

南京市 2022 年中考压轴题分析

在平面内,先将一个多边形以自身的一个顶点为位似中心放大或缩小,再将所得到的多边形沿过该点的直线翻折,我们称这种变换为自位似轴对称变换,变换前后的图形成自位似轴对称.例如:如图 1,先将 $\triangle ABC$ 以点 A 为位似中心缩小,得到 $\triangle ADE$,再将 $\triangle ADE$ 沿过点 A 的直线 l 翻折,得到 $\triangle AFG$,则 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AFG$ 成自位似轴对称.

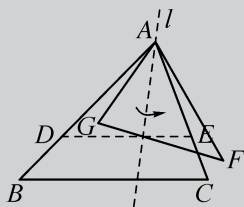


图 1

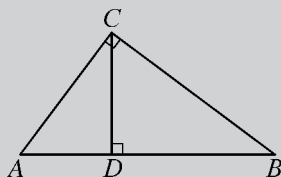


图 2

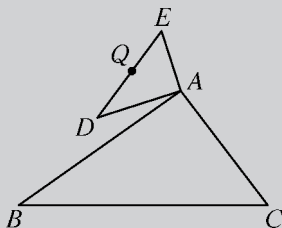


图 3

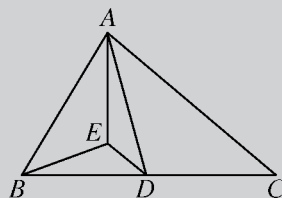


图 4

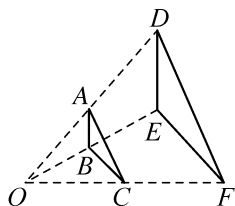
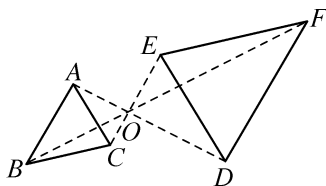
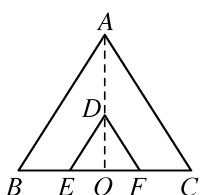
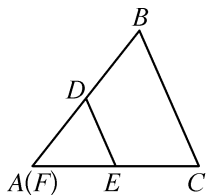
(1) 如图 2,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC<BC$, $CD\perp AB$,垂足为 D .下列 3 对三角形:
① $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$;② $\triangle BAC$ 和 $\triangle BCD$;③ $\triangle DAC$ 和 $\triangle DCB$.其中成自位似轴对称的是 _____ (填写所有符合要求的序号).

(2) 如图 3,已知 $\triangle ABC$ 经过自位似轴对称变换得到 $\triangle ADE$, Q 是 DE 上一点,用直尺和圆规作点 P ,使 P 与 Q 是该变换前后的对应点(保留作图痕迹,写出必要的文字说明).

(3) 如图 4,在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 BC 的中点, E 为 $\triangle ABC$ 内一点,且 $\angle ABE=\angle C$, $\angle BAE=\angle CAD$,连接 DE .求证: $DE\parallel AC$.

基本题型 1

如图, $\triangle DEF$ 是 $\triangle ABC$ 位似图形的几种画法,其中正确的个数是 ()



A. 4

B. 3

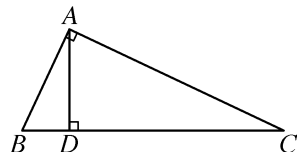
C. 2

D. 1

答案:A

基本题型 2

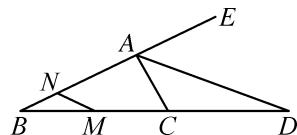
如图, AD 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 斜边上的高.若 $AB=4$ cm, $BC=10$ cm,则 $BD=$ _____ cm.



答案:1.6

基本题型 3

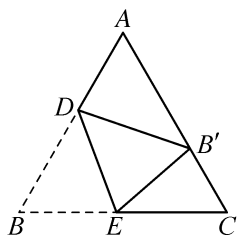
如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AB=20$, $AC=9$, M 为 BC 的中点, AD 平分 $\angle CAE$,交 BC 的延长线于点 D ,过点 M 作 $MN\parallel AD$,交 AB 于点 N ,则 AN 的长为_____.

答案: $\frac{29}{2}$

基本题型 4

如图,在等边三角形 ABC 中, $AB=2$,点 D 在边 AB 上, E 是边 BC 上一动点,将 $\triangle ABC$ 沿 DE 折叠,使

得点 B 的对应点 B' 恰好落在边 AC 上. 当 $\triangle B'EC$ 为直角三角形时, BE 的长为_____.



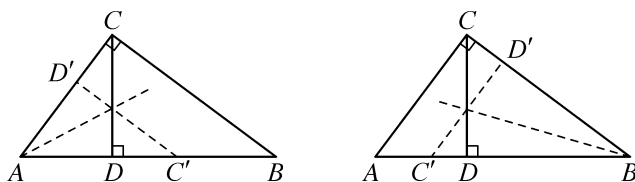
答案: $4\sqrt{3}-6$ 或 $3-\sqrt{3}$ (提示: 当 $\triangle B'EC$ 为直角三

角形时, 分两种情况讨论: ① 当 $\angle EB'C = 90^\circ$ 时, 设 $BE = x$, 则 $CE = 2 - x$, 由翻折的性质, 得 $B'E = BE = x$, 在 $\text{Rt}\triangle B'EC$ 中, $\sin C = \frac{B'E}{CE}$, 即 $\sin 60^\circ = \frac{x}{2-x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 解出 x 的值即可; ② 当 $\angle B'EC = 90^\circ$ 时, 设 $BE = x$, 则 $CE = 2 - x$, 同理, 得 $B'E = x$, 在 $\text{Rt}\triangle B'EC$ 中, $\tan C = \frac{B'E}{CE}$, 即 $\tan 60^\circ = \frac{x}{2-x} = \sqrt{3}$, 解出 x 的值即可)



名师思路展示

(1) 如图, 先将 $\triangle ABC$ 分别以点 A, B 为位似中心缩小, 得到 $\triangle AC'D', \triangle BC'D'$, 再将 $\triangle AC'D', \triangle BC'D'$ 分别沿 $\angle A, \angle B$ 的平分线翻折恰好得到 $\triangle ACD, \triangle BCD$. 由位似图形的定义可知, $\triangle DAC$ 和 $\triangle DCB$ 相似但不位似, 作出图形, 一一验证即可.



(2) 此题既可以先作出 $\triangle ADE$ 关于对称轴对称的 $\triangle AD'E'$, 从而作出点 Q 的对称点 Q' , 进而作出点 P , 也可以先将 $\triangle ADE$ 以点 A 为位似中心放大, 从而作出 $\triangle ABC$ 关于对称轴对称的 $\triangle AB'C'$, 进而作出点 P 的对称点 P' , 进一步得出结论.

(3) 延长 BE , 交 AC 于点 F , 可证得 $\triangle ABE \sim \triangle ACD$, 从而 $\frac{BE}{CD} = \frac{AE}{AD}$, 证明 $\triangle EAF \sim \triangle DAB$, 从而 $\frac{EF}{BD} = \frac{AE}{AD}$, 进而得 $\frac{BE}{CD} = \frac{EF}{BD}$, 于是 $BE = EF$, 从而得出结论.



规范解答

(1) 解: ①②

(2) 解: 作法不唯一, 以下作法供参考.

作法 1

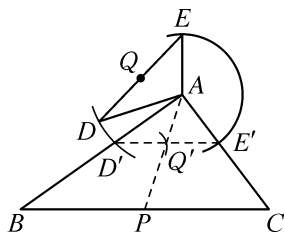


图 1

作法如下: 以点 A 为圆心, AE 的长为半径画弧, 交边 AC 于点 E' . 同理以点 A 为圆心, AD 的长为半径画弧, 交边 AB 于点 D' , 连接 $D'E'$. 再以点 D' 为圆心, DQ 的长为半径画弧, 交 $D'E'$ 于点 Q' , 连接 AQ' 并延长, 交边 BC 于点 P , 则点 P 即为所求.

作法 2

作法如下:①分别在 AE 和 AD 的延长线上截取 $AC'=AC$, $AB'=AB$, 连接 $B'C'$;②作射线 AQ , 交 $B'C'$ 于点 P' ;③连接 BC' , CB' , 交于点 O , 作射线 AO ;④过点 P' 作 $P'P \perp AO$, 交 BC 于点 P . 则 P 就是点 Q 变换前的对应点.

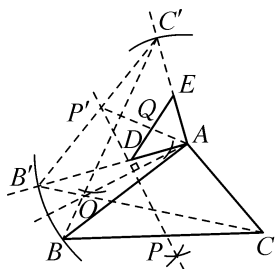


图 2

(3) 证明: 如图 3, 延长 BE , 交 AC 于点 F . 因为 $\angle ABE = \angle C$, $\angle BAE = \angle CAD$, 所以 $\triangle ABE \sim \triangle ACD$, 所以 $\frac{BE}{CD} = \frac{AE}{AD}$. 因为 $\angle BAE = \angle CAD$, 所以 $\angle BAE + \angle DAE = \angle CAD + \angle DAE$, 即 $\angle BAD = \angle FAE$. 因为 $\angle AEF = \angle ABE + \angle BAE$, $\angle ADB = \angle CAD + \angle C$, 所以 $\angle AEF = \angle ADB$. 所以 $\triangle EAF \sim \triangle DAB$, 所以 $\frac{EF}{BD} = \frac{AE}{AD}$, 所以 $\frac{BE}{CD} = \frac{EF}{BD}$. 因为 D 是 BC 的中点, 所以 $CD = BD$, 所以 $BE = EF$, 所以 $DE \parallel AC$.

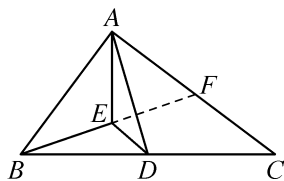


图 3

 解后反思

本题属于图形变换中的新定义型试题, 通过对图形进行位似变换与轴对称变换, 得到新图形, 此图形与原图形之间成“自位似轴对称”. 因此, 解决本题的关键是能否确定位似中心与对称轴, 问题(1)由教材原题“直角三角形斜边上的高将其分成的两个直角三角形与原三角形相似”改编而成, 关键是确定以锐角 $\angle A$, $\angle B$ 的平分线所在直线为对称轴, 可知①②符合题意; 问题(2)是作图题, 思维方法是首先利用 $\triangle ADE$ “还原”成位似图形, 得到 $\triangle AB'C'$, 进而可确定对应点的位置; 问题(3)从条件可知, $\triangle ABE$ 与 $\triangle ACD$ 成“自位似轴对称”, 故通过证明两组三角形相似, 利用相似比将线段进行了转化, 进而利用“三角形中位线定理”得证. 另外, 位似图形需要满足三个条件: ①相似; ②对应顶点的连线所在的直线相交于一点(位似中心); ③对应点与位似中心距离的比等于位似比, 即对应边互相平行(或在一条直线上).

苏州市 2022 年中考压轴题分析

(1) 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 2\angle B$, CD 平分 $\angle ACB$, 交 AB 于点 D , $DE \parallel AC$, 交 BC 于点 E .

① 若 $DE = 1$, $BD = \frac{3}{2}$, 求 BC 的长.

② 试探究 $\frac{AB}{AD} - \frac{BE}{DE}$ 的值是否为定值. 如果是, 求出这个定值; 如果不是, 请说明理由.

(2) 如图 2, $\angle CBG$ 和 $\angle BCF$ 是 $\triangle ABC$ 的两个外角, $\angle BCF = 2\angle CBG$, CD 平分 $\angle BCF$, 交 AB 的延长线于点 D , $DE \parallel AC$, 交 CB 的延长线于点 E . 记 $\triangle ACD$ 的面积为 S_1 , $\triangle CDE$ 的面积为 S_2 , $\triangle BDE$ 的面积为 S_3 . 若 $S_1 \cdot S_3 = \frac{9}{16} S_2^2$, 求 $\cos \angle CBD$ 的值.

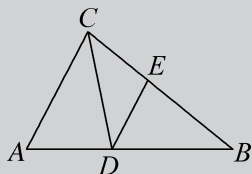


图 1

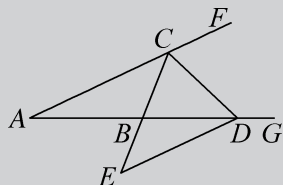
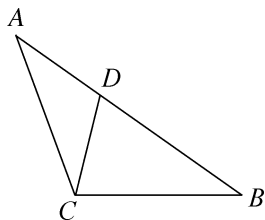


图 2

基本题型 1

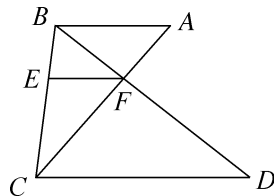
如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = BC = \frac{3}{2}$, D 为 AB 上一点, $AD = CD = 1$, 求 AB 的长.



答案: 因为 $AC = BC$, 所以 $\angle A = \angle B$. 因为 $AD = CD$, 所以 $\angle A = \angle ACD$. 所以 $\angle ACD = \angle B$. 又因为 $\angle A = \angle A$, 所以 $\triangle ACD \sim \triangle ABC$, 所以 $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$, 所以 $AC^2 = AD \cdot AB$, 所以 $AB = \frac{9}{4}$.

基本题型 2

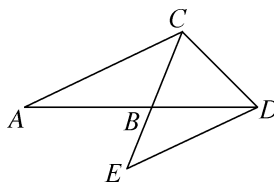
如图, $AB \parallel CD$, AC, BD 相交于点 F , 点 E 在边 BC 上, 且 $EF \parallel CD$, $CD = 2$, 求 $\frac{1}{EF} - \frac{1}{AB}$ 的值.



答案: 因为 $AB \parallel CD$, $EF \parallel CD$, 所以 $AB \parallel EF \parallel CD$, 所以 $\triangle BEF \sim \triangle BCD$, $\triangle CEF \sim \triangle CBA$, 所以 $\frac{EF}{CD} = \frac{BE}{BC}$, $\frac{FE}{AB} = \frac{EC}{BC}$, 所以 $\frac{EF}{CD} + \frac{FE}{AB} = \frac{BE}{BC} + \frac{EC}{BC} = \frac{BE + EC}{BC} = 1$, 所以 $\frac{EF}{CD} + \frac{EF}{AB} = 1$, 所以 $\frac{1}{CD} + \frac{1}{AB} = \frac{1}{EF}$, 所以 $\frac{1}{EF} - \frac{1}{AB} = \frac{1}{CD} = \frac{1}{2}$.

基本题型 3

如图, $AC \parallel ED$, AD, CE 相交于点 B , 连接 CD , 求证: $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ECD}} = \frac{CB}{BE}$.



答案: 因为 $AC \parallel ED$, 所以点 D 到 AC 的距离 h_D 等

于点 C 到 ED 的距离 h_C , 所以 $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ECD}} = \frac{\frac{1}{2}AC \cdot h_D}{\frac{1}{2}ED \cdot h_C} =$

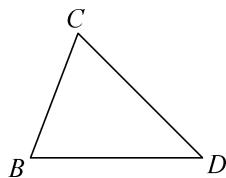
$\frac{AC}{DE}$. 因为 $AC \parallel ED$, 所以 $\triangle ABC \sim \triangle DBE$, 所以 $\frac{AC}{DE} =$

$\frac{CB}{BE}$. 所以 $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ECD}} = \frac{CB}{BE}$.

基本题型 4

如图, 在 $\triangle DBC$ 中, 已知 $BC : BD : CD = 4 : 7 :$

7, 求 $\cos \angle CBD$ 的值.



答案: 过点 D 作 $DH \perp BC$, 垂足为 H . 设 $BC = 4x (x > 0)$, 则 $BD = CD = 7x$, $HB = HC = 2x$. 所以

$$\cos \angle CBD = \frac{HB}{BD} = \frac{2x}{7x} = \frac{2}{7}.$$



名师思路展示

(1) ①由 $\angle ACB = 2\angle B$, CD 平分 $\angle ACB$, 可得 $\angle ACD = \angle DCB = \angle B$. 由 $DE \parallel AC$, 可得 $\angle ACD = \angle EDC$.

根据①的条件: $DE = 1$, $BD = \frac{3}{2}$, 可推出 $CD = BD = \frac{3}{2}$, $CE = DE = 1$. 欲求 BC 的长, 只需证明 $\triangle CED \sim \triangle CDB$,

从而可建立 BC 与已知线段之间的等量关系: $\frac{CE}{CD} = \frac{CD}{CB}$, 代入 $CE = 1$, $CD = \frac{3}{2}$, 即可求出 BC 的长.

②若 $\frac{AB}{AD} - \frac{BE}{DE}$ 的值为定值, 则可将 $\frac{AB}{AD}, \frac{BE}{DE}$ 转化为分母相同的比. 根据 $DE \parallel AC$, 可转化 $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CE}$. 由于 $CE = DE$, 则 $\frac{BE}{DE}$ 可转化为 $\frac{BE}{CE}$, 即 $\frac{AB}{AD} - \frac{BE}{DE}$ 可转化为 $\frac{BC}{CE} - \frac{BE}{CE} = \frac{BC - BE}{CE} = \frac{CE}{CE} = 1$.

(2) 由 $\angle BCF = 2\angle CBG$, CD 平分 $\angle BCF$, 可得 $\angle FCD = \angle DCB = \angle CBG$. 由 $DE \parallel AC$, 可得 $\angle EDC = \angle FCD = \angle DCB = \angle CBG$. 进而可推出 $\triangle CDB \sim \triangle CED$, 所以 $\frac{CD}{CE} = \frac{CB}{CD}$. 对于条件“ $S_1 \cdot S_3 = \frac{9}{16} S_2^2$ ”可尝试转化为 $\frac{S_1}{S_2} \cdot$

$\frac{S_3}{S_2} = \frac{9}{16}$. 由 $DE \parallel AC$, 可得 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{AC}{ED} = \frac{BC}{BE}$, 而 $\frac{S_3}{S_2}$ 可转化为 $\frac{BE}{CE}$, 则 $\frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{S_3}{S_2} = \frac{9}{16}$ 可转化为 $\frac{BC}{BE} \cdot \frac{BE}{CE} = \frac{9}{16}$, 即 $\frac{BC}{CE} = \frac{9}{16}$.

结合 $\frac{CE}{CD} = \frac{CD}{CB}$, 通过设 $BC = 9x$, $CE = 16x (x > 0)$, 则可表示出 $CD = 12x$. 从问题求 $\cos \angle CBD$ 出发, 必须构造直

角三角形, 结合 $CD = BD$, 根据等腰三角形“三线合一”的性质, 可作 $DH \perp CB$ 于点 H , 则可得 $HC = BH = \frac{9}{2}x$.

由 $BD = CD = 12x$, 根据 $\cos \angle CBD = \frac{BH}{BD}$, 则问题得以解决.



规范解答

解: (1) ①因为 CD 平分 $\angle ACB$, 所以 $\angle ACD = \angle DCB = \frac{1}{2} \angle ACB$. 因为 $\angle ACB = 2\angle B$, 所以 $\angle ACD = \angle DCB = \angle B$, 所以 $CD = BD = \frac{3}{2}$. 因为 $DE \parallel AC$, 所以 $\angle ACD = \angle EDC$. 所以 $\angle EDC = \angle DCB = \angle B$, 所以 $CE = DE = 1$, $\triangle CED \sim \triangle CDB$, 所以 $\frac{CE}{CD} = \frac{CD}{CB}$. 所以 BC 的长为 $\frac{9}{4}$.

②因为 $DE \parallel AC$, 所以 $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CE}$. 由①可知 $CE = DE$. 所以 $\frac{AB}{AD} - \frac{BE}{DE} = \frac{BC}{CE} - \frac{BE}{CE} = \frac{CE}{CE} = 1$.

所以 $\frac{AB}{AD} - \frac{BE}{DE}$ 的值是定值, 这个定值为 1.

(2) 因为 $DE \parallel AC$, 所以 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{AC}{DE} = \frac{BC}{BE}$. 因为 $\frac{S_3}{S_2} = \frac{BE}{CE}$, 所以 $\frac{S_1 \cdot S_3}{S_2^2} = \frac{BC}{CE}$. 又因为 $S_1 \cdot S_3 = \frac{9}{16} S_2^2$, 所以 $\frac{BC}{CE} = \frac{9}{16}$. 设 $BC = 9x (x > 0)$, 则 $CE = 16x$. 因为 CD 平分 $\angle BCF$, 所以 $\angle ECD = \angle FCD = \frac{1}{2} \angle BCF$. 因为 $\angle BCF = 2 \angle CBG$, 所以 $\angle ECD = \angle FCD = \angle CBD$, 所以 $BD = CD$. 因为 $DE \parallel AC$, 所以 $\angle EDC = \angle FCD$. 所以 $\angle EDC = \angle CBD = \angle ECD$, 所以 $CE = DE$. 因为 $\angle DCB = \angle ECD$, 所以 $\triangle CDB \sim \triangle CED$, 所以 $\frac{CD}{CE} = \frac{CB}{CD}$. 所以 $CD^2 = CB \cdot CE = 144x^2$, 所以 $CD = 12x$. 过点 D 作 $DH \perp BC$ 于点 H . 因为 $BD = CD = 12x$, $BH = \frac{1}{2} BC = \frac{9}{2}x$, 所以 $\cos \angle CBD = \frac{BH}{BD} = \frac{3}{8}$.



解后反思

在分析问题时, 要充分运用条件进行顺推分析, 比如问题(1)可推出大量的等角、多个等腰三角形, 且两个等腰三角形的底角相等、两个等腰三角形相似等等.

在探究 $\frac{b}{a} - \frac{d}{c}$ 的值是否为定值时, 可借助平行线或相似, 制造大量的等比, 而对于异分母分式相减, 其思路是通过等比, 转化为同分母(或等分母)的比, 然后运用同分母分式加减法则, 通过分子加减合成新的线段, 如果此时分子、分母有倍分关系, 那么问题得以解决.

问题(1)是两个内角呈两倍关系, 同时存在角平分线和平行线, 问题(2)是两个外角呈两倍关系, 同时存在角平分线和平行线, 要思考探究, 努力挖掘两者之间内在的联系: 两者都有一对等腰三角形, 且均相似.

要善于转化、灵活运用条件, 比如条件“ $S_1 \cdot S_3 = \frac{9}{16} S_2^2$ ”的转化运用就是一个难点, 通过结构调整, 可转化为:

$\frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{S_3}{S_2} = \frac{9}{16}$, 其中 $\frac{S_1}{S_2}, \frac{S_3}{S_2}$ 均可借助平行线和三角形面积公式转化为线段比, 至此条件的运用障碍得到解决.

无锡市 2023 年中考压轴题分析

已知二次函数 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x^2 + bx + c)$ 的图像与 y 轴交于点 A , 且经过点 $B(4, \sqrt{2})$ 和点 $C(-1, \sqrt{2})$.

(1) 请直接写出 b, c 的值.

(2) 直线 BC 交 y 轴于点 D , E 是二次函数 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x^2 + bx + c)$ 图像上位于直线 AB 下方的动点, 过点 E 作直线 AB 的垂线, 垂足为 F .

①求 EF 的最大值.

②若 $\triangle AEF$ 中有一个内角是 $\angle ABC$ 的两倍, 求点 E 的横坐标.

基本题型 1

已知一次函数 $y = kx + 4$ 的图像与 y 轴的交点为 P , 若二次函数 $y = ax^2 - 5ax + 4a$ 的图像经过点 P , 则二次函数的表达式为_____.

答案: $y = x^2 - 5x + 4$.

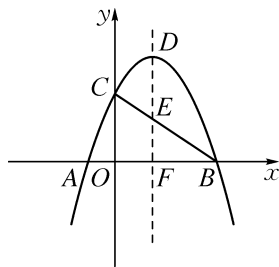
基本题型 2

二次函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的图像与 x 轴交于 A, B 两点(点 A 在点 B 的左边), 与 y 轴交于点 C , 在抛物线上是否存在一点 M , 使得四边形 $ACMB$ 的面积最大? 若存在, 求出点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

答案: 存在. 令 $y = 0$, 得 $x^2 - 2x - 3 = 0$, 解得 $x_1 = -1, x_2 = 3$, 所以点 $A(-1, 0), B(3, 0)$, 令 $x = 0$, 得 $y = -3$, 所以点 $C(0, -3)$. 易求直线 BC 的函数表达式为 $y = x - 3$. 因为四边形的顶点按照点 A, C, M, B 的顺序排列, 所以点 M 只能在直线 BC 下方的抛物线上. 因为 $\triangle ABC$ 的面积为定值, 所以当 $\triangle BCM$ 的面积最大时, 四边形 $ACMB$ 的面积最大. 设点 $M(a, a^2 - 2a - 3)$ ($0 < a < 3$), 过点 M 作 $MN \perp x$ 轴, 交 BC 于点 N , 则点 $N(a, a - 3)$. 所以 $MN = a - 3 - (a^2 - 2a - 3) = -a^2 + 3a$, 所以 $S_{\triangle BCM} = \frac{1}{2} \times 3 \times (-a^2 + 3a) = -\frac{3}{2}(a - \frac{3}{2})^2 + \frac{27}{8}$, 当 $a = \frac{3}{2}$ 时, $S_{\triangle BCM}$ 的值最大, 即四边形 $ACMB$ 的面积最大, 此时点 M 的坐标为 $(\frac{3}{2}, -\frac{15}{4})$.

基本题型 3

如图, 抛物线 $y = -x^2 + 2x + 3$ 与 x 轴相交于 A, B 两点, 与 y 轴交于点 C , 顶点为 D , 抛物线的对称轴 DF 与 x 轴相交于点 F . 设 P 为 x 轴上的一点, $\angle DAO + \angle DPO = \alpha$, 当 $\tan \alpha = 4$ 时, 求点 P 的坐标.



答案: 连接 OD , 由条件易得, 点 $D(1, 4), A(-1, 0), B(3, 0), F(1, 0)$, $AO = 1, OF = 1, DF = 4, AF = 2, AB = 4$, 所以 $AD^2 = AF^2 + DF^2 = 20, OD^2 = OF^2 + DF^2 = 17$. 在 $\text{Rt}\triangle DOF$ 中, 易求 $\tan \angle DOF = 4$. 所以 $\angle DOF = \alpha = \angle DAO + \angle ADO$, 因为 $\angle DAO + \angle DPO = \alpha$, 所以 $\angle DPO = \angle ADO$. 当点 P 在原点右侧时, 易证 $\triangle ADP \sim \triangle AOD$, 所以 $AD^2 = AO \cdot AP$, 解得 $AP = 20$, 所以 $OP = 19$. 同理, 当点 P 在原点左侧时, 易证 $\triangle DOP \sim \triangle AOD$, 所以 $DO^2 = OA \cdot OP$, 解得 $OP = 17$.

所以点 P 的坐标为 $(19, 0)$ 或 $(-17, 0)$.

名师思路展示

(1) 利用待定系数法即可求解.

(2) ①过点 E 作平行于 y 轴的辅助线, 交 AB 于点 G , 如将 EF 视作 $\triangle AEB$ 的高, 则利用等积法求 $\triangle AEB$ 面积的最大值后, 再求 EF 的最大值; 或利用相似三角形(锐角三角函数)求得 $EF = \frac{\sqrt{6}}{3}EG$, 易得直线 AB 的函数表达式为 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \sqrt{2}$, 通过设点 E, G 的坐标, 表示出 EG , 进而可以表示出 EF , 利用配方法即可求解. ②作图, 利用锐角三角函数求出 $\angle ABC$ 的二倍角的正切值为 $2\sqrt{2}$, 构造 $\triangle AMF \sim \triangle FNE$, 相似比为 $AF : EF$. 分两种情况讨论: 当 $\angle FAE = 2\angle ABC$ 时, $\tan \angle FAE = 2\sqrt{2}$, 根据相似比求解即可; 当 $\angle FEA = 2\angle ABC$ 时, $\tan \angle FAE = 2\sqrt{2}$, 根据相似比求解即可.

规范解答

解: (1) $b = -3, c = -2$.

(2) ①如图 1, 过点 E 作 $EG \parallel y$ 轴交直线 AB 于点 G , 连接 AE, BE . 由(1)可知二次函数的表达式为 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x^2 - 3x - 2) = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}x - \sqrt{2}$, 所以点 $A(0, -\sqrt{2})$. 在 $\text{Rt}\triangle ADB$ 中, 由勾股定理, 得 $AB = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{6}$. 因为 $EF \perp AB$, 所以 $\triangle AEB$ 的面积最大时, EF 最大. 因为点 E 在直线 AB 下方的抛物线上, 所以 $S_{\triangle AEB} = S_{\triangle AEG} + S_{\triangle BEG} = \frac{1}{2}EG \cdot 4 = 2EG$. 所以当 EG 最大时, $\triangle AEB$ 的面积最大, 此时 EF 最大. 易知直线 AB 的函数表达式为 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \sqrt{2}$. 设点 $E(t, \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}t - \sqrt{2})$ ($0 < t < 4$), 则点 $G(t, \frac{\sqrt{2}}{2}t - \sqrt{2})$. 所以 $EG = -\frac{\sqrt{2}}{2}t^2 + 2\sqrt{2}t = -\frac{\sqrt{2}}{2}(t - 2)^2 + 2\sqrt{2}$, 所以 EG 的最大值为 $2\sqrt{2}$, 所以 $\triangle AEB$ 面积的最大值为 $2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$, 所以 EF 的最大值为 $\frac{4\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ (也可以这样转化: 根据条件可知, $\cos \angle FEG = \cos \angle ABD = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 所以 $\frac{EF}{EG} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 所以 $EF = \frac{\sqrt{6}}{3}EG$).

②如图 2, 已知 $\tan \angle ABC = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 令 $AC = \sqrt{2}, BC = 2$, 作 AB 的垂直平分线交 BC 于点 H , 连接 AH , 则 $BH = AH$, 所以 $\angle AHC = 2\angle ABC$. 设 $CH = x$, 则 $AH = BH = 2 - x$. 由勾股定理, 得 $CH^2 + AC^2 = AH^2$, 即 $x^2 + (\sqrt{2})^2 = (2 - x)^2$, 解得 $x = \frac{1}{2}$. 所以 $\tan \angle AHC = 2\sqrt{2}$, 即 $\angle ABC$ 的二倍角的正切值为 $2\sqrt{2}$. 如图 3, 构造 $\triangle AMF \sim \triangle FNE$, 则相似比为 $AF : FE$. 又因为 $\tan \angle MFA = \tan \angle ABC = \tan \angle FEN = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以可设 $AM = \sqrt{2}a, MF = 2a$ ($a > 0$).

当 $\angle FAE = 2\angle ABC$ 时, $\tan \angle FAE = 2\sqrt{2}$, 所以相似比为 $1 : 2\sqrt{2}$, 所以 $FN = 2\sqrt{2}AM = 4a$, $NE = 2\sqrt{2}MF = 4\sqrt{2}a$, 所以 $MF + FN = 2a + 4a = 6a$, $OM + NE = OA - AM + NE = \sqrt{2} - \sqrt{2}a + 4\sqrt{2}a = \sqrt{2} + 3\sqrt{2}a$, 所以点 $E(6a, -\sqrt{2} - 3\sqrt{2}a)$, 代入抛物线的函数表达式, 可求得 $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = 0$ (舍). 所以点 E 的横坐标为 $6a = 2$.

当 $\angle FEA = 2\angle ABC$ 时, $\tan \angle FEA = 2\sqrt{2}$, 所以相似比为 $2\sqrt{2} : 1$, 所以 $FN = \frac{AM}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}a$, $NE = \frac{MF}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, 同理可得, 点 $E(\frac{5}{2}a, -\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}a)$, 代入抛物线的函数表达式, 可求得 $a_1 = \frac{34}{25}$, $a_2 = 0$ (舍去). 所以点 E 的横坐标为 $\frac{5}{2}a = \frac{17}{5}$.

综上所述, 点 E 的横坐标为 2 或 $\frac{17}{5}$.

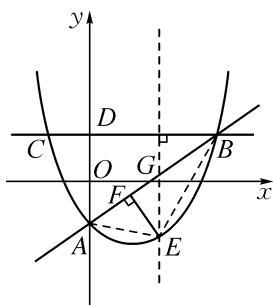


图 1

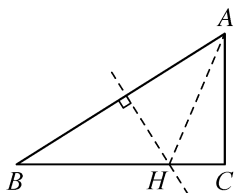


图 2

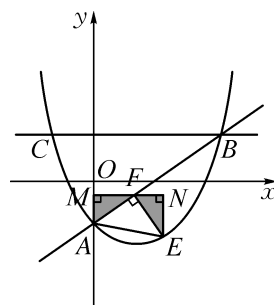


图 3



解后反思

二次函数与平面几何结合, 进行综合考查是各地常见的压轴题, 首先利用待定系数法, 求得二次函数表达式, 从而确定抛物线上的一些特殊点的坐标, 然后由这些点构成几何图形, 探究图形中的边角关系. 本题中的第(2)问即是如此, ①求“点线距离 EF 的最值”是高中知识, 而在初中阶段, 可由“距离”联想到“高”, 进而联想到“面积”, 故通过等积法, 将问题化归为计算三角形面积的最值问题; 或利用相似三角形知识, 将 EF 表示成某参数的二次函数, 进而求最值; ②“倍角条件”也是高中知识, 在初中阶段, 只能通过构造“倍角”化归至三角形中, 再分类讨论, 利用相似三角形求之, 这两个问题考查了初高中衔接的可持续发展的学习能力.

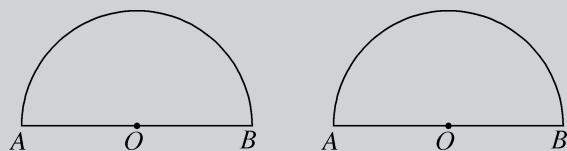
常州市 2022 年中考压轴题分析

现有若干张相同的半圆形纸片,点 O 是圆心,直径 AB 的长是 12 cm, C 是半圆弧上的一点(点 C 不与点 A, B 重合),连接 AC, BC .

(1) 沿 AC, BC 剪下 $\triangle ABC$, 则 $\triangle ABC$ 是 _____ 三角形(填“锐角”“直角”或“钝角”).

(2) 分别取半圆弧上的点 E, F 和直径 AB 上的点 G, H . 已知剪下的由这四个点顺次连接构成的四边形是一个边长为 6 cm 的菱形. 请用直尺和圆规在图中作出一个符合条件的菱形(保留作图痕迹,不要求写作法).

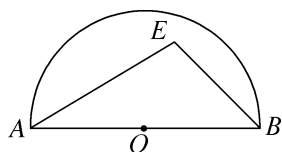
(3) 经过数次探索,小明猜想,对于半圆弧上的任意一点 C ,一定存在线段 AC 上的点 M 、线段 BC 上的点 N 和直径 AB 上的点 P, Q ,使得由这四个点顺次连接构成的四边形是一个边长为 4 cm 的菱形. 小明的猜想是否正确? 请说明理由.



备用图

基本题型 1

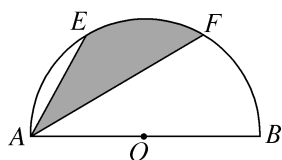
如图,已知 AB 为半圆 O 的直径, E 为半圆内一点,求证: $\angle A + \angle B < 90^\circ$.



答案: 延长 AE 交 $\odot O$ 于点 C , 连接 CB . 因为 AB 为直径, 所以 $\angle ACB = 90^\circ$. 所以 $\angle A + \angle ABE = \angle CEB < 90^\circ$.

基本题型 2

如图, AB 为半圆 O 的直径, AB 的长是 12, E, F 为 $\widehat{AB}$ 的三等分点, 求图中阴影部分的面积.

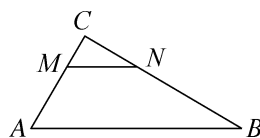


答案: 连接 OE, OF, EF . 因为 E, F 为 $\widehat{AB}$ 的三等分点, 所以 $\angle AOE = \angle EOF = \angle FOB = 60^\circ$. 又因为 $OE = OF$, 所以 $\triangle EFO$ 是等边三角形, 所以 $\angle EFO =$

60° . 所以 $\angle EFO = \angle FOB$, 所以 $EF \parallel AB$. 根据平行线之间的距离处处相等, 有 $S_{\triangle EFO} = S_{\triangle EFA}$, 所以阴影部分的面积等于扇形 EOF 的面积, 所以阴影部分的面积为 $\frac{60\pi \times 6^2}{360} = 6\pi$.

基本题型 3

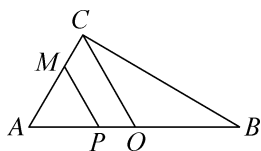
如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 M, N 分别在边 AC, BC 上, $MN \parallel AB$, $MN = 4$, $AB = 12$, 求 $\frac{CM}{CA}$ 的值.



答案: 因为 $MN \parallel AB$, 所以 $\triangle CMN \sim \triangle CAB$, 所以 $\frac{CM}{CA} = \frac{MN}{AB} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

基本题型 4

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BCA = 90^\circ$, $AB = 12$, O 为 AB 的中点, 点 M 在 AC 上, 且 $\frac{CM}{AC} = \frac{1}{3}$, $PM \parallel OC$, 求 PM, AP 的长.



答案:在 $\triangle ABC$ 中,因为 $\angle BCA = 90^\circ$, $AB = 12$, O 为 AB 的中点,所以 $AO = OC = \frac{1}{2}AB = 6$. 因为 $PM \parallel$

OC , 所以 $\triangle APM \sim \triangle AOC$, 所以 $\frac{AM}{AC} = \frac{AP}{AO} = \frac{PM}{OC}$. 因为 $\frac{CM}{AC} = \frac{1}{3}$, 所以 $\frac{AM}{AC} = \frac{AP}{AO} = \frac{PM}{OC} = \frac{2}{3}$. 因为 $AO = OC = 6$, 所以 $PM = AP = 4$.



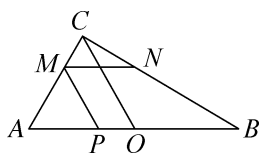
名师思路展示

(1) 根据直径所对圆周角是直角, 可直接得到结论: $\triangle ABC$ 是直角三角形.

(2) 根据点 E, F 在半圆弧上, 点 G, H 在直径 AB 上, 以 E, F, H, G 为顶点的四边形是菱形, 必有 $EF \parallel AB$. 根据直径 $AB = 12$ cm, $EF = 6$ cm, 可推出 $OE = OF = EF = 6$ cm, 则 $\triangle EFO$ 是等边三角形, 则可推出 $\angle EFO = \angle FOB = 60^\circ$, 因此只须满足 $\angle FOB = 60^\circ$, 即可确定点 F , 方法为: 以点 B 为圆心, OB 的长为半径画弧交半圆于点 F . 同样再以点 A 为圆心, OB 的长为半径画弧交半圆于点 E . 由于四边形 $EFHG$ 是菱形, 若以点 F 为圆心, EF 的长为半径画弧, 必与直径 AB 交于点 O 或点 B ; 同样若以点 E 为圆心, EF 的长为半径画弧, 必与直径 AB 交于点 O 或点 A , 即选择点 O 和点 B 或点 O 和点 A 分别作为点 G, H , 则以 E, F, G, H 四点为顶点必构成菱形.

(3) 类比问题(2), 根据点 M, N 在 $\triangle ABC$ 的边 AC, BC 上, 点 P, Q 在直径 AB 上, 以 M, N, P, Q 四点为顶点的四边形是菱形, 则必有 $MN \parallel AB$, $\triangle CMN \sim \triangle CAB$. 根据直径 $AB = 12$ cm, $MN = 4$ cm, 有 $\frac{CM}{CA} = \frac{CN}{CB} = \frac{1}{3}$, 因此 M, N 分别为 CA, CB 上一个确定的三等分点. 如何在 AB 上找到或确定点 P, Q 是一个难点, 唯一可作为参照的是直角三角形 ABC 中斜边上的中线 CO , 且 $CO = 6$ cm, 则有 $\frac{PM}{CO} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

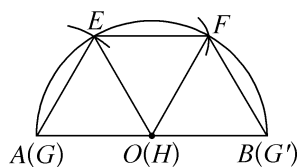
如图, 观察图形, 由 $\frac{CM}{CA} = \frac{1}{3}$, 可得 $\frac{AM}{AC} = \frac{2}{3}$, 当 $PM \parallel CO$ 时, 产生重要结论: $\frac{PM}{CO} = \frac{AM}{AC} = \frac{AP}{AO} = \frac{2}{3}$, 结合 $AO = 6$ cm, 可得到 $PM = 4$ cm. 因此通过作 $PM \parallel CO$ 可以找到点 P , 再在 AB 上截取 $PQ = PM$ 即可. 所以小明的猜想正确.



规范解答

解: (1) 直角

(2) 如图, 四边形 $EFHG$ 或四边形 $EFG'H$ 即为所求.



(3) 正确. 理由如下:

由条件可知, $MN \parallel AB$, 且 $\frac{MN}{AB} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. 易知 $\triangle CMN \sim \triangle CAB$, 所以 $\frac{CM}{CA} = \frac{CN}{CB} = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{3}$.

所以点 M, N 的位置可以确定. 连接 CO , 则由“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”可知 $CO = \frac{1}{2}AB = 6$ cm. 作 $MP \parallel CO$ 交 AB 于点 P , $NQ \parallel CO$ 交 AB 于点 Q , 则 $\triangle AMP \sim \triangle ACO$, $\triangle BNQ \sim \triangle BCO$. 所以由相似比可知, $MP = NQ = 4$ cm. 因为 $MP \parallel NQ$, 所以四边形 $MNQP$ 为平行四边形. 因为 $MN = MP = 4$, 所以四边形 $MNQP$ 为菱形. 所以点 P, Q 的位置也可以确定. 所以对于半圆弧上的任意一点 C , 按上述方法一定可以找到点 M, N , 进而也可以找到点 P, Q , 使得由这个四个点顺次连接构成的四边形是一个边长为 4 cm 的菱形, 所以小明的猜想正确.



解后反思

要善于抓住菱形的特征——对边平行、邻边相等, 并以此作为解决问题的切入点, 这是解决问题的关键.

要重视问题的多样性, 题中给出以 E, F, G, H 四点为顶点的四边形, 没有限制顺序, 要考虑有多种可能; 同时在点 E 处, 与 EF 作为邻边, 直径上可找到两个点.

要重视问题设计时隐藏的内在逻辑关系, 比如问题(2)与问题(3)具有一些共性——都要构造菱形, 菱形都有一条边在直径 AB 上, 因此都用到对边平行作为解决问题的切入点.

要注意方法的合理性, 并进行保留与删除. 问题(3), 若以点 M 为圆心, MN 的长为半径画弧, 与直线 AB 产生两个交点 P, P' , 当点 C 在半圆上运动时, 其中一个交点 P' 可能在线段 AB 上, 也可能不在, 但点 P 一定在, 且满足 $PM \parallel CO$.

镇江市 2024 年中考压轴题分析

主题学习:仅用一把无刻度的直尺作图

【阅读理解】

任务:如图 1,点 D, E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB, AC 上, $DE \parallel BC$, 仅用一把无刻度的直尺作 DE, BC 的中点.

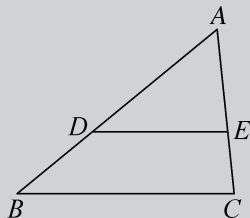


图 1

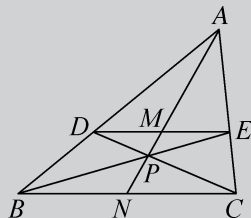


图 2

操作:如图 2,连接 BE, CD 交于点 P , 连接 AP 交 DE 于点 M , 延长 AP 交 BC 于点 N , 则 M, N 分别为 DE, BC 的中点.

理由:由 $DE \parallel BC$ 可得 $\triangle ADM \sim \triangle ABN$ 及 $\triangle AEM \sim \triangle ACN$, 所以 $\frac{DM}{BN} = \frac{AM}{AN}, \frac{EM}{CN} = \frac{AM}{AN}$. 所以, $\frac{DM}{EM} = \frac{BN}{CN}$. 同理, 由 $\triangle DMP \sim \triangle CNP$ 及 $\triangle EMP \sim \triangle BNP$, 可得 $\frac{DM}{CN} = \frac{MP}{NP}, \frac{EM}{BN} = \frac{MP}{NP}$. 所以 $\frac{DM}{EM} = \frac{CN}{BN}$. 所以 $\frac{BN}{CN} = \frac{CN}{BN}$, 则 $BN = CN, DM = EM$, 即 M, N 分别为 DE, BC 的中点.

【实践操作】

请仅用一把无刻度的直尺完成下列作图, 要求:不写作法, 保留作图痕迹.

(1) 如图 3, $l_1 \parallel l_2$, 点 E, F 在直线 l_2 上.

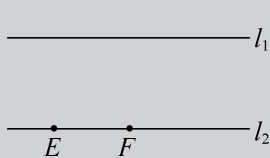


图 3

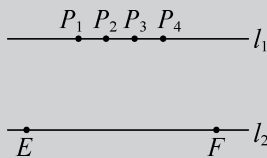


图 4

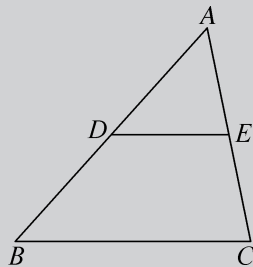


图 5

①作线段 EF 的中点;

②在①中作图的基础上, 在直线 l_2 上位于点 F 的右侧作一点 P , 使得 $PF = EF$.

(2) 小明发现, 如果重复上面的过程, 就可以作出长度是已知线段长度的 3 倍、4 倍、 $\dots$ 、 k 倍 (k 为正整数) 的线段. 如图 4, $l_1 \parallel l_2$, 已知点 P_1, P_2 在 l_1 上, 他利用上述方法作出了 $P_2P_3 = P_3P_4 = P_1P_2$. 点 E, F 在直线 l_2 上, 请在图 4 中作出线段 EF 的三等分点.

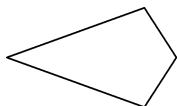
【探索发现】

请仅用一把无刻度的直尺完成作图,要求:不写作法,保留作图痕迹.

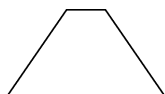
- (3) 如图 5, DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线. 请在线段 EC 上作出一点 Q , 使得 $QE = \frac{1}{3}CE$ (要求用两种方法).

基本题型 1

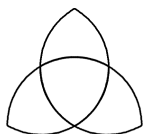
不能用无刻度直尺直接准确画出下列轴对称图形的所有对称轴的是 ()



A



B



C

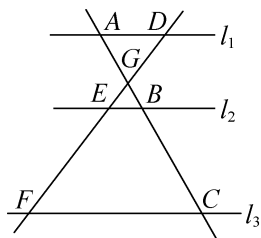


D

答案: D

基本题型 2

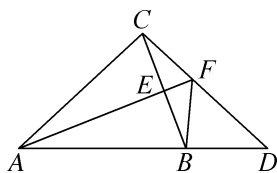
如图, 直线 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, 直线 AC 分别交 l_1, l_2, l_3 于点 A, B, C , 直线 DF 分别交 l_1, l_2, l_3 于点 D, E, F , AC 与 DF 相交于点 G , 且 $AG=2, GB=1, BC=5$, 则 $\frac{DE}{EF}$ 的值为 _____.



答案: $\frac{3}{5}$

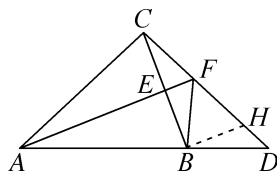
基本题型 3

如图, 已知 $\triangle ABC$ 为等腰三角形, 且 $AB=AC$, 延长 AB 至 D , 使得 $AB:BD=m:n$, 连接 CD , E 是 BC 的中点, 连接 AE , 并延长 AE 交 CD 于点 F , 连接 FB , 则 $BF:FD=$ _____.



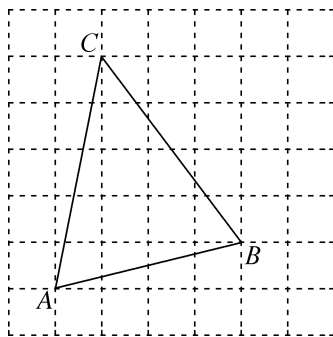
答案: $m:(m+n)$ [提示: 过点 B 作 $BH \parallel AF$ 交

CD 于 H , 则 $\triangle BDH \sim \triangle ADF$, 所以 $\frac{DH}{HF} = \frac{BD}{AB} = \frac{n}{m}$, 因为 $AB=AC$, E 是 BC 边上的中点, 所以 $AE \perp BC$, 所以 AF 是线段 BC 的垂直平分线, 所以 $BF=CF$. 因为 $EF \parallel BH$, $CE=EB$, 即 $CE = \frac{1}{2}BC$, 所以 $\triangle CEF \sim \triangle CBH$, 所以 $\frac{CF}{CH} = \frac{CE}{BC} = \frac{1}{2}$, 所以 $CF = \frac{1}{2}CH$, 即 $CF=HF$, 所以 $CF:FD=m:(m+n)$, 所以 $BF:FD=m:(m+n)$.]

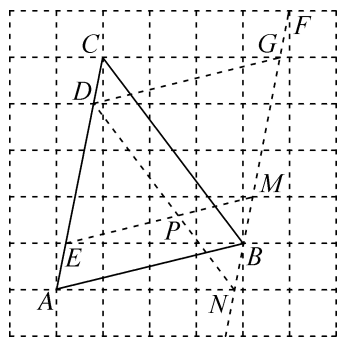


基本题型 4

如图, 在每个小正方形的边长为 1 的网格中, 点 A, B, C 均在格点上. 请在如图所示的网格中, 用无刻度的直尺, 在 $\triangle ABC$ 的内部画出点 P , 满足 $S_{\triangle PAB}:S_{\triangle PBC}:S_{\triangle PCA}=1:1:3$, 并简要说明点 P 的位置是如何找到的 (不要求证明).



答案: 如下图, AC 与网格线相交得点 D, E ; 取格点 F , 连接 FB 并延长, 与网格线相交得点 M, N, G . 连接 DN, EM, DG , DN 与 EM 相交于点 P , 点 P 即为所求.



由图可知, $AE : CD : DE = 1 : 1 : 3$, 且 $AC \parallel FN$, 因为平行四边形 $ABME, CNDN, DEMG$ 的高相等, 所以 $S_{\square ABME} : S_{\square CNDN} : S_{\square DEMG} = 1 : 1 : 3$, 因为 $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} S_{\square ABME}$, $S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} S_{\square CNDN}$, $S_{\triangle PCA} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} DE \times \frac{3}{5} h_{\square DEMG} = \frac{1}{2} S_{\square DEMG}$, 所以 $S_{\triangle PAB} : S_{\triangle PBC} : S_{\triangle PCA} = 1 : 1 : 3$.

名师思路展示

【实践操作】(1) ①根据【阅读理解】部分的作法: 在 l_1 上方任取一点 A , 构造 $\triangle AEF$, 其中 AE 与 l_1 交于点 B , AF 交 l_1 于点 C , 即可按照【阅读理解】的方法完成.

②作射线 FN 交 AE 于点 G , 作射线 GC 交 l_2 于点 P , 点 P 即为所求.

(2) 仿照上述作法, 构造相似形, 有两种思路, 具体见“规范解答”.

【探索发现】(3) 如图 5, 连接 CD, BE 交于点 O , 根据相似可知, $DO : OC = 1 : 2$, 即点 O 是 CD 的三等分点之一, 由此启发我们过点 O 作 BC 的平行线; 但由于只有一把无刻度的直尺, 因此需要构造新的三角形 ACP , 同法可得点 M , 它是 CP 的三等分点之一, 则 $OM \parallel BC$, 即点 Q 为所求作点, 由相似的不同构造方法, 还可以有其他作法, 具体见“规范解答”.

规范解答

解:【实践操作】

(1) ①如图 1, 点 M 即为所求作的点.

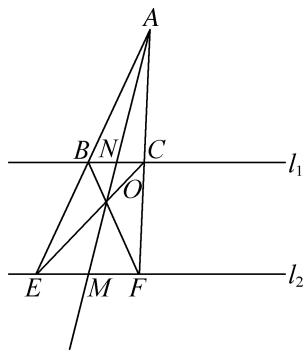


图 1

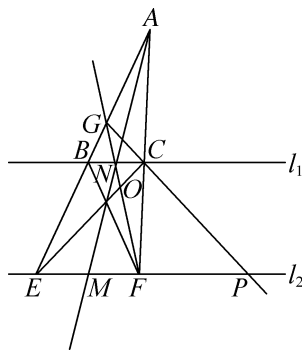


图 2

②如图 2, 点 P 即为所求作的点.

(2) 如图 3 和图 4 (各对应一种作法), 点 N, M 即为所求作的点.

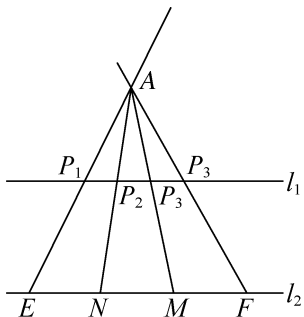


图 3

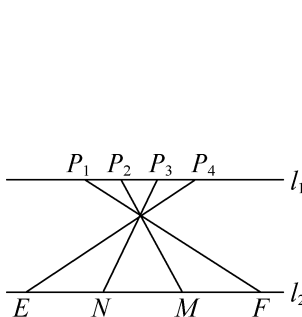


图 4

【探索发现】

(3) 如图 5~图 9(各对应一种作法),点 Q 即为所求作的点.

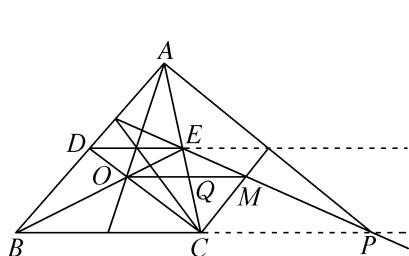


图 5

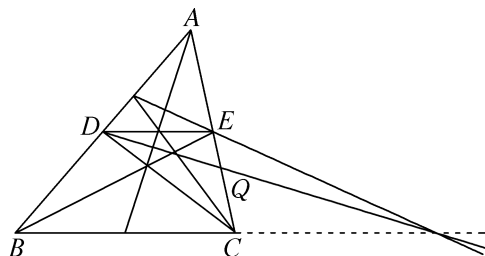


图 6

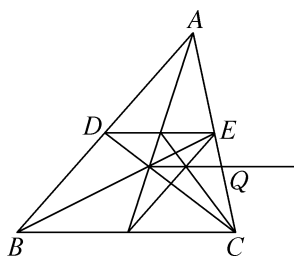


图 7

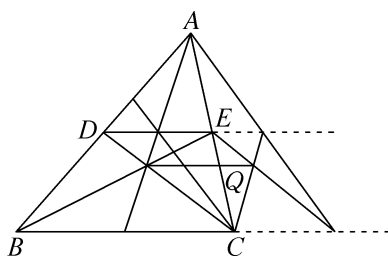


图 8

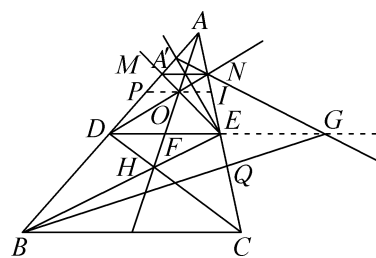


图 9

解后反思

本题通过无刻度直尺作图的形式,考查了相似三角形的运用和逻辑推理能力,通过平行构造“X”型或“A”型相似三角形是解决问题的关键.相似是中学数学的一个重点与难点,理解多种相似模型对解决相似类问题有很大的帮助.本题从【阅读理解】开始,用一个简单的模型引导出在已知一对平行线的条件下画中点的方法,重点在于要理解这种方法的本质是构造相似三角形,难点在于如何迁移并拓展运用前面小问中构造相似的方法.

【探索发现】中,图 5~图 8 作法较为相似,在此仅给出图 9 的作法及证明供参考:

作法:如图 9,连接 BE, CD 交于点 H ,连接 AH ,交 DE 于点 F ,可证得 F 为 DE 中点;过点 E 向上作任意射线,交 AF 于点 O ,交 AD 于点 M ,连接 DO 并延长,交 AE 于点 N ;连接点 E 和 AF , MN 的交点并延长,交 AD 于点 A' ,连接 $A'N$ 并延长,交直线 DE 于点 G ;连接 BG ,与 AC 的交点 Q 即为所求.

证明:过 O 作 $PI \parallel DE$,易证 $\triangle AOI \sim \triangle AFE$, $\triangle AOP \sim \triangle AFD$,所以 $\frac{OI}{FE} = \frac{AO}{AF} = \frac{OP}{FD}$,所以 $OI = OP$. 易证 $\triangle MPO \sim \triangle MDE$, $\triangle NOI \sim \triangle NDE$,所以 $\frac{MO}{ME} = \frac{PO}{DE} = \frac{OI}{DE} = \frac{NO}{ND}$,所以 $\frac{MO}{EO} = \frac{NO}{DO}$,又因为 $\angle MON = \angle EOD$,所以 $\triangle MON \sim \triangle EOD$. 所以 $MN \parallel DE$,则易证 $EG = DE = \frac{1}{2}BC$,易证 $\frac{EQ}{QC} = \frac{EG}{CB} = \frac{1}{2}$,即 $QE = \frac{1}{3}CE$.

南通市 2024 年中考压轴题分析

综合与实践:九年级某学习小组围绕“三角形的角平分线”开展主题学习活动.

【特例探究】

(1) 如图 1,2,3 是三个等腰三角形(相关条件见图中标注),列表分析两腰之和与两腰之积.

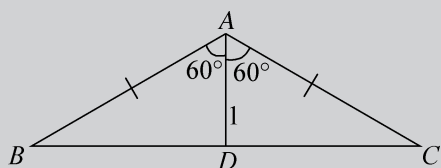


图 1

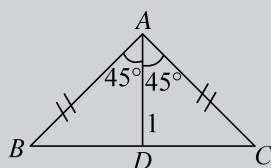


图 2

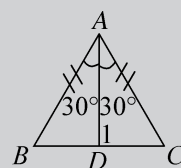


图 3

等腰三角形两腰之和与两腰之积分析表

图序	角平分线 AD 的长	$\angle BAD$ 的度数	腰长	两腰之和	两腰之积
图 1	1	60°	2	4	4
图 2	1	45°	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	2
图 3	1	30°	_____	_____	_____

请补全表格中数据,并完成以下猜想.

已知 $\triangle ABC$ 的角平分线 $AD=1$, $AB=AC$, $\angle BAD=\alpha$,用含 α 的等式写出两腰之和 $AB+AC$ 与两腰之积 $AB \cdot AC$ 之间的数量关系:_____.

【变式思考】

(2) 已知 $\triangle ABC$ 的角平分线 $AD=1$, $\angle BAC=60^\circ$,用等式写出两边之和 $AB+AC$ 与两边之积 $AB \cdot AC$ 之间的数量关系,并证明.

【拓展运用】

(3) 如图 4, $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=1$,点 D 在边 AC 上, $BD=BC=AD$.以点 C 为圆心,CD 长为半径作弧与线段 BD 相交于点 E,过点 E 作任意直线与边 AB,BC 分别交于 M,N 两点.请补全图形,并分析 $\frac{1}{BM} + \frac{1}{BN}$ 的值是否变化?

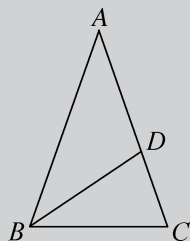
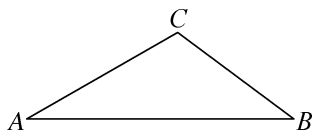


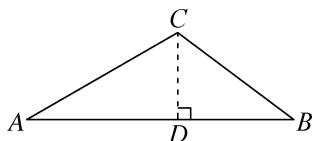
图 4

基本题型 1

如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=30^\circ$, $\tan B=\frac{3}{4}$, $AC=6$,求 AB 的长.

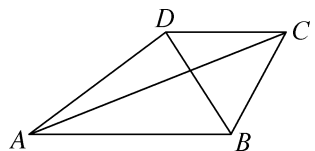


答案:如图,过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D ,在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $\angle A=30^\circ$, $AC=6$,所以 $CD=\frac{1}{2}AC=3$, $AD=\sqrt{3}CD=3\sqrt{3}$,在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $\tan B=\frac{CD}{BD}=\frac{3}{4}$,所以 $BD=4$,所以 $AB=AD+BD=3\sqrt{3}+4$.



基本题型 2

如图,在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $CD=CB$, $\sin \angle BAD=\frac{3}{5}$, $\angle BCD=60^\circ$,连接 AC ,则 $\tan \angle ACD=$ _____.



答案:如图,过点 A 作 $AE \perp CD$,交 CD 延长线于 E ,过点 B 作 $BF \perp CD$,垂足为 F .因为 $\sin \angle BAD=\frac{3}{5}$, $AB \parallel CD$,所以 $\sin \angle ADE=\frac{AE}{AD}=\frac{3}{5}$,设 $AE=3x$, $AD=5x$,则 $DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=4x$,因为 $CD=CB$, $\angle BCD=60^\circ$,所以 $\triangle BCD$ 为等边三角形,所以 $\angle CBD=\angle BCD=60^\circ$.易得 $BF=3x$, $CF=\frac{3x}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}x$,所以 $CD=$

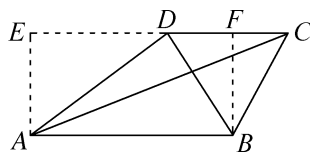


名师思路展示

【特例探究】根据特殊角的三角函数值及解直角三角形的知识,填表即可;再由 $AB=AC=\frac{AD}{\cos \alpha}=\frac{1}{\cos \alpha}$ 可得结论;

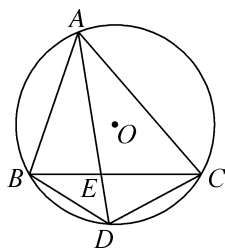
【变式思考】本小题的条件不再是等腰三角形,故角平分线无法直接转化为高,从而解直角三角形得到结果.因此,易想到作高来构造直角三角形,从而将线段用含三角形函数的代数式来表示,进而利用 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+$

$2\sqrt{3}x$,所以 $\tan \angle ACD=\frac{AE}{CE}=\frac{3x}{4x+2\sqrt{3}x}=\frac{6-3\sqrt{3}}{2}$.



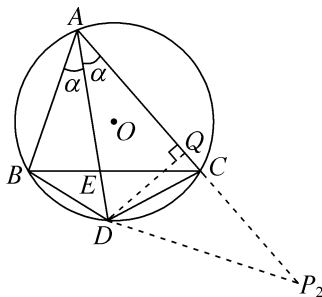
基本题型 3

已知, $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 边于点 E ,交 $\odot O$ 于点 D ,连接 DB , DC .当 $\angle BAC=2\alpha$ 时,试猜想线段 AB , AC , AD 之间满足的数量关系(用含有 α 的三角函数表示),并证明你的结论;



答案:数量关系: $AB+AC=2\cos \alpha \cdot AD$.

证明如下:延长 AC 到点 P_2 ,使得 $CP_2=AB$,易证 $\triangle ABD \cong \triangle P_2CD$,所以 $AD=P_2D$.过点 D 作 $DQ \perp AP_2$ 于 Q ,在 $\text{Rt}\triangle ADM$ 中, $\cos \alpha=\frac{AQ}{AD}$,所以 $AQ=\cos \alpha \cdot AD$,所以 $AB+AC=P_2C+AC=AP_2=2AQ=2\cos \alpha \cdot AD$.



$S_{\triangle ACD}$ 来求得答案.

【拓展运用】由第(2)小问,可以探究得到 $AB+AC$ 与 $AB \cdot AC$ 之间的一般关系,从而运用到本小题中,通过计算可以发现本题中, $\angle ABC$ 与 $\angle CBE$ 为定角,从而得到 $\frac{1}{BM} + \frac{1}{BN} = \frac{BM+BN}{BM \cdot BN}$ 为定值.

规范解答

解:(1) $\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad \frac{4}{3} \quad AB+AC=2\cos \alpha \cdot AB \cdot AC$

提示:如图 1,在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $AB = \frac{AD}{\cos \angle BAD} = \frac{1}{\cos \alpha}$, 所以 $AB+AC = \frac{2}{\cos \alpha}$, $AB \cdot AC = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, 所以 $AB+AC = 2\cos \alpha \cdot AB \cdot AC$.

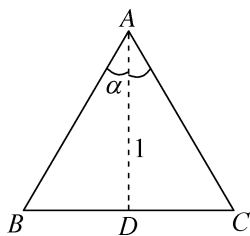


图 1

(2) $AB+AC=\sqrt{3}AB \cdot AC$.

证明:如图 2,过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E , $DF \perp AC$ 于点 F , 过点 C 作 $CG \perp AB$ 于点 G . 在 $\text{Rt}\triangle AED$ 中, $DE = AD \cdot \sin \angle BAD$. 在 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中, $DF = AD \cdot \sin \angle CAD$. 在 $\text{Rt}\triangle ACG$ 中, $CG = AC \cdot \sin \angle BAC$. 因为 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}$, 所以 $\frac{1}{2}AB \cdot CG = \frac{1}{2}AB \cdot DE + \frac{1}{2}AC \cdot DF$, 即 $\frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2}AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD + \frac{1}{2}AC \cdot AD \cdot \sin \angle CAD$, 所以 $AB+AC = \frac{\sin \angle BAC}{AD \cdot \sin \angle BAD} AB \cdot AC$. 因为 $\angle BAC = 60^\circ$, $AD = 1$, 所以 $AB+AC = \frac{\sin 60^\circ}{1 \times \sin 30^\circ} AB \cdot AC$, 所以 $AB+AC = \sqrt{3}AB \cdot AC$.

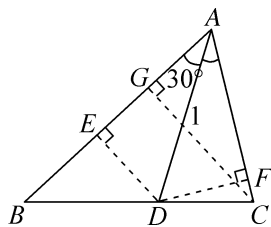


图 2

(3) 补全图形如图 3 所示. 设 $\angle A = \beta$, 则 $\angle ABD = \angle A = \beta$, 所以 $\angle BDC = 2\beta$. 因为 $BD = BC$, 所以 $\angle BCD = \angle BDC = 2\beta$. 因为 $AB = AC$, 所以 $\angle ABC = \angle ACB = 2\beta$. 所以 $\beta + 2\beta + 2\beta =$

180° , 解得 $\beta = 36^\circ$, 所以 $\angle A = \angle ABD = \angle CBD = 36^\circ$, 所以 $\angle ABC = \angle ACB = \angle BDC = 72^\circ$. 易证 $\triangle BDC \sim \triangle ABC$, 所以 $BC : AC = DC : BC$, 所以 $BC^2 = CD \cdot AC$. 设 $CD = x$, 则 $BC = AD = 1 - x$. 所以 $(1-x)^2 = x \cdot 1$, 解得 $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. 因为 $AC = 1$, 所以 $\frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 1$ 不符合题意. 所以

$CD = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$. 因为 $CE = CD$, 所以 $\angle DEC = \angle BDC = 72^\circ$. 因为 $\angle CBD = 36^\circ$, 所以 $\angle ECB = 36^\circ$, 所以 $BE = CE = CD = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$. 由第(2)小问的解题过程可得 $BM + BN =$

$\frac{\sin \angle MBN}{BE \cdot \sin \angle CBD} BM \cdot BN$, 所以 $BM + BN = \frac{\sin 72^\circ}{\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \times \sin 36^\circ} BM \cdot BN$, 两边同时除以 $BM \cdot$

BN , 得 $\frac{1}{BM} + \frac{1}{BN} = \frac{\sin 72^\circ}{\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \sin 36^\circ}$. 因为 $\sin 36^\circ$ 和 $\sin 72^\circ$ 为定值, 所以 $\frac{1}{BM} + \frac{1}{BN}$ 为定值.

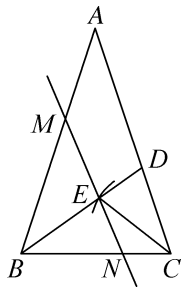


图 3



解后反思

本题从一些特殊的角度出发, 探讨了两腰之和 $AB + AC$ 与两腰之积 $AB \cdot AC$ 的关系, 猜想并引导我们证明了一般情况下的规律, 即关于三角形角平分线的一个结论: $\triangle ABC$ 中, AD 平分 $\angle BAC$, $\angle BAD = \alpha$, 则 $AB + AC = \frac{\sin 2\alpha}{AD \sin \alpha} AB \cdot AC$; 再运用这个结论解决第(3)小问: 因为 $\triangle BMN$ 中, BE 平分 $\angle MBN$, 因此可以直接运用结论, 得到 BM 与 BN 的关系式. 体现了数学从特殊到一般, 再根据规律解决问题的思想.

盐城市 2024 年中考压轴题分析

【发现问题】

小明买菠萝时发现,通常情况下,销售员都是先削去菠萝的皮,再斜着铲去菠萝的籽.

【提出问题】

销售员斜着铲去菠萝的籽,除了方便操作,是否还蕴含着什么数学道理呢?



图 1

【分析问题】

某菠萝可以近似看成圆柱体,若忽略籽的体积和铲去果肉的厚度与宽度,那么籽在侧面展开图上可以看成点,每个点表示不同的籽.该菠萝的籽在侧面展开图上呈交错规律排列,每行有 n 个籽,每列有 k 个籽,行上相邻两籽、列上相邻两籽的间距都为 d (n, k 均为正整数, $n > k \geq 3, d > 0$),如图 1 所示.

小明设计了如下三种铲籽方案.

方案 1:图 2 是横向铲籽示意图,每行铲的路径长为_____,共铲_____行,则铲除全部籽的路径总长为_____;

方案 2:图 3 是纵向铲籽示意图,则铲除全部籽的路径总长为_____;

方案 3:图 4 是销售员斜着铲籽示意图,写出该方案铲除全部籽的路径总长.

【解决问题】

在三个方案中,哪种方案铲籽路径总长最短?请写出比较过程,并对销售员的操作方法进行评价.

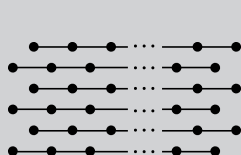


图 2

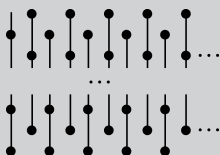


图 3

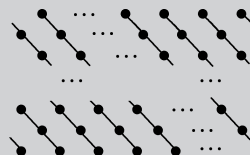
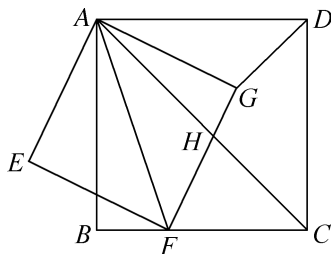


图 4

基本题型 1

如图,正方形 $ABCD$ 中, F 是边 BC 上一点,连接 AF ,以 AF 为对角线作正方形 $AEFG$,边 FG 与正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 相交于点 H ,连接 DG . 则 AF 与 AG 的数量关系为_____.



答案: $AF = \sqrt{2}AG$ (提示: 因为四边形 $AEFG$ 都是正方形, 所以 $\angle EAG = 90^\circ$, $\angle FAG = \angle AFG = 45^\circ$, $AF = \sqrt{2}AG$.)

基本题型 2

甲从商贩 A 处购买了若干斤西瓜, 又从商贩 B 处购买了若干斤西瓜. A、B 两处所购买的西瓜重量之比为 3:2, 然后将买回的西瓜以从 A、B 两处购买单价的平均数为单价全部卖给了乙, 结果发现他赔钱了, 这是因为 ()

- A. 商贩 A 的单价大于商贩 B 的单价
- B. 商贩 A 的单价等于商贩 B 的单价
- C. 商贩 A 的单价小于商贩 B 的单价
- D. 赔钱与商贩 A、商贩 B 的单价无关

答案: A [提示: 设 A、B 两处西瓜的单价分别为 a , b , 则利润 = 总售价 - 总成本 = $\frac{a+b}{2} \times 5 - (3a + 2b) = 0.5b - 0.5a$, 赔钱了说明利润 < 0 . 所以 $0.5b - 0.5a < 0$, 所以 $a > b$.]

基本题型 3

问题提出: 用若干相同的一个单位长度的细直木棒, 按照如图方式搭建一个长方体框架, 探究所用木棒条数的规律.

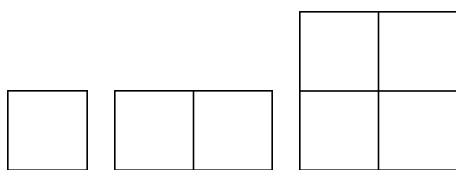


图 1

图 2

图 3

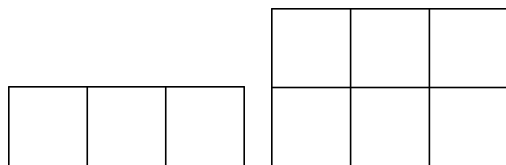


图 4

图 5

问题探究: 我们先从简单的问题开始探究, 从中找出解决问题的方法.

用若干木棒来搭建横长是 m , 纵长是 n 的矩形框架 (m, n 是正整数), 探究需要木棒的条数.

如图 1, 当 $m=1, n=1$ 时, 横放木棒为 $1 \times (1+1)$ 条, 纵放木棒为 $(1+1) \times 1$ 条, 共需 4 条;

如图 2, 当 $m=2, n=1$ 时, 横放木棒为 $2 \times (1+1)$ 条, 纵放木棒为 $(2+1) \times 1$ 条, 共需 7 条;

如图 3, 当 $m=2, n=2$ 时, 横放木棒为 $2 \times (2+1)$ 条, 纵放木棒为 $(2+1) \times 2$ 条, 共需 12 条;

如图 4, 当 $m=3, n=1$ 时, 横放木棒为 $3 \times (1+1)$ 条, 纵放木棒为 $(3+1) \times 1$ 条, 共需 10 条;

如图 5, 当 $m=3, n=2$ 时, 横放木棒为 $3 \times (2+1)$ 条, 纵放木棒为 $(3+1) \times 2$ 条, 共需 17 条.

问题(一): 当 $m=4, n=2$ 时, 共需木棒 _____ 条.

问题(二): 当矩形框架横长是 m , 纵长是 n 时, 横放的木棒为 _____ 条, 纵放的木棒为 _____ 条.

答案:

问题(一): 22

问题(二): $m(n+1)$ $n(m+1)$



名师思路展示

【分析问题】中的阅读材料中已给出解决问题的策略, 要准确理解和应用, 如材料中给出菠萝可以近似看成圆柱体, 据此应忽略掉菠萝不规则的部分, 完全从几何的眼光出发, 将菠萝的形状抽象成规则圆柱体.

由于籽在侧面展开图上可以看成点, 每个点表示不同的籽, 故应结合图 1 和三种方案, 从不同的角度研究菠萝的籽在侧面展开图上的排列规律.

对照方案 1 (如题图 2): 每行有 n 个籽, 相邻两行错位排列, 由此可推出一共 $2k$ 行, 每行铲的路径长为 $(n-1)d$, 铲除全部籽的路径总长为 $2(n-1)dk$.

对照方案 2 (如题图 3): 一共 $2n$ 列, 每列铲的路径长为 $(k-1)d$, 铲除全部籽的路径总长为 $2(k-1)dn$.

对照方案 3(如下图):

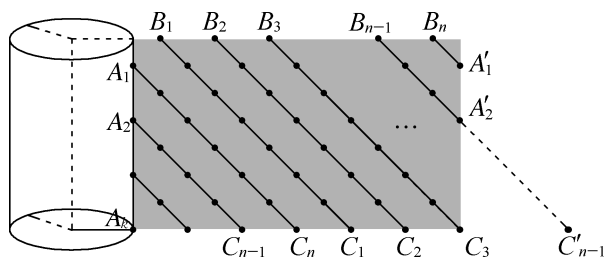


图 1

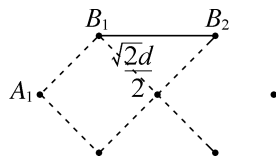


图 2

由图 2 得斜着铲每两个点之间的距离为 $\frac{\sqrt{2}d}{2}$, 在图 1 中, 将 A_1C_n 平移至 A'_1 的位置, 将 A_2C_{n-1} 平移至 A'_2 的位置……可以发现, 斜着铲有 n 条线段长, 每条路径长 $=B_1C_1=(2k-1)\frac{\sqrt{2}d}{2}$, 铲除全部籽的路径总长为 $\frac{\sqrt{2}}{2} \times (2k-1)nd$.

【解决问题】关于三种方案的比较, 可以用作差法解决问题.

规范解答

解:【分析问题】方案 1: $(n-1)d - 2k - 2(n-1)dk$

方案 2: $2(k-1)dn$

方案 3: 由上图得斜着铲每两个点之间的距离为 $\frac{\sqrt{2}d}{2}$, 一共 $2k$ 行, 每条路径长 $=B_1C_1=(2k-1)\frac{\sqrt{2}d}{2}$, 且斜着铲有 n 条线段长, 所以铲除全部籽的路径总长为 $\frac{\sqrt{2}}{2} \times (2k-1)nd$.

【解决问题】

由上得, $2(n-1)dk - 2(k-1)dn = 2ndk - 2dk - 2ndk + 2dn = 2d(n-k) > 0$, 所以方案 1 的路径总长大于方案 2 的路径总长; $2(k-1)dn - \frac{\sqrt{2}}{2} \times (2k-1)dn = \left[(2-\sqrt{2})k - 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] dn$, 因为 $n > k \geq 3$, 当 $k=3$ 时, $(2-\sqrt{2}) \times 3 - 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 - \frac{5\sqrt{2}}{2} > 0$, 且原式随着 k 的增大而增大, 所以 $2(k-1)dn - \frac{\sqrt{2}}{2} \times (2k-1)dn > 0$, 所以方案 3 铲籽路径总长最短, 销售员的操作方法是选择最短的路径, 减少对菠萝的损耗.

解后反思

要准确理解题意. 本题将菠萝近似看成圆柱体, 并忽略籽的体积和铲去果肉的厚度与宽度, 将籽在侧面展开图上可以看成点, 这种思维方法不仅是解题关键, 而且也是用数学的眼光看待问题, 将实际问题抽象为数学问题能力的重要表现.

要善于用数学的眼光看问题. 逐一分析三类方案中相邻两粒之间的间距时, 要注意计算方法不同, 特别是方案 3, 斜着铲每两个点之间的距离为 $\frac{\sqrt{d^2+d^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}d}{2}$, 通过平移, 能更加直观看出此时所铲的线段条数与每条线段的长度.

比较大小的常规途径是作差法.

泰州市 2023 年中考压轴题分析

已知 A, B 为圆上两定点, 点 C 在该圆上, $\angle C$ 为 $\widehat{AB}$ 所对的圆周角.

【知识回顾】

(1) 如图 1, 在 $\odot O$ 中, 点 B, C 位于直线 AO 异侧, $\angle AOB + \angle C = 135^\circ$.

①求 $\angle C$ 的度数.

②若 $\odot O$ 的半径为 5, $AC = 8$, 求 BC 的长.

【逆向思考】

(2) 如图 2, 若 P 为圆内一点, 且 $\angle APB < 120^\circ$, $PA = PB$, $\angle APB = 2\angle C$. 求证: 点 P 为该圆的圆心.

【拓展应用】

(3) 如图 3, 在 (2) 的条件下, 若 $\angle APB = 90^\circ$, 点 C 在 $\odot P$ 位于直线 AP 上方部分的圆弧上运动, 点 D 在 $\odot P$ 上, 则在满足 $CD = \sqrt{2}CB - CA$ 的所有点 D 中, 必有一个点的位置始终不变. 请证明.

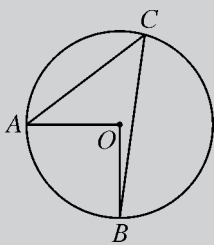


图 1

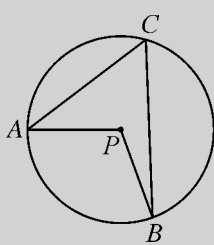


图 2

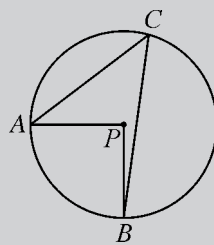


图 3

基本题型 1

定理: 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

思考: 上述定理的逆命题成立吗? 若成立, 请写出其逆命题, 并证明; 若不成立, 试说明理由.

(1) 逆命题: _____.

(2) 已知: _____.

求证: _____.

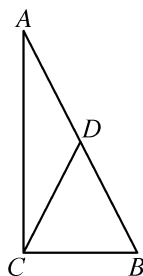
答案: (1) 如果三角形的一边上的中线等于该边长的一半, 那么该三角形为直角三角形.

(2) 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 AB 的中点, $CD = \frac{1}{2}AB$.

求证: $\triangle ABC$ 是直角三角形.

证明: 因为 D 是 AB 的中点, 所以 $BD = AD = \frac{1}{2}AB$. 因为 $CD = \frac{1}{2}AB$, 所以 $BD = AD = CD$, 所以

$\angle DCB = \angle B$, $\angle DCA = \angle A$. 因为 $\angle A + \angle B + \angle ACB = 180^\circ$, 即 $\angle A + \angle B + \angle DCB + \angle DCA = 180^\circ$, 所以 $2(\angle DCB + \angle DCA) = 180^\circ$, 即 $\angle ACB = 90^\circ$, 所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形.



基本题型 2

在证明圆周角定理时, 某学习小组讨论出圆心与圆周角有三种不同的位置关系 (如图 1, 2, 3), 小敏说: “当圆心 O 在 $\angle ACB$ 的边上时, 只要利用三角形内角和定理的推论和等腰三角形的性质即可证明.” 小亮说: “当

圆心 O 在 $\angle ACB$ 的内部或外部时,可以通过添加直径这条辅助线,把问题转化为圆心 O 在 $\angle ACB$ 的边上的特殊情形来解决。”

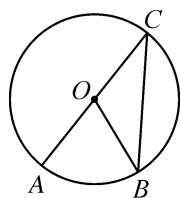


图 1

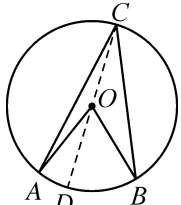


图 2

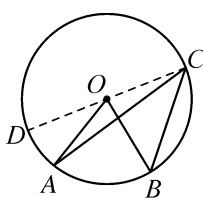


图 3

请参照上述圆周角定理的证明思路解决下面问题:

我们把顶点在圆上,一边和圆相交,另一边和圆相切的角叫作弦切角.弦切角定理:弦切角的度数等于它所夹的弧所对的圆周角度数.试证明之.

答案:分三种情况讨论:①如图 1, AB 与 $\odot O$ 相切于点 A .当圆心 O 在弦 AC 上时,容易得到 $\angle CAB = 90^\circ$,所以弦切角 $\angle CAB = \angle D = 90^\circ$.②如图 2, AB 与 $\odot O$ 相切于点 A .当圆心 O 在 $\angle BAC$ 的外部时,过点 A 作直径 AF 交 $\odot O$ 于点 F ,连接 FC .因为 AF 是直径,所以 $\angle ACF = 90^\circ$,所以 $\angle F + \angle FAC = 90^\circ$.因为 AB 与 $\odot O$ 相切于点 A ,所以 $\angle FAB = 90^\circ$,即 $\angle CAB + \angle FAC = 90^\circ$,所以 $\angle CAB = \angle F$.③如图 3, AB 与 $\odot O$ 相切于点 A ,当圆心 O 在 $\angle BAC$ 的内部时,过点 A 作直径 AD 交 $\odot O$ 于点 D ,在 $\widehat{AC}$ 上任取一点 E ,连接 EC, ED, EA .因为 AD 是 $\odot O$ 的直径,所以 $\angle DEA = 90^\circ$,因为 AB 与 $\odot O$ 相切于点 A ,所以 $\angle DAB = 90^\circ$,因

为 $\angle CED = \angle CAD$,所以 $\angle CAD + \angle DAB = \angle CED + \angle DEA$,即 $\angle CAB = \angle CEA$.

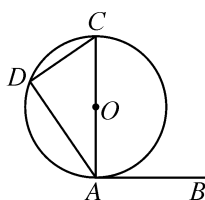


图 1

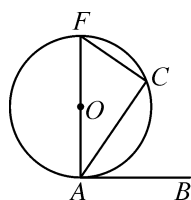


图 2

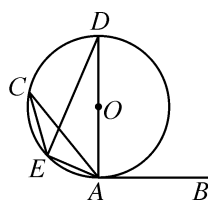


图 3

基本题型 3

(1) 如图 1, $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接正三角形, P 为 $\widehat{BC}$ 上一动点,则 PA, PB, PC 的数量关系为_____.

(2) 如图 2, 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接正方形, P 为 $\widehat{BC}$ 上一动点,若 $\angle APB = 45^\circ$,则 PA, PB, PC 的数量关系为_____.

(3) 如图 3, 六边形 $ABCDEF$ 是 $\odot O$ 的内接正六边形, P 为 $\widehat{BC}$ 上一动点.若 $\angle APB = 30^\circ$,则 PA, PB, PC 的数量关系为_____.

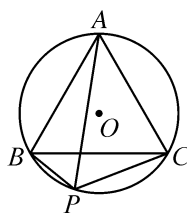


图 1

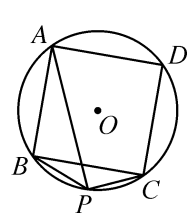


图 2

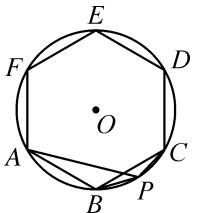


图 3

答案:(1) $PA = PB + PC$ (2) $PA = \sqrt{2}PB + PC$

(3) $PA = \sqrt{3}PB + PC$

名师思路展示

【知识回顾】利用圆周角定理计算 $\angle C$ 的度数,构造含特殊角的直角三角形计算 BC 之长.

【逆向思考】本题考查了圆周角定理的逆命题的证明.回顾圆周角定理的证明过程,通过知识迁移的思维方法,将圆周角 $\angle C$ 化归至“圆心在圆周角一边上”,从而利用“三角形内外角关系”转化而证得,关键是利用“圆是到定点距离等于定长的点的集合”这一理论依据,解决问题.

【拓展应用】因题中条件有 $\angle C = 45^\circ$,首先利用等腰直角三角形的边长关系,以 BC 为直角边构造等腰直角三角形 BCG ,得到 $CG = \sqrt{2}CB$,进一步可得 $GA = \sqrt{2}CB - CA = CD$.其次通过三角形的旋转变换将 GA 转化为 CE ,同时构造等腰直角三角形 ABE ,确定 E 为定点.最后以点 C 为圆心, CD 的长为半径作弧,交 $\odot P$ 于两点,猜想其中一点必与点 E 重合,从而得证.(此题也可延长 AP 交 $\odot P$ 于点 E ,连接 AB, CE, BE .通过构造“手拉手”全等模型,证明 $\triangle ABG \cong \triangle EBC$,从而得到 $CE = GA = CD$,即可解之.)

规范解答

(1) 解:①由题易得 $\angle AOB = 2\angle C$,所以 $\angle AOB + \angle C = 3\angle C = 135^\circ$,所以 $\angle C = 45^\circ$.

②连接 AB . 因为 $\angle AOB = 2\angle C = 90^\circ$, $OA = OB = 5$, 所以 $AB = \sqrt{2}OA = 5\sqrt{2}$. 过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H . 易证 $\triangle ACH$ 为等腰直角三角形, 所以 $AH = CH = \frac{\sqrt{2}}{2}AC = 4\sqrt{2}$. 在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 中, 由勾股定理, 得 $BH = 3\sqrt{2}$. 所以 $BC = BH + CH = 7\sqrt{2}$.

(2) 证明: 延长 AP 交圆于点 D , 连接 DB , 则 $\angle D = \angle C$. 因为 $\angle APB = 2\angle C$, 所以 $\angle APB = 2\angle D = \angle D + \angle DBP$. 所以 $\angle D = \angle DBP$, 所以 $PD = PB$. 因为 $PA = PB$, 所以 $PA = PB = PD$, 所以点 P 是 A, B, D 三点所确定的圆的圆心, 即点 P 是题图中所在圆的圆心.

(3) 证明: 过点 B 作 $BG \perp CB$ 交 CA 的延长线于点 G , 连接 AB . 因为 $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle APB = 45^\circ$, 所以 $CB = BG$, $\angle G = 45^\circ$, $CG = \sqrt{2}CB$. 因为 $CD = \sqrt{2}CB - CA$, 所以 $CD = CG - CA = GA$. 将 $\triangle ABG$ 绕点 B 顺时针旋转 90° , 得 $\triangle EBC$, 连接 AE . 所以 $AB = EB$, $\angle ABE = 90^\circ$. 因为 $AP = PB$, $\angle APB = 90^\circ$, 所以 $AB = EB = \sqrt{2}AP$. 所以 $AE = \sqrt{2}AB = 2AP$. 因为 P 是圆心, 所以 E 是 AP 的延长线与 $\odot P$ 的交点, 即 E 是定点. 由旋转可知, $CE = GA = CD$, 所以随着点 C 的运动, 以点 C 为圆心, CD 的长为半径作弧, 该弧与 $\odot P$ 有两个交点, 其中一个一直与点 E 重合, 即满足条件的所有点 D 中必有一个点的位置始终不变.



解后反思

本题是教材定理的拓展与变形, 考查了逻辑推理能力和转化与化归的数学思想. 在教材中, 圆周角定理是重要的结论, 其证明过程十分详细, 采用了从特殊到一般的数学思想, 即“圆心在圆周角一边上”“圆心在圆周角内部”“圆心在圆周角外部”等三种情形分别证明得之. 本题中“逆向思考”改编为“逆命题”, 可通过知识迁移的思维方法, 将圆周角 $\angle C$ 化归至“圆心在圆周角一边上”, 从而利用“三角形内外角关系”转化而证得, 关键是利用“圆看作是到定点距离等于定长的点的集合”这一理论依据. 本题的拓展应用具有一定的探究性, 关键是如何构造某线段长(其中一端点为定点)等于 $\sqrt{2}CB - CA$, 这可分两步实现, 首先由等腰直角三角形的三边关系, 构造 $\sqrt{2}CB$, 其次是通过“截长补短”法即可得解. 其中题图 2 暗示了解题的思维方向, 可谓是“借我云梯上青天”.

扬州市 2022 年中考压轴题分析

如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, $\angle C=60^\circ$,点 D 在边 BC 上由点 C 向点 B 运动(不与点 B,C 重合),过点 D 作 $DE \perp AD$,交射线 AB 于点 E .

(1) 分别探索以下两种特殊情形时线段 AE 与 BE 之间的数量关系,并说明理由.

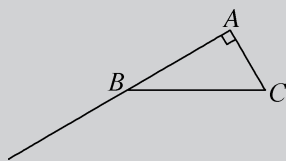
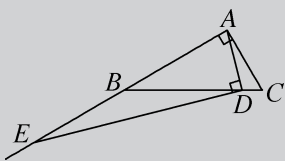
①点 E 在线段 AB 的延长线上且 $BE=BD$;

②点 E 在线段 AB 上且 $EB=ED$.

(2) 已知 $AB=6$.

①当 $\frac{DE}{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时,求 AE 的长;

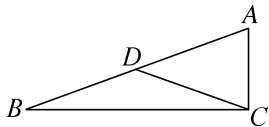
②请直接写出在运动过程中线段 AE 长的最小值.



备用图

基本题型 1

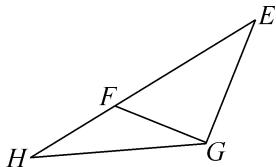
如图,在 $\triangle ABC$ 中,因为 $\angle BCA=90^\circ$, D 为斜边 AB 上一点, $BD=CD$,求证: $AD=BD$.



答案:因为 $BD=CD$,所以 $\angle B=\angle DCB$.因为 $\angle BCA=90^\circ$,所以 $\angle B+\angle A=90^\circ$, $\angle DCB+\angle ACD=90^\circ$.所以 $\angle A=\angle ACD$,所以 $AD=CD$,所以 $AD=BD$.

基本题型 2

如图,在 $\triangle HGE$ 中,点 F 在边 EH 上, $\angle FGE=90^\circ$, $FH=FG$, $\angle H=30^\circ$,求证: $GE=GH$.

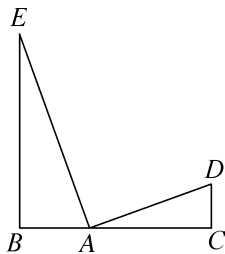


答案:因为 $FH=FG$,所以 $\angle H=\angle FGH=30^\circ$.所以 $\angle EFG=\angle FGH+\angle H=60^\circ$.因为 $\angle FGE=90^\circ$,所以 $\angle E=30^\circ$.所以 $\angle E=\angle H$,所以 $GE=GH$.

基本题型 3

如图, $BC=7$, $\angle B=\angle C=90^\circ$, $BE=6$, $CD=1$, A

为 BC 上一点,且 $\angle EAD=90^\circ$,求 AC 的长.



答案:因为 $\angle B=90^\circ$,所以 $\angle E+\angle BAE=90^\circ$.因为 $\angle EAD=90^\circ$,所以 $\angle DAC+\angle BAE=90^\circ$,所以 $\angle E=\angle DAC$.又因为 $\angle B=\angle C=90^\circ$,所以 $\triangle EBA \sim \triangle ACD$,所以 $\frac{EB}{AB}=\frac{AC}{DC}$.设 $AC=x$,则 $AB=7-x$.所以 $\frac{6}{7-x}=\frac{x}{1}$,解得 $x=6$ 或 $x=1$.所以 $AC=6$ 或 $AC=1$.

基本题型 4

已知 $x>0$,则 $x+\frac{9}{x}$ 的最小值为_____.

答案:6 [提示:因为 $x>0$,所以 $(\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}})^2 \geq 0$,即 $x-2\sqrt{x} \cdot \frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{9}{x} \geq 0$,所以 $x+\frac{9}{x} \geq 6$]



名师思路展示

(1) ①根据 $\angle BAC=90^\circ$, $\angle C=60^\circ$,可推出 $\angle ABC=30^\circ$.由 $BE=BD$,可推出 $\angle BEO=\angle EDB=15^\circ$.结合 $\angle ADE=90^\circ$,可推出 $\angle BAD=\angle ADB=75^\circ$,则有 $AB=BD=BE$,可推出 $AE=2BE$.

②根据 $\angle BAC=90^\circ$, $\angle C=60^\circ$,可推出 $\angle EBD=30^\circ$.由 $EB=ED$,可推出 $\angle EBD=\angle EDB=30^\circ$,所以 $\angle AED=\angle EBD+\angle EDB=60^\circ$.结合 $\angle ADE=90^\circ$,可推出 $\angle EAD=30^\circ$,则 $AE=2ED$,所以 $AE=2BE$.

(2) ①作 $EH \perp BC$, $AF \perp BC$,垂足分别为 H,F .结合 $\angle ADE=90^\circ$,可证得 $\triangle HED \sim \triangle FDA$,所以 $\frac{EH}{DF}=\frac{HD}{FA}=\frac{ED}{AD}$.

$\frac{DE}{AD}$. 根据条件可得 $\angle ABC = 30^\circ$. 由 $AB = 6$, 可求得 $AC = 2\sqrt{3}$, $BC = 4\sqrt{3}$, $AF = 3$, $FC = \sqrt{3}$, $BF = 3\sqrt{3}$. 则 $\frac{EH}{DF} = \frac{HD}{3} = \frac{DE}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $HD = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. 设 $EH = \sqrt{3}m (m > 0)$, 则 $DF = 2m$, 可推出 $BH = 3m$. 根据等式 $BH + HD + DF = BF$ 可建立方程 $3m + \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2m = 3\sqrt{3}$, 求出 m 的值和 EH 的长. 由勾股定理可计算 DE 的长. 根据 $\frac{DE}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 可求出 AD 的长, 由勾股定理可计算 AE 的长.

② 类比①设 $\frac{DE}{AD} = n$, 同理有 $\frac{EH}{DF} = \frac{HD}{3} = \frac{DE}{AD} = n$, $HD = 3n$. 设 $DF = b$, 则 $EH = nb$, $DE = nAD$. 结合条件可推出 $BH = \sqrt{3}EH = \sqrt{3}nb$. 同样根据等量关系 $BH + HD + DF = BF$, 建立方程 $\sqrt{3}nb + 3n + b = 3\sqrt{3}$, 用字母 n 表示 b , 即 $b = \frac{3\sqrt{3} - 3n}{\sqrt{3}n + 1}$. 根据勾股定理得到 $AD^2 = 9 + b^2$, 再根据勾股定理进行计算、化简, 用字母 n 表示 AE , 得到 $AE = 6 \cdot \frac{n^2 + 1}{\sqrt{3}n + 1}$, 参照分母, 将分子配方, 得到 $AE = 2 \cdot \left[(\sqrt{3}n + 1) - 2 + \frac{4}{\sqrt{3}n + 1} \right]$. 根据 $\sqrt{3}n + 1 + \frac{4}{\sqrt{3}n + 1} \geq 2\sqrt{(\sqrt{3}n + 1) \cdot \frac{4}{\sqrt{3}n + 1}}$, 可求 AE 长的最小值.



规范解答

解: (1) ① $AE = 2BE$. 理由如下:

在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, 所以 $\angle ABC = 30^\circ$. 因为 $BE = BD$, 所以 $\angle BED = \angle EDB = 15^\circ$. 因为 $\angle ADE = 90^\circ$, 所以 $\angle BAD = \angle ADB = 75^\circ$. 所以 $AB = BD$, 所以 $AE = 2BE$.

② $AE = 2BE$. 理由如下:

在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, 所以 $\angle ABC = 30^\circ$. 因为 $EB = ED$, 所以 $\angle EBD = \angle EDB = 30^\circ$. 因为 $\angle AED = \angle EBD + \angle EDB = 60^\circ$, $\angle ADE = 90^\circ$, 所以 $\angle EAD = 30^\circ$, 所以 $AE = 2ED$. 所以 $AE = 2BE$.

(2) ① 由条件可知, 点 E 在线段 AB 上, 分别过点 E, A 作 $EH \perp BC$, $AF \perp BC$, 垂足分别为 H, F .

在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, 所以 $\angle ABC = 30^\circ$. 又因为 $AB = 6$, 所以 $AC = 2\sqrt{3}$, $BC = 4\sqrt{3}$. 因为 $\frac{AF}{AC} = \sin C$, 所以 $AF = 3$, 所以 $FC = \sqrt{3}$. 所以 $BF = 3\sqrt{3}$. 因为 $\angle EHD = \angle DFA = 90^\circ$, 所以 $\angle HED + \angle HDE = 90^\circ$. 因为 $\angle ADE = 90^\circ$, 所以 $\angle FDA + \angle HDE = 90^\circ$, 所以 $\angle HED = \angle FDA$. 所以 $\triangle HED \sim \triangle FDA$, 所以 $\frac{EH}{DF} = \frac{HD}{FA} = \frac{DE}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $HD = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. 设 $EH = \sqrt{3}m (m > 0)$, 则 $DF = 2m$. 在 $\triangle EBH$ 中, 因为 $\angle EHB = 90^\circ$, $\angle EBD = 30^\circ$, 所以 $BH = \sqrt{3}EH = 3m$. 因为 $BH + HD + DF = BF$, 所以 $3m + \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2m = 3\sqrt{3}$, 解得 $m = \frac{3\sqrt{3}}{10}$. 所以 $EH = \sqrt{3}m = \frac{9}{10}$. 因为 $DE^2 = EH^2 + HD^2$, 所以 $DE = \frac{3\sqrt{21}}{5}$. 因为 $\frac{DE}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $AD = \frac{6\sqrt{7}}{5}$. 因为 $AE^2 = DE^2 + AD^2$, 所以 $AE = \frac{21}{5}$.

② AE 长的最小值是 4.



解后反思

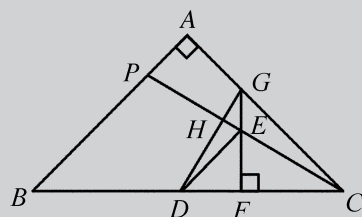
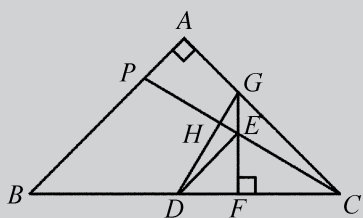
当直角顶点在一条直线上时, 作垂直构造相似, 挖掘线段之间的等量关系是常用手段.

要关注问题(2)中①②两小问之间的内在联系, 它们具有特殊与一般的辩证关系, 因此解题思路可供借鉴. 设出比例 n , 按上题基本思路, 强行推导出 AD, AE 的表达式, 发现不是一个二次函数, 继续以分母作为参照物对代数式进行变形, 借助恒等式“ $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ ”, 由此可推出“ $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ”, 当 $a = b$ 时, $a + b$ 可取得最小值.

徐州市 2022 年中考压轴题分析

如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, $AB=AC=12$,点 P 在边 AB 上, D,E 分别为 BC,PC 的中点,连接 DE .过点 E 作 BC 的垂线,与 BC,AC 分别交于 F,G 两点.连接 DG ,交 PC 于点 H .

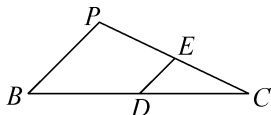
- (1) $\angle EDC$ 的度数为 _____.
- (2) 连接 PG , 求 $\triangle APG$ 面积的最大值.
- (3) PE 与 DG 存在怎样的位置关系与数量关系? 请说明理由.
- (4) 求 $\frac{CH}{CE}$ 的最大值.



备用图

基本题型 1

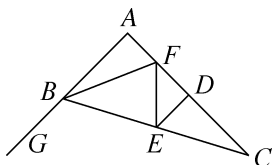
如图,在 $\triangle PBC$ 中, E,D 分别为 PC,BC 的中点, $\angle B=45^\circ$,则 $\angle EDC$ 的度数为_____.



答案: 45°

基本题型 2

如图, $AC=8$,射线 $AG \perp AC$, B 为射线 AG 上一动点, E 是 BC 的中点, $DE \parallel AB$, $\angle FED=45^\circ$. 设 $AB=x$, $\triangle ABF$ 的面积为 y , 求 y 与 x 之间的函数表达式.



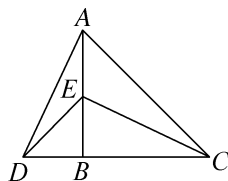
答案: 因为 $DE \parallel AB$, 所以 $\triangle CDE \sim \triangle CAB$, 所以

$\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{CB} = \frac{CD}{CA}$. 因为 E 是 BC 的中点, $AC=8$, $AB=x$, 所以 $DE = \frac{1}{2}x$, $AD=CD=4$. 因为 $AG \perp AC$, 所以

$\angle CDE = \angle A = 90^\circ$. 因为 $\angle FED = 45^\circ$, 所以 $FD = DE = \frac{1}{2}x$, 所以 $AF = 4 - \frac{1}{2}x$. 所以 $y = \frac{1}{2}x \cdot \left(4 - \frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x$.

基本题型 3

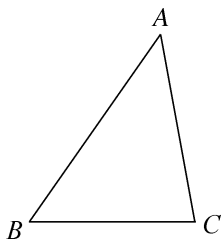
如图, $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBE$ 均是等腰直角三角形, 点 D, B, C 在同一直线上, 点 E 在 AB 上, 则 AD 与 CE 的关系为_____.



答案: 垂直且相等 (提示: 由“SAS”可证 $\triangle ADB \cong \triangle CEB$, 则 $AD = CE$. 延长 CE 交 AD 于点 H . 由 $\triangle ADB \cong \triangle CEB$, 可得 $\angle ECB = \angle DAB$. 由 $\angle ABD = 90^\circ$, 可知 $\angle ADB + \angle DAB = 90^\circ$, 所以 $\angle ADB + \angle ECB = 90^\circ$, 即 $\angle CHD = 90^\circ$, 所以 $CE \perp AD$)

基本题型 4

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 4\sqrt{2}$, $\angle A = 45^\circ$, 求点 A 到边 BC 的最远距离.



答案:作 $\triangle ABC$ 的外接圆,圆心为 O ,连接 OB , OC , OA ,过点 O 作 $OH \perp BC$,垂足为 H ,过点 A 作 $AF \perp BC$,垂足为 F .因为 $\angle BAC = 45^\circ$,所以 $\angle BOC =$

90° .因为 $OB=OC$,所以 $\triangle OBC$ 是等腰直角三角形.因为 $BC=4\sqrt{2}$,所以 $OB=OC=OA=4$.因为 $OH \perp BC$,所以 $HB=HC$.因为 $\angle BOC=90^\circ$,所以 $OH=\frac{1}{2}BC=2\sqrt{2}$.在 $\odot O$ 中,点 A 在优弧 BC 上运动,且满足 $AF \leq OA+OH=4+2\sqrt{2}$,所以当点 A, O, H 在同一直线上时,即 A 为优弧 BC 的中点时, AF 取得最大值.所以点 A 到边 BC 的最远距离为 $4+2\sqrt{2}$.



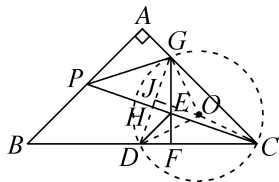
名师思路展示

(1) 由条件“ D, E 分别为 BC, PC 的中点”,易得 DE 是 $\triangle PBC$ 的中位线.根据中位线定理,有 $DE \parallel PB$,结合 $\angle B=45^\circ$,则 $\angle EDC$ 的大小可求.

(2) 延长 DE 交 AC 于点 I .由 DE 是 $\triangle PBC$ 的中位线,易证 IE 是 $\triangle APC$ 的中位线,则 $IA=\frac{1}{2}AC=6$.结合 $\angle EDC=45^\circ$,可证得 $\triangle GIE$ 是一个等腰直角三角形,则 AP, IE, IG, AG 四条线段产生数量关系.只需设其中任意一条线段的长为 x ,则其余线段的长均可用 x 表示, $\triangle APG$ 的面积亦可用含 x 的代数式表示.不妨设 $IG=IE=x$,则 $AP=2x, AG=6-x, S_{\triangle APG}=\frac{1}{2} \cdot 2x(6-x)$.配方转化成顶点式,即可用二次函数的性质求出 $S_{\triangle APG}$ 的最大值.

(3) 观察图形,应猜测: PE 与 DG 的关系为“垂直且相等”,然后设法验证.结合条件和问题(2)已证,图中 $\triangle ABC, \triangle DEF, \triangle GIE, \triangle GFC$ 均为等腰直角三角形.欲证 $DG=PE$,而 $PE=EC$,所以可证 $DG=EC$.欲证 $DG=EC$,可将 DG, EC 分别放入 $Rt\triangle GDF$ 和 $Rt\triangle CEF$ 中.由图可知,这两个三角形的边长与 $\triangle DEF, \triangle GFC$ 的腰有关,因此可根据“SAS”证明 $\triangle GDF \cong \triangle CEF$,则有 $DG=EC=PE, \angle DGF=\angle ECF$.由 $\angle DFG=90^\circ$,可知 $\angle DGF+\angle GDF=90^\circ$,转化为 $\angle HCD+\angle HDC=90^\circ$,则有 $EC \perp DG$,则 PE 与 DG 的关系为“垂直且相等”.

(4) 本题欲求 $\frac{CH}{CE}$ 的最大值, CE 可转化为 DG ,由于 CH 是边 DG 上的高,所以以此作为解决问题的切入点.根据定理“垂线段最短”,可寻找点 C 到 GD 的第二条路径,并且该路径的长要与 DG 的长存在数量关系.根据特殊条件“ $\angle GCD=45^\circ$ ”,可构造 $\triangle GDC$ 的外接圆,则圆心角 $\angle GOD=90^\circ$.如图所示,作 $OJ \perp DG$,垂足为 J ,则有 $CH \leq OJ+OC, \frac{CH}{CE}=\frac{CH}{DG} \leq \frac{OC+OJ}{DG}$.由于 OC, OJ, DG 满足一定的数量关系,只需将 OC, OJ, DG 用同一个字母表示,即可通过约分求出 $\frac{CH}{CE}$ 的最大值.



规范解答

解:(1) 45

(2) 延长 DE 交 AC 于点 I .

易知 DE 是 $\triangle PBC$ 的中位线, 所以 $DE \parallel PB$, 所以 $\angle A = \angle EIC = 90^\circ$. 因为 $\angle EDC = 45^\circ$, $GF \perp BC$, 所以 $\angle DEF = 45^\circ$. 所以 $\angle GEI = \angle DEF = 45^\circ$, 所以 $\triangle GIE$ 是等腰直角三角形, 所以 $IG = IE$. 易知 IE 是 $\triangle APC$ 的中位线. 因为 $AC = 12$, 所以 $AI = IC = \frac{1}{2}AC = 6$. 设 $IG = IE = x$, 则 $AP = 2x$, $AG = 6 - x$. 所以 $S_{\triangle APG} = \frac{1}{2} \cdot 2x(6 - x) = -x^2 + 6x = -(x - 3)^2 + 9$, 所以当 $x = 3$ 时, $S_{\triangle APG}$ 取得最大值, 最大值为 9.

(3) 因为 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, 所以 $\angle FCG = 45^\circ$. 因为 $GF \perp BC$, 所以 $\triangle GFC$ 为等腰直角三角形, 所以 $GF = CF$. 因为 $\triangle DEF$ 为等腰直角三角形, 所以 $DF = EF$. 易证 $\triangle GDF \cong \triangle CEF$, 所以 $DG = EC = PE$, $\angle DGF = \angle ECF$. 因为 $\angle GDF + \angle DGF = 90^\circ$, 所以 $\angle GDF + \angle ECF = 90^\circ$, 所以 $PE \perp DG$. 所以 PE 与 DG 之间的关系为垂直且相等.

(4) 作 $\triangle GDC$ 的外接圆, 圆心记为 O , 连接 OG, OD, OC , 过点 O 作 $OJ \perp DG$, 垂足为 J , 则 $CH \leq OJ + OC$.

因为 $\angle GCD = 45^\circ$, 所以 $\angle GOD = 90^\circ$, $\angle OGD = \angle GDO = 45^\circ$. 所以可设 $GJ = JD = OJ = m$, 则 $DG = 2m$, $OG = OC = \sqrt{2}m$. 所以 $CH \leq (1 + \sqrt{2})m$. 由 (3) 可知, $CE = DG$. 所以 $\frac{CH}{CE} = \frac{CH}{DG} \leq \frac{(1 + \sqrt{2})m}{2m} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$, 即 $\frac{CH}{CE}$ 的最大值为 $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

解后反思

要善于确定解决问题的策略. 在问题(2)中, 通过观察图形可以发现: 当 AP 变大时, 点 E 向点 D 运动, 点 G 由点 I 向点 A 运动, 即 AG 在变小, 因此可用函数思想作为求面积最值的解题策略.

要善于转化条件与结论. 在问题(3)中, 由于 $PE = EC$, 点 P, E, C 在同一直线上, 可将 PE 与 DG 的关系转化为 CE 与 DG 的关系; 在问题(4)中, 欲求 $\frac{CH}{CE}$ 的最大值, 可转化为求 $\frac{CH}{DG}$ 的最大值, 由于 CH 是边 GD 上的高, 可寻找点 C 到 DG 的第二条路径: $OJ + OC$, 且满足 $CH \leq OJ + OC$, 要仔细体会转化思想在本题中的应用.

要善于联想已有解题经验. 如基本题型 4 与问题(4)的内在联系与不同之处, 相同之处在于: 两题都有一个 45° 角, 如果将此角作为一个圆的圆周角, 则对同弧的圆心角一定是直角, 即一定存在一个等腰直角三角形, 因此条件“ 45° 角”立即转化为若干线段之间的数量关系, 这是用好条件“ 45° 角”的关键! 不同之处在于: 基本题型 4 中, 45° 角所对的边长度确定, 而问题(4)中 45° 角所对的边长度变化, 但由于分子与分母中的线段存在一定的数量关系, 因此可设出某个量, 然后用这个量表示其他线段的长, 即可通过约分解决问题.

宿迁市 2022 年中考压轴题分析

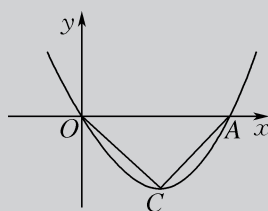
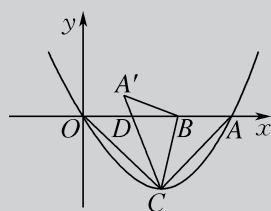
如图,二次函数 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 的图像与 x 轴交于 $O(0,0), A(4,0)$ 两点,顶点为 C ,连接 OC, AC . 若 B 是线段 OA 上一动点,连接 BC ,将 $\triangle ABC$ 沿 BC 折叠后,点 A 落在点 A' 的位置,线段 $A'C$ 与 x 轴交于点 D ,且点 D 不与点 O, A 重合.

(1) 求二次函数的表达式.

(2) ①求证: $\triangle OCD \sim \triangle A'BD$;

②求 $\frac{DB}{BA}$ 的最小值.

(3) 当 $S_{\triangle OCD} = 8S_{\triangle A'BD}$ 时,求直线 $A'B$ 与二次函数图像交点的横坐标.



备用图

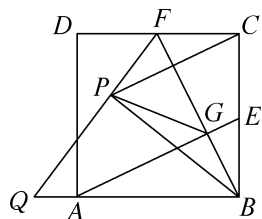
基本题型 1

若二次函数 $y = ax^2 + bx - 3$ 的图像经过点 $(-1, 0), (3, 0)$, 则其表达式为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案: $x^2 - 2x - 3$

基本题型 2

如图,在正方形 $ABCD$ 中, E, F 分别为 BC, CD 的中点,连接 AE, BF 交于点 G . 将 $\triangle BCF$ 沿 BF 折叠,得到 $\triangle BPF$, 延长 FP 交 BA 的延长线于点 Q , 连接 PC, PG . 现有下列结论: ① $AE \perp BF$; ② $QB = QF$; ③ $\frac{AG}{FG} = \frac{4}{3}$; ④ $S_{\text{四边形} ECPG} = 3S_{\triangle BGE}$. 其中正确的有 ()



A. 1 个 B. 4 个 C. 3 个 D. 2 个

答案: C

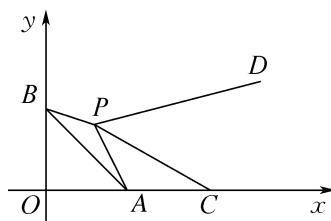
基本题型 3

抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的对称轴为直线 $x = 1$, 该抛物线与 x 轴的两个交点分别为 A 和 B , 与 y 轴的交点为 C , 其中点 $A(-1, 0), C(0, -3)$. 若抛物线上存在一点 P , 使得 $\triangle POC$ 的面积是 $\triangle BOC$ 面积的 2 倍, 求点 P 的坐标.

答案: 点 P 的坐标为 $(6, 21)$ 或 $(-6, 45)$.

基本题型 4

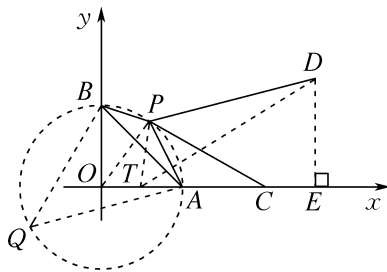
如图,在平面直角坐标系中,点 $A(2, 0), B(0, 2), C(4, 0), D(5, 3)$, P 是第一象限内一动点, 且 $\angle APB = 135^\circ$, 求 $4PD + 2PC$ 的最小值.



答案: 如图, 取点 $T(1, 0)$, 连接 PT, DT . 以点 O 为圆心, OA 的长为半径作 $\odot O$, 在优弧 AB 上取点 Q (不与点 A, B 重合), 连接 BQ, QA, OP , 则 $\angle Q =$

$\frac{1}{2}\angle AOB = 45^\circ$. 所以 $\angle Q + \angle APB = 45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$, 所以 A, P, B, Q 四点共圆, 所以 $OP = OA = 2$. 因为 $OT = 1, OC = 4$, 所以 $\frac{OP}{OT} = \frac{OC}{OP}$. 又因为 $\angle POT = \angle COP$, 所以 $\triangle POT \sim \triangle COP$, 所以 $\frac{TP}{PC} = \frac{OP}{OC} = \frac{1}{2}$, 所以 $TP = \frac{1}{2}PC$. 所以 $4PD + 2PC = 4\left(PD + \frac{1}{2}PC\right) = 4(PD + TP) \geq 4DT$. 过点 D 作 $DE \perp OC$ 于点 E . 因为点 $D(5, 3)$, 所以点 $E(5, 0)$, 所以 $TE = 4, DE = 3$, 所以

$DT = 5$. 因为 $PD + TP \geq DT$, 所以 $4PD + 2PC = 4(PD + TP) \geq 4 \times 5 = 20$, 所以 $4PD + 2PC$ 的最小值是 20.



名师思路展示

(1) 将 O, A 两点坐标代入函数表达式, 即可得方程而求之.

(2) ①欲证两三角形相似, 已具有“对顶角相等”这一蕴含条件, 再根据轴对称的性质易得.

②由第①题的结论, 暗示了本小题的思路, 即将 $\frac{DB}{BA}$ 化归成 $\frac{CD}{OC}$, 而此表达式中, OC 为定值, 故当 CD 最小时, 其比值也最小.

(3) 欲求交点坐标, 必求直线 $A'B$ 的函数表达式, 即先确定点 A' 的坐标, 这一步应从前一小题的结论出发, 利用相似三角形的性质及解三角形的知识, 由方程思想求之而得, 最终联立表达式回答问题.



规范解答

(1) 解: 二次函数的表达式为 $y = \frac{1}{2}(x-0)(x-4) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$.

(2) ①证明: 由翻折, 得 $\angle OAC = \angle A'$. 由抛物线的对称性, 得 $OC = AC$, 所以 $\angle COA = \angle OAC$. 所以 $\angle COA = \angle A'$. 又因为 $\angle ODC = \angle A'DB$, 所以 $\triangle OCD \sim \triangle A'BD$.

②解: 因为 $\triangle OCD \sim \triangle A'BD$, 所以 $\frac{DB}{BA'} = \frac{CD}{OC}$. 由折叠可知 $BA = BA'$, 所以 $\frac{DB}{BA} = \frac{CD}{OC}$. 所以 $\frac{DB}{BA}$ 的最小值就是 $\frac{CD}{OC}$ 的最小值. 易知点 $C(2, -2)$, 所以 $OC = 2\sqrt{2}$. 所以当 CD 最小时, $\frac{CD}{OC}$ 的值最小. 因为当 $CD \perp OA$, 即 $OC = 2$ 时, CD 最小, 所以 $\frac{DB}{BA}$ 的最小值为 $\frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3) 解法 1 因为 $\triangle OCD \sim \triangle A'BD$, $S_{\triangle OCD} = 8S_{\triangle A'BD}$, 所以 $\frac{S_{\triangle OCD}}{S_{\triangle A'BD}} = \left(\frac{OC}{A'B}\right)^2 = 8$, 所以 $\frac{OC}{A'B} = 2\sqrt{2}$. 因为 $OC = 2\sqrt{2}$, 所以 $A'B = AB = 1$. 所以点 $B(3, 0)$. 设 $BD = t$, 则由相似可知 $CD = 2\sqrt{2}t$. 所以 $A'D = A'C - CD = AC - CD = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}t$, 所以由相似得 $OD = 8 - 8t$. 从而由 $OD + BD = OB = 3$, 得 $8 - 8t + t = 3$, 解得 $t = \frac{5}{7}$. 所以 $BD = \frac{5}{7}$, $OD = \frac{16}{7}$, $A'D = \frac{4\sqrt{2}}{7}$. 过点 A' 作 $A'G \perp OA$ 于点 G . 设 $GD = m$, 则 $GB = \frac{5}{7} - m$. 由 $A'G^2 = A'D^2 - GD^2 = A'B^2 - GB^2$, 得

$(\frac{4\sqrt{2}}{7})^2 - m^2 = 1^2 - (\frac{5}{7} - m)^2$, 解得 $m = \frac{4}{35}$. 所以 $A'G = \frac{4}{5}$. 因为 $OG = OD + GD = \frac{12}{5}$, 所以

点 A' 的坐标为 $(\frac{12}{5}, \frac{4}{5})$. 所以直线 $A'B$ 的函数表达式为 $y = -\frac{4}{3}x + 4$. 由方程组

$$\begin{cases} y = -\frac{4}{3}x + 4, \\ y = \frac{1}{2}x^2 - 2x, \end{cases} \quad \text{得 } -\frac{4}{3}x + 4 = \frac{1}{2}x^2 - 2x, \text{ 解得 } x = \frac{2 \pm 2\sqrt{19}}{3}. \text{ 所以直线 } A'B \text{ 与二次函数图像的}$$

交点横坐标为 $\frac{2 \pm 2\sqrt{19}}{3}$.

解法 2 易知直线 BC 的函数表达式为 $y = 2x - 6$. 设点 A' 的坐标为 (p, q) , 则线段 $A'A$ 的中点为 $(\frac{p+4}{2}, \frac{q}{2})$. 由折叠的性质可知, 点 $(\frac{p+4}{2}, \frac{q}{2})$ 在直线 BC 上, 所以 $\frac{q}{2} = 2 \times \frac{p+4}{2} - 6$,

所以 $q = 2p - 4$. 由勾股定理, 得 $A'B = \sqrt{(3-p)^2 + q^2} = \sqrt{(3-p)^2 + (2p-4)^2} = 1$, 解得 $p = 2$

或 $p = \frac{12}{5}$. 当 $p = 2$ 时, $q = 2p - 4 = 0$, 此时点 $A'(2, 0)$, 不符合题意, 舍去; 当 $p = \frac{12}{5}$ 时, $q = 2p -$

$4 = \frac{4}{5}$, 此时点 $A'(\frac{12}{5}, \frac{4}{5})$, 符合题意. 所以易求得直线 $A'B$ 的函数表达式为 $y = -\frac{4}{3}x + 4$, 所以

直线 $A'B$ 与二次函数图像的交点横坐标为 $\frac{2 \pm 2\sqrt{19}}{3}$.



解后反思

二次函数与平面几何结合进行综合考查, 一直是全国各地的热点题型, 本题问题(1)利用待定系数法求函数表达式; 问题(2)的实质是几何证明, 根据抛物线的对称性及翻折变换的性质可得对应角相等, 从而证得相似, 进而将两线段之比的最值问题化归为定点到直线的最短距离; 问题(3)欲求交点坐标, 必求直线 $A'B$ 的函数表达式, 即先确定点 A' 的坐标, 这一步应从前一小题的结论出发, 利用相似三角形的性质及解三角形的知识, 由方程思想求之而得, 最终联立表达式回答问题.

淮安市 2023 年中考压轴题分析

定义:将宽与长的比值为 $\frac{\sqrt{2^{2n}+1}-1}{2^n}$ (n 为正整数)的矩形称为 n 阶奇妙矩形.

【概念理解】

(1) 当 $n=1$ 时,这个矩形为 1 阶奇妙矩形,如图 1,这就是我们学习过的黄金矩形,它的宽(AD)与长(CD)的比值是_____.

【操作验证】

(2) 用正方形纸片 $ABCD$ 进行如下操作(图 2):

第一步:对折正方形纸片,展开,折痕为 EF ,连接 CE ;

第二步:折叠纸片使 CD 落在 CE 上,点 D 的对应点为 H ,展开,折痕为 CG ;

第三步:过点 G 折叠纸片,使得点 A, B 分别落在边 AD, BC 上,展开,折痕为 GK .

试说明:矩形 $GDCK$ 是 1 阶奇妙矩形.

【方法迁移】

(3) 用正方形纸片 $ABCD$ 折叠出一个 2 阶奇妙矩形. 要求:在图 3 中画出折叠示意图并作简要标注.

【探究发现】

(4) 小明操作发现任一个 n 阶奇妙矩形都可以通过折纸得到. 他还发现:如图 4, E 为正方形 $ABCD$ 边 AB 上(不与端点重合)任意一点,连接 CE , 继续(2)中操作的第二步、第三步, 四边形 $AGHE$ 的周长与矩形 $GDCK$ 的周长比值总是定值. 请写出这个定值,并说明理由.

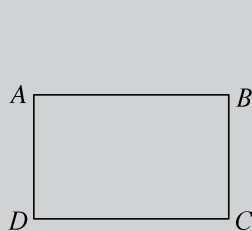


图 1

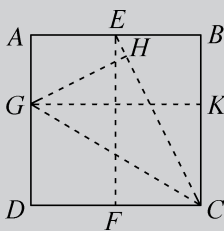


图 2

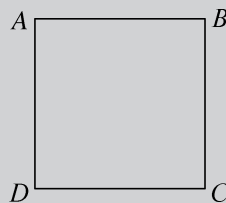


图 3

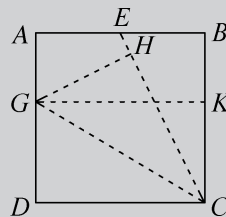


图 4

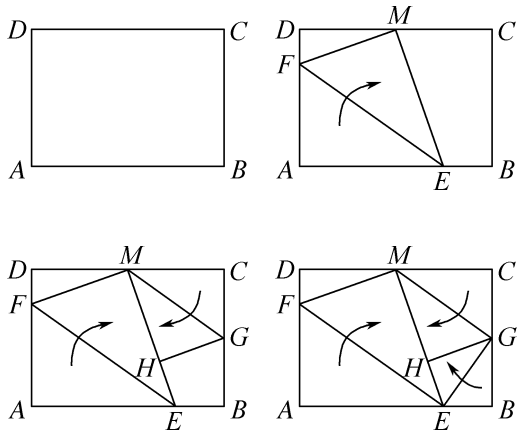
基本题型 1

把一根 32 cm 长的铁丝弯成长宽之比为 5 : 3 的矩形,则矩形的面积为_____.

答案: 60 cm^2 [提示: 设长为 $5x$ cm, 则宽为 $3x$ cm, 依据题意 $2 \times (5x + 3x) = 32$, 解得 $x = 2$, $5x = 10$, $3x = 6$, 所以矩形的面积 $= 10 \times 6 = 60 (\text{cm})^2$.]

基本题型 2

将一张矩形纸片按照图示的方式进行折叠: ①翻折纸片, 使 A 与边 DC 的中点 M 重合, 折痕为 EF ; ②翻折纸片, 使 C 落在 ME 上, 点 C 的对应点为 H , 折痕为 MG ; ③翻折纸片, 使 B 落在 ME 上, 点 B 的对应点恰与 H 重合, 折痕为 GE .

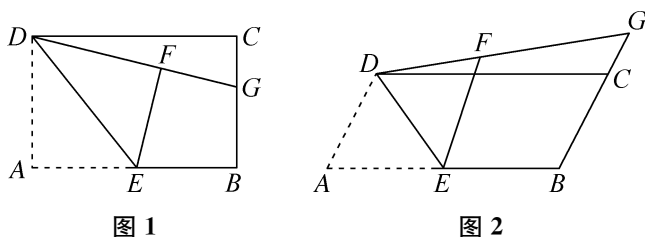


根据上述过程,矩形纸片的长宽之比=_____.

答案: $\sqrt{2}$

基本题型 3

综合与实践课上,老师带领同学们以“矩形和平行四边形的折叠”为主题开展数学活动.



(1) 如图 1,先用对折的方式确定矩形 $ABCD$ 的边 AB 的中点 E ,再沿 DE 折叠,点 A 落在点 F 处,把纸片展平,延长 DF ,与 BC 交点为 G . 请写出线段 FG 与线段 BG 的数量关系_____.

名师思路展示

(1) 将 $n=1$ 代入 $\frac{\sqrt{2^{2n}+1}-1}{2^n}$,即可求解.

(2) 设正方形的边长为 2,根据折叠的性质,可得 $AE=EB=1$,设 $DG=x$,则 $AG=2-x$,在 $\text{Rt}\triangle AEG$, $\text{Rt}\triangle GHE$ 中,运用勾股定理建立方程,解方程,即可求解.

(3) 仿照(2)的方法得出 2 阶奇妙矩形.

(4) 根据(2)的方法,分别求得四边形 $AGHE$ 的周长与矩形 $GDCK$ 的周长,即可求解.

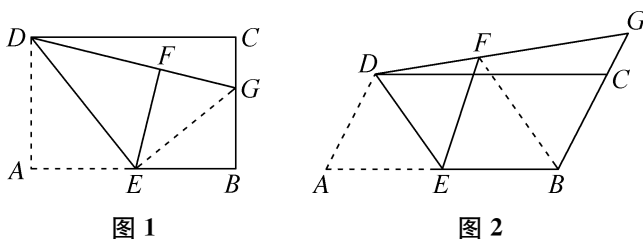
规范解答

解:(1) 当 $n=1$ 时, $\frac{\sqrt{2^{2n}+1}-1}{2^n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

(2) 如图 1,连接 EG . 设正方形的边长为 2,根据折叠的性质,可得 $AE=EB=1$. 设 $DG=x$,则 $AG=2-x$,根据折叠,可得 $GH=GD=x$, $CH=CD=2$,在 $\text{Rt}\triangle BEC$ 中, $EC=$

(2) 如图 2,把 $\square ABCD$ 按照(1)中的操作进行折叠和作图,请判断 FG, BG 这两条线段之间的数量关系,并仅就图 2 证明你的判断.

答案:(1) $FG=BG$. (提示:如图 1,连接 EG . 因为四边形 $ABCD$ 是矩形,所以 $\angle A=\angle B=90^\circ$. 因为点 E 是 AB 的中点,所以 $AE=BE$,由折叠知, $AE=EF$,所以 $EF=EB$. 在 $\text{Rt}\triangle EFG$ 和 $\text{Rt}\triangle EBG$ 中, $\begin{cases} EF=EB, \\ EG=EG, \end{cases}$ 所以 $\text{Rt}\triangle EFG \cong \text{Rt}\triangle EBG (\text{HL})$, 所以 $FG=BG$.)



(2) $FG=BG$,证明如下:

如图 2,连接 FB . 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $\angle A+\angle EBG=180^\circ$,因为 E 是 AB 的中点,所以 $AE=BE$. 由折叠知, $AE=EF$, $\angle A=\angle DFE$, $\angle DFE+\angle EFG=180^\circ$,所以 $EF=EB$, $\angle EBG=\angle EFG$,所以 $\angle EFB=\angle EBF$,又因为 $\angle EFB+\angle BFG=\angle EBF+\angle FBG$,所以 $\angle BFG=\angle FBG$,所以 $FG=BG$.

$\sqrt{EB^2+BC^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$, 所以 $EH=\sqrt{5}-2$. 在 $\text{Rt}\triangle AEG$, $\text{Rt}\triangle GHE$ 中, $AG^2+AE^2=GE^2$, $GH^2+EH^2=GE^2$, 所以 $(2-x)^2+1^2=(\sqrt{5}-2)^2+x^2$, 解得 $x=\sqrt{5}-1$, 所以 $\frac{GD}{DC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 所以矩形 $GDCK$ 是 1 阶奇妙矩形.

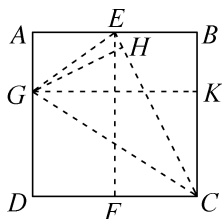


图 1

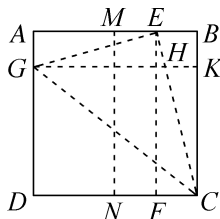


图 2

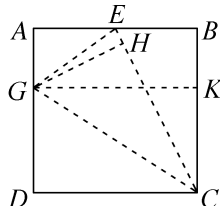


图 3

(3) 对正方形纸片 $ABCD$ 进行如下操作(如图 2 所示):

第一步:对折正方形纸片,展开,折痕为 MN ,再对折,记右侧的折痕为 EF ,连接 CE ;

第二步:折叠纸片使 CD 落在 CE 上,点 D 的对应点为点 H ,展开,折痕为 CG ;

第三步:过点 G 折叠纸片,使得点 A, B 分别落在边 AD, BC 上,展开,折痕为 GK .

矩形 $GDCK$ 是 2 阶奇妙矩形,理由如下:

如图 2,连接 GE ,设正方形的边长为 4,根据折叠可得 $EB=1$,则 $AE=4-1=3$. 设 $DG=x$,则 $AG=4-x$,根据折叠可得 $GH=GD=x$, $CH=CD=4$. 在 $\text{Rt}\triangle BEC$ 中, $EC=\sqrt{EB^2+BC^2}=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$, 所以 $EH=\sqrt{17}-4$. 在 $\text{Rt}\triangle AEG$, $\text{Rt}\triangle GHE$ 中, $AG^2+AE^2=GE^2$, $GH^2+EH^2=GE^2$, 所以 $(4-x)^2+3^2=(\sqrt{17}-4)^2+x^2$, 解得 $x=\sqrt{17}-1$, 所以 $\frac{GD}{DC}=\frac{\sqrt{17}-1}{4}$. 当 $n=2$ 时, $\frac{\sqrt{2^{2n}+1}-1}{2^n}=\frac{\sqrt{17}-1}{4}$, 所以矩形 $GDCK$ 是 2 阶奇妙矩形.

(4) 如图 3,连接 GE . 设正方形的边长为 1, $EB=m$, 则 $AE=1-m$. 设 $DG=x$, 则 $AG=1-x$, 根据折叠, 可得 $GH=GD=x$, $CH=CD=1$. 在 $\text{Rt}\triangle BEC$ 中, $EC=\sqrt{EB^2+BC^2}=\sqrt{1+m^2}$, 所以 $EH=\sqrt{1+m^2}-1$. 在 $\text{Rt}\triangle AEG$, $\text{Rt}\triangle GHE$ 中, $AG^2+AE^2=GE^2$, $GH^2+EH^2=GE^2$, 所以 $(1-x)^2+(1-m)^2=(\sqrt{1+m^2}-1)^2+x^2$, 整理, 得 $x=\sqrt{m^2+1}-m$, 所以四边形 $AGHE$ 的边长为 $1-x+x+\sqrt{1+m^2}-1+1-m=\sqrt{1+m^2}-m+1=x+1$, 矩形 $GDCK$ 的周长为 $2(GD+DC)=2(x+1)$, 所以四边形 $AGHE$ 的周长与矩形 $GDCK$ 的周长比值总是定值 $\frac{1}{2}$.



解后反思

本题从黄金矩形拓展到一般的 n 阶奇妙矩形,考查了对题目的理解及对问题迁移运用的能力. 解决此类阅读理解、迁移运用的题目,关键在于要正确理解题意,从前面的小问中探究并发现解决后续问题的方法. 这要求我们在平时的学习中,积累丰富的数学知识,养成敏锐的数学直觉. 同时,还需要加强运算能力,以免在大量运算时,一步错,步步错.

连云港市 2023 年中考压轴题分析

【问题情境 建构函数】

(1) 如图 1, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=4$, M 是 CD 的中点, $AE \perp BM$, 垂足为 E . 设 $BC=x$, $AE=y$, 试用含 x 的代数式表示 y .

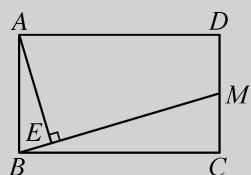


图 1

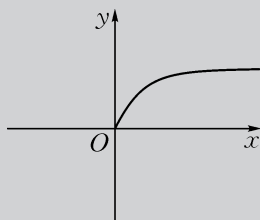


图 2

【由数想形 新知初探】

(2) 在上述表达式中, y 与 x 成函数关系, 其图像如图 2 所示. 若 x 取任意实数, 此时的函数图像是否具有对称性? 若有, 请说明理由, 并在图 2 上补全函数图像.

【数形结合 深度探究】

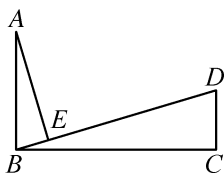
(3) 在“ x 取任意实数”的条件下, 对上述函数继续探究, 得出以下结论: ①函数值 y 随 x 值的增大而增大; ②函数值 y 的取值范围是 $-4\sqrt{2} < y < 4\sqrt{2}$; ③存在一条直线与该函数图像有四个交点; ④在图像上存在四点 A, B, C, D , 使得四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 其中正确的是_____ (写出所有正确结论的序号).

【抽象回归 拓展总结】

(4) 若将(1)中的“ $AB=4$ ”改成“ $AB=2k$ ”, 此时 y 关于 x 的函数表达式是_____. 一般地, 当 $k \neq 0$, x 取任意实数时, 类比一次函数、反比例函数、二次函数的研究过程, 探究此类函数的相关性质(直接写出 3 条即可).

基本题型 1

已知: 如图, $AB \perp CB$, $AE \perp BD$, $CD \perp CB$, 垂足分别为 B, E, C . 若 $AB=4$, $CD=2$, $BC=6$, 求 AE 的长.



答案: 由题意可知, 在 $\text{Rt} \triangle BCD$ 中, $BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = 2\sqrt{10}$. 由条件易证, $\triangle ABE \sim \triangle BDC$, 所以 $\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{BC}$, 所以 $\frac{4}{2\sqrt{10}} = \frac{AE}{6}$, 所以 $AE = \frac{6\sqrt{10}}{5}$.

基本题型 2

已知: $A(a, b)$ 是反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 图像上的一点,

点 B 与点 A 关于原点对称, 试判断点 B 是否在反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图像上.

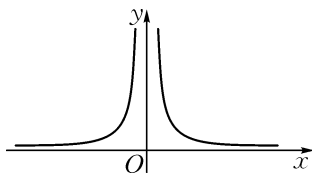
答案: 因为 $A(a, b)$ 是反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 图像上的一点, 所以 $ab=6$, 因为点 B 与点 A 关于原点对称, 所以点 $B(-a, -b)$, 当 $x=-a$ 时, $y = \frac{6}{-a} = \frac{ab}{-a} = -b$, 所以点 B 在反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图像上.

基本题型 3

画出 $y = \frac{4}{x^2}$ 的示意图, 并描述其特征.

答案: 示意图如图所示. 其特征为: $y = \frac{4}{x^2}$ 的图像关

于 y 轴对称, 当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而减小, 当 x 无穷大时, y 无限接近于 0, 但始终有 $y > 0$. 当 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而增大, 当 x 无穷小时, y 无限接近于 0, 但始终有 $y > 0$.



名师思路展示

(1) 中以矩形作为情境, 由 $AE \perp BM$, 可证 $\triangle ABE \sim \triangle BMC$, 则 $\frac{AB}{BM} = \frac{AE}{BC}$, 代入相应数据, 得 $\frac{4}{BM} = \frac{y}{x}$. 观察等式, 只需表示 BM 即可. 由条件可知 $MC=2, BC=x$, 由勾股定理, 得 $BM = \sqrt{4+x^2}$, 代入解之.

(2) 中增加条件“若 x 取任意实数”, 要求判断函数是否具有对称性. 由函数 $y = \frac{4x\sqrt{4+x^2}}{4+x^2}$ 的特点可知, 当 x 取一对相反数时, 对应的 y 值也互为相反数, 由此可知该函数的图像关于原点对称. 如何证明一个函数图像关于原点对称呢? 其基本方法是, 在函数图像上任取一点 $A(a, b)$, 然后说明点 A 关于原点的对称点 $A'(-a, -b)$ 在该函数的图像上.

(3) 由(2)中补全的函数图像可知, 函数值 y 随 x 值的增大而增大, 故结论①正确; 由 $y = \frac{4x}{\sqrt{4+x^2}}$ 可知, 当 $x > 0$ 时, $y = \frac{4x}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{4}{\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}}$, 当 x 增大时, $\sqrt{\frac{4}{x^2}}$ 减小, $\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}$ 减小, $\frac{4}{\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}}$ 增大, 即 y 随 x 的增大而增大; 当 x 无

穷大时, $\frac{4}{x^2}$ 无限接近于 0, 即 $\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}$ 无限接近于 1 且大于 1, 则 $\frac{4}{\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}}$ 无限接近于 4 且小于 4, 即 $y < 4$; 当 $x = 0$

时, $y = 0$; 当 $x < 0$ 时, $y = \frac{4x}{\sqrt{4+x^2}} = -\frac{4}{\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}}$, 当 x 无穷小时, x^2 无穷大, $\frac{4}{x^2}$ 无限接近于 0, 即 $\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}$ 无限接近

于 1 且大于 1, $-\frac{4}{\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}}$ 无限接近于 -4 且大于 -4, 即 $y > -4$. 所以函

数值 y 的取值范围是 $-4 < y < 4$, 故结论②错误; 由(2)可知, 该函数的图像是中心对称图形, 过原点的直线与函数图像最多只有三个交点, 将直线向上平移, 在第一象限最多有两个交点, 在第三象限只有一个交点, 如向下平移, 则在第三象限最多有两个交点, 在第一象限只有一个交点, 故结论③错误; 由于该函数的图像是一个关于原点成中心对称的图形, 据此可在第一象限的图像上任取两点 $A(a, b), D(c, d)$, 将点 A, D 关于原点的对称点记为点 $C(-a, -b), B(-c, -d)$, 则有 $OA = OC, OB = OD$, 即可证四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 故结论④正确.

(4) 类比(1), 将 4 换成 $2k$, 则有 $y = \frac{2kx}{\sqrt{x^2+k^2}} = \frac{2kx\sqrt{x^2+k^2}}{x^2+k^2}$, k 是一个待定常数, 本题要求类比一次函数、反

比例函数和二次函数的研究方法, 探究函数的有关性质. 回顾三个函数的探究过程, 首先通过列举不同的 k 值, 结合列表、画图. 当 $k > 0$ 时, 图像在第一、三象限. 当 $k < 0$ 时, 图像在第二、四象限. 再根据图像归纳出系数的符号与函数性质间的关系. 要从不同的角度进行思考, 如增减性、对称性、图像的位置、函数值的取值范围、图像与坐标轴的位置关系(有无交点, 无限接近)等.



规范解答

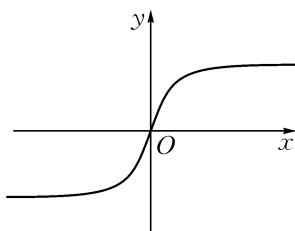
解: (1) 因为四边形 $ABCD$ 是矩形, 所以 $CD = AB = 4$, $\angle ABC = \angle BCM = 90^\circ$, 所以 $\angle ABE + \angle MBC = 90^\circ$. 因为 $AE \perp BM$, 所以 $\angle AEB = 90^\circ$, 所以 $\angle BAE + \angle ABE = 90^\circ$, 所以 $\angle AEB = \angle BCM$, $\angle MBC = \angle BAE$, 所以 $\text{Rt}\triangle ABE \sim \text{Rt}\triangle BMC$, 所以 $\frac{AB}{BM} = \frac{AE}{BC}$. 因为 M 是

CD 的中点, 所以 $CM = \frac{1}{2}CD = 2$. 在 $\text{Rt}\triangle BMC$ 中, 由勾股定理, 得 $BM = \sqrt{BC^2 + CM^2} = \sqrt{x^2 + 4}$, 所以 $\frac{4}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{y}{x}$. 所以 $y = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{4x\sqrt{x^2 + 4}}{x^2 + 4} (x > 0)$.

(2) x 取任意实数时, 对应的函数图像关于原点成中心对称. 理由如下:

若 $P(a, b)$ 为该图像上任意一点, 则 $b = \frac{4a\sqrt{a^2 + 4}}{a^2 + 4}$. 设点 $P(a, b)$ 关于原点的对称点为 Q , 则点 $Q(-a, -b)$. 当 $x = -a$ 时, $y = \frac{4(-a)\sqrt{(-a)^2 + 4}}{(-a)^2 + 4} = -\frac{4a\sqrt{a^2 + 4}}{a^2 + 4} = -b$. 所以点 $Q(-a, -b)$ 也在 $y = \frac{4x\sqrt{x^2 + 4}}{x^2 + 4}$ 的图像上. 所以当 x 取任意实数时, 该函数的图像关于原点对称.

补全函数图像如图所示.



(3) ①④

(4) $y = \frac{2kx\sqrt{x^2 + k^2}}{x^2 + k^2} (x > 0, k > 0)$ 当 $k \neq 0, x$ 取任意实数时, 有如下相关性质:

当 $k > 0$ 时, 图像经过第一、三象限, 函数值 y 随 x 值的增大而增大, y 的取值范围为 $-2k < y < 2k$; 当 $k < 0$ 时, 图像经过第二、四象限, 函数值 y 随 x 值的增大而减小, y 的取值范围为 $2k < y < -2k$; 函数图像经过原点; 函数图像关于原点对称等.



解后反思

要善于抓住基本图形和基本结论, “一线三等角及变式”图形中必有全等或相似. 比如(1)中由相似可挖掘线段之间的等量关系. 问题情境中, 函数模型的现实意义与理论上一一般抽象化的性质相辅相成, 需要结合探究. (2)中给出了一个很好的范例. 在 x 取一切实数后, 函数图像完整的风貌得以显现. 基于此, 结合函数图像研究出的性质才是完整的, 而不是局部的.

研究对称性要善于回归最基本的定义, 比如(2)中要证明函数的图像关于原点成中心对称, 需要将这个问题转化为证明图像上任何一点关于原点的对称点仍在该函数的图像上.

灵活运用转化的数学思想. 将复杂问题简单化是快速解决问题的捷径之一. 比如(3)中将函数 $y = \frac{4x\sqrt{4+x^2}}{4+x^2}$, 转化为 $y = \frac{4x}{\sqrt{4+x^2}}$, 再进一步转化为 $y = \frac{4}{\sqrt{\frac{4}{x^2} + 1}}$, 由于只有一处存在变量 x , 借助函数 $y = \frac{4}{x^2}$ 的研究成果, 即可解决相关判断问题. 要善于读题, 题目有时已给出解决问题的基本路径, 如(4), 要求用类比的方法思考和解决问题, 此时不需要标新立异, 按指引进行回顾与实践即可.

比如: 通过类比, 可知 $MC = k, CB = x, BM = \sqrt{k^2 + x^2}, y = \frac{2kx}{\sqrt{k^2 + x^2}} (x > 0, k > 0)$. 同样通过类比, 可将字母“ k ”一般化, 分 $k > 0$ 和 $k < 0$ 两种情况进行分类讨论, 从而得到此类函数的相关性质.