

高中数学

小题才王做[®]

.....选择性必修第一册 BS.....

主 编 恩波教育研究中心
编 委 李宁宁 葛爱菊 雷秋华

 南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学小题狂做：选择性必修·第一册：BS /
恩波教育研究中心主编. —南京：南京大学出版社，
2021.6(2025.4重印)
ISBN 978-7-305-24625-8

I. ①高… II. ①恩… III. ①中学数学课—高中—习
题集 IV. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2021)第 118227 号

出版发行 南京大学出版社
社 址 南京市汉口路 22 号 邮 编 210093

GAOZHONG SHUXUE XIAOTI KUANGZUO • XUANZEXING BIXIU DI-YI CE • BS

书 名 高中数学小题狂做·选择性必修第一册·BS
主 编 恩波教育研究中心
责任编辑 刘 琦 编辑热线 025-83530763

印 刷 南京地海印刷有限公司
开 本 880 mm×1230 mm 1/16 开 印张 11 字数 234 千
版 次 2021 年 6 月第 1 版 2025 年 4 月第 5 次印刷
ISBN 978-7-305-24625-8
定 价 59.80 元

网 址 <http://www.njupco.com>
官方微博 <http://weibo.com/njupco>
官方微信 njupress
销售咨询热线 025-83594756

* 版权所有,侵权必究
* 凡购买南大版图书,如有印装质量问题,请与所购
图书销售部门联系调换

目录 Contents



第一章 直线与圆

§ 1 直线与直线的方程

限时小练 1 一次函数的图像与直线的方程 直线的倾 斜角、斜率及关系	1
限时小练 2 直线的方程(1)	3
限时小练 3 直线的方程(2)	5
限时小练 4 直线的方程(3)	7
限时小练 5 两条直线的平行与垂直	9
限时小练 6 两条直线的交点坐标	11
限时小练 7 平面直角坐标系中的距离公式	13

微专题一 直线方程的综合应用

§ 2 圆与圆的方程

限时小练 8 圆的标准方程	18
限时小练 9 圆的一般方程	20
限时小练 10 直线与圆的位置关系	23
限时小练 11 圆与圆的位置关系	25

微专题二 与圆有关的最值、定值问题

章末提优

真题小练

第二章 圆锥曲线

§ 1 椭圆

限时小练 12 椭圆及其标准方程	33
限时小练 13 椭圆的简单几何性质(1)	36
限时小练 14 椭圆的简单几何性质(2)	38

提升索引 见答案

▶方法	两条直线相交的判定方法/8
▶突破	动圆问题的解题策略/15
▶方法	求圆的标准方程的两种方法/16
▶方法	求曲线方程的两种方法/24
▶巧记	与圆有关的最值问题的常见类型 及解题策略/24
▶方法	设而不求在直线和圆中的应用/24

▶突破	对称性在圆锥曲线问题中的应用/ 35
▶突破	抛物线焦半径公式的应用/39
▶方法	利用方程形式判断对称性/47
▶方法	求圆锥曲线中的最值问题/48

§ 2 双曲线

限时小练 15 双曲线及其标准方程 41

限时小练 16 双曲线的简单几何性质 43

§ 3 抛物线

限时小练 17 抛物线及其标准方程 46

限时小练 18 抛物线的简单几何性质 48

微专题三 轨迹与方程问题 50

微专题四 圆锥曲线的离心率问题 51

§ 4 直线与圆锥曲线的位置关系

限时小练 19 直线与圆锥曲线的交点 52

限时小练 20 直线与圆锥曲线的综合问题 55

微专题五 圆锥曲线中的范围、最值问题 57

微专题六 圆锥曲线中的定点、定值问题 58

微专题七 圆锥曲线中的证明与探索性问题 61

章末提优 63

真题小练 66

阶段温习 1 67

►突破 关于新定义题的解题思路/49

►方法 求解定值问题的三个步骤/52

第三章 空间向量与立体几何

§ 1 空间直角坐标系

限时小练 21 空间直角坐标系 68

§ 2 空间向量与向量运算

限时小练 22 空间向量与向量运算(1)..... 70

限时小练 23 空间向量与向量运算(2)..... 72

§ 3 空间向量基本定理及空间向量运算的坐标表示

限时小练 24 空间向量基本定理 74

限时小练 25 空间向量的坐标表示及应用(1)..... 76

限时小练 26 空间向量的坐标表示及应用(2)..... 78

§ 4 向量在立体几何中的应用

限时小练 27 直线的方向向量与平面的法向量 80

限时小练 28 用向量方法研究立体几何中的位置关系
..... 82

►方法 用向量证明平行的方法/73

►方法 求解点到平面距离的方法/77

►方法 二面角的求法/81

限时小练 29	用向量方法研究立体几何中的度量关系	
(1)		85

限时小练 30	用向量方法研究立体几何中的度量关系	
(2)		87

微专题八	平面的法向量在证明与计算中的应用	90
微专题九	立体几何中探索性问题的研究	92
章末提优		94
真题小练		97
阶段温习 2		98

第四章 数学建模活动(三)

第五章 计数原理

§1 基本计数原理

限时小练 31	基本计数原理	99
---------	--------	----

§2 排列问题

限时小练 32	排列与排列数	101
---------	--------	-----

§3 组合问题

限时小练 33	组合与组合数	103
---------	--------	-----

微专题十	特殊的排列、组合问题的解法	105
------	---------------	-----

§4 二项式定理

限时小练 34	二项式定理	107
---------	-------	-----

限时小练 35	二项式系数的性质	109
---------	----------	-----

微专题十一	求特定项、特定项系数及展开式中各项系数和的方法	111
-------	-------------------------	-----

章末提优		113
------	-------	-----

真题小练		116
------	-------	-----

阶段温习 3		117
--------	-------	-----

第六章 概 率

§1 随机事件的条件概率

限时小练 36	条件概率的概念	118
---------	---------	-----

►方法	插空法/91
►方法	定序问题缩倍法/91
►突破	相同元素分配问题的处理策略/92
►方法	求解二项式系数之和或各项系数之和相关的问题/96

►方法	求条件概率的方法/101
►方法	判定离散型随机变量的步骤/106
►方法	求离散型随机变量的数学期望的步骤/108

限时小练 37	乘法公式与事件的独立性·····	121
限时小练 38	全概率公式·····	124
§ 2	离散型随机变量及其分布列	
限时小练 39	离散型随机变量及其分布列·····	127
§ 3	离散型随机变量的均值与方差	
限时小练 40	离散型随机变量的均值·····	130
限时小练 41	离散型随机变量的方差·····	133
§ 4	二项分布与超几何分布	
限时小练 42	二项分布·····	135
限时小练 43	超几何分布·····	138
微专题十二	二项分布与超几何分布问题 ·····	141
§ 5	正态分布	
限时小练 44	正态分布·····	143
微专题十三	分布列与期望、方差问题 ·····	146
章末提优	·····	148
真题小练	·····	151
阶段温习 4	·····	153

►方法 判断随机变量是否服从二项分布/
109
►反思 超几何分布的特征/113

第七章 统计案例

§ 1	一元线性回归	
限时小练 45	一元线性回归·····	154
§ 2	成对数据的线性相关性	
限时小练 46	成对数据的线性相关性·····	157
§ 3	独立性检验问题	
限时小练 47	独立性检验问题·····	161
章末提优	·····	165
阶段温习 5	·····	170

►方法 判断相关关系的两种方法/123

典题讲评与答案详析(另册,解后反思、易错警示、方法总结、解题突破)

小帮手(另册,知识梳理与重点解读、题型精解)

第一章 直线与圆

§ 1 直线与直线的方程

限时小练 1 一次函数的图象与直线的方程 直线的倾斜角、斜率及关系

建议用时:40分钟 答案 P1

训练要点

直线的倾斜角和斜率,斜率公式

一、单项选择题:本题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分.

- 下列关于倾斜角的说法正确的是 ()
A. 任意一条直线都有唯一的倾斜角
B. 一条直线的倾斜角可以为 $-\frac{\pi}{6}$
C. 若直线的倾斜角为 0,则该直线与 x 轴重合
D. 若直线的倾斜角为 α ,则 $\sin \alpha \in (0,1)$
- 过点 $A(-3,2)$ 与 $B(-2,3)$ 的直线的倾斜角为 ()
A. 45° B. 135° C. 45° 或 135° D. 60°
- 已知直线 l 的一个方向向量为 $\mathbf{a}=(2,-2)$,则直线 l 的倾斜角为 ()
A. 45° B. 90° C. 120° D. 135°
- 若直线 l 的倾斜角 α 满足 $\frac{2\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{6}$,则其斜率 k 的取值范围为 ()
A. $(1, \sqrt{3}]$ B. $[-\sqrt{3}, -1]$ C. $[-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}]$ D. $[\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}]$

- 图 1 是中国古代建筑中的举架结构, AA', BB', CC', DD' 是桁,相邻桁的水平距离称为步,垂直距离称为举.图 2 是某古代建筑屋顶截面的示意图,其中 DD_1, CC_1, BB_1, AA_1 是举, OD_1, DC_1, CB_1, BA_1 是相等的

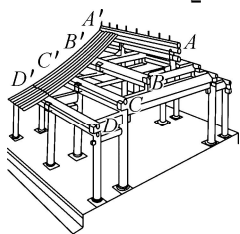


图 1

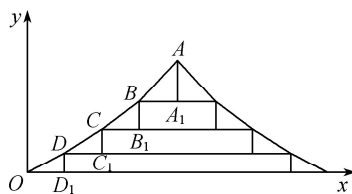


图 2

步,相邻桁的举步之比分别为 $\frac{|DD_1|}{|OD_1|}=0.5, \frac{|CC_1|}{|DC_1|}=k_1, \frac{|BB_1|}{|CB_1|}=k_2, \frac{|AA_1|}{|BA_1|}=k_3$. 已知 $k_2 -$

$k_1=0.1, k_3 - k_2=0.1$, 且直线 OA 的斜率为 0.725, 则 $k_3 =$ ()

- A. 0.9 B. 0.85 C. 0.8 D. 0.75

- 过点 $P(0,-1)$ 作直线 l , 若直线 l 与连接 $A(-2,1), B(2\sqrt{3},1)$ 两点的线段总有公共点, 则直线 l 的倾斜角范围为 ()

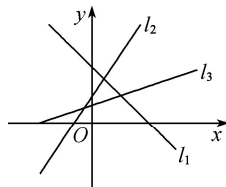
- A. $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ B. $[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}]$
C. $(0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi)$ D. $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi)$

二、多项选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分. 全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

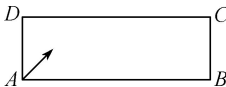
- 已知在平面直角坐标系中,等边三角形 ABC 的顶点 A 与原点重合,且 AB 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 BC 的斜率可能为 ()

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{5}$ B. $-\frac{2\sqrt{3}}{5}$ C. $-2\sqrt{3}$ D. $-3\sqrt{3}$

8. 如图, 直线 l_1, l_2, l_3 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 , 倾斜角分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 则下列选项一定正确的是 ()



- A. $k_1 < k_3 < k_2$ B. $\alpha_3 < \alpha_2 < \alpha_1$
C. $\cos \alpha_1 < \cos \alpha_2 < \cos \alpha_3$ D. $\sin \alpha_3 < \sin \alpha_2 < \sin \alpha_1$
9. 台球运动已有五六百年的历史, 参与者用球杆在台上击球. 如图, 有一张长方形球台 $ABCD$, $AB = 3AD$, 现从角落 A 沿角 α 的方向把球打出去, 球经 2 次碰撞球台内沿后进入角落 C 的球袋中, 若和光线一样, 台球在球台上碰到障碍物后也遵从反射定律, 则 $\tan \alpha$ 的值可以为 ()
- A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\frac{3}{2}$



三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

10. 设 P 为 x 轴上的一点, 点 $A(-3, 8)$, 点 $B(2, 14)$, 若 PA 的斜率是 PB 的斜率的两倍, 则点 P 的坐标为_____.
11. 已知实数 x, y 满足 $2x + y = 8$, 且 $2 \leq x \leq 3$, 则 $\frac{y}{x}$ 的取值范围是_____, $\frac{y+1}{x+1}$ 的取值范围是_____.
12. 若等边三角形的一条中线所在直线的斜率为 1, 则该等边三角形的三边所在直线的斜率之和为_____.

四、解答题: 本题共 13 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

13. 已知坐标平面内三点 $A(-2, -4), B(2, 0), C(-1, 1)$.
- (1) 求直线 AB 的斜率和倾斜角;
- (2) 若 A, B, C, D 四点可以构成平行四边形, 且点 D 在第一象限, 求点 D 的坐标.

— 拓广探索 —

14. **创新·新定义** 现有一组互不相同且从小到大排列的数据: $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$, 其中 $a_0 = 0$. 为提取反映数据间差异程度的某种指标, 今对其进行如下加工: 记 $T = a_0 + a_1 + \dots + a_5$, $x_n = \frac{n}{5}$, $y_n = \frac{1}{T}(a_0 + a_1 + \dots + a_n)$, 作函数 $y = f(x)$, 使其图象为依次连接点 $P_n(x_n, y_n) (n=0, 1, 2, \dots, 5)$ 的折线.
- (1) 求 $f(0)$ 和 $f(1)$ 的值;
- (2) 设 $P_{n-1}P_n$ 的斜率为 $k_n (n=1, 2, 3, 4, 5)$, 判断 k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 的大小关系;
- (3) 证明: 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) < x$.

建议用时:50分钟 答案 P12

1. [2025 浙江绍兴期中]暨阳分校环境优美,依山傍水,绿树成荫.某日,小明饭后散步至池塘边,恰好可以在池塘中看到太阳的倒影,即入射光线经池塘水面反射后,反射光线经过小明眼睛.建立适当坐标系后,已知入射光线上有一点 $A(2,4)$,经直线 $x+y=0$ 反射后经过点 $B(4,2)$,则入射光线所在直线方程为 ()

- A. $x-2y=0$ B. $x+2y=0$
C. $2x+y=0$ D. $2x-y=0$

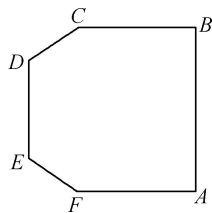
2. [多选题,2025 安徽阜阳高二期中]已知直线 $l: (x+3)\cos\theta + y\sin\theta - 5 = 0 (\theta \in \mathbf{R})$,则下列结论正确的是 ()

- A. 若直线 $y = -3x + 1$ 与 l 平行,则 $\tan\theta = \frac{1}{3}$
B. 若把 l 绕其与 x 轴的交点逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$,所得直线的斜率为 2,则 $\tan\theta = -\frac{1}{3}$
C. 若 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, l 与直线 $y = 2x - 6$ 及两坐标轴的正半轴围成的四边形有外接圆,则 $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$
D. 对任意的 θ ,都存在定点 P ,使得点 P 到 l 的距离为定值

3. [多选题,2024 河北石家庄期中]已知直线 $l: (a+1)x - ay - 3a - 4 = 0$, O 为坐标原点,下列说法正确的是 ()

- A. 若 $a \neq 0$,则 a 越大,直线的倾斜角越小
B. 若直线 l 关于直线 $x = 4$ 对称的直线方程是 $2x + y - 9 = 0$,则 $a = 1$
C. 若直线 l 过定点 P ,直线 m 经过 P 和原点 O ,则直线 m 围绕点 P 旋转 45° 后得到的直线方程是 $5x - 3y - 17 = 0$ 或 $3x + 5y - 13 = 0$
D. 若直线 l 与 x 轴、 y 轴的正半轴分别交于 A, B 两点,当 $|OA| + |OB|$ 最小时, $a = -\frac{2}{3}$

4. [2025 贵州遵义期中]某公园的示意图为如图所示的六边形 $ABCDEF$,其中 $AB \perp AF$, $AF \parallel BC$, $AB \parallel DE$, $\angle BCD = \angle AFE$,且 $\tan \angle BCD = -\frac{3}{4}$, $CD = EF = 50$ m, $BC = DE = 80$ m. 若计划在该公园内建一个有一条边在 AB 上的矩形娱乐健身区域,则该娱乐健身区域面积(单位: m^2)的最大值为_____.



5. [2024 安徽宿州期中]在①直线 BC 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$;②直线 AC 的斜率为 $\sqrt{3}$ 这两个条件中任选一个,补充在下面的横线上,并解答下面的问题.

已知以角 A 为顶角的等腰三角形 ABC 的顶点 $A(-1,2)$, $B(-3,2)$,_____.

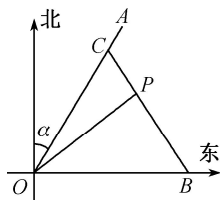
- (1) 求直线 AC 的一般式方程;
- (2) 求直线 BC 的一般式方程;
- (3) 求角 A 的平分线所在直线的一般式方程.

6. [2025 山东临沂阶测] 已知在平行四边形 $ABCD$ 中, $A(2,3), B(4,1), D(-1,-3), O(0,0)$.

- (1) 求直线 BC 的方程;
- (2) 求 $\triangle ABD$ 的边 AB 上的高所在直线的方程;
- (3) 若一条光线从点 A 射出, 经 x 轴反射, 反射光线经过点 B , 求入射光线所在直线的方程;
- (4) 过点 A 的直线 l 与 x 轴正半轴交于点 E , 与 y 轴正半轴交于点 F , 求 $|AE| \cdot |AF|$ 的最小值.

7. [2025 四川自贡期末] 如图, 一载着重危病人的火车从 O 地出发, 沿北偏东射线 OA 行驶, 其中 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, 在距离 O 地 10 公里北偏东 β 角的 P 处住有一位医学专家 (其中 $\tan \beta = \frac{3}{4}$), 现有紧急征调离 O 地正东 t 公里的 B 处的救护车赶往 P 处载上医学专家全速追赶乘有重危病人的火车, 并在 C 处相遇, 经计算当两车行驶的路线与 OB 围成的三角形 OBC 面积 S 最小时, 抢救最及时.

- (1) 求 S 关于 t 的函数关系;
- (2) 当 t 为何值时, 抢救最及时.



8. [2025 江苏苏州期中] 已知直线 $l: x-y-1=0$.

- (1) 若直线 m 与 l 平行, 且 m, l 之间的距离为 $\sqrt{2}$, 求 m 的方程;
- (2) P 为 l 上一点, 点 $M(1, -2), N(2, 6)$, 求 $|PN| - |PM|$ 取得最大值时点 P 的坐标.

— 拓广探索

9. 已知初始光线 l_0 从点 $P(2, 1)$ 出发, 交替经 x 轴与直线 $l: y=x$ 发生一系列镜面反射, 设 $A_i (i \in \mathbf{N}, i \geq 1, A_i$ 不为原点) 为该束光线在两直线上第 i 次的反射点, $l_i (i \in \mathbf{N}, i \geq 1)$ 为第 i 次反射后光线所在的直线.
- (1) 若初始光线 $l_0: y=2x-3, A_1$ 在 x 轴上, 求最后一条反射光线的方程;
 - (2) 当斜率为 $k_n (k_n \neq 0, \pm 1)$ 的反射光线 l_n 经直线 $l: y=x$ 反射后, 得到斜率为 $k_{n+1} (k_{n+1} \neq 0, \pm 1)$ 的反射光线 l_{n+1} 时, 试探求两条光线的斜率 k_n, k_{n+1} 之间的关系, 并说明理由;
 - (3) 是否存在初始光线 l_0 , 使其反射点集 $\{A_i | i \in \mathbf{N}, i \geq 1\}$ 中有无穷多个元素? 若存在, 求出所有 l_0 的方程; 若不存在, 求出点集 $\{A_i | i \in \mathbf{N}, i \geq 1\}$ 元素个数 n 的最大值, 以及使得 n 取到最大值时所有第一个反射点 A_1 的轨迹方程.

限时小练 8 圆的标准方程

建议用时:40 分钟 答案 P14

训练要点

圆的标准方程,点与圆的位置关系

一、单项选择题:本题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分.

- 若点 $A(a, a-1)$ 在圆 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 2$ 的外部,则实数 a 的取值范围是 ()
 A. $(2, 4)$ B. $(-\infty, 2)$
 C. $(4, +\infty)$ D. $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$
- 已知 O 为坐标原点,点 A 在圆 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$ 上运动,则线段 OA 的中点 P 的轨迹方程为 ()
 A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$
 C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{2}$ D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}$
- 2000 多年前,我国的思想家墨子给出圆的概念:“一中同长也”.意思是说,圆有一个圆心,圆心到圆周的长都相等,这个定义比希腊数学家欧几里得给圆下定义要早 100 年.已知 O 为原点, $|OP| = \frac{1}{2}$,若 $M(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$,则线段 PM 长的最大值为 ()
 A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{5}{4}$
- 函数 $y = \sqrt{9-x^2}$ 的图象是 ()
 A. 一条射线 B. 一个圆 C. 两条射线 D. 半圆弧
- 已知复数 $z_1 = 1-2i$,复数 z 满足 $|z+z_1| = 2$,则 ()
 A. $z_1 \cdot \overline{z_1} = |2+i|$
 B. 复数 $\overline{z_1}$ 在复平面内所对应的点的坐标是 $(-1, 2)$
 C. $\sqrt{5}-2 \leq |z| \leq \sqrt{5}+2$
 D. 复数 z 在复平面内所对应的点为 $Z(x, y)$,则 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 2$
- 在圆的方程的探究中,有四位同学分别给出了一个结论.甲:该圆的半径为 $\sqrt{5}$,乙:该圆经过点 $(7, 0)$,丙:该圆的圆心为 $(2, 1)$,丁:该圆经过点 $(3, 3)$.如果只有一位同学的结论是错误的,那么这位同学是 ()
 A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

二、多项选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分.全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

- 已知 $P_1(4, 9), P_2(6, 3)$ 两点,以线段 P_1P_2 为直径的圆为圆 P ,则 ()
 A. $M(6, 9)$ 在圆 P 上 B. $N(3, 3)$ 在圆 P 外
 C. $Q(5, 3)$ 在圆 P 内 D. $R(2, 7)$ 在圆 P 外
- 直线 $x+y+2=0$ 分别与 x 轴、 y 轴交于 A, B 两点,点 P 在圆 $(x-2)^2 + y^2 = 2$ 上,则 $\triangle ABP$ 面积可能是 ()
 A. 1 B. 3 C. 4 D. 7

9. 设有一组圆 $C_k: (x-k)^2 + (y-k)^2 = 4 (k \in \mathbf{R})$, 下列命题正确的是

()

成长记录

- A. 不论 k 如何变化, 圆心 C 始终在一条直线上
- B. 所有圆 C_k 均不经过点 $(3, 0)$
- C. 经过点 $(2, 2)$ 的圆 C_k 有且只有一个
- D. 所有圆的面积均为 4π

► 解题突破
动圆问题的解题
策略 见答案

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

10. 过两点 $P(2, 2), Q(4, 2)$, 且圆心在直线 $x - y = 0$ 上的圆的标准方程是_____.

11. 已知长为 $a (a > 0)$ 的线段 AB 的两个端点 A 和 B 分别在 x 轴和 y 轴上滑动, 则线段 AB 的中点的轨迹方程为_____.

12. 直线 $l: \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ 与 x 轴、 y 轴分别相交于点 A, B , O 为坐标原点, 则 $\triangle AOB$ 内切圆的方程为_____ ; 此圆的面积为_____.

四、解答题: 本题共 13 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

13. 已知圆 C 的半径为 2, 且圆心在直线 $y = x$ 上, 点 $A(2, 4)$ 在圆 C 上, 点 $B(0, 2)$ 在圆 C 外.

- (1) 求圆 C 的圆心坐标;
- (2) 若点 D 在圆 C 上, 求 $|BD|$ 的最大值与最小值.

训练要点

圆的一般方程及其应用

一、单项选择题:本题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分.

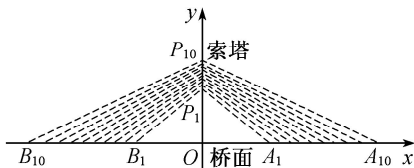
- 已知圆 $M: x^2 + y^2 + 6x - 2y - 6 = 0$, 则圆心 M 的坐标和半径 r 分别为 ()
 A. $(3, -1), r = 4$ B. $(3, -1), r = 2$
 C. $(-3, 1), r = 4$ D. $(-3, 1), r = 2$
- 已知曲线 $C: x^2 + y^2 + 2mx - 2y + 2 = 0$ 表示圆, 且点 $P(1, 2)$ 在曲线 C 外, 则 m 的取值范围是 ()
 A. $(-\frac{3}{2}, +\infty)$ B. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
 C. $(-\frac{3}{2}, 1)$ D. $(-\frac{3}{2}, -1) \cup (1, +\infty)$
- 已知实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$, 则 $|x - y|$ 的最大值是 ()
 A. $3 + \sqrt{2}$ B. $1 + 3\sqrt{2}$ C. $3 + 3\sqrt{2}$ D. $6 + 3\sqrt{2}$
- 若圆 $x^2 + y^2 + 2ax - 4ay + 5a^2 - 4 = 0$ 上的所有点都在第二象限, 则 a 的取值范围为 ()
 A. $(-\infty, 2)$ B. $(-\infty, -1)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$
- 已知两定点 $A(-2, 0), B(1, 0)$, 若动点 P 满足 $|PA| = 2|PB|$, 则点 P 的轨迹所包围的图形的面积等于 ()
 A. π B. 4π C. 8π D. 9π
- 在平面直角坐标系 xOy 中, 设 $A(-1, 1), B(1, 5)$, 点 P 满足 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -1$, 动点 Q 满足 $\overrightarrow{AQ}^2 + \overrightarrow{BQ}^2 = 18$, 当 $\overrightarrow{OQ} = 3\overrightarrow{OP}$ 时, 点 P 的纵坐标为 ()
 A. $\frac{10}{9}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

二、多项选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分. 全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

- 已知圆 $C: x^2 + y^2 - 4x - 14y + 45 = 0$ 及点 $Q(-2, 3)$, 则下列说法正确的是 ()
 A. 圆心 C 的坐标为 $(-2, -7)$
 B. 点 Q 在圆 C 外
 C. 若点 $P(m, m+1)$ 在圆 C 上, 则直线 PQ 的斜率为 $\frac{1}{4}$
 D. 若 M 是圆 C 上任一点, 则 $|MQ|$ 的取值范围为 $[2\sqrt{2}, 6\sqrt{2}]$
- 已知圆 C 的方程是 $x^2 + y^2 + 2(m-1)x - 4my + 5m^2 - 2m - 8 = 0$. 则下列结论正确的是 ()
 A. 圆 C 的圆心在同一条直线上
 B. 方程 $x^2 + y^2 + 2(m-1)x - 4my + 5m^2 - 2m - 8 = 0$ 表示的是等圆
 C. 圆 C 的半径与 m 无关, 是定值
 D. “ $m = \frac{3}{2}$ ”是“圆 C 与 x 轴只有一个交点”的必要不充分条件

一、单项选择题:本题共6小题,每小题5分,共30分.

- [2025 广东广州期末]已知点 $P(-2,1)$ 到直线 $l:3x-4y+m=0$ 的距离为 1,则 m 的值为 ()
 A. -5 或 -15 B. -5 或 15
 C. 5 或 -15 D. 5 或 15
- [2025 山东淄博期中]已知直线 $l_1:x+ay-1=0$ 和直线 $l_2:(3a-2)x-ay-2=0$,则 $a=\frac{1}{3}$ 是两直线平行的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
- [2025 江苏泰州期末]斜拉桥是桥梁建筑的一种形式,在桥梁平面上有多根拉索,所有拉索的合力方向与中央索塔一致.如图,一座斜拉桥共有 10 对拉索,在索塔两侧对称排列,已知拉索上端相邻两个锚的间距 $|P_i P_{i-1}|$ ($i=1,2,3,\dots,9$) 均为 4 m,拉索下端相邻两个锚的间距 $|A_i A_{i+1}|$, $|B_i B_{i+1}|$ ($i=1,2,3,\dots,9$) 均为 16 m,最短拉索 $P_1 A_1$ 满足 $|OP_1|=60$ m, $|OA_1|=96$ m,若建立如图所示的平面直角坐标系,则最长拉索 $P_{10} B_{10}$ 所在直线的斜率为 ()



- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{5}{16}$ C. $\frac{25}{64}$ D. $\frac{2}{5}$
- [2025 山东泰安阶测]已知直线 $y=k(x+2)$ 与曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 有公共点,则实数 k 的取值范围是 ()
 A. $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$ B. $[0, \frac{\sqrt{3}}{3}]$ C. $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0]$ D. $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$
- [2024 浙江宁波期中]若圆 $x^2+y^2-4x-4y-10=0$ 上至少有三个不同的点到直线 $l:ax+by=0$ 的距离为 $2\sqrt{2}$,则直线 l 的倾斜角的取值范围是 ()
 A. $[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}]$ B. $[\frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{12}]$ C. $[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{11}]$ D. $[\frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{11}]$
- [2024 安徽六安期中]过定点 A 的直线 $(a+1)x-y+2=0$ 与过定点 B 的直线 $x+(a+1)y-5a-2=0$ 交于点 P (P 与 A, B 不重合),则 $\triangle PAB$ 面积的最大值为 ()
 A. 4 B. $\frac{9}{2}$ C. 2 D. $\frac{3}{2}$

二、多项选择题:本题共3小题,每小题6分,共18分.全部选对的得6分,部分选对的得部分分,有选错的得0分.

- [2025 浙江温州期中]已知圆 $C_1:x^2+y^2-2y-8=0$,圆 $C_2:x^2-2mx+y^2+m^2-4=0$,直线 $l:tx+y-2t-1=0$,直线 l 与圆 C_1 相交于 A, B 两点,则以下选项正确的是 ()
 A. 若 $m=0$ 时,圆 C_1 与圆 C_2 有两条公切线

B. 若 $m=2$ 时,两圆公共弦所在直线的方程为 $2x-y-4=0$

C. 弦长 $|AB|$ 的最小值为 $2\sqrt{5}$

D. 若点 $P(2,4)$, 则 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$ 的最大值为 $2\sqrt{10}+2$

8. [2025 广东广州阶测] 已知直线 $l_1: ax+(a+1)y-5=0$, 直线 $l_2: 3x-4y+5=0$, 圆 $C: (x+3)^2+(y-4)^2=9$, 则下列选项正确的是 ()

A. 若 $l_1 \parallel l_2$, 则 $a=-\frac{3}{7}$

B. 若 $P(x,y)$ 为圆 $C: (x+3)^2+(y-4)^2=9$ 上一点, 则 $x-y$ 的最小值为 $-3\sqrt{2}-7$

C. 若 l_1 与圆 C 相交于 A, B 两点, 则 $|AB|_{\min}=2$

D. 过 l_2 上一点 P 向圆 C 作切线, 切点为 Q , 则 $|PQ|_{\min}=\sqrt{7}$

9. [2025 辽宁鞍山一模] 已知直线 $l: kx-y+k=0$, 圆 $C: x^2+y^2-6x+5=0$, $P(x_0, y_0)$ 为圆 C 上任意一点, 则下列说法正确的是 ()

A. $x_0^2+y_0^2$ 的最大值为 5

B. $\frac{y_0}{x_0}$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

C. 直线 l 与圆 C 相切时, $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. 圆心 C 到直线 l 的距离最大为 4

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

10. [2025 重庆期末] 直线 $l_1: ax+3y+1=0$, $l_2: x+(a-2)y-1=0$, 当 $l_1 \parallel l_2$ 时, 直线 l_1 与 l_2 之间的距离为_____.

11. [2024 福建泉州期中] 函数 $f(x) = \sqrt{x^2-2x+17} + \sqrt{x^2-10x+29}$ 的最小值为_____.

12. [2025 辽宁大连期末] 已知圆 $M: x^2+y^2+2x-4y+1=0$, 直线 $l: x-y-1=0$, P 为 l 上的动点. 过点 P 作圆 M 的切线 PA, PB , 切点分别为 A, B , 当 $|PM| \cdot |AB|$ 最小时, 点 P 的坐标为_____, 直线 AB 的方程为_____.

四、解答题: 本题共 2 小题, 第 1 题 13 分, 第 2 题 15 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

13. [2025 山东泰安期中] 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(1,2)$, AB 边上的中线 CM 所在直线的方程为 $x+2y-1=0$, $\angle ABC$ 的平分线 BH 所在直线的方程为 $y=x$.

(1) 求点 B 的坐标、直线 BC 的方程、点 C 的坐标;

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

14. [2025 重庆阶测] 已知 $A(1,2), B(3,6)$, 动点 P 满足 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -4$, 设动点 P 的轨迹为曲线 C .

(1) 求曲线 C 的标准方程;

(2) 求过点 $A(1,2)$ 且与曲线 C 相切的直线的方程.

1. [2024 全国甲卷文,10]已知直线 $ax+by-a+2b=0$ 与圆 $C:x^2+y^2+4y-1=0$ 交于 A,B 两点,则 $|AB|$ 的最小值为 ()
 A. 2 B. 3 C. 4 D. 6
2. [2024 全国乙卷文,11]已知实数 x,y 满足 $x^2+y^2-4x-2y-4=0$,则 $x-y$ 的最大值是 ()
 A. $1+\frac{3\sqrt{2}}{2}$ B. 4 C. $1+3\sqrt{2}$ D. 7
3. [2022 全国甲卷文,14]设点 M 在直线 $2x+y-1=0$ 上,点 $(3,0)$ 和 $(0,1)$ 均在圆 M 上,则圆 M 的方程为_____.
4. [2022 新高考 II 卷,15]设点 $A(-2,3),B(0,a)$,若直线 AB 关于 $y=a$ 对称的直线与圆 $(x+3)^2+(y+2)^2=1$ 有公共点,则 a 的取值范围是_____.
5. [2022 天津卷,12]若直线 $x-y+m=0(m>0)$ 被圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=3$ 截得的弦长为 m ,则 m 的值为_____.

第二章 圆锥曲线

§ 1 椭圆

限时小练 12 椭圆及其标准方程

建议用时:40分钟 答案 P27

训练要点

椭圆的定义及相关概念,椭圆的标准方程

一、单项选择题:本题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分.

1. 已知焦点在 y 轴上的椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{a} = 1 (a > 0)$ 的焦距为 $4\sqrt{3}$, 则 $a =$ ()

- A. 8 B. 12
C. 16 D. 52

2. 已知 p : 方程 $\frac{x^2}{5-m} + \frac{y^2}{m-1} = 1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆, 则使 p 成立的充分不必要条件是 ()

- A. $3 < m < 5$ B. $4 < m < 5$
C. $1 < m < 5$ D. $m > 1$

3. 设 P 是椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ 上的点, F_1, F_2 是椭圆的两个焦点, 若 P 到焦点 F_1 的距离是 3, 则 P 到另一焦点 F_2 的距离为 ()

- A. 10 B. 8 C. 7 D. 5

4. 设定点 $F_1(0, -3), F_2(0, 3)$, 动点 P 满足条件 $|PF_1| + |PF_2| = a + \frac{9}{a} (a > 0)$, 则点 P 的轨迹是 ()

- A. 椭圆 B. 线段
C. 不存在 D. 椭圆或线段

5. 已知椭圆 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的焦点为 F_1, F_2 , 点 P 在椭圆上. 若线段 PF_1 的中点在 y 轴上, 则 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|} =$ ()

- A. 7 B. 5 C. 4 D. 3

6. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 且 $|F_1F_2| = 8$, 过左焦点 F_1 的直线 l 与椭圆 C 交于 P, Q 两点, 连接 PF_2, QF_2 , 若 $\triangle PQF_2$ 的周长为 20, $\angle QPF_2 = 90^\circ$, 则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 ()

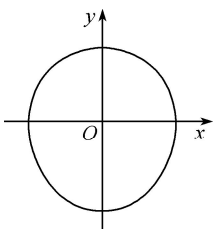
- A. 9 B. 18 C. 25 D. 50

二、多项选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分. 全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

7. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 定点 $A(1, 4)$, 若点 P 是椭圆 E 上的动点, 则 $|PA| + |PF_1|$ 的值可能为 ()

- A. 7 B. 10 C. 17 D. 19

8. 设 F_1, F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 的两个焦点, P 是椭圆上一点, 且 $|PF_1| - |PF_2| = 2$, 则下列说法正确的是 ()
- A. $|PF_1| = 5, |PF_2| = 3$
- B. $\triangle PF_1F_2$ 为直角三角形
- C. $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 6
- D. $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 12
9. 京剧《说唱脸谱》的歌词描绘了外国人眼中京戏的美丽和多样性. 其中, “四击头”一亮相, 美极啦, 妙极啦, 简直 OK, 顶呱呱! 紫色的天王托宝塔, 绿色的魔鬼斗夜叉, 金色的猴王, 银色的妖怪, 灰色的精灵笑哈哈! 一幅幅鲜明的鸳鸯瓦, 一群群生动的活菩萨, 一笔笔勾描, 一点点夸大, 一张张“脸谱”美佳佳! 如图, “脸谱”图形可近似看作由半圆和半椭圆组成的曲线 C . 半圆 C_1 的方程为 $x^2 + y^2 = 16 (y \geq 0)$, 半椭圆 C_2 的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1 (y \leq 0)$, 则下列说法正确的是 ()



- A. 点 A 在半圆 C_1 上, 点 B 在半椭圆 C_2 上, O 为坐标原点, $OA \perp OB$, 则 $\triangle OAB$ 面积的最大值为 10
- B. 曲线 C 上任意一点到原点的距离的最大值与最小值之和为 8
- C. 若 $A(0, -3), B(0, 3), P$ 是半椭圆 C_2 上的一个动点, 则 $\cos \angle APB$ 的最小值为 $\frac{7}{25}$
- D. 画法几何的创始人加斯帕尔·蒙日发现: 椭圆中任意两条互相垂直的切线, 其交点都在与椭圆同中心的圆上, 称该圆为椭圆的蒙日圆. 那么半椭圆 C_2 扩充为整个椭圆 $C': \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1 (-5 \leq y \leq 5)$ 后, 椭圆 C' 的蒙日圆方程为 $x^2 + y^2 = 41$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

10. 过四点 $(0, 1), (\frac{1}{2}, -1), (1, \frac{\sqrt{3}}{2}), (1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ 中的三点的一个椭圆标准方程可以是 _____, 这样的椭圆方程有 _____ 个.
11. 古希腊后期的数学家帕普斯在他的《数学汇编》中探讨了圆锥曲线的焦点和准线的性质: 平面内到一定点和定直线的距离成一定比例的所有点的轨迹是一圆锥曲线. 这就是圆锥曲线的第二定义或称为统一定义. 若平面内一动点 $P(x, y)$ 到定点 $A(1, 0)$ 和到定直线 $x = 9$ 的距离之比是 $\frac{1}{3}$, 则点 P 的轨迹方程为 _____.
12. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , M 为 C 上任意一点, N 为圆 $E: (x-5)^2 + (y-4)^2 = 1$ 上任意一点, 则 $|MN| - |MF_1|$ 的最小值为 _____.

四、解答题: 本题共 13 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

13. 求出适合下列条件的圆锥曲线的标准方程.

- (1) 已知椭圆的两个焦点坐标分别是 $(-2, 0), (2, 0)$, 并且经过点 $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$;
- (2) 两个焦点在坐标轴上, 且经过 $A(\frac{3}{2}, -\sqrt{3})$ 和 $B(-\sqrt{2}, 2)$ 两点的椭圆方程;
- (3) 过点 $P(-\sqrt{2}, 2)$, 且与椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 有相同焦点的椭圆方程.

— 拓广探索 —

14. 若将任意平面向量 $\overrightarrow{EF} = (x, y)$ 绕起点 E 逆时针方向旋转 α 角, 得到向量 $\overrightarrow{EK} = (x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha)$, 则称点 F 绕点 E 逆时针方向旋转 α 角得到点 K . 在平面直角坐标系中, 已知曲线 $7x^2 + 7y^2 - 2xy = 24$ 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 绕原点 O 逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 所得的斜椭圆 Ω . 则椭圆 C 的方程为 _____.

阶段温习 1

成长记录

建议用时:15分钟 答案 P60

[学新不忘旧,前面学过的知识看看你还记得吗?]

1. 过直线 $2x+y+4=0$ 与圆 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 的交点,且面积最小的圆的方程为_____.
2. 已知直线 l 与两直线 $l_1:2x-y+3=0$ 和 $l_2:2x-y-1=0$ 平行且距离相等,则 l 的方程为_____.
3. 斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线 l 过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F ,与抛物线交于 A,B 两点,若弦 AB 的中点 D 到抛物线的准线的距离为 10,则 $p=$ _____.
4. 点 $M(x,y)$ 满足关系式 $\sqrt{x^2+(y+3)^2} + \sqrt{x^2+(y-3)^2} = 10$,则此方程可化简为_____.
5. 已知过点 $P(4,1)$ 的直线 l 与 x 轴、 y 轴的正半轴分别交于 A,B 两点, O 为坐标原点,当 $\triangle AOB$ 的面积最小时,直线 l 的方程为_____.
6. 已知圆 $C:(x+3)^2+(y-4)^2=16$,直线 $l:(2m+1)x+(m-2)y-3m-4=0(m \in \mathbf{R})$.
 - (1) 若圆 C 截直线 l 所得弦 AB 的长为 $2\sqrt{11}$,则 m 的值为_____;
 - (2) 若圆 C 与直线 l 相离,设 MN 为圆 C 的动直径,作 $MP \perp l, NQ \perp l$,垂足分别为 P, Q ,当 m 变化时,则四边形 $MPQN$ 面积的最大值为_____.