=\angle AHB=90°$. 连接 OB，OP，则 $BH=HP$. 所以 $AP=AB$. 又因为 $\angle ABC=60°$，所以 $\triangle ABP$ 是等边三角形，所以 $BP=AB=4$. 易知当 $0<BP\leqslant 4$ 时，⊙O 与▱$ABCD$ 的边有 3 个公共点. 当⊙O 经过点 D 时，如图 3，连接 BD，DP. 易知 $AD\parallel BC$，所以 $\angle ADB=\angle DBP$，可得 $AB=DP$. 又因为 $AB=CD$，所以 $CD=DP$. 易知

(3) **解**:$PA=\sqrt{3}PB+PC$.证明如下:

在 AP 上截取 $AQ=CP$,连接 BQ.易得 $\angle BAQ=\angle BCP$,$AB=CB$.所以 $\triangle ABQ\cong\triangle CBP$,所以 $BQ=BP$.又易得 $\angle APB=30°$,$PQ=\sqrt{3}PB$.所以 $PA=PQ+AQ=\sqrt{3}PB+PC$.

10. C　**提示**:如图,取 AB 的中点 M,连接 MF,取 BC 的中点 N,连接 NH,ND.因为四边形 $ABCD$,$BFGH$ 为正方形,$BF\perp AE$,所以 $BF=BH$,$MF=BM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}CB=BN=2$.因为 $\angle ABC=\angle FBH=90°$,所以 $\angle MBF=\angle NBH$.所以 $\triangle MBF\cong\triangle NBH$(SAS),所以 $NH=MF=2$.所以点 H 在以点 N 为圆心,2 为半径的 $\odot N$ 的一部分弧上运动.当点 D,N,H 依次共线时,DH 最大,最大值为 $DN+NH$.易得 $DN=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.所以 DH 长的最大值为 $2\sqrt{5}+2$.



11. (1) 不是　不是

(2) **解**:正方形 $ABCD$ 的"伴侣形",如图 1 所示.设"伴侣形"的两个顶点为 E,F,连接 AE,DE 和 AF.由题意,得 $AD=AE=ED$,则 $\triangle AED$ 为等边三角形,得 $\angle DAE=60°$,所以 $\angle EAB=30°$,同理 $\angle FAD=30°$,所以 $\angle FAE=30°$,则 $C_{\overset{\frown}{EF}}=\frac{30\times\pi\times1}{180}=\frac{\pi}{6}$,故正方形 $ABCD$"伴侣形"的周长为 $\frac{\pi}{6}\times4=\frac{2\pi}{3}$.

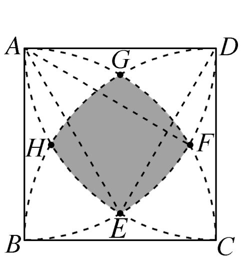


图 1

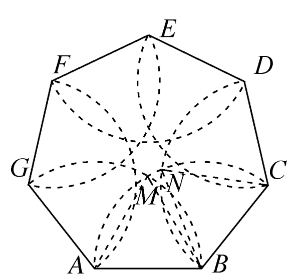


图 2

(3) $\frac{\pi}{3}$　$\frac{2\pi}{3}$　**提示**:如图 2,连接 AM,BM,BN 和 NC.由题意,得 $AM=BM=AB=BC=BN=NC$,则 $\triangle ABM$ 和 $\triangle BCN$ 都为等边三角形,得 $\angle ABM=\angle CBN=60°$.因为 $\angle ABC=\frac{180°\times(7-2)}{7}=\frac{900°}{7}$,所以 $\angle MBN=\angle ABC-\angle ABM-\angle CBN=\frac{60°}{7}$,则 $C_{\overset{\frown}{MN}}=\frac{\frac{60}{7}\times\pi\times1}{180}=\frac{\pi}{21}$,故当 $n=7$ 时,其"远伴侣形"的周长为 $\frac{\pi}{21}\times7=\frac{\pi}{3}$.同理,当 $n=8$ 时,其"远伴侣形"的周长为 $\frac{\left[\frac{180\times(8-2)}{8}-120\right]\times\pi\times1}{180}\times8=\frac{2\pi}{3}$.

(4) $\frac{(n-6)\pi}{3}$　**提示**:$\frac{\left[\frac{180\times(n-2)}{n}-120\right]\times\pi\times1}{180}\cdot n=\frac{(n-6)\pi}{3}$.

巅峰训练 15　弧长及扇形的面积　圆锥的侧面积

1. D　**提示**:因为 $AB=4$,$\angle B=90°$,所以 $\overset{\frown}{AE}$ 的长为 $\frac{90\pi\times4}{180}=2\pi$.所以 $\odot O$ 的半径为 1.设 $\odot O$ 与边 AD,DC 分别相切于点 F,G,连接 OG,连接 FO 并延长,交 BC 于点 H,则四边形 $ABHF$、四边形 $CDFH$ 和四边形 $CGOH$ 都是矩形,四边形 $DFOG$ 是正方形.连接 BO,在 Rt$\triangle BOH$ 中,易知 $BO=5$,$OH=3$,可得 $BH=4=BE$,所以点 H 与点 E 重合,所以 $AD=BC=BE+CE=BE+OG=5$.

2. D　**提示**:因为 $AQ\perp BQ$,所以点 Q 在以 AB 为直径的 $\odot O$(O 为 AB 的中点)上运动.连接 OC,则 $OB=OC=\frac{1}{2}AB=1$.由点 P 的起点和终点位置可知,点 Q 运动的路径为 $\overset{\frown}{BC}$.因为 $\angle ACB=90°$,所以点 A,C,Q,B 均在 $\odot O$ 上,所以 $\angle COB=2\angle BAC=60°$.所以点 Q 运动的路径长为 $\frac{60\pi\times1}{180}=\frac{\pi}{3}$.

3. B　**提示**:连接 DC_1,AC_1.因为四边形 $ABCD$ 是正方形,且边长为 1,所以 $AC=\sqrt{2}$,$\angle DAC=\angle OCB_1=45°$,$\angle B=90°$.由旋转,得 $\angle CAC_1=45°$,$\angle AB_1C_1=\angle B=90°$.所以 $\angle CAC_1=\angle DAC$,$CB_1=OB_1$,所以点 A,D,C_1 在一条直线上.易得 $B_1C_1=AB_1=1$,所以 $CB_1=OB_1=AC-AB_1=\sqrt{2}-1$.所以阴影部

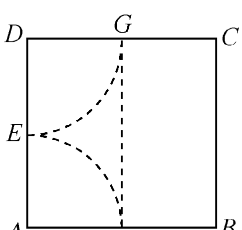
分的面积为 $S_{扇形CAC_1}-S_{\triangle OB_1C}-S_{\triangle AB_1C_1}=\frac{45\pi\times(\sqrt{2})^2}{360}-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2-\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{\pi}{4}-2+\sqrt{2}$.

4. A　**提示**:延长 DC,CB,分别交⊙O 于点 M,N,连接 OF.由圆与多边形的对称性可知,阴影部分的面积为$\frac{1}{4}(S_{\odot O}-S_{正方形ABCD})-S_{\triangle ADF}$.过点 O 作 $OH\perp AB$ 于点 H.在 Rt$\triangle OFH$ 中,由勾股定理,得 $FH=\sqrt{OF^2-OH^2}=\sqrt{6}$.易得 $AH=BH=\sqrt{2}$,所以 $AF=\sqrt{6}-\sqrt{2}$,所以 $S_{\triangle ADF}=\frac{1}{2}AD\cdot AF=2\sqrt{3}-2$.所以阴影部分的面积为$\frac{1}{4}\times[\pi\times(2\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}]-(2\sqrt{3}-2)=2\pi-2\sqrt{3}$.

5. 8 cm^2　**6.** 6

7. $\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$　**提示**:连接 OD,AD,PB,BD.因为 $\overset{\frown}{AD}=2\overset{\frown}{CD}$,且易得 $\overset{\frown}{AC}$ 的度数是 90°,所以 $\overset{\frown}{AD}$ 的度数是 60°.所以$\angle ABD=30°$,$\overset{\frown}{AD}$ 的长为$\frac{60\pi\times1}{180}=\frac{\pi}{3}$.所以当 $PA+PD$ 的值最小时,题图中阴影部分的周长最小.易知 B 是点 A 关于 OC 的对称点,所以 $PB=PA$.所以 $PA+PD=PB+PD\geqslant BD$,所以当 P 是 BD 与 OC 的交点时,$PA+PD$ 的值最小,最小值为 BD 的长.因为 AB 是⊙O 的直径,所以$\angle ADB=90°$.易得 $AD=1$,$BD=\sqrt{3}$.所以 $PA+PD$ 的最小值为$\sqrt{3}$,所以题图中阴影部分周长的最小值为$\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$.

8. $4\pi+8$　**提示**:如图,①当点 P 在边 AB 上时,连接 AO,则 $AO=\frac{1}{2}PQ=4$,由圆的定义可知,点 O 的运动路径为 $\overset{\frown}{EF}$;②当点 P 在边 BC 上时,可知 $PQ/\!/AB$,点 O 的运动路径为线段 FG;③当点 P 在边 CD 上时,连接 DO,则 $DO=\frac{1}{2}PQ=4$,由圆的定义可知,点 O 的运动路径为 $\overset{\frown}{GE}$.综上所述,PQ 的中点 O 所经过的路径长为$\frac{90\pi\times4}{180}+8+\frac{90\pi\times4}{180}=4\pi+8$.



9. 4π　**提示**:连接 OC.由四边形 $ABCD$ 是正方形,边长为$\sqrt{2}$ cm,易得 $OC=1$ cm.当正方形向右翻动 1 次后,点 O 经过的路径长为$\frac{90\pi\times1}{180}=\frac{\pi}{2}$(cm),所以当正方形向右翻动 8 次后,点 O 经过的路径长为$\frac{\pi}{2}\times8=4\pi$(cm).

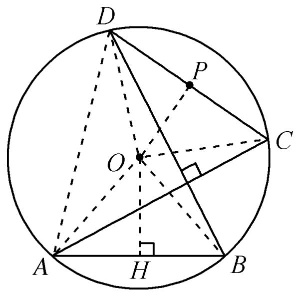
10. $\pi+\frac{3\sqrt{3}}{4}$　**提示**:当点 P 与点 A 重合时,设点 C 关于 BP 的对称点为 C';当点 P 与点 D 重合时,设点 C 关于 BP 的对称点为 C'',则 $BC_1=BC=BC'=BC''$.所以当点 P 从点 A 运动到点 D 时,线段 CC_1 扫过的区域为扇形 $BC'C''$ 和$\triangle BCC''$.在$\triangle BCD$ 中,因为$\angle BCD=90°$,$BC=\sqrt{3}$,$CD=AB=1$,所以 $BD=2$,所以$\angle DBC=30°$,所以$\angle CBC''=60°$,$\angle C'BC''=120°$.又因为 $BC=BC''$,所以$\triangle BCC''$为等边三角形.过点 C'' 作 $C''F\perp BC$ 于点 F,则 $BF=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $C''F=\frac{3}{2}$.所以线段 CC_1 扫过的区域的面积为 $S_{扇形BC'C''}+S_{\triangle BCC''}=\frac{120\pi\times(\sqrt{3})^2}{360}+\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{3}{2}=\pi+\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

11. (1) **证明**:因为$\angle ACB=90°$,所以$\angle BAC+\angle B=90°$.易知$\angle BCD=\angle DFE$,又因为$\angle DFE=\angle BAC$,所以$\angle BCD=\angle BAC$.所以$\angle BCD+\angle B=90°$,所以$\angle BDC=90°$,所以 $AB\perp CD$.又因为 OD 是⊙O 的半径,所以 AB 与⊙O 相切.

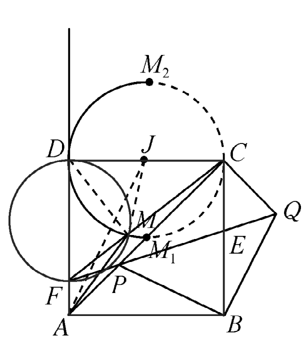
(2) **解**:连接 OE,DE.因为 CD 为⊙O 的直径,所以$\angle DEC=90°$.因为$\angle DFE=30°$,所以$\angle DOE=2\angle DFE=60°$,$\angle DCE=\angle DFE=30°$.所以 $DE=\frac{1}{2}CD=1$,所以 $CE=\sqrt{CD^2-DE^2}=\sqrt{3}$.因为 $OC=OD=1$,所以 $S_{\triangle COE}=\frac{1}{2}S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.所以 $S_{阴影部分}=S_{扇形ODE}+S_{\triangle COE}=\frac{60\pi\times1^2}{360}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}$.

12. π　**提示**:如图,连接 OA,OB,AD,OP,OD,

OC，过点 O 作 $OH\perp AB$ 于点 H. 因为 $AC\perp BD$，所以 $\angle DAC+\angle ADB=90^\circ$. 又因为 $\angle DOC=2\angle DAC$，$\angle AOB=2\angle ADB$，所以 $\angle DOC+\angle AOB=180^\circ$. 因为 $OH\perp AB$，$DP=PC$，所以 $AH=HB=\frac{1}{2}AB=3$，$OP\perp CD$，所以 $\angle AOH=\angle BOH$，$\angle COP=\angle DOP$. 所以 $\angle AOH+\angle COP=90^\circ$. 又因为 $\angle AOH+\angle OAH=90^\circ$，所以 $\angle COP=\angle OAH$. 易证 $\triangle OHA\cong\triangle CPO$，所以 $OP=AH=3$. 易得 $DP=CP=OH=4$. 所以点 P 在以点 O 为圆心，3 为半径的圆上运动. 设点 D 在圆上逆时针运动的圆心角为 n°，则由路径长为 $\frac{5\pi}{3}$，得 $\frac{n\pi\times5}{180}=\frac{5\pi}{3}$，解得 $n=60$. 易知 OD，OP 的旋转角度相等，所以点 P 运动的路径长为 $\frac{60\pi\times3}{180}=\pi$.



13. 解：(1) 如图，连接 DM，取 CD 的中点为 J. 因为 DF 是直径，所以 $\angle DMF=90^\circ$，所以 $\angle DMC=180^\circ-\angle DMF=90^\circ$，所以点 M 在以 CD 为直径的 $\odot J$ 上运动. 当点 P 与点 A 重合时，M_1 是 $\overset{\frown}{CD}$（直径 CD 下方）的中点；当点 P 与点 C 重合时，M_2 是 $\overset{\frown}{CD}$（直径 CD 上方）的中点. 所以点 M 的运动路径是图中的 $\overset{\frown}{M_1M_2}$（实线），运动的路径长为 $\sqrt{2}\pi$.



(2) 如图，连接 AJ，JM. 易知 $JM=\sqrt{2}$，$AJ=\sqrt{AD^2+JD^2}=\sqrt{10}$. 因为 $AM\geqslant AJ-JM$，所以 $AM\geqslant\sqrt{10}-\sqrt{2}$，即线段 AM 长的最小值为 $\sqrt{10}-\sqrt{2}$.

第 2 章综合练(1)

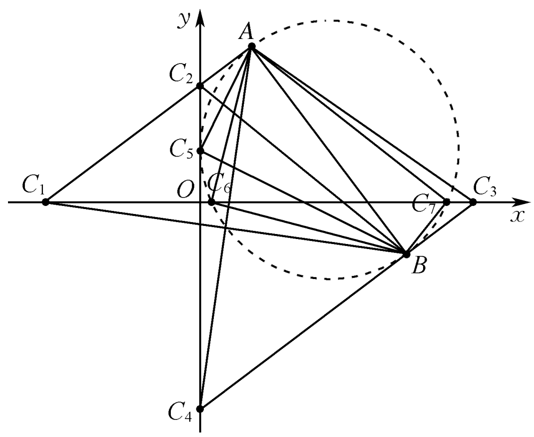
1. C　**提示**：过点 A 作 $AE\perp CB$，交 CB 的延长线于点 E，连接 AC. 易知 $\angle OAB=\angle OBA$，$\angle OBC=\angle OCB$. 又因为 $\angle AOC=90^\circ$，所以 $\angle ABC=\frac{1}{2}\times(360^\circ-90^\circ)=135^\circ$，所以 $\angle ABE=45^\circ$. 又因为 $\angle E=90^\circ$，$AB=\sqrt{2}$，所以 $AE=EB=1$. 易得 $EC=2$. 所以 $AC=\sqrt{AE^2+EC^2}=\sqrt{5}$. 易得 $OA=OC=\frac{\sqrt{2}}{2}AC=\frac{\sqrt{10}}{2}$，即 $\odot O$ 的半径为 $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

2. A　**提示**：连接 DP'，BP. 易证 $\triangle ADP'\cong\triangle ABP$，所以 $DP'=BP=1$. 所以点 P' 在以点 D 为圆心，1 为半径的 $\odot D$ 上运动. 连接 BD，当点 D，P'，B 依次共线时，BP' 的长度最小，最小值为 $BD-DP'$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$AB=AD=4$，由勾股定理，得 $BD=4\sqrt{2}$. 所以 BP' 长的最小值为 $BD-DP'=4\sqrt{2}-1$.

3. A　**提示**：设圆的圆心为 O. 根据题意，可知等边三角形的中心以及三个正方形的公共顶点即为点 O. 过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D，则 AD 必过点 O. 连接 OB. 易得 $\angle OBD=30^\circ$，所以 $AO=BO=2OD$. 设 $\triangle ABC$ 的边长为 $2x$，则 $BD=x$，$AD=\sqrt{3}x$，$OD=\frac{\sqrt{3}}{3}x$. 易得正方形的边长为 $\frac{\sqrt{6}}{3}x$，所以正方形的面积为 $\frac{2}{3}x^2$，所以三个正方形的面积之和为 $2x^2$. 易求得 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times2x\cdot\sqrt{3}x=\sqrt{3}x^2$. 所以等边三角形的面积与三个正方形的面积之和的比值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. B　**提示**：如图，分三种情况讨论：①当 A 为直角顶点时，过点 A 作 $AC\perp AB$，交 x 轴于点 C_1，交 y 轴于点 C_2，此时满足题意的点为 C_1，C_2；②当 B 为直角顶点时，过点 B 作 $BC\perp AB$，交 x 轴于点 C_3，交 y 轴于点 C_4，此时满足题意的点为 C_3，C_4；③当 C 为直角顶点时，以 AB 为直径作圆，由点 $A(2,6)$，$B(8,-2)$ 可得，圆心的坐标为 $(5,2)$，$AB=\sqrt{(8-2)^2+(-2-6)^2}=10$，所以此圆的半径为 5，所以此圆与 y 轴相切，与 x 轴相交，即此圆与 y 轴有 1 个交点，与 x 轴有 2 个交点，此时满足题

意的点为 C_5,C_6,C_7. 综上所述,满足条件的点 C 有 7 个.

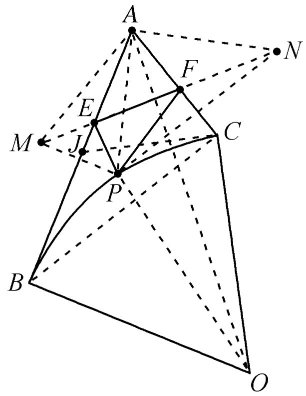


5. $9\sqrt{2}-9$ **6.** $180°$

7. $\dfrac{\sqrt{41}+5}{2}$ **提示**:连接 OA,过点 O 分别作 $OF\perp BC$ 于点 F,$OG\perp AE$ 于点 G. 易知△OBC 为等腰直角三角形,$BC=BD+CD=5$,所以 $OA=OB=OC=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$,$GD=OF=BF=\dfrac{5}{2}$,所以 $OG=DF=BD-BF=\dfrac{3}{2}$. 在 Rt△AGO 中,由勾股定理,得 $AG=\sqrt{OA^2-OG^2}=\dfrac{\sqrt{41}}{2}$. 所以 $AD=AG+GD=\dfrac{\sqrt{41}+5}{2}$.

8. $2\sqrt{2}$ **提示**:连接 PQ,OP. 因为直线 OQ 切⊙P 于点 Q,所以 $PQ\perp OQ$. 在 Rt△OPQ 中,由勾股定理,得 $OQ=\sqrt{OP^2-PQ^2}=\sqrt{OP^2-1}$. 当 OP 的值最小时,OQ 的值最小. 当 $OP\perp$ 直线 $y=3$ 时,OP 取得最小值,为 3,所以 OQ 长的最小值为 $\sqrt{OP^2-1}=\sqrt{3^2-1}=2\sqrt{2}$.

9. $3\sqrt{21}-9$ **提示**:分别作点 P 关于 AB 的对称点 M,关于 AC 的对称点 N,连接 EM,PM,FN,PN. 由对称性可知,$PE+EF+PF=EM+EF+FN$,所以当 M,E,F,N 四点共线时,$PE+EF+PF$ 的值最小,最小值为线段 MN 的长,如图所示. 连接 AM,AP,AN. 由对称性可知,$AP=AM=AN$,$\angle BAM=\angle BAP$,$\angle CAP=\angle CAN$. 又因为 $\angle BAC=60°$,所以 $\angle MAN=120°$. 所以易得 $MN=\sqrt{3}AM=\sqrt{3}AP$,所以当 AP 的值最小时,MN 的值最小. 取 AB 的中点 J,连接 BC,OA,CJ. 因为 $AB=6$,$AC=3$,所以 $JA=JB=3=AC$. 又因为 $\angle JAC=60°$,所以△JAC 是等边三角形. 所以 $JC=JA=JB$,$\angle AJC=\angle ACJ=60°$,所以 $\angle JBC=\angle JCB=30°$. 所以 $\angle ACB=90°$,所以 $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=3\sqrt{3}$. 又因为 $\angle BOC=60°$,$OB=OC$,所以△OBC 是等边三角形,所以 $OB=OC=BC=3\sqrt{3}$,$\angle OBC=60°$. 所以 $\angle ABO=90°$,所以 $OA=\sqrt{AB^2+OB^2}=3\sqrt{7}$. 连接 OP,则 $OP=OB=3\sqrt{3}$. 易知 $AP\geqslant OA-OP$,所以当点 P 在线段 OA 上时,AP 的值最小,最小值为 $3\sqrt{7}-3\sqrt{3}$. 所以 $PE+EF+PF$ 的最小值为 $\sqrt{3}\times(3\sqrt{7}-3\sqrt{3})=3\sqrt{21}-9$.



10. $4\sqrt{3}$ 或 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ 或 $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ **提示**:①如图 1,当⊙O 与边 AB,AD 相切时,过点 O 作直线 l 的垂线,交 AD 于点 E,交 BC 于点 F,过点 A 作直线 l 的垂线,交 BC 于点 G. 根据题意,得 $EF=OE+OF=2+4=6$. 易证四边形 $AGFE$ 是矩形,所以 $AG=EF=6$. 又因为 $\angle ABC=60°$,所以 $AB=2BG$. 设 $BG=x$,则 $AB=2x$. 在 Rt△ABG 中,由勾股定理,得 $AB^2=BG^2+AG^2$,即 $(2x)^2=x^2+6^2$,解得 $x=2\sqrt{3}$(负值已舍). 所以 $AB=4\sqrt{3}$,即菱形的边长为 $4\sqrt{3}$. ②如图 2~4,菱形的边长为 $4\sqrt{3}$,解法同①. ③如图 5,当⊙O 与边 AB 的反向延长线,边 AD 的延长线相切时,过点 O 作直线 l 的垂线,交 AD 的延长线于点 E,交直线 l 于点 F,过点 A 作直线 l 的垂线,交 BC 于点 G. 根据题意,得 $EF=OF-OE=4-2=2$. 易证四边形 $AGFE$ 是矩形,所以 $AG=EF=2$. 又因为 $\angle ABC=60°$,所以 $AB=2BG$. 设 $BG=x$,则 $AB=2x$. 在 Rt△ABG 中,由勾股定理,得 $AB^2=BG^2+AG^2$,即 $(2x)^2=x^2+2^2$,解得 $x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$(负值已舍). 所以 $AB=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$,即菱形的边长为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. ④如图 6~8,菱形的边长为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$,解法同③. ⑤如图 9,当⊙O 与边

AB，CD 所在的直线相切时，过点 O 作边 CD 的垂线，交 BA 的延长线于点 E，交 CD 于点 F，过点 A 作 $AG\perp CD$ 于点 G．易知四边形 $AGFE$ 是矩形，所以 $AG=EF=4$．易得 $\angle ADC=60°$，所以 $AD=2DG$．设 $DG=x$，则 $AD=2x$．在 $\mathrm{Rt}\triangle ADG$ 中，由勾股定理，得 $AG^2+DG^2=AD^2$，即 $4^2+x^2=(2x)^2$，解得 $x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$（负值已舍）．所以 $AD=\frac{8\sqrt{3}}{3}$，经检验，此时点 O 到直线 l 的距离为 4，符合题意，故此情况下菱形的边长为 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$．综上所述，该菱形的边长为 $4\sqrt{3}$ 或 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 或 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$．

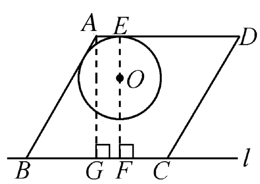


图 1

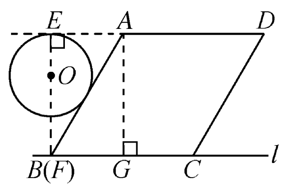


图 2

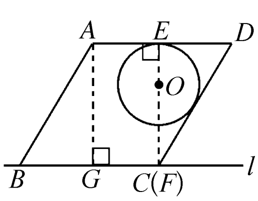


图 3

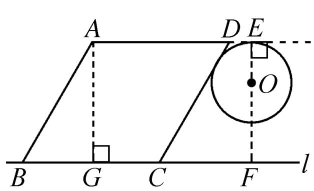


图 4

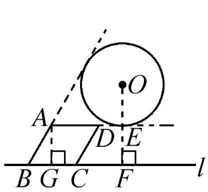


图 5

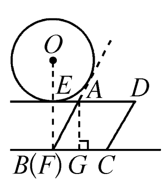


图 6

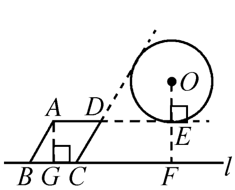


图 7

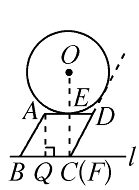


图 8

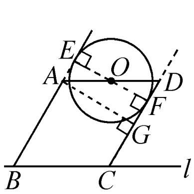


图 9

11．解：(1) 由题意，得 $\angle A=\frac{1}{2}\angle C$．又因为 $\angle A+\angle C=180°$，所以 $\angle A=60°$．

(2) ①连接 DO 并延长，交 $\odot O$ 于点 E，连接 BE，则 $\angle E=\angle A=60°$．因为 DE 是 $\odot O$ 的直径，所以 $DE=10$，$\angle DBE=90°$．所以 $\angle BDE=30°$．所以 $BE=\frac{1}{2}DE=5$．在 $\mathrm{Rt}\triangle DBE$ 中，由勾股定理，得 $BD=\sqrt{DE^2-BE^2}=5\sqrt{3}$．

②连接 BD，延长 CB 到点 E，使得 $EB=CD$，连接 AE．由(1)可知 $\angle BAD=60°$，所以 $\angle BCD=120°$．因为 CA 平分 $\angle BCD$，所以 $\angle ACD=\angle ACB=60°$，可得 $\angle ABD=\angle ACD=60°$，$\angle ADB=\angle ACB=60°$．所以 $\triangle ABD$ 为等边三角形，所以 $AB=AD$．易证 $\triangle ACD\cong\triangle AEB$，所以 $\angle E=\angle ACD=60°$，$\angle EAB=\angle CAD$．所以 $\angle EAC=\angle EAB+\angle BAC=\angle CAD+\angle BAC=60°$．所以 $\triangle ACE$ 为等边三角形，所以 $AC=CE$．所以 $BC+CD=BC+EB=CE=AC$．因为 A 为定点，而 C 为 $\overset{\frown}{BD}$ 上的动点，所以 AC 的最大值为 $\odot O$ 的直径，所以 $BC+CD$ 的最大值为 10．

12．(1) **证明**：易证 $\triangle CAD\cong\triangle BAE$，所以 $\angle ACD=\angle ABE$．所以 $\angle CHE=\angle ABC+\angle ABE+\angle BCH=\angle ABC+\angle ACD+\angle BCH=\angle ABC+\angle ACB=180°-\angle BAC=90°$．所以 CE 是 $\odot O$ 的直径．

(2) **解**：①由(1)可知，$\angle HCE+\angle HEC=90°$．因为点 A 是 $\triangle CEH$ 的内心，所以 $\angle ACE+\angle AEC=\frac{1}{2}(\angle HCE+\angle HEC)=45°$，所以 $\angle CAE=180°-(\angle ACE+\angle AEC)=135°$．因为 $\angle CAB=\angle DAE=90°$，所以 $\angle BAD=360°-\angle CAB-\angle DAE-\angle CAE=45°$．过点 D 作 $DG\perp AB$ 于点 G，则 $AG=DG=\frac{\sqrt{2}}{2}AD=2$．所以 $BG=AB-AG=1$．所以 $BD=\sqrt{DG^2+BG^2}=\sqrt{5}$．

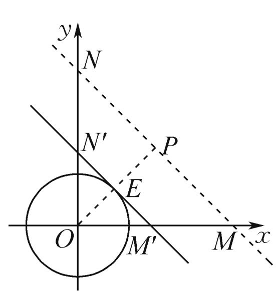
以 $CH=\sqrt{CA^2-HA^2}=2\sqrt{10}$.

8. 解:(1) 是　是　不是

(2) $1<OP\leqslant 2$　**提示**:根据题意可知,若 P 刚好是$\odot O$ 的“领域点”,则点 P 到$\odot O$ 的两条切线 PA,PB 之间的夹角为 $60°$. 因为 PA,PB 分别与$\odot O$ 切于点 A,B,所以 $\angle OAP=\angle OBP=90°$,$\angle APO=\angle BPO=\frac{1}{2}\angle APB=30°$,所以 $OP=2OA=2$,则 P 是$\odot O$ 的“领域点”时,$1<OP\leqslant 2$.

(3) ①如图,当点 O 到直线 $y=-x+b(b>0)$的距离为 $OP=2$ 时,线段 MN 上有且只有一个点是$\odot O$ 的“领域点”. 因为点 $M(b,0)$,$N(0,b)$,所以 $OM=ON$. 因为 $OP\perp MN$,所以 $PM=PN$,所以 $OP=PM=PN=2$,所以 $OM=ON=2\sqrt{2}$,所以 $b=2\sqrt{2}$,所以当线段 MN 上有且只有一个点是$\odot O$ 的“领域点”时,$b=2\sqrt{2}$.

②根据上述证明及(2)可知,当线段 MN 上存在$\odot O$ 的“领域点”时,b 的取值范围为 $1<b\leqslant 2\sqrt{2}$.



第 3 章　数据的集中趋势和离散程度

巅峰训练 16　平均数

1. D　**2.** C　**3.** B　**4.** B

5. $2\overline{x}+3\overline{y}-1$　**6.** 18.4

7. 5　**提示**:解分式方程,得 $x=a-2$. 因为分式方程的解为正数,且 $x-3\neq 0$,所以 $a>2$ 且 $a\neq 5$. 解不等式,得 $y\geqslant 2$,$y>\frac{a+2}{5}$. 因为不等式组的解集为 $y\geqslant 2$,所以 $\frac{a+2}{5}<2$,解得 $a<8$. 综上所述,$2<a<8$ 且 $a\neq 5$,所以整数 a 的值为 3,4,6,7,所以所有满足条件的整数 a 的平均数为 $\frac{3+4+6+7}{4}=5$.

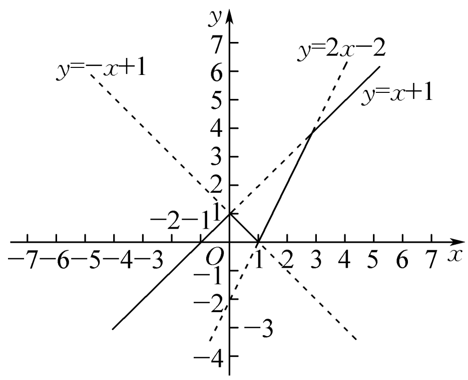
8. (1) 1,2,3,6(答案不唯一)

(2) 7 或 5　**提示**:设甲盘中有 x 个球,乙盘有 y 个球,丙盘中有 z 个球(x,y,z 都是不小于 4 的正整数). 由题意,得 $\begin{cases}3x+8y+13z=1+2+3+\cdots+15,\\x+y+z=15,\end{cases}$ 消去 x,得 $5y+10z=75$,即 $y+2z=15$. 所以当 $z=4$ 时,$y=7$,此时 $x=4$,符合题意;当 $z=5$ 时,$y=5$,此时 $x=5$,符合题意;当 $z=6$ 时,$y=3$,不符合题意,舍去. 综上所述,乙盘中小球的个数可以是 7 或 5.

9. 解:根据题意可知,前 5 次射击的平均环数小于 $\frac{9.0+8.4+8.1+9.3}{4}=8.7$,所以前 9 次的总环数最多为 $8.7\times 9-0.1=78.2$,所以第 10 次射击至少要得 $8.8\times 10+0.1-78.2=9.9$(环).

答:他在第 10 次射击中至少要得 9.9 环.

10. D　**提示**:审题可发现,丁的结论更具一般性,所以考虑从丁的结论出发,再进行推理. 设 $a_1=2k$(k 是正整数),由条件①,得 $a_2=2k+2$,$a_3=2k+4$,由条件②,得 $a_4=a_5-2$,a_4,a_5 是奇数,由条件③,得 $2k+2k+2+2k+4=a_5+a_5-2$,解得 $a_5=3k+4$,当 k 是奇数,$3k+4$ 也是奇数,所以丁的结论正确. 不妨设这 5 个数依次为 $2k,2k+2,2k+4,3k+2,3k+4$. 若 $a_2=6$,相当于丁的结论中的 k 满足 $2k+2=6$,解得 $k=2$,不是奇数,所以甲的结论正确. 若 $a_2=12$,同理,相当于丁的结论中的 $k=5$,为奇数,所以乙的结论正确. 若 a_2 是 4 的倍数,设 $a_2=4n$(n 是正整数),由条件①,得 $a_1=4n-2$,$a_3=4n+2$,由条件②,得 $a_5=a_4+2$,由条件③,得 $4n-2+4n+4n+2=a_4+a_4+2$,解得 $a_4=6n-1$,a_4 是奇数,符合题意,所以丙的结论正确. 易得 a_1,a_2,a_3 的平均数为 $\frac{2k+2k+2+2k+4}{3}=2k+2$,$a_4$,$a_5$ 的平均数为 $\frac{3k+4+3k+2}{2}=3k+3$,所以 a_1,a_2,a_3 的平均数与 a_4,a_5 的平均数之和为 $2k+2+3k+3=5(k+1)$. 因为 k 是正奇数,所以 $5(k+1)$是 10 的倍数,所以戊的结



12. 1或16或32　**提示**:设去掉的数为 x.因为一组连续自然数 $1,2,3,\cdots,k$ 去掉其中一个数后剩下的数的平均数为16,所以 $1+2+3+\cdots+k=16(k-1)+x=\frac{k(k+1)}{2}$,其中 $1\leqslant x\leqslant k$.所以 $1\leqslant\frac{k(k+1)}{2}-16(k-1)\leqslant k$,解得 $30\leqslant k\leqslant 32$.所以当 $k=30$ 时,$x=1$;当 $k=31$ 时,$x=16$;当 $k=32$ 时,$x=32$.所以去掉的数为1或16或32.

13. 2分　**提示**:根据题意可得,三位男生成绩的平均数为 $\frac{16\times5-17-15}{3}=16$(分).设三位男生的考试分数分别为 x_1,x_2,x_3,则 $\frac{1}{3}[(x_1-16)^2+(x_2-16)^2+(x_3-16)^2]=6$.所以这5位同学考试分数的方差为 $\frac{1}{5}[(x_1-16)^2+(x_2-16)^2+(x_3-16)^2+(17-16)^2+(15-16)^2]=4$(分^2),所以标准差为2分.

14. 解:(1) D错误.理由如下:

$10\%\times20=2\neq3$.

(2) 众数为5棵,中位数为5棵.

(3) ①第二步.

② $\overline{x}=\frac{4\times4+5\times8+6\times6+7\times2}{20}=5.3$(棵).

$5.3\times260=1\ 378$(棵).

答:估计这260名学生植树的总棵数为1 378.

15. 解:(1) 70　6

(2) 数学标准分为 $(71-70)\div\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$(分),英语标准分为 $(88-85)\div6=0.5$(分).

因为 $\frac{\sqrt{2}}{2}>0.5$,所以数学考得更好.

第4章　等可能条件下的概率

巅峰训练19　等可能性　等可能条件下的概率(一)

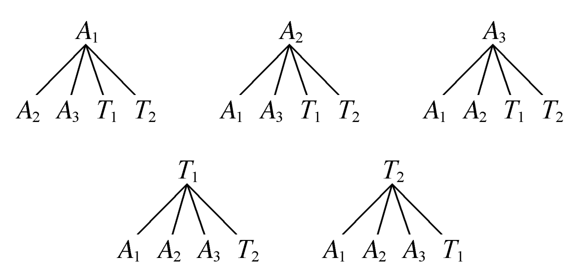
1. D　**2.** A　**3.** A　**4.** A

5. B　**提示**:由题意,得 $-m+1<0,11-m>0$,解得 $1<m<11$,所以符合条件的整数 m 的值为2,5,7,8.把分式方程 $\frac{mx}{x-8}=3+\frac{8x}{x-8}$ 去分母并整理,得 $(11-m)x=24$,解得 $x=\frac{24}{11-m}$.又由分式的意义,得 $x\neq8$,所以 $\frac{24}{11-m}\neq8$,所以 $m\neq8$.因为分式方程 $\frac{mx}{x-8}=3+\frac{8x}{x-8}$ 的解为整数,所以整数 m 的取值为5或7.所以所求概率是 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

6. 30　**7.** 350　**8.** 367　13

9. 解:(1) $\frac{2}{5}$

(2) 画树状图如图所示.



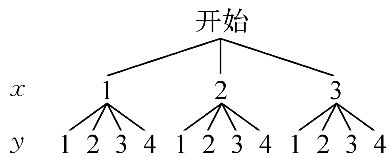
共有20种等可能的结果,所以恰好是一个径赛项目和一个田赛项目的概率为 $\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$.

(3) $\frac{3}{10}$

10. 解:(1) 根据题意,得 $\frac{y}{x+y}=\frac{2}{3}$.化简,得 $y=2x$(x 为正整数).

(2) 根据题意,得 $\begin{cases}\frac{y}{x+y}=\frac{2}{3},\\ \frac{x+5}{x+5+y+1}=\frac{1}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=4,\\ y=8.\end{cases}$ 所以 x 的值为4,y 的值为8.

和”之差都小于 4 的概率为$\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$.



13. (1) 4　2 或 3

(2) **解**:根据题意,得$\frac{6+m}{10}=\frac{4}{5}$,解得 $m=2$.

14. **解**:(1) 点 Q 所有可能的坐标有$(0,-2)$,$(0,0)$,$(0,1)$,$(-2,-2)$,$(-2,0)$,$(-2,1)$.

(2) 易知点 Q 在 x 轴上的坐标有$(0,0)$,$(-2,0)$,所以点 Q 在 x 轴上的概率为$\frac{1}{3}$.

(3) 因为⊙O 的半径是 2,当点 Q 坐标为$(0,-2)$,$(-2,-2)$,$(-2,0)$,$(-2,1)$时,过点 Q 能作⊙O 切线. 所以过点 Q 能作⊙O 切线的概率为$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

期末综合练(1)

1. C　**2.** A

3. A　**提示**:设 AD 切⊙B 于点 G,DC 切⊙B 于点 H,连接 BG,BH. 由圆的对称性可知,扇形 BEF 的面积等于与它相对称的扇形面积,从而题图中阴影部分的面积等于$\triangle ABG$,$\triangle BCH$ 与扇形 BGH 的面积之和. 因为在 Rt$\triangle ABG$ 中,易得$\angle ABG=30°$,所以 $AG=\frac{1}{2}AB=1$,所以 $BG=\sqrt{AB^2-AG^2}=\sqrt{3}$,所以 $S_{\triangle ABG}=\frac{1}{2}AG\cdot BG=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 同理,可得 $S_{\triangle BCH}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 又易得$\angle GBH=60°$,所以扇形 BGH 的面积为$\frac{60\pi\times(\sqrt{3})^2}{360}=\frac{\pi}{2}$. 所以阴影部分的面积为 $\sqrt{3}+\frac{\pi}{2}$.

4. C　**提示**:由题意可得,$a+b=-20$,$ab=1$,$c+d=19$,$cd=1$. 所以$(a+c)(b+c)(a-d)(b-d)=[ab+(a+b)c+c^2][ab-(a+b)d+d^2]=(1-20c+c^2)(1+20d+d^2)=(c^2-19c+1-c)(d^2-19d+1+39d)=(0-c)(0+39d)=-39cd=-39$.

5. D　**提示**:连接 MD,OD,ON,BD. 因为 C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点,D 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点,所以$\angle BOD=\frac{1}{2}\times90°=45°$. 又因为 $OB=OD$,所以$\angle OBD=\angle ODB=\frac{1}{2}\times(180°-45°)=67.5°$. 因为四边形 $ABDM$ 是半圆 O 的内接四边形,所以$\angle AMD=180°-\angle ABD=112.5°$. 因为$\angle AMN=110°<\angle AMD$,所以点 N 在 $\overset{\frown}{BD}$ 上. 因为$\angle DMN=\angle AMD-\angle AMN=2.5°$,所以$\angle DON=2\angle DMN=5°$. 所以$\angle BON=40°$. 所以 $\overset{\frown}{NB}>\overset{\frown}{ND}$,所以 $NB>ND$.

6. -3　**7.** 12　**8.** 4

9. 2 025　**提示**:由题意可知,$a+b=-1$,$a^2+a-2\,025=0$,即 $a^2+a=2\,025$. 所以$(a+1)^2+b=a^2+2a+1+b=a^2+a+a+b+1=2\,025-1+1=2\,025$.

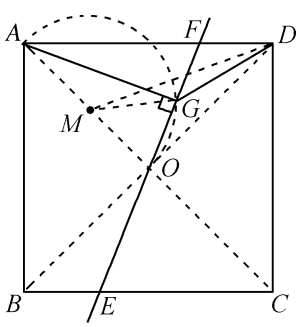
10. $2\sqrt{3}$　**提示**:延长 PE,PF,分别交⊙O 于点 G,H,连接 GH. 因为 $PE\perp OA$ 于点 E,$PF\perp OB$ 于点 F,OA,OB 为半径,所以 $PE=EG$,$PF=FH$,所以 EF 是$\triangle PGH$ 的中位线,所以 $EF=\frac{1}{2}GH$. 因为 GH 是⊙O 的弦,所以 GH 长的最大值为 $2OA=4\sqrt{3}$. 所以 EF 长的最大值为$\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

11. $\sqrt{7}$　**提示**:因为点 A 的坐标为(a,a),所以点 A 在直线 $y=x$ 上. 根据题意,得 $BC=1$. 又因为 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}$,点 C 在⊙B 上,所以当 AB 垂直于直线 $y=x$ 时,线段 AC 的长度最小. 易知此时 $AB=2\sqrt{2}$. 所以线段 AC 长的最小值为$\sqrt{(2\sqrt{2})^2-1^2}=\sqrt{7}$.

12. $t=\sqrt{2}$或$-1\leqslant t<1$　**提示**:若直线 l 与半圆只有一个交点,则有两种情况:直线 l 与半圆相切或直线 l 从过点 A 开始到过点 B 结束(不包括直线过点 A). 易知直线 l 与 x 轴所形成的锐角是 45°,所以当直线和半圆相切时,直线与 x 轴的交点为$(-\sqrt{2},0)$,所以此时 $t=\sqrt{2}$. 当直线 l 过点 A 时,$t=1$;当直线 l 过点 B 时,$t=-1$. 所以当 $t=\sqrt{2}$ 或 $-1\leqslant t<1$ 时,直线 l 与半圆只有一个交点.

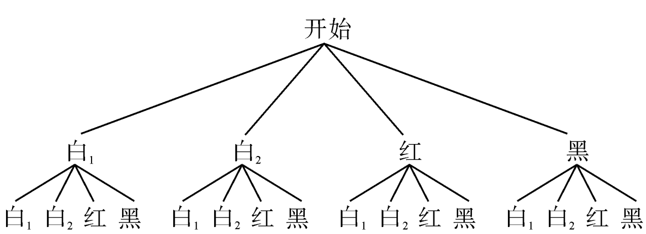
13. $2\sqrt{5}-2$　**提示**:如图,连接 AC,BD 交于点 O,设 AO 的中点为 M,连接 MG. 因为过点 E,F 的直线将正方形 $ABCD$ 分为面积相等的两部分,所以 EF 经过点 O. 因为 $AG\perp EF$,所以$\angle AGO=90°$. 易知点 G

在以 AO 为直径的半圆弧上. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形, $AB=4\sqrt{2}$, 所以 $AC=BD=8$, $AC\perp BD$, 所以 $AO=OD=\frac{1}{2}AC=4$, 所以 $AM=OM=MG=\frac{1}{2}AO=2$. 连接 DM, 则 $DG\geqslant DM-MG=DM-2$. 所以当 G 是线段 DM 与 $\odot M$ 的交点时, 线段 DG 的长最小. 由勾股定理, 得 $DM=\sqrt{OM^2+OD^2}=2\sqrt{5}$. 所以线段 DG 长的最小值为 $2\sqrt{5}-2$.



14. 解: (1) 摸出白球的概率是 $\frac{2}{2+1+1}=\frac{1}{2}$.

(2) 将两个白球分别记为白$_1$, 白$_2$, 画树状图如图所示.



由树状图可知, 共有 16 种等可能的结果, 两次都摸出白球的概率为 $\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

15. 解: (1) 如图 1 所示, B, C 两点即为所求.

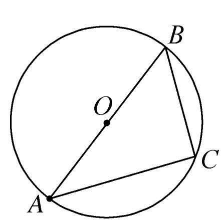


图 1

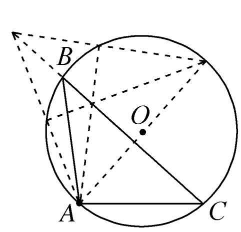
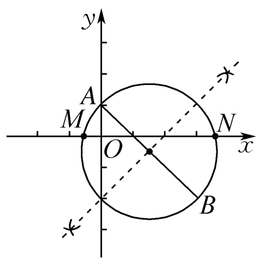


图 2

(2) 如图 2 所示, B, C 两点即为所求.

16. 解: (1) $n^2+bn+c=0$

(2) 如图, 点 M, N 即为所求.



(3) $\odot C$ 与 x 轴相切. 理由如下:

由题意知, $\odot C$ 与 x 轴两个交点的横坐标即为方程 $x^2-6x+9=0$ 的两个实数根. 因为根的判别式 $(-6)^2-4\times1\times9=0$, 所以方程 $x^2-6x+9=0$ 有两个相等的实数根. 对应地, $\odot C$ 与 x 轴只有一个交点, 即 $\odot C$ 与 x 轴相切.

(4) $x^2+bx+ac=0$ **提示:** 设点 $M(m,0)$, $N(n,0)$. 由勾股定理, 得 $AM^2=a^2+m^2$, $BM^2=c^2+(-b-m)^2$, $AB^2=(a-c)^2+b^2$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABM$ 中, $AM^2+BM^2=AB^2$, 所以 $a^2+m^2+c^2+(-b-m)^2=(a-c)^2+b^2$. 化简, 得 $m^2+bm+ac=0$. 同理, 可得 $n^2+bn+ac=0$, 所以 m, n 为方程 $x^2+bx+ac=0$ 的两个实数根.

期末综合练(2)

1. D **2.** C **3.** D

4. C **提示:** 由题意, 得 $ab<0$. 所以 $(-2)^2-4ab=4-4ab>0$, 且 $a\neq0$, 所以方程有两个不相等的实数根. 由根与系数的关系, 得 $x_1x_2=\frac{b}{a}<0$, 所以方程有一个正实数根和一个负实数根.

5. B **提示:** 设 $m^2-m=t$, 原方程化为 $(t+1)^2=4$, 解得 $t_1=1$, $t_2=-3$. 又因为 $t=m^2-m=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\geqslant-\frac{1}{4}$, 所以 $t_2=-3$ 应舍去. 所以 $m^2-m=1$.

6. B **提示:** 如图, 取 BC 的中点 T, 连接 BQ, AT, QT. 因为 PB 是 $\odot O$ 的直径, 所以 $\angle PQB=90°$. 所以 $\angle CQB=90°$. 所以 $QT=\frac{1}{2}BC=BT$. 易知 QT, AT 均为定值, 且 $AQ\geqslant AT-QT$, 所以当点 A, Q, T 共线时, AQ 的值最小. 此时设 $BT=QT=x$, 则 $AT=3+x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABT$ 中, 由勾股定理, 得 $AT^2=BT^2+AB^2$, 即

2024年江苏13大市期中压轴题精选

期中压轴1

1. C　**提示：**易知正八边形每个内角为$\frac{(8-2)\times180^\circ}{8}=135^\circ$，中心角为$\frac{360^\circ}{8}=45^\circ$. 由正八边形的对称性可知，$AE$，$DH$均为其外接圆的直径，点$O$为圆心，所以$\angle AOH=45^\circ$，$\angle AOD=135^\circ$，故③正确. 由四边形$ABCD$的内角和为$360^\circ$可知，$\angle BAD+\angle CDA=90^\circ$. 又由正八边形的对称性可得$\angle BAD=\angle CDA=45^\circ$，易知$BC\parallel AD$，$\angle DAH=90^\circ=\angle ADE$. 在$\mathrm{Rt}\triangle ADE$中，$DE^2+AD^2=AE^2$. 易得$BC=DE$，$AD=EH$，所以$BC^2+EH^2=AE^2$，故①正确. 分别过点$B$，$C$作$BK\perp AD$于点$K$，$CL\perp AD$于点$L$，并设$KL=BC=AH=\sqrt{2}a$，则$DL=AK=BK=a$，所以$AD=(2+\sqrt{2})a$，所以$\frac{AD}{AH}=\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$，故②错误. 易得$S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}(BC+AD)\cdot BK=(1+\sqrt{2})a^2$，$S_{矩形ADEH}=AD\cdot AH=(2\sqrt{2}+2)a^2=2S_{四边形ABCD}$，所以$S_{八边形ABCDEFGH}=2S_{四边形ABCD}+S_{矩形ADEH}=4S_{四边形ABCD}$，故④正确.

2. -2.7　0.7　**提示：**设方程$ax^2+2ax+c=0$的两个根分别为x_1，x_2，则$x_1+x_2=-\frac{2a}{a}=-2$. 由题中表格可知，该方程其中一个根在$-2.74\sim-2.73$之间，所以关于x的方程$ax^2+2ax+c=0$的一个根约为-2.7，则另一个根约为$-2-(-2.7)=0.7$.

3. 解：(1) $\sqrt{13}$　**提示：**连接AC. 由题意可知$\angle ABC=90^\circ$，所以AC为直径. 由勾股定理，得$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=2\sqrt{13}$ cm，所以$r=\sqrt{13}$ cm.

(2) $\frac{41}{8}$　**提示：**设圆心为点O，连接OP，交CD于点Q，连接BC，OD，则$OP\perp AB$. 由题意可知，$BP=1$ cm，四边形$BCQP$为矩形，所以$PQ=BC=4$ cm，$CQ=BP=1$ cm，所以$OQ=OP-PQ=(r-4)$cm，$DQ=CD-CQ=5$ cm. 在$\mathrm{Rt}\triangle DOQ$中，$OD^2=OQ^2+DQ^2$，即$r^2=(r-4)^2+5^2$，解得$r=\frac{41}{8}$.

(3) 设圆心为点O，过点O作$OM\perp AB$于点M，延长MO交CD于点N，连接OQ，OR，BC. 易证四边形$BCNM$为矩形. 由题意可知，$PB=5$ cm，$BQ=1$ cm，$CR=2$ cm，所以$PQ=PB-BQ=4$ cm，所以$MQ=\frac{1}{2}PQ=2$ cm，所以$CN=BM=MQ+BQ=3$ cm，所以$NR=CN-CR=1$ cm. 设$OM=x$ cm，则$ON=(4-x)$cm. 由勾股定理，得$OQ^2=OM^2+MQ^2$，$OR^2=ON^2+NR^2$，即$r^2=x^2+2^2$，$r^2=(4-x)^2+1^2$，所以$x^2+2^2=(4-x)^2+1$，解得$x=\frac{13}{8}$，所以$r=OQ=\sqrt{\left(\frac{13}{8}\right)^2+2^2}=\frac{5\sqrt{17}}{8}$ (cm).

(4) 若将该尺摆放在一个圆上(尺子只摆放一次，圆的圆心未标注)，不一定可以通过测量并计算出该圆的半径r，半径r的最小值为2 cm，最大值为$\frac{13}{2}$ cm.　**提示：**如图1，当圆的直径小于BC的长度时，此时“U形”尺上没有任何读数，则无法测量并计算出圆的半径.

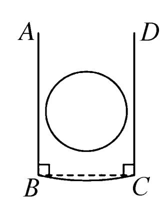


图1

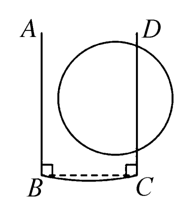


图2

如图2，当圆与AB和CD其中一边相交时，也相当于只测得一条弦的长度，也无法得到圆的半径r. 当圆较大，“U形”尺完全包含于圆内时，也无法测得圆的半径. 因为BC没有刻度，所以要能够测出圆的半径，则圆与AB，CD都要有交点. 如图3，当$\odot O$与AB，CD均相切时，直径等于BC的长为4 cm，即$\odot O$的半径r的最小值为2 cm.

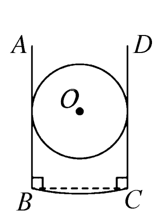


图3

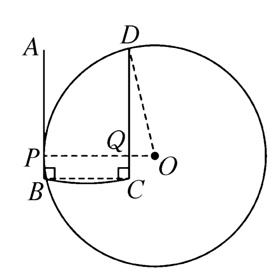


图4

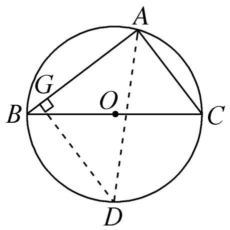


图 1

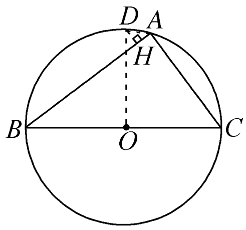


图 2

如图 2,当点 D 在 AB 上方时,因为$\angle DAB=45°$,连接 OD,则$\angle BOD=90°=\angle COD$,所以 D 是 $\overset{\frown}{BAC}$ 的中点.过点 D 作 $DH\perp AB$ 于点 H,则由(2)知,$AH+AC=BH=AB-AH$,所以 $AH=\frac{1}{2}(AB-AC)=\frac{1}{2}(8-6)=1$.在 Rt$\triangle ADH$ 中,由勾股定理,得 $AD=\sqrt{2}$.

综上所述,AD 的长为 $7\sqrt{2}$ 或$\sqrt{2}$.

期中压轴 17

1. B　**提示:**设点 $A(a,b)$,则 $ab=2$,$CO=a$.因为 $AB/\!/OC$,所以点 B 的纵坐标为 b.易证$\triangle ADB\cong\triangle CDO$,所以 $AB=CO=a$,所以点 B 的横坐标为 $AB+CO=2a$,所以点 $B(2a,b)$,所以 $k=2ab=4$.

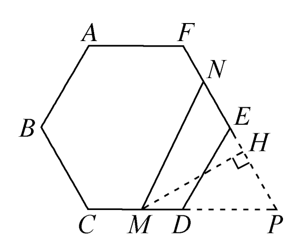
2. $2\sqrt{13}$　**提示:**延长 OD 到点 E,使 $DE=OD=1$,连接 OB,CE,则 $OE=2OD=2$.因为点 O 是$\triangle ABC$ 的内心,所以$\angle OBC=\frac{1}{2}\angle ABC$,$\angle OCB=\frac{1}{2}\angle ACB$,所以$\angle OBC+\angle OCB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=\frac{1}{2}(180°-\angle A)=30°$.在$\triangle OBC$ 中,$\angle BOC=180°-(\angle OBC+\angle OCB)=150°$.所以$\angle BOD=\angle BOC-\angle DOC=90°$.易证$\triangle CED\cong\triangle BOD$,所以$\angle E=\angle BOD=90°$.在 Rt$\triangle OCE$ 中,$\angle OCE=90°-\angle DOC=30°$,所以 $OC=4$.由勾股定理,得 $CE=2\sqrt{3}$.在 Rt$\triangle CDE$ 中,由勾股定理,得 $CD=\sqrt{CE^2+DE^2}=\sqrt{13}$,所以 $BC=2CD=2\sqrt{13}$.

3. 解:(1) 四边形 $ACDF$ 是平行四边形

90　$5\sqrt{2}$

(2) 在 BC 上截取 $BG=AF$,则 $BG=AF=ED$.连接 GF,DG.因为 $AD/\!/BC$,$\angle A=90°$,所以$\angle ABC=90°$,$\angle ADF+\angle AFD=90°$.因为 $BF=AD$,所以$\triangle ADF\cong\triangle BFG$(SAS),所以 $DF=FG$,$\angle ADF=\angle BFG$.所以$\angle BFG+\angle AFD=90°$,所以$\angle DFG=90°$.所以$\triangle DFG$ 为等腰直角三角形,所以$\angle GDF=45°$.因为 $DE=BG$,$AD/\!/BC$,所以四边形 $BGDE$ 是平行四边形,所以 $BE/\!/DG$.所以$\angle DOE=\angle GDF=45°$.

(3) 如图,延长 FE,CD 交于点 P,过点 M 作 $MH\perp FP$ 于点 H.在正六边形 $ABCDEF$ 中,易知 $AB=BC=CD=DE=EF=AF=2$.设 $CM=EN=x$,则 $DM=2-x=FN$.因为正六边形的每个外角都相等,且外角和为 360°,所以$\angle EDP=\angle PED=360°\div6=60°$.可知$\triangle DEP$ 为等边三角形,$\angle P=60°$,$DP=PE=DE=2$.在 Rt$\triangle MHP$ 中,$MP=MD+DP=2-x+2=4-x$,则 $HP=\frac{1}{2}(4-x)$,$MH=\frac{\sqrt{3}}{2}(4-x)$.所以 $NH=NE+EP-HP=x+2-\frac{1}{2}(4-x)=\frac{3}{2}x$.在 Rt$\triangle MNH$ 中,由勾股定理,得 $MN^2=NH^2+MH^2=\left(\frac{3}{2}x\right)^2+\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(4-x)\right]^2=3x^2-6x+12=3(x-1)^2+9\geqslant9$,当 $x=1$ 时,取等号.易知 MN 的最小值为 3.



期中压轴 18

1. D　**提示:**根据 A,B 两个方程的根的判别式相同,即可得出选项 A 正确;根据$\frac{c}{a}$和$\frac{a}{c}$符号相同,即可得出选项 B 正确;将 $x=2$ 代入方程 A 中,方程两边同时除以 4,即可得出$\frac{1}{2}$是方程 B 的一个根,故选项 C 正确;若两个方程有相同的解,则该解必然同时满足两