

第一章

直线与圆

知识梳理与重点解读

1. 直线的倾斜角与斜率

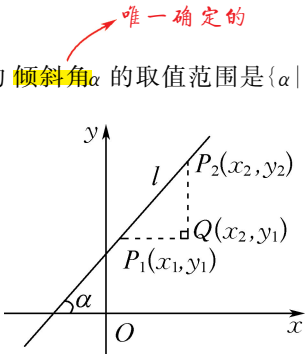
倾斜角:在平面直角坐标系中,对于一条与 x 轴相交的直线,把 x 轴绕着交点按逆时针方向旋转到与直线重合时,所转过的最小正角 α 也能刻画直线的倾斜程度,我们把这个角 α 称为这条直线的倾斜角.

当直线 l 与 x 轴平行或重合时,倾斜角 $\alpha=0$.因此,直线的倾斜角 α 的取值范围是 $\{ \alpha | 0 \leq \alpha < \pi \}$.

(1) 斜率: $k = \tan \alpha$. $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$

(2) 过两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2) (x_1 \neq x_2)$ 的直线的

斜率 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.



重点解读

直线斜率是如何随着倾斜角的变化而变化的?

α 的大小	0	$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
k 的范围	$k=0$	$k > 0$ 随 α 的增大而增大	不存在 所有直线都有倾斜角,但倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$ 的直线没有斜率	$k < 0$ 随 α 的增大而增大
图示				

2. 两条直线平行与垂直的判定

(1) $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$, l_1, l_2 不重合; $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow |\alpha_1 - \alpha_2| = 90^\circ$.

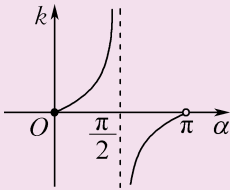
(2) $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$; $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$. 注意直线与坐标轴平行或垂直的特殊情况

3. 直线方程的形式

名称	已知条件	直线方程	适用范围
点斜式	直线上一点 $P_1(x_1, y_1)$ 和斜率 k	$y - y_1 = k(x - x_1)$	斜率存在
斜截式	斜率 k 和直线在 y 轴上的截距 b	$y = kx + b$	斜率存在
两点式	直线上两点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$	$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$	$x_1 \neq x_2$ 且 $y_1 \neq y_2$

成长笔记

►► 拓展 1 直线倾斜角范围与斜率范围的关系



(1) 倾斜角范围中含有 $\frac{\pi}{2}$, 斜率范围“靠两边”; 倾斜角范围中不含 $\frac{\pi}{2}$, 斜率范围“夹中间”;

(2) 斜率范围是 $k_1 < k < k_2$, 且范围中含有 0, 则以 0 为界分斜率为正、负, 倾斜角范围分别为 $[0, \theta_2), (\theta_1, \pi)$, 其中 $\tan \theta_1 = k_1, \tan \theta_2 = k_2$; 斜率范围中不含 0, 如 $k < k_1 (k_1 < 0)$, 则倾斜角的范围是 $(\frac{\pi}{2}, \theta_1)$, 其中 $\tan \theta_1 = k_1$, 其他情况类似.

►► 拓展 2

直线在两坐标轴上的截距相等、相反或绝对值相等时, 直线的特征:

(1) 直线在两坐标轴上的截距相等 $\Leftrightarrow$ 直线的斜率为 -1 或直线过原点;



(续表)

名称	已知条件	直线方程	适用范围
截距式	直线在 x 轴上的截距 a 和在 y 轴上的截距 b	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	$a \neq 0$ 且 $b \neq 0$
一般式		$Ax + By + C = 0 (A, B \text{ 不同时为 } 0)$	任何情况

注意点:

- (1) 直线 l 在 x 轴、 y 轴上的截距是直线 l 与 x 轴、 y 轴交点的横、纵坐标,而不是距离.
- (2) 方程 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ 表示不垂直于坐标轴的直线,方程 $(y_2-y_1)(x-x_1) - (x_2-x_1)(y-y_1) = 0$ 表示经过两点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 的任意直线.
- (3) 在求直线方程时,若不能断定直线是否有斜率,则应对斜率存在与否加以讨论.
- (4) 在用截距式时,应先判断截距是否为 0,若不确定,则需分类讨论.

重点解读**如何选择合适的直线方程?**

- (1) 已知直线的斜率,常选用点斜式或斜截式.
- (2) 已知直线的横截距和纵截距(截距均不为 0),可选用截距式.
- (3) 已知直线过某点,常选用点斜式,注意讨论斜率是否存在.
- (4) 仅知道直线的横截距,常设方程为 $x = my + a$ (其中 a 是横截距, m 是参数),注意此种设法不包含斜率为 0 的情况,在后面要学的圆锥曲线章节中经常使用.
- (5) 已知直线上横、纵坐标均不同的两点坐标,可选用两点式.

4. 如何利用直线方程判断直线的位置关系?

(1) **方程系数法:** 它的依据是应用直线的几何要素,即一点及方向加以判断,它是一种几何性质代数化的判断方式.

	斜截式: $l_1: y = k_1x + b_1;$ $l_2: y = k_2x + b_2$	一般式: $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0 (A_1, B_1 \text{ 不同时为 } 0);$ $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0 (A_2, B_2 \text{ 不同时为 } 0)$
l_1, l_2 相交	$k_1 \neq k_2$	$A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$
$l_1 \parallel l_2$	$\begin{cases} k_1 = k_2, \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$	$\begin{cases} A_1B_2 - A_2B_1 = 0, \\ A_1C_2 - A_2C_1 \neq 0 \end{cases}$
l_1, l_2 重合	$\begin{cases} k_1 = k_2, \\ b_1 = b_2 \end{cases}$	$\begin{cases} A_1B_2 - A_2B_1 = 0, \\ A_1C_2 - A_2C_1 = 0 \end{cases}$
$l_1 \perp l_2$	$k_1k_2 = -1$	$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

(2) **方程组法:** 它的依据是利用直线的方程构造方程组加以判断,即应用解析几何的基本思路,通过方程来研究曲线的几何性质.

方程组 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$ 的解	一组	无数组	无解
直线 l_1, l_2 的公共点个数	一个	无数个	零个
直线 l_1, l_2 的位置关系	相交	重合	平行

成长笔记**►拓展4 常见的点关于直线、直线关于直线的对称结论**

(1) 点 $P(x_0, y_0)$ 关于 x 轴对称的点为 $P'(x_0, -y_0)$;

(2) 点 $P(x_0, y_0)$ 关于 y 轴对称的点为 $P'(-x_0, y_0)$;

(3) 点 $P(x_0, y_0)$ 关于直线 $y = x$ 对称的点为 $P'(y_0, x_0)$;

(4) 点 $P(x_0, y_0)$ 关于直线 $y = -x$ 对称的点为 $P'(-y_0, -x_0)$;

(5) 点 $P(x_0, y_0)$ 关于直线 $x = m$ 对称的点为 $P'(2m - x_0, y_0)$;

(6) 点 $P(x_0, y_0)$ 关于直线 $y = n$ 对称的点为 $P'(x_0, 2n - y_0)$.

设直线 l 为 $Ax + By + C = 0$,

(1) l 关于 x 轴对称的直线方程是 $Ax + B(-y) + C = 0$;

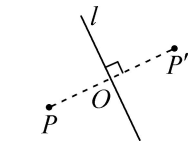
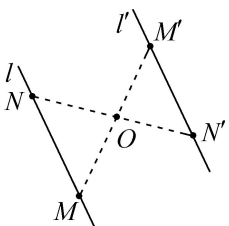
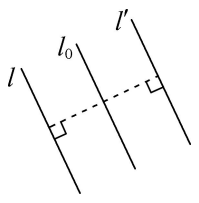
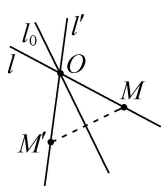
(2) l 关于 y 轴对称的直线方程是 $A(-x) + By + C = 0$;

(3) l 关于直线 $y = x$ 对称的直线方程是 $Ay + Bx + C = 0$;

(4) l 关于直线 $y = -x$ 对称的直线方程是 $A(-y) + B(-x) + C = 0$.



5. 与直线有关的对称问题如何求解？

	图示	特征	求解方法
点关于 直线对称	 求点 $P(x_0, y_0)$ 关于直线 $l: Ax + By + C = 0$ 的对称点 $P'(x', y')$	(1) PP' 的中点 O 在直线 l 上； (2) $k_{PP'}k_l = -1$	线段 PP' 的中点在已知直线上，且直线 PP' 与已知直线垂直，即 $\begin{cases} A \cdot \frac{x_0 + x'}{2} + B \cdot \frac{y_0 + y'}{2} + C = 0, \\ A(y' - y_0) - B(x' - x_0) = 0, \end{cases}$ 解此方程组可得 x', y' ，即得点 P' 的坐标
直线关于 点对称	 求直线 l 关于点 O 对称的直线 l' 的方程	(1) 直线 $l \parallel$ 直线 l' ； (2) 点 O 到直线 l 和直线 l' 的距离相等； (3) 直线 l 上任一点 M 关于点 O 的对称点 M' 在直线 l' 上	方法一 在直线 l 上取两点 M, N ，求出这两点关于点 O 的对称点 M', N' ，则直线 $M'N'$ 的方程即为所求的直线方程 方法二 在直线 l 上取一点 M ，求出它关于点 O 的对称点 M' ，再结合直线 $l' \parallel$ 直线 l 求得直线 l' 的方程 方法三 设直线 l' 上的任一点 $M'(x, y)$ ，求出点 M' 关于点 O 的对称点 M ，根据点 M 在直线 l 上，得出关于 x, y 的方程，即直线 l' 的方程
直线关于 直线对称	 两直线平行 直线 $l: Ax + By + C_1 = 0$ 与直线 $l_0: Ax + By + C = 0$ 平行，求 l 关于 l_0 对称的直线 l' 的方程	(1) 直线 $l \parallel$ 直线 l' ； (2) 直线 l 与直线 l' 到直线 l_0 的距离相等； (3) 直线 l 上任一点关于 l_0 的对称点在直线 l' 上	方法一 利用直线 l' 与直线 l_0 间的距离等于直线 l 与直线 l_0 间的距离 方法二 设直线 l' 的方程为 $Ax + By + C_2 = 0$ ，在直线 l 上找一点 M ，求出点 M 关于直线 l_0 对称的点 $M'(x', y')$ ，再代入 $Ax + By + C_2 = 0$ 解出 C_2 即可
	 两直线相交 直线 l 与直线 l_0 交于点 O，求 l 关于 l_0 对称的直线 l' 的方程	(1) 直线 l 与直线 l_0 的交点 O 在直线 l' 上； (2) 直线 l 上的任一点 M 关于直线 l_0 的对称点在直线 l' 上	取直线 l 上任意一点 M ，求出其关于直线 l_0 对称的点 M' ，由点 O 和点 M' 求出直线 l' 的方程



6. 两条直线的交点坐标

已知两条直线 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ 相交, 设这两条直线的交点为 P , 则点 P 的坐标是方程组 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$ 的解.

7. 平面上的距离

名称	条件	公式	图示
平面上两点间的距离	两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$	$ AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	
点到直线的距离	点 $P(x_0, y_0)$, 直线 $Ax + By + C = 0$ (其中 A, B 不全为 0)	$d = \frac{ Ax_0 + By_0 + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$	
两条平行直线间的距离	平行直线 $Ax + By + C_1 = 0, Ax + By + C_2 = 0$ (一般式方程, x, y 的系数对应相等, 其中 A, B 不全为 0, 且 $C_1 \neq C_2$)	$d = \frac{ C_1 - C_2 }{\sqrt{A^2 + B^2}}$	

温馨提示:

- (1) 用点到直线的距离公式时, 直线方程应为一般式方程.
- (2) 两条平行直线间的距离公式适用于两条直线的方程都是一般式, 并且 x, y 的系数分别对应相等.

重点解读

如何利用对称解决距离和与差的最值问题?

类型	图示	最值
线段之和最小问题(在直线 m 上找一点 P , 使得 $ PA + PB $ 最小)	点 A, B 在直线 m 异侧 	$(PA + PB)_{\min} = AB $
	点 A, B 在直线 m 同侧 	$(PA + PB)_{\min} = A'B $

类型	图示	最值
线段之差绝对值最大问题(在直线 m 上找一点 P , 使得 $ PA - PB $ 最大)	点 A, B 在直线 m 同侧 	$ PA - PB _{\max} = AB $
	点 A, B 在直线 m 异侧 	$ PA - PB _{\max} = A'B $

成长笔记

►► 拓展 5 距离的常用结论

(1) 若两点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 在直线 $l: y = kx + b$ 上, 则 $|PQ| = |x_1 - x_2| \sqrt{1 + k^2} = |y_1 - y_2| \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}}$.

(2) $\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标分别为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$, 则它的重心 G 的坐标为 $(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3})$.

(3) 距离模型的代数问题几何化

① 求形如 $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ 的代数式的取值或取值范围问题, 转化为动点 $P(x, y)$ 与定点 $Q(x_0, y_0)$ 的距离求解; 若出现 $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \pm \sqrt{(x - c)^2 + (y - d)^2}$, 则转化为动点 $P(x, y)$ 到定点 $T(a, b), Q(c, d)$ 的距离和或差求解.

② 求形如 $\frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ (A, B 不同时为 0) 的代数式的取值或取值范围问题, 转化为动点 $T(x, y)$ 到直线 $Ax + By + C = 0$ 的距离求解;

③ 求形如 $\frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ (A, B 不同时为 0) 的代数式的取值或取值范围问题, 转化为两条平行直线 $Ax + By + C_1 = 0$ 与 $Ax + By + C_2 = 0$ 的距离求解.



8. 圆的定义及方程

在平面内,到定点的距离等于定长的点的集合.定点就是圆心,定长就是半径.

(1) **圆的标准方程**: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, 其中 (a,b) 为圆心, r 为半径.

(2) **圆的一般方程**: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$, 其中 $D^2+E^2-4F>0$, 圆心为 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$, 半径为 $\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$.

重点解读

二元二次方程表示的曲线与圆的关系如何?

判断二元二次方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 是否表示圆可按如下步骤进行:(1) 判断 A,C 是否相等,且不等于 0, B 是否等于 0;(2) 若满足 $A=C\neq 0, B=0$, 则判断 D^2+E^2-4AF 是否大于 0, 或将方程左端配方, 然后与圆的标准方程进行对比, 从而做出判断.

9. 点与圆的位置关系

已知点 $P(x_0, y_0)$, 圆 C 的标准方程: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, 圆的一般方程: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 (D^2+E^2-4F>0)$.

若点 P 在圆 C 内, 则 $|PC|<r, (x_0-a)^2+(y_0-b)^2<r^2$ 或 $x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F<0$;

若点 P 在圆 C 上, 则 $|PC|=r, (x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$ 或 $x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F=0$;

若点 P 在圆 C 外, 则 $|PC|>r, (x_0-a)^2+(y_0-b)^2>r^2$ 或 $x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F>0$.

10. 直线与圆的位置关系

位置关系		相交	相切	相离
图示				
公共点个数		2	1	0
判断方法	代数法	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
	几何法	$d < r$	$d = r$	$d > r$

注:① Δ 是直线和圆的方程联立 $\begin{cases} Ax+By+C=0, \\ x^2+y^2+Dx+Ey+F=0, \end{cases}$ 消去 y (或 x) 得到的一元二次方程的判别式; d 是圆心到直线的距离, r 为圆的半径.

②在研究直线与圆的位置关系问题时,大多数问题都是应用几何法进行处理的;若问题涉及直线与圆的交点的坐标问题,则需要应用代数法进行求解.

③在应用几何法处理直线与圆的位置关系时,本质就是紧紧抓住圆的几何要素——圆心与半径来处理问题.

成长笔记

►拓展 6 常见特殊圆的方程

(1) 以 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 为直径的两端点的圆的方程: $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$.

(2) 与一条坐标轴相切的圆的方程: $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$ 或 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$.

(3) 过原点的圆的方程: $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2$.

►拓展 7

(1) 过圆上一点 $P(x_0, y_0)$ 的切线方程如下:

圆 $x^2+y^2=r^2$, 切线 $xx_0+yy_0=r^2$;

圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, 切线 $(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=r^2$;

圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$, 切线 $xx_0+yy_0+D \cdot \frac{x_0+x}{2}+E \cdot \frac{y_0+y}{2}+F=0$.

(2) 过圆外一点 $P(x_0, y_0)$ 作圆的两条切线, 切点分别为 A, B , 则切点弦 AB 的方程:

圆 $x^2+y^2=r^2$, 切点弦 $xx_0+yy_0=r^2$;

圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, 切点弦 $(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=r^2$;

圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$, 切点弦 $xx_0+yy_0+D \cdot \frac{x_0+x}{2}+E \cdot \frac{y_0+y}{2}+F=0$.



重点解读

如何求圆的弦长?

(1) 几何法: 设圆的半径为 r , 弦心距为 d , 弦长为 l , 则 $l = 2\sqrt{r^2 - d^2}$.

(2) 代数法: 设直线与圆相交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点, 且直线 AB 的斜率 k 存在, 解方程组 $\begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0, \end{cases}$ 消去 y (或 x) 得到的一元二次方程, 从而求得

$x_1 + x_2, x_1 x_2$ 的值, 则弦长 $|AB| = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2|$, 或 $|AB| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} |y_1 - y_2|$.

11. 圆与圆的位置关系

位置关系		相交	相切		相离	
			外切	内切	外离	内含
图示						
公共点个数		2	1	1	0	0
公切线条数		2	3	1	4	0
判断方法	代数法	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$	$\Delta < 0$
	几何法	$ r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$	$d = r_1 + r_2$	$d = r_1 - r_2 $	$d > r_1 + r_2$	$d < r_1 - r_2 $

注: Δ 是两圆的方程联立 $\begin{cases} x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0, \\ x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0, \end{cases}$ 消去 y (或 x) 得到的一元二次方程的判别式; d 是两圆的圆心距, r_1, r_2 为两圆的半径; 当用代数法求得 $\Delta = 0$ 或 $\Delta < 0$ 时, 还需进一步判断两圆的位置关系.

题型精解

题型一 直线的倾斜角与斜率

例 1 (2025 浙江宁波期中) 在平面直角坐标系中, 已知某直线沿 x 轴正方向平移 3 个单位长度, 再沿 y 轴负方向平移 2 个单位长度后, 直线回到原来位置, 则此直线的斜率 $k =$ _____.

答案 $-\frac{2}{3}$

解析 1 设直线 l 上任意一点 $P(x_0, y_0)$, 将直线 l 沿 x 轴正方向平移 3 个单位长度, 则点 P 移动后为 $P_1(x_0 + 3, y_0)$, 再沿 y 轴负方向平移 2 个单位长度, 则点 P_1 移动后为 $P_2(x_0 + 3, y_0 - 2)$. 因为点 P, P_2 都在直线 l 上, 所以直线 l 的斜率 $k = \frac{y_0 - 2 - y_0}{x_0 + 3 - x_0} = -\frac{2}{3}$.

解析 2 由于直线沿 x 轴正方向平移 3 个单位长度, 再沿 y 轴负方向平移 2 个单位长度后, 直线回到原来位置, 所以 $\Delta x = 3, \Delta y = -2$, 从而 $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2}{3}$.

例 2 (2025 湖北期中) 已知点 $A(1, -2), B(2, 1)$, 经过点 $P(0, -1)$ 作直线 l , 若直线 l 与线段 AB 恒有公共点, 则直线 l 的倾斜角的取值范围是 _____ ()

成长笔记

拓展 8

已知圆 $O_1: x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$, 圆 $O_2: x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$.

(1) 当两圆相交时, 两个交点的连线叫作公共弦, 两圆的公共弦方程为 $(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0$.

(2) 当两圆相切时, 两个圆的一条公切线方程为 $(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0$.

小妙招

由于直线 l 与线段 AB 有公共点, 而公共点是变化的, 为此, 作一个简图将问题直观化, 有利于问题的求解.