江苏省苏州市2025届高三上学期开学考试

(满分150分,考试时间120分钟)

答案见P1

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知i是虚数单位,则$\frac{2-i}{i}=$ ( )

A. $1+2i$　　B. $1-2i$

C. $-1-2i$　　D. $-1+2i$

2. 已知集合$A=\{x|2\leqslant x<6\}$,$B=\{x|x^2-4x<0\}$,则$A\cap B=$ ( )

A. $(0,6)$

B. $(4,6)$

C. $[2,4)$

D. $(-\infty,0)\cup[2,+\infty)$

3. 将函数$f(x)=\sin x$的图象先向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度,再将所得图象上所有点的纵坐标保持不变,横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$,得到函数$y=g(x)$的图象,则$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=$ ( )

A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. 1

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. -1

4. 已知向量$\boldsymbol{a}=(1,-1)$,$\boldsymbol{b}=(x-2,x^2)$,则"$x=-2$"是"$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$"的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. "绿水青山就是金山银山"的理念深入人心,人民群众的生态环境获得感、幸福感、安全感不断提升.某校高一年级举行环保知识竞赛,共500人参加,若参赛学生成绩的第60百分位数是80分,则关于竞赛成绩不低于80分的人数的说法正确的是 ( )

A. 至少为300

B. 至少为200

C. 至多为300

D. 至多为200

6. 已知正四棱锥的侧面积是底面积的2倍,则该正四棱锥侧棱和底面所成角的余弦值为 ( )

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{15}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

7. 已知函数$f(x)=e^x+e(x-a-1)$(e为自然对数的底数),$g(x)=\ln(xe^x)-a$的零点分别为x_1,x_2,则$\frac{x_1}{x_2}$的最大值为 ( )

A. e　　B. $\frac{1}{e}$

C. 1　　D. $\frac{2}{e}$

8. 在平面直角坐标系xOy中,A,B为双曲线C:$x^2-y^2=1$右支上两点.若$|AB|=6$,则AB中点的横坐标的最小值为 ( )

A. $2\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{10}$　　C. $\frac{4\sqrt{5}}{3}$　　D. $\frac{16}{3}$

二、选择题:本题共3小题,每小题6分,共18分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得6分,部分选对的得部分分,有选错的得0分.

9. 已知二项式$\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$的展开式,则 ( )

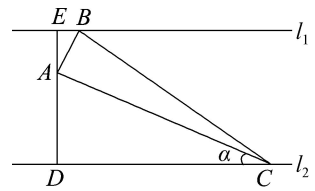
A. 二项式系数最大的项为第3项

B. 常数项为第5项

C. 展开式中含x^3的项为$60x^3$

D. 展开式中所有项的系数和为64

10. 如图,直线$l_1/\!/l_2$,A是l_1,l_2之间的一定点,点A到l_1的距离$AE=1$,点A到l_2的距离$AD=2$,点B,C分别在l_1,l_2上,设$\angle ACD=\alpha$,则 ( )



A. 若$\alpha=30°$,$AB\perp AC$,则$AB=2$

B. 若$AB\perp AC$,则$\triangle ABC$面积的最小值为2

C. 若$\triangle ABC$为等边三角形,则$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. 若$\angle BAC=60°$,则$\frac{1}{AB}+\frac{2}{AC}$的最大值为1

11. 若数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$,$\forall m,n\in\mathbf{N}^*$,有$\frac{1}{a_{n+m}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_m}$成立,则 ( )

A. $a_{2024}=\frac{1}{2024}$

B. $\exists n\in\mathbf{N}^*$,使得$a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{n+1}^2>\frac{2}{3}$

C. $\forall n\in\mathbf{N}^*$,都有$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n>\ln(n+1)$

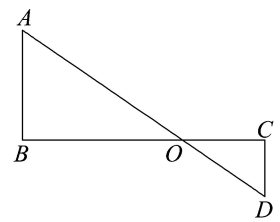
D. $\forall n\in\mathbf{N}^*$,都有$a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{n+1}<\ln(n+1)$

三、填空题:本题共3小题,每小题5分,共15分.

12. 已知$\triangle ABC$内角A,B,C的对边分别为a,b,c.若$B=30°$,$b=\sqrt{13}$,$c=2$,则$a=$________.

13. 已知直线l:$(2k+1)x-ky-1=0$(其中k为常数),圆O:$x^2+y^2=8$,直线l与圆O交于A,B两点,则AB长的最小值为________.

14. 如图,线段AD,BC相交于点O,且AB,AD,BC,CD的长度构成集合$\{1,5,9,x\}$,$\angle ABO=\angle DCO=90°$,则$x$的取值个数为________.



四、解答题:本题共5小题,共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分13分)

2024年7月26日,第33届夏季奥林匹克运动会在法国巴黎开幕,为了保证奥运赛事的顺利组织和进行,以及做好文化交流、信息咨询、观众引导等多方面的工作,每项比赛都需要若干名志愿者参加服务,每名志愿者可服务多个项目.8月7日,100米跨栏、200米、400米、800米、1500米、5000米比赛在法兰西体育场举行.

(1) 志愿者汤姆可以在以上6个项目中选择3个参加服务,求汤姆在选择200米服务的条件下,选择1500米服务的概率.

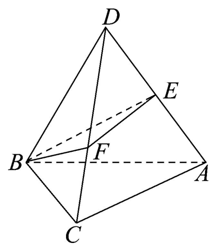
(2) 为了调查志愿者参加服务的情况,从仅参加1个项目服务的志愿者中抽取10名,其中有6名参加5000米服务,4名参加800米服务.现从这10名志愿者中再选3名做进一步调查,将其中参加800米服务的人数记作X,求随机变量X的分布列和数学期望.

16.（本小题满分 15 分）

如图，在三棱锥 $D-ABC$ 中，$\triangle ABC$ 是以 AB 为斜边的等腰直角三角形，$\triangle ABD$ 是边长为 2 的正三角形，E 为 AD 的中点，F 为 DC 上一点，且平面 $BEF\perp$ 平面 ABD.

（1）求证：$AD\perp$ 平面 BEF；

（2）若平面 $ABC\perp$ 平面 ABD，求平面 BEF 与平面 BCD 夹角的余弦值.



17.（本小题满分 15 分）

已知函数 $f(x)=\sin x+e^x-4x$，e 为自然对数的底数，函数 $g(x)=x^3-ax+3$.

（1）若 $f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线也是 $g(x)$ 的切线，求实数 a 的值；

（2）求 $f(x)$ 在 $(-\pi,+\infty)$ 上的零点个数.

函数中的切线与零点个数问题

18.（本小题满分 17 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，A 为椭圆的左顶点. 已知点 $P(1,2)$，且直线 PA 的斜率为 $\frac{2}{3}$. 过点 $M(t,0)$ 作直线 l 交椭圆于 B,C 两点（点 B 在 x 轴上方，点 C 在 x 轴下方），设 PB,PC 两直线分别交椭圆于另一点 D,E（点 B,E 分别在线段 PD,PC 上）.

（1）求椭圆的标准方程；

（2）当 $t=1$ 时，若直线 l 的斜率小于零，且 $\triangle PBC$ 的面积为 $\frac{8}{5}$，求证：$\angle BMD=\angle BPC$；

（3）若存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{DC}$，求此时直线 DC 的斜率.

19.（本小题满分 17 分）

如果数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}^2\leqslant a_na_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$，那么称之为凸数列. 现给定函数 $f(x)$ 及凸数列 $\{a_n\}$，它们满足以下两个条件：① $0<a_n<a_{n+1}$；② $\forall n\geqslant 2$，有 $|f(a_n)-f(a_{n+1})|\leqslant\lambda^n|a_n-a_{n+1}|\leqslant|f(a_{n-1})-f(a_n)|$（$\lambda$ 为正常数）.

（1）若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n>1$，$b_{n+1}=\frac{1}{2}\left(b_n+\frac{1}{b_n}\right)$，且数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n=\ln\frac{b_n+1}{b_n-1}$，请判断 $\{c_n\}$ 是否为凸数列，并说明理由；

（2）若 $|f(a_2)-f(a_3)|=2$，求证：$\sum\limits_{i=2}^{10}|a_{i+1}-a_i|>18$；

（3）对任何大于等于 2 的正整数 i,j，且 $i\leqslant j$，求证：$|f(a_i)-f(a_j)|\leqslant|a_i-a_j|$.

湖北省武汉市2025届高三上学期九月调研考试

（满分150分，考试时间120分钟）

答案见P6

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 若复数z满足$\frac{z+2}{z}=2-\mathrm{i}$，则$z=$（　　）

A. $-1-\mathrm{i}$

B. $-1+\mathrm{i}$

C. $1-\mathrm{i}$

D. $1+\mathrm{i}$

2. 已知集合$A=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$，$B=\{y\mid y=\lg(x^2+1)\}$，则$A\cap B=$（　　）

A. $(-1,3)$

B. $(-1,0]$

C. $[0,3)$

D. $(-\infty,3)$

3. $\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)^7$的展开式中含$\frac{1}{x^2}$的项的系数为（　　）

A. 420　　B. -420

C. 560　　D. -560

4. 设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n．若$S_{10}-S_3=35$，$a_3+a_{10}=7$，则$\{a_n\}$的公差为（　　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

5. 已知某圆锥的母线长为1，其侧面积与轴截面面积的比值为2π，则该圆锥的体积为（　　）

A. $\frac{3\pi}{8}$　　B. $\frac{\pi}{8}$

C. $\frac{\sqrt{3}\pi}{8}$　　D. $\frac{\sqrt{3}\pi}{24}$

6. 已知$a>0$且$a\neq1$．若函数$f(x)=\begin{cases}a^{x-a}, & x\leqslant a,\\ \log_a(x+a)+1, & x>a\end{cases}$的值域为$\mathbf{R}$，则$a$的取值范围是（　　）

A. $\left(0,\frac{1}{2}\right]$

B. $\left[\frac{1}{2},1\right)$

C. $(1,2]$

D. $[2,+\infty)$

7. 已知函数$f(x)=\frac{\tan\theta-\tan(x+\theta)}{1-2\tan(x+\theta)}$是$\left[-\frac{\pi}{2024},\frac{\pi}{2024}\right]$上的奇函数，则$\tan\theta=$（　　）

A. 2　　B. -2

C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

8. 设椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，右顶点为$A$，已知点$P$在椭圆$E$上，若$\angle F_1PF_2=90°$，$\angle PAF_2=45°$，则椭圆$E$的离心率为（　　）

A. $\frac{5}{7}$

B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

C. $2-\sqrt{2}$

D. $\sqrt{3}-1$

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．

9. 某科技公司统计的一款App最近5个月的下载量如表所示，若y与x线性相关，且经验回归方程为$\hat{y}=-0.6x+\hat{a}$，则（　　）

月份编号x	1	2	3	4	5
下载量y/万次	5	4.5	4	3.5	2.5

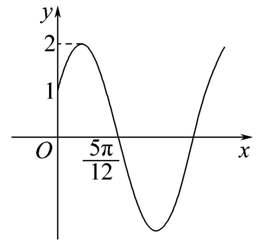
A. y与x负相关

B. $\hat{a}=5.6$

C. 预测第6个月的下载量约为2.1万次

D. 残差绝对值的最大值为0.2

10. 已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<2\pi)$的部分图象如图所示，则（　　）



A. $\varphi=\frac{5\pi}{6}$

B. $\omega=2$

C. $f(x)$的图象关于直线$x=\frac{5\pi}{3}$对称

D. $f(x)$在$\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right]$上的值域为$[-2,1]$

11. 定义在$(0,+\infty)$上的函数$f(x)$满足$f(x+1)=f(x)-x$，当$0<x\leqslant1$时，$f(x)=\sqrt{x}-x$，则（　　）

A. 当$2<x\leqslant3$时，$f(x)=\sqrt{x-2}-2x+2$

B. 当n为正整数时，$f(n)=\frac{n-n^2}{2}$

C. 对任意正实数t，$f(x)$在区间$(t,t+1)$内恰有一个极大值点

D. 若$f(x)$在区间$(0,k)$内有3个极大值点，则k的取值范围是$\left(\frac{73}{36},\frac{193}{64}\right]$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分．

12. 已知平面向量$\boldsymbol{a}=(5,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，$\boldsymbol{c}=(1,k)$．若$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$，则$k=$________．

13. 若双曲线$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{m+1}=1$的离心率为3，则$m=$________．

14. 已知两个有共同底面的正三棱锥$P-ABC$与$Q-ABC$，它们的各顶点均在半径为1的球面上．若二面角$P-AB-Q$的大小为$120°$，则$\triangle ABC$的边长为________．

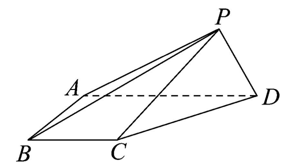
四、解答题：本题共5小题，共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15.（本小题满分13分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$AD\parallel BC$，$AB\perp AD$，$AB=AD=2$，$BC=1$，$PD\perp$平面PAB．

（1）求PC的长；

（2）若$PD=1$，求直线PA与平面PCD所成角的正弦值．



16.（本小题满分 15 分）

已知函数 $f(x)=e^{2x}+(a-2)e^{x}-ax$.

(1) 当 $a=2$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2) 讨论 $f(x)$ 的单调区间.

17.（本小题满分 15 分）

已知△ABC 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a，b,c，且 $2c-b=2a\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)$.

(1) 求角 A；

(2) 若 $a=\sqrt{6}$，D 为边 BC 上一点，AD 为∠BAC 的平分线，且 $AD=1$，求△ABC 的面积.

18.（本小题满分 17 分）

已知平面内一动圆过点 $P(2,0)$，且该圆被 y 轴截得的弦长为 4，设其圆心的轨迹为曲线 E.

(1) 求曲线 E 的方程.

(2) 梯形 $ABCD$ 的四个顶点均在曲线 E 上，$AB/\!/CD$，对角线 AC 与 BD 交于点 $T(2,1)$.

① 求直线 AB 的斜率；

② 求证：直线 AD 与 BC 交于定点.

圆锥曲线中的定点问题

19.（本小题满分 17 分）

有编号为 $1,2,\cdots,n$ 的 n 个空盒子（$n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}$），另有编号为 $1,2,\cdots,k$ 的 k 个球（$2\leqslant k\leqslant n$，$k\in\mathbf{N}$），现将 k 个球分别放入 n 个盒子中，每个盒子最多放入一个球. 放球时，先将 1 号球随机放入 n 个盒子中的其中一个，剩下的球按照球的编号从小到大依次放置，规则如下：若球的编号对应的盒子为空，则将该球放入对应编号的盒子中；若球的编号对应的盒子为非空，则将该球随机放入剩余空盒子中的其中一个. 记 k 号球能放入 k 号盒子的概率为 $P(n,k)$.

(1) 求 $P(3,3)$；

(2) 当 $n\geqslant 3$ 时，求 $P(n,3)$；

(3) 求 $P(n,k)$.

福建省福州市2025届高三上学期第一次质量检测

（满分150分，考试时间120分钟）

答案见P12

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合$A=\{x|x^2-4x-5\leqslant 0\}$，$B=\{x|0\leqslant x\leqslant 6\}$，则$A\cap B=$　（　　）

A. $\{x|-5\leqslant x\leqslant 6\}$

B. $\{x|-1\leqslant x\leqslant 6\}$

C. $\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$

D. $\{x|0\leqslant x\leqslant 5\}$

2. 已知复数$z=\dfrac{5}{2-\mathrm{i}}$，则$|z|=$　（　　）

A. $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$　　B. $\dfrac{9}{5}$

C. $\sqrt{5}$　　D. 5

3. 以坐标原点为顶点，x轴非负半轴为始边的角α，其终边落在直线$y=2x$上，则　（　　）

A. $\sin\alpha=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

B. $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\tan\alpha=2$

D. $\sin 2\alpha=-\dfrac{4}{5}$

4. 以$y=\pm 3x$为渐近线的双曲线可以是　（　　）

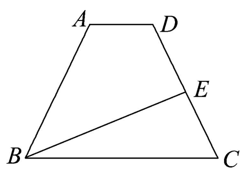
A. $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$

B. $x^2-\dfrac{y^2}{9}=1$

C. $\dfrac{y^2}{3}-x^2=1$

D. $y^2-\dfrac{x^2}{9}=1$

5. 如图，梯形$ABCD$的腰CD的中点为E，且$BC=3AD$，记$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{m}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{n}$，则$\overrightarrow{BE}=$　（　　）



A. $-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$

B. $\dfrac{1}{2}\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$

C. $-2\boldsymbol{m}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{n}$

D. $-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{m}+\dfrac{3}{2}\boldsymbol{n}$

6. 已知圆$x^2+y^2+4mx-2my+m=0(m\in\mathbf{R})$与$x$轴相切，则$m=$　（　　）

A. 1　　B. 0或$\dfrac{1}{4}$

C. 0或1　　D. $\dfrac{1}{4}$

7. 已知圆锥SO的底面半径为1，过高线的中点且垂直于高线的平面将圆锥SO截成上、下两部分．若截得小圆锥的体积为$\dfrac{\sqrt{3}\pi}{24}$，则圆锥SO的侧面积为　（　　）

A. 4π　　B. 2π

C. $\sqrt{2}\pi$　　D. π

8. 大气压强p(单位：kPa)与海拔h(单位：m)之间的关系可以由$p=p_0\mathrm{e}^{-kh}$近似描述，其中p_0为标准大气压强，k为常数．已知海拔为5000 m，8000 m两地的大气压强分别为54 kPa，36 kPa．若测得某地的大气压强为80 kPa，则该地的海拔约为(参考数据：$\lg 2\approx 0.301$，$\lg 3\approx 0.477$)　（　　）

A. 295 m　　B. 995 m

C. 2085 m　　D. 3025 m

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．

9. 已知$(1-2x)^9=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_9x^9$，则　（　　）

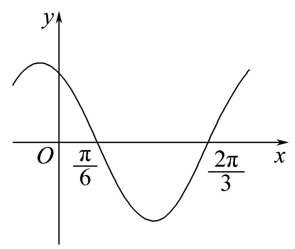
A. $a_0=1$

B. $a_1=18$

C. $a_1+a_2+\cdots+a_9=-1$

D. $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=-\dfrac{1+3^9}{2}$

10. 如图是函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$的部分图象，则　（　　）



A. π是$f(x)$的一个周期

B. $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$

C. $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>f\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$

D. $f(x)$在$[0,3\pi]$上恰有6个零点

11. 已知函数$f(x)$，$g(x)$均为定义在$\mathbf{R}$上的非常值函数，且$g(x)$为$f(x)$的导函数．$\forall x,y\in\mathbf{R}$，$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$且$f(1)=0$，则　（　　）

抽象函数问题

A. $f(0)=0$

B. $f(x)$为偶函数

C. $g(x)+g(2024-x)=0$

D. $[f(x)]^2+[f(1-x)]^2=1$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分．

12. 已知正三棱柱的底面边长为2，高为$\sqrt{3}$，则其体积为________．

13. 已知抛物线C：$y^2=4x$的焦点为F，点M在抛物线C上，且点M到直线$x=-2$的距离为6，则$|MF|=$________．

14. 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_6=-600$，当且仅当$n=30$时，S_n取得最小值，则$\{a_n\}$的公差的取值范围是________．

四、解答题：本题共5小题，共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15.（本小题满分13分）

数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_{n+1}=3a_n+2$．

(1) 求证：数列$\{a_n+1\}$为等比数列；

(2) 求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n．

16.（本小题满分 15 分）

已知△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $2a\cos C=\sqrt{3}b\cos C+\sqrt{3}c\cos B$.

(1) 求角 C；

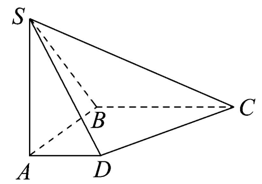
(2) 若 $a=4$，$b=\sqrt{3}$，D 为边 AB 的中点，求 CD 的长.

17.（本小题满分 15 分）

如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，$BC\perp$平面 SAB，$AD\parallel BC$，$SA=BC=1$，$SB=\sqrt{2}$，$\angle SBA=45°$.

(1) 求证：$SA\perp$平面 $ABCD$；

(2) 若 $AD=\dfrac{1}{2}$，求平面 SCD 与平面 SAB 的夹角的余弦值.



18.（本小题满分 17 分）

已知椭圆 W：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，且过点(2，0).

(1) 求椭圆 W 的标准方程.

(2) 直线 $x-my+1=0(m\neq0)$交椭圆 W 于 A，B 两点.

① 点 A 关于原点的对称点为 C，直线 BC 的斜率为 k，求证：$\dfrac{k}{m}$为定值；

② 若椭圆 W 上存在点 P，使得 $\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{PB}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量相等，且△PAB 的重心在 y 轴上，求直线 AB 的方程.

19.（本小题满分 17 分）

阅读以下材料：

① 设 $f'(x)$为函数 $f(x)$的导函数. 若 $f'(x)$在区间 D 上单调递增，则称 $f(x)$为区间 D 上的凹函数；若 $f'(x)$在区间 D 上单调递减，则称 $f(x)$为区间 D 上的凸函数.

② 平面直角坐标系中的点 P 称为函数 $f(x)$的"k 切点"，当且仅当过点 P 恰好能作曲线 $y=f(x)$的 k 条切线，其中 $k\in\mathbf{N}$.

(1) 已知函数 $f(x)=ax^4+x^3-3(2a+1)x^2-x+3$.

① 当 $a\leqslant0$ 时，讨论 $f(x)$的凹凸性；

② 当 $a=0$ 时，点 P 在 y 轴右侧且为 $f(x)$的"3 切点"，求点 P 的集合.

(2) 已知函数 $g(x)=xe^x$，点 Q 在 y 轴左侧且为 $g(x)$的"3 切点"，写出点 Q 的集合(不需要写出求解过程).

八省联考(山西、河南、陕西、内蒙古、四川、云南、宁夏、青海 2025 年 1 月适应性测试)

(满分 150 分,考试时间 120 分钟)

答案见 P17

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1\}$,$B=\{0,1,4\}$,则 $A\cap B=$ ( )

A. $\{0\}$　　B. $\{1\}$

C. $\{0,1\}$　　D. $\{-1,0,1,4\}$

2. 函数 $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的最小正周期是 ( )

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. π　　D. 2π

3. $|2-4\mathrm{i}|=$ ( )

A. 2　　B. 4

C. $2\sqrt{5}$　　D. 6

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(0,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,0)$,则 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$ ( )

A. 2　　B. 1

C. 0　　D. -1

5. 双曲线 $x^2-\frac{y^2}{9}=1$ 的渐近线方程为 ( )

A. $y=\pm x$　　B. $y=\pm 2x$

C. $y=\pm 3x$　　D. $y=\pm 4x$

6. 底面直径和母线长均为 2 的圆锥的体积为 ( )

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$　　B. π

C. 2π　　D. 3π

7. 已知在$\triangle ABC$ 中,$BC=8$,$AC=10$,$\cos\angle BAC=\frac{3}{5}$,则$\triangle ABC$ 的面积为 ( )

A. 6　　B. 8

C. 24　　D. 48

8. 已知函数 $f(x)=x|x-a|-2a^2$,若当 $x>2$ 时,$f(x)>0$,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,1]$　　B. $[-2,1]$

C. $[-1,2]$　　D. $[-1,+\infty)$

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

9. 已知 $F(2,0)$是抛物线 $C:y^2=2px$ 的焦点,M 是抛物线 C 上的点,O 为坐标原点,则 ( )

A. $p=4$

B. $|MF|\geqslant|OF|$

C. 以点 M 为圆心且过点 F 的圆与抛物线 C 的准线相切

D. 当$\angle OFM=120°$时,$\triangle OFM$ 的面积为 $2\sqrt{3}$

10. 在人工神经网络中,单个神经元输入与输出的函数关系可以称为激励函数. 双曲正切函数是一种激励函数. 定义双曲正弦函数 $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$,双曲余弦函数 $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$,双曲正切函数 $\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}$,则 ( )

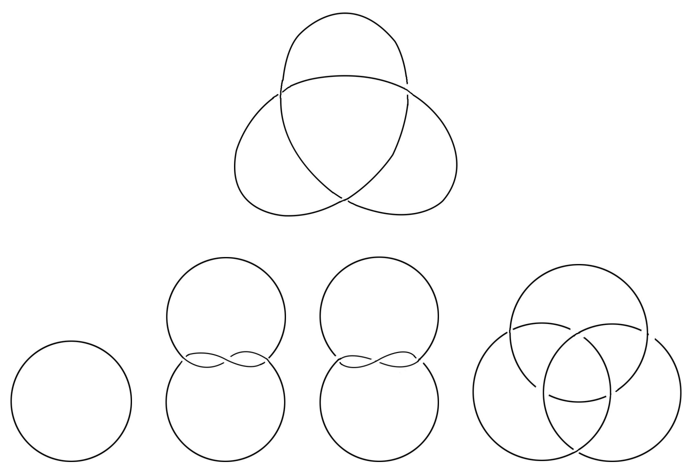
A. 双曲正弦函数是增函数

B. 双曲余弦函数是增函数

C. 双曲正切函数是增函数

D. $\tanh(x+y)=\frac{\tanh x+\tanh y}{1+\tanh x\tanh y}$

11. 下面四个绳结中,不能无损伤地变为图中的绳结的有 ( )



A　　B　　C　　D

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. 已知函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq1)$,若 $f(\ln 2)\cdot f(\ln 4)=8$,则 $a=$________.

13. 有 8 张卡片,分别标有数字 1,2,3,4,5,6,7,8,现从这 8 张卡片中随机抽出 3 张,则抽出的 3 张卡片上的数字之和与其余 5 张卡片上的数字之和相等的概率为________.

14. 已知曲线 $C:y=x^3-\frac{2}{x}$,直线 l_1,l_2 均过坐标原点 O,l_1 和曲线 C 交于 M,N 两点,l_2 和曲线 C 交于 P,Q 两点. 若$\triangle OPM$ 的面积为$\sqrt{2}$,则$\triangle MNQ$ 的面积为________.

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

为考察某种药物 A 对预防疾病 B 的效果,进行了动物(单位:只)试验,得到如下列联表:

药物	疾病		合计
	未患病	患病	
未服用	100	80	s
服用	150	70	220
合计	250	t	400

(1) 求 s,t.

(2) 记未服用药物 A 的动物患疾病 B 的概率为 P,给出 P 的估计值.

(3) 根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验,能否认为药物 A 对预防疾病 B 有效?

附:$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

α	0.050	0.010	0.001
x_α	3.841	6.635	10.828

16.（本小题满分 15 分）

已知在数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，$a_{n+1}=\frac{3a_n}{a_n+2}$.

（1）求证：数列$\left\{1-\frac{1}{a_n}\right\}$为等比数列；

（2）求$\{a_n\}$的通项公式；

（3）令$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$，求证：$b_n<b_{n+1}<1$.

17.（本小题满分 15 分）

已知函数$f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}-x$.

（1）设$a=1$，$b=-2$，求曲线$y=f(x)$的斜率为 2 的切线方程；

（2）若$x=1$是$f(x)$的极小值点，求实数b的取值范围.

18.（本小题满分 17 分）

已知椭圆C的离心率为$\frac{1}{2}$，左、右焦点分别为$F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$.

（1）求椭圆C的方程；

（2）已知点$M_0(1,4)$，求证：线段F_1M_0的垂直平分线与C恰有一个公共点；

（3）设M是坐标平面上的动点，且线段F_1M的垂直平分线与椭圆C恰有一个公共点，求证M的轨迹为圆，并求该圆的方程.

椭圆与圆的综合

19.（本小题满分 17 分）

在平面四边形$ABCD$中，$AB=AC=CD=1$，$\angle ADC=30°$，$\angle DAB=120°$，将$\triangle ACD$沿AC翻折至$\triangle ACP$，其中P为动点.

（1）设$PC\perp AB$，三棱锥$P-ABC$的各个顶点都在球O的球面上.

① 求证：平面$PAC\perp$平面ABC；

② 求球O的半径.

（2）求二面角$A-CP-B$的余弦值的最小值.

安徽省合肥市2025届高三第一次教学质量检测

（满分150分，考试时间120分钟）

答案见P22

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\mid 0<x\leqslant 3\}$，$B=\{x\mid x^2\leqslant 4\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\varnothing$　　B. $\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 3\}$

C. $\{x\mid 0<x\leqslant 2\}$　　D. $\{x\mid -2\leqslant x<0\}$

2. 设 $a\in\mathbf{R}$，若 $\frac{a+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$（i为虚数单位）为实数，则 $a=$（　　）

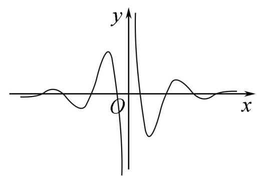
A. -2　　B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. 2

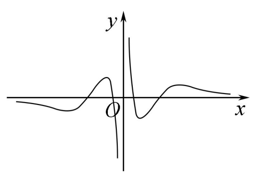
3. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_4+a_5+a_6=9$，则 $S_9=$（　　）

A. 9　　B. 18　　C. 27　　D. 36

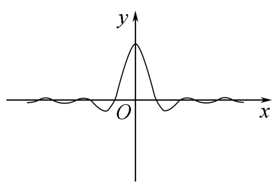
4. 函数 $f(x)=\frac{2\cos \pi x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$ 的图象大致为（　　）



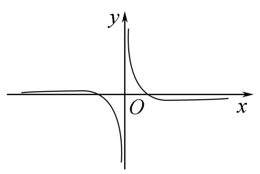
A



B



C



D

5. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$，且 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{3}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{5\pi}{6}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

6. 已知 $\tan\alpha=2$，则 $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=$（　　）

A. $-\frac{1}{3}$　　B. -3　　C. 3　　D. ± 3

7. 已知 P 为圆 O：$x^2+y^2=1$ 上的动点（不在坐标轴上），过点 P 作 $PQ\perp x$ 轴，垂足为 Q，将 $\triangle OPQ$ 绕 y 轴旋转一周，当所得几何体的体积最大时，线段 OQ 的长为（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

8. 已知函数 $f(x)=|\sin 2x|+2\sin x$，则 $f(x)$ 的值域为（　　）

三角函数绝对值问题

A. $[-2,3]$

B. $\left[-2,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

C. $\left[-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

D. $\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]$

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.

9. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 是棱 C_1D_1 上的动点（不含端点），则下列说法正确的有（　　）

A. DC//平面 BPD_1

B. $B_1C\perp BP$

C. 四面体 PAB_1C 的体积为定值

D. 存在点 P，使得平面 $BB_1P\perp$ 平面 AA_1P

10. 某同学两次试验得到的数据如下表. 试验一所得的样本相关系数为 r_1，y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$；试验二所得的样本相关系数为 r_2，u 关于 v 的经验回归方程为 $\hat{u}=\hat{c}v+\hat{d}$. 下列结论正确的是（　　）

试验一

x	2	3	4	5	6
y	12	10	9	7	4

试验二

v	4	6	8	10	12
u	8	10	11	13	16

参考公式：

样本相关系数 $r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$，

$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$.

A. $\bar{v}=2\bar{x}$　　B. $\bar{y}+\bar{u}=20$

C. $2\hat{b}+\hat{c}=0$　　D. $r_1+r_2=0$

11. 我们把既有对称中心又有对称轴的曲线称为“优美曲线”，“优美曲线”与其对称轴的交点叫作“优美曲线”的顶点. 已知“优美曲线”C：$x^2+25x^2y^2+y^2-9=0$，则（　　）

A. 曲线 C 关于直线 $y=x$ 对称

B. 曲线 C 有4个顶点

C. 曲线 C 与直线 $y=-x+3$ 有4个交点

D. 曲线 C 上动点 P 到原点距离的最小值为 $\frac{2\sqrt{7}}{5}$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12. 在 $(1-2x)^5$ 的展开式中，x^3 的系数为________（用数字作答）.

13. 袋中有三个相同的小球，用不同数字对3个小球进行标记. 从袋中随机摸出一个小球，接着从袋中取出比该小球上数字大的所有小球（不再放回），并将该小球放回袋中，然后对袋中剩下的小球再做一次同样的操作，此时袋中剩下2个小球的概率为________.

14. 已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，准线为 l. 过点 F 的直线交 C 于 A,B 两点，过点 A,B 分别作 l 的垂线，垂足分别为 M,N. 若 $\overrightarrow{AF}=\sqrt{2}\,\overrightarrow{FB}$，则 $\triangle MNF$ 的面积是 $\triangle NBF$ 的面积的________倍.

四、解答题：本题共5小题，共77分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分13分）

记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，已知 $a+b=2c\cos B$.

（1）求证：$C=2B$；

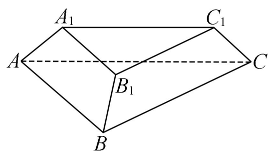
（2）若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，求 $\frac{c}{b\sin B}$ 的取值范围.

16.（本小题满分 15 分）

如图，在正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=6$，$A_1B_1=4$.

(1) 若 $CC_1=\sqrt{2}$，求证：$CC_1\perp$平面 AA_1B_1B；

(2) 若三棱台的高为$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，求平面 AA_1B_1B 与平面 BB_1C_1C 夹角的余弦值.



17.（本小题满分 15 分）

已知函数 $f(x)=\ln x-a\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$，其中 $a>0$.

(1) 讨论 $f(x)$的单调性；

(2) 若函数 $f(x)$有两个极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，求证：$f(x_1)+f(x_2)+f(x_1+x_2)>\ln 2-\dfrac{3}{4}$.

18.（本小题满分 17 分）

已知动圆 $C_1:(x+2)^2+y^2=r_1^2(r_1>0)$与动圆 $C_2:(x-2)^2+y^2=r_2^2(r_2>0)$，满足$|r_1-r_2|=2\sqrt{3}$，记 C_1 与 C_2 公共点的轨迹为曲线 T，曲线 T 与 x 轴的交点记为 A，B(点 A 在点 B 的左侧).

(1) 求曲线 T 的方程.

(2) 若直线 l 与圆 $x^2+y^2=3$ 相切，且与曲线 T 交于 P_1，P_2 两点(点 P_1 在 y 轴左侧，点 P_2 在 y 轴右侧).

① 若直线 l 与直线$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ 和$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ 分别交于 Q_1，Q_2 两点，求证：$|P_1Q_1|=|P_2Q_2|$；

② 记直线 AP_1，BP_2 的斜率分别为 k_1，k_2，求证：k_1k_2 是定值.

圆锥曲线中的定值问题

19.（本小题满分 17 分）

正整数的划分在置换群及其表示理论研究中有着重要应用. 设 k，n 为正整数，若正整数序列$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)$满足 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k=n$，且 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_k\geqslant1$，$1\leqslant k\leqslant n$，则称$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)$为 n 的一个 k 部划分. 记 $p_k(n)$为 n 的所有 k 部划分的个数.

(1) 计算 $p_3(6)$，$p_2(5)$；

(2) 求证：$p_k(n)=p_{k-1}(n-1)+p_k(n-k)$ $(k\geqslant2)$；

(3) 求证：$p_k(n)=\sum\limits_{i=1}^{k}p_i(n-k)$.

福建省厦门、南平、莆田、龙岩、三明、宁德六市2025届高中毕业班第一次质量检测

（满分150分，考试时间120分钟）

答案见P28

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 在复平面内，$i(1+i)$对应的点位于（　　）

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

2. 设集合$A=\left\{x\in\mathbf{N}\middle|\frac{10}{10-x}\in\mathbf{N}\right\}$，$B=\{0,1,2,3,4,5\}$，则$A\cap B=$（　　）

A. $\{0,5\}$

B. $\{2,5\}$

C. $\{0,1,5\}$

D. $\{1,3,5\}$

3. 已知等轴双曲线C的焦点到其渐近线的距离为1，则C的焦距为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. 2

C. $2\sqrt{2}$　　D. 4

4. 已知m,n是两条不同的直线，α,β是两个不同的平面，$\alpha\cap\beta=n$，则下列说法正确的是（　　）

A. 若$m/\!/\alpha$，则$m/\!/n$

B. 若$m/\!/n$，则$m/\!/\alpha$

C. 若$m\perp n$，则$m\perp\beta$

D. 若$m\perp\beta$，则$m\perp n$

5. 已知随机变量X服从正态分布$N(1,\sigma^2)$.若$P(X\leqslant a)=0.3$，且$P(a\leqslant X\leqslant a+2)=0.4$，则$a=$（　　）

A. -1

B. $-\frac{1}{2}$

C. 0

D. $\frac{1}{2}$

6. 已知$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.若$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=2(\sin\alpha+\cos\alpha)$，则$\sin 2\alpha=$（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{5}$

7. 过抛物线$C:y^2=4x$的焦点F的直线l交抛物线C于A,B两点，交直线$x=-1$于点P.若$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{AB}$，则$\triangle OAF$与$\triangle OBF$的面积之比为（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{4}$　　D. 1

8. 若函数$f(x)=\ln(e^{ax-6}+1)-x$的图象关于直线$x=3$对称，则$f(x)$的值域为（　　）

A. $[\ln 2-3,0)$

B. $[\ln 2-3,+\infty)$

C. $[\ln 3-2,0)$

D. $[\ln 3-2,+\infty)$

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.

9. 已知平面向量$\boldsymbol{a}=(2,\sin\theta)$，$\boldsymbol{b}=(1,\cos\theta)$，则（　　）

A. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$不可能垂直

B. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$不可能共线

C. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$不可能为5

D. 若$\theta=\frac{\pi}{2}$，则$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影向量为$2\boldsymbol{b}$

10. 药物临床试验是验证新药有效性和安全性必不可少的步骤.在某新药的临床试验中，志愿者摄入一定量药物后，在较短时间内，血液中药物浓度将达到峰值，当血液中药物浓度下降至峰值浓度的20%时，需要立刻补充药物.已知血液中该药物的峰值浓度为120 mg/L，为探究该药物在人体中的代谢情况，研究人员统计了血液中药物浓度y(mg/L)与代谢时间x(h)的相关数据，如下表所示：

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\bar{x}=4$
y	120	110	103	93	82	68	59	47	38	$\bar{y}=80$

根据表中数据可得到经验回归方程$\hat{y}=-10.5x+\hat{a}$，则（　　）

A. $\hat{a}=122$

B. 变量y与x的样本相关系数$r>0$

C. 当$x=5$时，残差为-1.5

D. 代谢约10 h后才需要补充药物

11. 已知定义在$(0,+\infty)$上的函数$f(x)$满足$f(x+1)=2f(x)+[x]$，其中$[x]$表示不超过x的最大整数，如$[1.9]=1$，$[3]=3$.当$0<x\leqslant 1$时，$f(x)=x\ln x$，设x_n为$f(x)$从小到大的第n个极小值点，则（　　）

A. $f(2)=2$

B. $f(n)=2^n-n-1(n\in\mathbf{N}^*)$

C. 数列$\{x_n\}$是等差数列

D. $f(x_n)<0$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12. 已知圆锥的母线长为6，且其轴截面为等边三角形，则该圆锥的体积为________.

13. 已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\pi)$的图象经过$\left(\frac{2\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$，$\left(\frac{4\pi}{3},-\frac{1}{2}\right)$两点.若$f(x)$在区间$\left(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$上单调递减，则$\omega=$________，$\varphi=$________.

14. 从集合$U=\{1,2,3,4\}$的所有非空子集中任选两个，则选中的两个子集的交集为空集的概率为________.

四、解答题：本题共5小题，共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分13分）

在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且$a\cos C=(\sqrt{2}b-c)\cos A$.

(1) 求A；

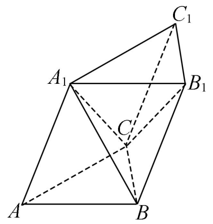
(2) 设D为边AB的中点，若$c=2$，且$\sin\angle CDB=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，求$a$.

16. （本小题满分 15 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$A_1B=A_1C=A_1A=2$，$BA\perp BC$，$BA=BC$.

(1) 求证：平面 $ABC\perp$ 平面 ACC_1A_1；

(2) 若直线 A_1B 与平面 ABC 所成角为 $60°$，求平面 A_1B_1C 与平面 ABC 夹角的余弦值.



17. （本小题满分 15 分）

已知动圆 M 与圆 C_1：$(x+1)^2+y^2=9$ 内切，且与圆 C_2：$(x-1)^2+y^2=1$ 外切，记圆心 M 的轨迹为曲线 C.

(1) 求 C 的方程；

(2) 设点 P，Q 在曲线 C 上，且以 PQ 为直径的圆 E 经过坐标原点 O，求圆 E 面积的最小值.

18. （本小题满分 17 分）

设函数 $f(x)=x(e^x-a)^2$.

(1) 当 $a=0$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 若 $f(x)$ 是增函数，求实数 a 的取值范围；

(3) 当 $0<a<1$ 时，设 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点，求证：$-\frac{1}{2e}<f(x_0)<0$.

导数中的单调性
与极值问题

19. （本小题满分 17 分）

若数列 $\{a_n\}$ 满足数列 $\{|a_{n+1}-a_n|\}$ 是等差数列，则称 $\{a_n\}$ 为“绝对等差数列”，$\{|a_{n+1}-a_n|\}$ 的公差称为 $\{a_n\}$ 的“绝对公差”.

(1) 若“绝对等差数列” $\{a_n\}$ 的“绝对公差”为 2，且 $a_3-a_1=4$，求 a_2-a_1 的值.

(2) 已知“绝对等差数列” $\{d_n\}$ 满足 $d_1=0$，$|d_2-d_1|=1$，且 $\{d_n\}$ 的“绝对公差”为 1，记 S_n 为 $\{d_n\}$ 的前 n 项和.

① 若 $d_{n+1}-d_n=(-1)^{n-1}n$，求 S_{2n}；

② 求证：对任意给定的正整数 m，总存在 $d_1,d_2,\cdots,d_m$，使得 $|S_m|\leqslant 4$.

湖南省长沙市 2025 届新高考适应性考试

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）

答案见 P34

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知 i 是虚数单位，则复数 i^7 的值是（　　）

A. 1　　B. -1　　C. i　　D. $-i$

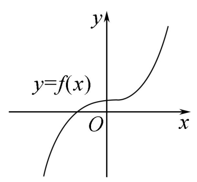
2. 若空间中三条不同直线 a,b,c 满足 $a\perp b$，且 $b/\!/c$，则直线 a 与直线 c 必定（　　）

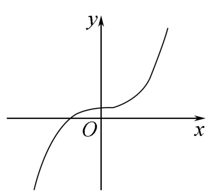
A. 平行　　B. 相交　　C. 垂直　　D. 异面

3. 已知角 α 的顶点与坐标原点重合，始边与 x 轴的正半轴重合，终边经过点 $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$，则 $\cos\alpha=$（　　）

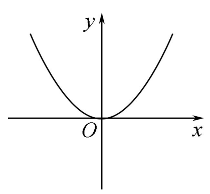
A. $-\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

4. 已知函数 $f(x)$ 的图象如图所示，则其导函数 $f'(x)$ 的图象可能是（　　）

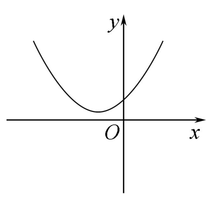




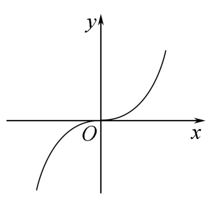
A



B



C



D

5. 若 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 在区间 $[-\theta,\theta]$ 上单调递增，则 $\tan\theta$ 的最大值是（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. 1　　D. $\sqrt{3}$

6. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=2$，$AC=3$，$\angle BAC=60°$. 若 $AD\perp BC$ 于点 D，则 $\overrightarrow{AD}=$（　　）

A. $\frac{1}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{6}{7}\overrightarrow{AC}$　　B. $\frac{6}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{7}\overrightarrow{AC}$

C. $\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$　　D. $\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

7. 已知抛物线 $x^2=2py\ (p>0)$ 上两点 A,B 满足 $|AB|=12$. 若线段 AB 的中点 M 的纵坐标的最小值为 4，则 $p=$（　　）

A. 2　　B. 4

C. 5　　D. 6

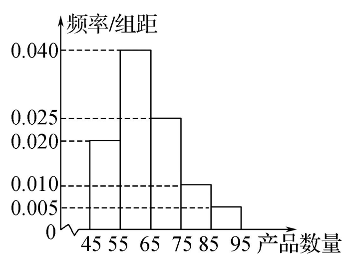
8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}4^x, & x\geqslant a,\\ -2\log_2 x, & 0<x<a.\end{cases}$ 若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在最小值，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $[1,+\infty)$　　B. $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

C. $(0,1]$　　D. $\left(0,\frac{1}{2}\right]$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 为了了解某种新产品的加工情况，并设定工人每天加工该产品的最少数量，相关部门从工厂随机抽查了 100 名工人在某天内加工该产品的数量. 现将这些观测数据进行适当分组后（每组为左闭右开的区间），绘制出如图所示的频率分布直方图，则（　　）



A. 样本观测数据的极差不大于 50

B. 样本观测数据落在区间 $[65,75)$ 上的频率为 0.025

C. 样本观测数据的平均数大于中位数

D. 若将工人每天加工产品的最少数量设为 55，估计 80% 的工人能完成任务

10. 已知 S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，满足 S_3,S_9,S_6 成等差数列，则（　　）

A. a_2,a_5,a_8 成等比数列

B. a_2,a_8,a_5 成等差数列

C. S_2,S_5,S_8 成等比数列

D. S_2,S_8,S_5 成等差数列

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，若存在常数 T 与 H，且 $T>0$，使得任意 $x\in\mathbf{R}$，恒有 $f(x+T)=f(x)+H$，则称函数 $f(x)$ 是广义周期函数. 下列说法正确的有（　　）

A. 一次函数 $f(x)=kx+b$（k,b 为常数）是广义周期函数

B. 若 $f(x)$ 是广义周期函数，则存在实数 k，使得 $f(x)-kx$ 是周期函数

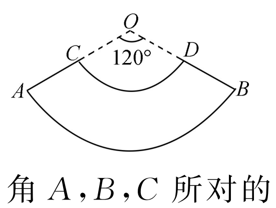
C. 若 $f(x)$ 的图象有两个不同的对称中心，则 $f(x)$ 是广义周期函数

D. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是广义周期函数，则 $f(x)+g(x)$ 也是广义周期函数

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知长为 2 的线段 AB 的两个端点 A 和 B 分别在 x 轴和 y 轴上滑动，则线段 AB 的中点的轨迹方程是________.

13. 如图，将一个圆心角为 120° 的扇形纸板 OAB 剪掉扇形 OCD，得到扇环 $ABDC$，现将扇环 $ABDC$ 围成一个圆台. 若 $OA=2OC=6$，则该圆台的体积为________.



14. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且外接圆的半径 $R=5$，则 $\frac{abc}{a^2+b^2+2c^2}$ 的最大值为________.

巧解三角形中的取值范围问题

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）

甲同学计划去参观某景点，但门票需在网上预约. 该同学从第一天开始，每天在规定的预约时间段开始预约，若预约成功，便停止预约；若连续预约三天都没成功，则放弃预约. 假设该同学每天预约门票成功的概率均为 0.7.

(1) 求甲同学到第三天才预约成功的概率；

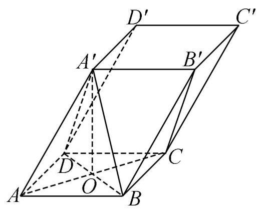
(2) 记 X 为甲同学预约门票的天数，求 X 的分布列和期望 $E(X)$.

16.（本小题满分 15 分）

如图，在平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，$AB=AD=2$，$\angle A'AB=\angle A'AD$ 且 $A'B\perp AC$，设 AC 与 BD 相交于点 O.

(1) 求证：$A'O\perp$ 平面 $ABCD$；

(2) 若 $AA'=3$，且 $\angle BAD=60°$，求直线 $A'B$ 与平面 $A'B'CD$ 所成角的正弦值.



17.（本小题满分 15 分）

已知函数 $f(x)=e^{ax}\ln x$，其中 $a>0$.

(1) 若 $y=f(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积为 $\frac{e}{2}$，求 a 的值；

(2) 若 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极小值点，求证：$f(x_0)<-e$.

18.（本小题满分 17 分）

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点为 A，焦距为 $2\sqrt{3}$，且离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 直线 l 与椭圆 C 交于 M，N 两点，点 P 为 $\triangle AMN$ 的外心.

① 若 $\triangle AMN$ 为等边三角形，求点 P 的坐标；

② 若点 P 在直线 $x=-\frac{1}{3}$ 上，求点 A 到直线 l 的距离的取值范围.

19.（本小题满分 17 分）

已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=q^n(q\neq 0)$. 对于集合 $T\subseteq \mathbf{N}^*$，定义 S_T：若 $T=\varnothing$，则 $S_T=0$；若 $T=\{t_1,t_2,\cdots,t_k\}$，则 $S_T=a_{t_1}+a_{t_2}+\cdots+a_{t_k}$.

(1) 若 $q=2$，$S_T=26$，求集合 T；

(2) 若 $q=2$，集合 $A,B\subseteq \mathbf{N}^*$，且 $S_A+S_B=2^{10}$，求 $A\cap B$ 中元素个数的可能值；

(3) 若 $0<q<\frac{1}{2}$，集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n\subseteq \mathbf{N}^*$，对任意的 $i,j\in \mathbf{N}^*$，$1\leqslant i<j\leqslant n$，满足 $A_i\cap A_j=\varnothing$，且 $S_{A_1}>S_{A_2}>\cdots>S_{A_n}>0$，求证：$\sum_{k=1}^{n}\frac{S_{A_k}}{S_{A_1}}<\frac{1-q}{1-2q}$.

广东省东莞市、揭阳市、韶关市2025届
高三第一学期期末教学质量检查

（满分150分，考试时间120分钟）

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{-1,0,2,3,4\}$，$B=\{x\mid 2^x<9\}$，则 $\complement_A(A\cap B)=$ （　　）

A. $\{-1\}$　　B. $\{4\}$

C. $\{-1,0,2,3\}$　　D. $\{0,2,3,4\}$

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},1)$，$\boldsymbol{b}=(0,m)$. 若 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，则 $m=$ （　　）

A. -2　　B. 2　　C. 4　　D. -4

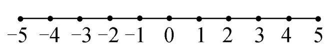
3. 在复平面内，点 $Z(3,-4)$ 对应的复数为 z，则 $\left|\dfrac{1+2i}{z}\right|=$ （　　）

A. $\dfrac{1}{25}$　　B. $\dfrac{1}{5}$　　C. $\dfrac{2}{5}$　　D. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 若 $S_3=S_{10}$，$a_3+a_{10}=2$，则数列 $\{a_n\}$ 的公差为 （　　）

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

5. 如图，一个质点在随机外力的作用下，从原点0出发，每次等可能地向左或向右移动一个单位长度，共移动4次，则质点位于原点左侧的概率为（　　）



A. $\dfrac{5}{16}$　　B. $\dfrac{1}{16}$　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

6. 方程 $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)-\cos x=0$ 在 $x\in[0,4\pi]$ 上的解的个数为 （　　）

A. 10　　B. 9　　C. 8　　D. 4

7. 已知 F_1，F_2 分别为双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，过点 F_2 作双曲线 C 的两条渐近线的平行线分别交两条渐近线于 A，B 两点. 若 $\triangle AF_1B$ 为等腰直角三角形，则双曲线 C 的离心率为 （　　）

A. 2　　B. $\sqrt{5}$　　C. 3　　D. $\sqrt{10}$

8. 设函数 $f(x)=(e^x-a)\ln(x-2b)$. 若 $f(x)\geqslant 0$，则 ab 的最小值为 （　　）

A. $-\dfrac{1}{e}$　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. 0　　D. e

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.

9. 已知圆台的上、下底面半径分别为1，3，母线长为4，则下列说法正确的有 （　　）

A. 圆台的侧面积为 16π

B. 圆台的体积为 $26\sqrt{3}\pi$

C. 母线与底面所成的角为 $60°$

D. 存在相互垂直的母线

10. 某同学投掷一枚骰子（一种六个面上分别标有1，2，3，4，5，6个点的正方体玩具）5次，并将每次向上的点数记录下来，计算出平均数和方差. 若这5个点数的平均数为2，方差小于4，则关于这5个点数，下列说法正确的有 （　　）

A. 极差小于4

B. 一定不会出现6

C. 众数可能为1

D. 中位数可能为3

11. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，若 $f(x)$ 为奇函数，$f(2)=-f(1)\neq 0$，且对任意 $x,y\in\mathbf{R}$，$f(x+y)=f(x)f'(y)+f'(x)f(y)$，则下列结论正确的有 （　　）

A. $f'(1)=-\dfrac{1}{2}$　　B. $f(9)=0$

C. $\sum\limits_{k=1}^{2024}f(k)=1$　　D. $\sum\limits_{k=1}^{2024}f'(k)=-1$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12. 已知 M 是抛物线 C：$y^2=4x$ 上一点，F 是抛物线 C 的焦点，O 为坐标原点. 若 $|MF|=2$，则 $|MO|=$________.

13. 已知 $\sin(\alpha-\beta)=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$，$\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}=\dfrac{3}{4}$，则 $\sin(\alpha+\beta)=$________.

14. 甲、乙、丙、丁4人相互做传球训练，第一次由甲将球传出，每次传球时，传球者都等可能地将球传给另外三个人中的任何一人，经过两次传球后，球在乙手中的概率为________；经过 n 次传球后，球在甲手中的概率 $P_n=$________（用含有 n 的式子表示）.

概率中的马尔科夫链

四、解答题：本题共5小题，共77分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分13分）

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$\sin 2C=\dfrac{1}{2}\sin C$.

(1) 求 $\sin C$ 的值；

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$，且 $a+b=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}c$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

16.（本小题满分15分）

已知函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{a}{x}-a$.

(1) 当 $a=2$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

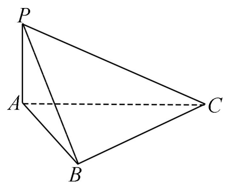
(2) 若函数 $f(x)$ 有极小值，且 $f(x)$ 的极小值小于 $1-a^2$，求实数 a 的取值范围.

17.（本小题满分 15 分）

如图，$PA\perp$平面 ABC，平面 $PAB\perp$平面 PBC.

(1) 求证：$BC\perp$平面 PAB；

(2) 若 $AB=BC=2$，且平面 PAC 与平面 PBC 的夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{10}$，求 PA 的长.



18.（本小题满分 17 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2，下顶点为 A，离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，P，Q 是椭圆 C 上的动点，且当 $PF_1\perp F_1F_2$ 时，$|PF_1|=1$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 若$\angle PAQ$ 的平分线经过点 F_1.

① 求证：直线 PQ 恒过定点；

② 求$\triangle APQ$ 面积的最大值.

19.（本小题满分 17 分）

记数列$\{a_n\}$前 k 项的最小值为 b_k，称数列$\{b_n\}$为$\{a_n\}$的“M 数列”.

(1) 若 $a_n=(n-4)\cdot 3^n$，求由数列$\{a_n\}$的“M 数列”$\{b_n\}$的所有项组成的集合；

(2) 若数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都只有 4 项，$\{b_n\}$是$\{a_n\}$的“M 数列”，满足 $a_k\in\{1,2,3,4\}(k=1,2,3,4)$，且存在 $i\in\{1,2,3,4\}$，使得 $b_i=1$，求符合条件的数列$\{b_n\}$的个数；

(3) 若 $a_n=n\cos\frac{(n+1)\pi}{2}$，$\{a_n\}$的“$M$ 数列”为$\{b_n\}$，记 $S_n=|b_1|+|b_2|+\cdots+|b_n|$，从 $S_1,S_2,S_3,\cdots,S_{4n}(n\geqslant 3)$中任取 3 个，记其中能被 2 整除，但不能被 4 整除的个数为 X，求 $E(X)$.

江苏省南京市、盐城市 2025 届高三第一学期期末调研测试

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）

答案见 P44

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $S=(-1,1)$，集合 $T=\{y\mid y=\sin x\}$，则 $S\cup T=$ （　　）

A. $\varnothing$　B. S　C. T　D. $\mathbf{R}$

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,m)$，$\boldsymbol{b}=(2,-1)$. 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则实数 m 的值是 （　　）

A. -2　B. 2　C. $-\frac{1}{2}$　D. $\frac{1}{2}$

3. 设 a 为实数，则“$a<1$”是“$(a-1)(a-2)>0$”的 （　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 在 $(1+\sqrt[3]{3}x)^8$ 的展开式中，系数为整数的项数是 （　　）

A. 9　B. 4　C. 3　D. 2

5. 若函数 $f(x)=x^2-2x\sin\alpha+1$ 有零点，则 $\cos 2\alpha$ 的取值集合为 （　　）

A. $\{-1,1\}$　B. $\{0\}$　C. $\{1\}$　D. $\{-1\}$

6. 设函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$. 若 $f(x)$ 的图象经过点 $(0,1)$，且 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上恰有 2 个零点，则实数 ω 的取值范围是 （　　）

A. $\left[\frac{5}{3},+\infty\right)$　B. $\left[\frac{11}{6},\frac{17}{6}\right)$

C. $\left[\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right)$　D. $\left[\frac{11}{6},+\infty\right)$

7. 第 15 届中国国际航空航天博览会于 2024 年 11 月 12 日至 17 日在珠海举行. 本届航展规模空前，首次打造“空、海、陆”一体的动态演示新格局，尽显逐梦长空的中国力量. 航展共开辟了三处观展区，分别是珠海国际航展中心、金凤台观演区、中国航展无人机无人船演示区. 甲、乙、丙、丁四人相约去参观，每个观展区至少有 1 人，每人只参观一个观展区. 在甲参观珠海国际航展中心的条件下，甲与乙不到同一观展区的概率为 （　　）

A. $\frac{5}{6}$　B. $\frac{3}{4}$　C. $\frac{2}{3}$　D. $\frac{1}{2}$

8. 已知 F_1,F_2 是椭圆 Ω 的两个焦点，P 是椭圆 Ω 上一点，$\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的圆心为 Q. 若 $5\overrightarrow{QF_1}+3\overrightarrow{QF_2}+3\overrightarrow{QP}=\mathbf{0}$，则椭圆 Ω 的离心率为 （　　）

A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{2}{5}$　C. $\frac{3}{7}$　D. $\frac{3}{8}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 某体育器材厂生产一批篮球，设单个篮球的质量为 X（单位：g）. 若 $X\sim N(600,\sigma^2)$，其中 $\sigma>0$，则 （　　）

A. $P(X<600)=\frac{1}{2}$

B. $P(592<X<598)<P(602<X<606)$

C. $P(X<595)=P(X>605)$

D. σ 越小，$P(X<598)$ 越大

10. 设 z_1,z_2 为复数，则下列说法正确的有 （　　）

A. $|z_1|+|z_2|=|z_1+z_2|$

B. $\overline{z_1}+\overline{z_2}=\overline{z_1+z_2}$

C. 若 $|z_1|=|z_2|$，则 $z_1^2=z_2^2$

D. 若 $z_1^2<0$，则 z_1 为纯虚数

11. 已知曲线 $C:x^3+y^3=1$，则 （　　）

A. 曲线 C 关于直线 $y=x$ 对称

B. 曲线 C 关于原点对称

C. 曲线 C 在直线 $x+y=0$ 的上方

D. 曲线 C 与坐标轴围成的封闭图形的面积大于 $\frac{\pi}{4}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 函数 $f(x)=x^2+\ln x$ 的图象在点 $(1,1)$ 处的切线的斜率为________.

13. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是平行四边形，点 E 满足 $\overrightarrow{PE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PD}$. 设三棱锥 $P-ACE$ 和四棱锥 $P-ABCD$ 的体积分别为 V_1 和 V_2，则 $\frac{V_1}{V_2}$ 的值为________.

14. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差不为 0. 若在 $\{a_n\}$ 的前 100 项中随机抽取 4 项，则这 4 项按原来的顺序仍然成等差数列的概率为________（用最简分数作答）.

等差数列子列与概率综合问题

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）

在 $\triangle ABC$ 中，$AB=6$，$BC=5$.

(1) 若 $C=2A$，求 $\sin A$ 的值；

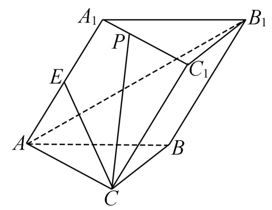
(2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，$\cos A=\frac{9}{16}$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

16.（本小题满分 15 分）

如图，在所有棱长都为 2 的三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，E 是棱 AA_1 的中点，$AB_1\perp CE$.

(1) 求证：平面 $A_1ABB_1\perp$ 平面 ABC；

(2) 若 $\angle A_1AB=\frac{\pi}{3}$，点 P 满足 $\overrightarrow{A_1C_1}=3\overrightarrow{A_1P}$，求直线 CP 与平面 A_1ABB_1 所成角的正弦值.



17.（本小题满分 15 分）

已知 F_1,F_2 分别为双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，点 F_1 到双曲线 E 的渐近线的距离为 $2\sqrt{2}$，A 为双曲线 E 的右顶点，且 $|AF_1|=2|AF_2|$.

(1) 求双曲线 E 的标准方程；

(2) 若四边形 $ABCD$ 为矩形，其中点 B,D 在双曲线 E 上，求证：直线 BD 过定点.

18.（本小题满分 17 分）

设函数 $f(x)=a^x+ka^{-x}(k\in\mathbf{R},a>0$ 且 $a\neq1)$.

(1) 当 $k=4$ 时，求 $f(x)$ 的最小值.

(2) 函数 $f(x)$ 的图象是否有对称中心？若有，请求出；若没有，请说明理由.

(3) 当 $k=0$ 时，$f(x)\leqslant\frac{1}{1-2x}$ 在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ 上恒成立，求实数 a 的取值集合.

函数中心对称与导数中的恒成立问题

19.（本小题满分 17 分）

若数列 $\{a_n\}$ 满足：对任意 $n\in\mathbf{N}^*(n\geqslant3)$，总存在 $i,j\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_n=a_ia_j(i\neq j,i<n,j<n)$，则称 $\{a_n\}$ 是融积数列.

(1) 判断数列 $\{e^{2n}\}$ 是否为融积数列，并说明理由；

(2) 若等差数列 $\{a_n\}$ 是融积数列，求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(3) 若融积数列 $\{a_n\}$ 单调递增，$a_1=2,a_2=8$，求使 $a_n=2^{123}$ 成立的 n 的最值.

浙江省宁波市 2025 届高三第一学期模拟考试

(满分 150 分,考试时间 120 分钟)

答案见 P51

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $A=\{-2,0,1\}$,$B=\{y\mid y=x^2,x\in A\}$,则 $A\cup B=$ ( )

A. $\{-2,0,1\}$　B. $\{0,1,4\}$

C. $\{0,1\}$　D. $\{-2,0,1,4\}$

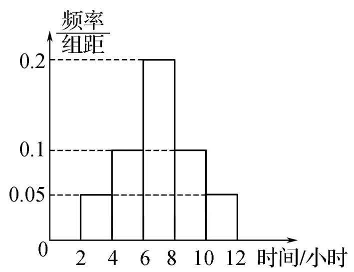
2. 复数 z 满足 $z=\dfrac{5}{\mathrm{i}-2}$,则 $|z|=$ ( )

A. 1　B. 2　C. $\sqrt{5}$　D. 5

3. 若向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$,$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 $|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|=$ ( )

A. $\sqrt{3}$　B. $\sqrt{7}$　C. $\sqrt{10}$　D. $\sqrt{13}$

4. 研究小组为了了解高三学生自主复习情况,随机调查了 1000 名学生的每周自主复习时间,按照时长(单位:小时)分成 $[2,4)$,$[4,6)$,$[6,8)$,$[8,10)$,$[10,12]$ 这五组,得到如图所示的频率分布直方图,则样本数据的第 60 百分位数的估计值是 ( )



A. 7　B. 7.5　C. 7.8　D. 8

5. 已知圆台的高为 2,体积为 14π,两底面圆的半径比为 $1:2$,则母线和轴的夹角的正切值为 ( )

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　C. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　D. $\sqrt{3}$

6. 已知椭圆 C 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,过上顶点 A 作直线 AF_2 交椭圆于另一点 B. 若 $|AB|=|F_1B|$,则椭圆 C 的离心率为 ( )

A. $\dfrac{1}{3}$　B. $\dfrac{1}{2}$　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

7. 不等式 $(x^2-ax-1)(x-b)\geqslant 0$ 对任意 $x>0$ 恒成立,则 a^2+b^2 的最小值为 ( )

A. $2\sqrt{2}-2$　B. 2

C. $2\sqrt{2}$　D. $2\sqrt{2}+2$

8. 设 $a\in\mathbf{R}$,函数 $f(x)=\begin{cases}\sin(2\pi x-2\pi a), & x<a,\\ |x-a-1|-3a+6, & x\geqslant a.\end{cases}$ 若 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内恰有 6 个零点,则 a 的取值范围是 ( )

A. $\left(2,\dfrac{7}{2}\right]$　B. $(2,3]$

C. $\left(2,\dfrac{7}{3}\right]\cup\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{7}{2}\right]$　D. $\left(2,\dfrac{7}{3}\right]\cup\left(\dfrac{5}{2},3\right]$

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

9. 已知数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 都是正项等比数列,则 ( )

A. 数列 $\{a_n+b_n\}$ 是等比数列

B. 数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ 是等比数列

C. 数列 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ 是等比数列

D. 数列 $\{a_n^{b_n}\}$ 是等比数列

10. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-a\ln x$,则 ( )

A. $f(x)$ 的图象过定点

B. 当 $a=1$ 时,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

C. 当 $a=1$ 时,$f(x)>2$ 恒成立

D. 存在 $a>0$,使得 $f(x)$ 的图象与 x 轴相切

11. 已知曲线 C:$(x^2+y^2-1)^3-7\sin^2 x+7\cos^2 y=6$,则下列说法正确的是 ( )

含三角形式的曲线方程

A. 曲线 C 过原点 O

B. 曲线 C 关于直线 $y=x$ 对称

C. 曲线 C 上存在一点 P,使得 $|OP|=1$

D. 若 $P(x,y)$ 为曲线 C 上一点,则 $|x|+|y|<3$

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. 已知函数 $f(x)=3^x$,则 $f(\log_3 2)=$________.

13. 已知抛物线 C:$y^2=4x$ 的焦点为 F,P 为抛物线 C 上一点,且 $|PF|=3$,O 为坐标原点,则 $S_{\triangle OPF}=$________.

14. 一个盒子中装有标号为 1,2,3,4,5 的五个大小质地完全相同的小球. 甲、乙两人玩游戏,规则如下:第一轮,甲先从盒子中不放回地随机取两个球,乙接着从盒子中不放回地随机取一个球,若甲抽取的两个小球数字之和大于乙抽取的小球数字,则甲得 1 分,否则甲不得分;第二轮,甲、乙从盒子中剩余的两个球中依次不放回地随机取一个球,若甲抽取的小球数字大于乙抽取的小球数字,则甲得 1 分,否则甲不得分. 在两轮游戏中,甲共获得 2 分的概率为________.

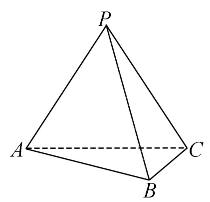
四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

如图,在三棱锥 $P-ABC$ 中,侧面 PAC 是边长为 2 的等边三角形,$AB=\sqrt{3}$,$PB=2$,$\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$.

(1) 求证:平面 $PAC\perp$平面 ABC;

(2) 求平面 PAB 与平面 PAC 的夹角的余弦值.



16. (本小题满分 15 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,且满足 $a_{2n}=2a_n+1$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 若 $a_1=1$,求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $\dfrac{5}{b_2}-\dfrac{1}{b_1}=\dfrac{3}{4}$,且数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=(3n-4)\cdot 2^{n+1}+8$,求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

17.（本小题满分 15 分）

已知$\left(3,\frac{5}{2}\right)$是双曲线$E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$上一点，双曲线$E$的渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$.

(1) 求双曲线E的方程；

(2) 直线l过点$A(1,1)$，且与双曲线E的两支分别交于P,Q两点，若$\frac{|AP|\cdot|AQ|}{|PQ|}=\frac{19\sqrt{10}}{20}$，求直线$l$的斜率.

18.（本小题满分 17 分）

已知函数$f(x)=\sqrt{1+2ax^2}-ax\sin x$.

(1) 判断$f(x)$的奇偶性；

(2) 若$a=-\frac{1}{2}$，求证：$f(x)\leqslant 1$；

(3) 若存在$x_0\in(0,\pi)$，使得对任意$x\in(0,x_0)$，均有$f(x)<1$，求正实数a的取值范围.

19.（本小题满分 17 分）

开启某款保险柜需输入四位密码$\overline{a_1a_2a_3x_s}$，其中$\overline{a_1a_2a_3}$为用户个人设置的三位静态密码（每位数字都是 0～9 中的一个整数），x_s是根据开启时收到的动态校验钥匙s（s为 1～5 中的一个随机整数）计算得到的动态校验码. x_s的具体计算方式：x_s是$M=a_1\cdot s^3+a_2\cdot s^2+a_3\cdot s$的个位数字. 例如：若静态密码为$\overline{301}$，动态校验钥匙$s=2$，则$M=3\times2^3+0\times2^2+1\times2=26$，从而动态校验码$x_2=6$，进而得到四位开柜密码为$\overline{3016}$.

(1) 若用户最终得到的四位开柜密码为$\overline{2024}$，求所有可能的动态校验钥匙s.

(2) 若三位静态密码为随机数且等可能出现，动态校验钥匙$s=5$，求动态校验码x_s的概率分布列.

(3) 若三位静态密码为随机数且等可能出现，动态校验钥匙$s=i(1\leqslant i\leqslant5,i\in\mathbf{N})$的概率为$p_i$，其中$p_i$是互不相等的正数. 记得到的动态校验码$x_s=k(0\leqslant k\leqslant9,k\in\mathbf{N})$的概率为$Q_k$，试比较$Q_0$与$Q_1$的大小.

海南省海口市 2025 届高三年级调研考试

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）

答案见 P59

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数 $z=\frac{-2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，则复数 z 的虚部为（　　）

A. 1　　B. -1　　C. i　　D. $-\mathrm{i}$

2. 下列各式中，值为 $\frac{1}{2}$ 的是（　　）

A. $\cos^2 30°-\sin^2 30°$　　B. $1-2\cos^2 30°$

C. $2\sin 30°\cos 30°$　　D. $\frac{\tan 22.5°}{1+\tan^2 22.5°}$

3. 已知直线 a,b 和平面 α 满足 $a/\!/\alpha$，$b\not\subset\alpha$，则“$a/\!/b$”是“$b/\!/\alpha$”的（　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 已知函数 $f(x)=\log_a(a^x+b)$（$a>0$，且 $a\neq1$）的值域为 $\mathbf{R}$，则实数 b 的取值范围是（　　）

A. $(0,+\infty)$　　B. $[0,+\infty)$

C. $(-\infty,0)$　　D. $(-\infty,0]$

5. 随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(0,4)$，则下列关系正确的是（　　）

A. $P(X\geqslant1)>P(Y\geqslant2)$

B. $P(X\geqslant1)<P(Y\geqslant2)$

C. $P(|X|\leqslant1)>P(|Y|\leqslant1)$

D. $P(|X|\leqslant1)<P(|Y|\leqslant1)$

6. 已知 O 是平行四边形 $ABCD$ 所在平面内一点，且 $AB=2$，$AD=1$，则有（　　）

A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$

B. $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$

C. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=3$

D. $\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2=10$

7. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点到准线的距离为 2，直线 l 过抛物线的焦点 F 交抛物线 C 于 A,B 两点，且 $|AB|=6$，点 A 关于原点的对称点为 D，则 $k_{DB}\cdot k_{AB}=$（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. 2　　D. 1

8. 已知曲线 $f(x)=x^3-3x^2$ 的对称中心为点 M，曲线 $f(x)$ 上两个不重合的动点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 关于点 M 对称，则 $x_1^2+x_2^2$ 的取值范围是（　　）

A. $[2,+\infty)$　　B. $(2,+\infty)$

C. $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$　　D. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 已知一组数据共有 6 个数，其中 5 个数为 2，1，4，1，0，则下列叙述正确的是（　　）

A. 这组数据的标准差一定不为 0

B. 这组数据的众数一定不为 3

C. 这组数据的中位数一定小于平均数

D. 这组数据的极差可能小于平均数

10. 在忽略阻尼等因素的理想情况下，音叉的振动是典型的简谐振动. 某音叉发出的纯音振动可以近似用三角函数表达，其位移 $x(t)$（单位：cm）随时间 t（单位：s）的变化可以用函数 $x(t)=\frac{1}{2}\sin(880\pi t+\varphi)\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 来描述，已知该音叉在 $t=\frac{1}{110}$ 时的位移为 $\frac{1}{4}$ cm. 下列选项正确的是（　　）

A. $\varphi=\frac{\pi}{6}$

B. 该音叉每秒钟往复振动 880 次

C. 该音叉离开平衡位置的最大距离为 $\frac{1}{2}$ cm

D. 该音叉在 $t=\frac{1}{1760}$ 时的位移为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ cm

11. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为棱 AB，AA_1 的中点，过直线 EF 的平面截该正方体外接球所得的截面面积为 S. 下列选项正确的是（　　）

正方体外接球的截面问题

A. A_1D 与 EF 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$

B. S 的最大值为 3π

C. 当 S 取最大值时，该截面与正方体表面的交线围成的图形是一个正六边形

D. S 的最小值为 $\frac{3\pi}{2}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知集合 $A=\{x|-2<x<1\}$，$B=\{x|x>m\}$. 若 $A\subseteq B$，则 m 的取值范围是________.

13. $\left(2x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中的常数项为________.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=a_n+3$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，则使 $a_n>2^{2025}$ 成立的 n 的最小值是________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=x^2+a\ln(x+1)$.

(1) 当 $a=\frac{1}{2}$ 时，求证：$f(x)$ 是增函数；

(2) 若曲线 $f(x)$ 在点 $A(0,f(0))$ 处的切线经过点 $B(1,-4)$，求函数 $f(x)$ 的最小值.

16.（本小题满分 15 分）

已知 a,b,c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A,B,C 的对边，$a^2+3b^2=3ab\cos C-3bc\cos A$，$a=6$.

(1) 求 bc 的最大值；

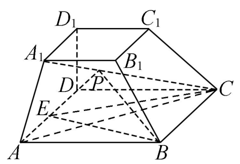
(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$，D 为 BC 的中点，求 $\sin\angle ADC$ 的值.

17.（本小题满分 15 分）

如图，四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的上、下底面分别是边长为 1 和边长为 2 的正方形，$D_1D\perp$ 平面 $ABCD$，$D_1D=1$，P 为线段 A_1C 上的动点.

(1) 当 $\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{PA_1}$ 时，求证：$DP\perp$ 平面 A_1AC；

(2) 设 E 为 AD 的中点，当二面角 $P-EB-C$ 的余弦值为 $\dfrac{2}{3}$ 时，求三棱锥 $P-EBC$ 的体积.



18.（本小题满分 17 分）

已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的实轴长为 2，P 为圆 $O:x^2+y^2=13$ 与双曲线 C 在第一象限内的交点，F_1,F_2 分别为双曲线 C 的左、右焦点，且 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=9$，过点 $N\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ 的直线 l 与双曲线 C 在第一象限交于 A,B 两点，且点 B 在点 A 上方.

(1) 求双曲线 C 的标准方程.

(2) 若 M 为线段 NF_2 的中点，直线 BM 交直线 PF_2 于点 D.

① 求证：直线 AD 平行于 x 轴；

② 若 $S_{\triangle BMN}=5S_{\triangle AMN}$，求直线 AB 的方程.

19.（本小题满分 17 分）

设 $n\in\mathbf{N}^*$，i,j,k 表示 $n,n+1,n+2$ 的任意一个排列，如 $n=2$ 时，i,j,k 可以表示 2，3，4，可以表示 2，4，3，也可以表示其他排列. 若数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_n>0$，对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_i+a_j>a_k$，则称数列 $\{a_n\}$ 是“T-数列”. 特别地，若集合 $A=\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$ 满足：对于一个含有 n 项的有限数列 $\{a_n\}$，$a_n\in A$，$a_q\neq a_t(1\leqslant q<t\leqslant n)$，必有 $\{a_n\}$ 是“T-数列”，则称集合 A 为“T-数列集”.

(1) 设集合 $A_n=\{i,i+1,i+2,\cdots,i+n,i+n+1\}(n,i\in\mathbf{N}^*)$，若对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，A_n 均为“T-数列集”，求 i 与 n 的关系.

(2) 设 $\{a_n\}$ 是含有 5 项且每项互不相等的数列，$a_i\in\{2,3,4,5,6\}$，$i=1,2,3,4,5$，求 $\{a_n\}$ 是“T-数列”的概率.

(3) 对于函数 $y=f(x)$ 和“T-数列”$\{a_n\}$，若 $\{f(a_n)\}$ 仍为“T-数列”，则称 $f(x)$ 为数列 $\{a_n\}$ 的一个“T-函数”.

① 设数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2025，公比为 $\dfrac{4}{5}$ 的等比数列，求证：数列 $\{a_n\}$ 是“T-数列”.

② 函数 $f(x)=\lg x$ 是①中数列 $\{a_n\}$ 的一个“T-函数”，则数列 $\{a_n\}$ 的项数 n 是否有要求？如果没有，请说明理由；如果有，请求出 n 的最大值.

（参考数据：$\lg 2\approx 0.30$，$\lg 3\approx 0.48$，$\lg 5\approx 0.70$）

山东省济南市 2025 届高三期末质量检测

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）

答案见 P63

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x^2\leqslant 4\}$，集合 $B=\{-3,-2,0,1,2,3\}$，则 $A\cap B=$ （　　）

A. $\{-2,0,1\}$

B. $\{-2,0,1,2\}$

C. $\{-3,-2,0,1,2\}$

D. $\{-2,0,1,2,3\}$

2. 已知复数 $z=\dfrac{1+2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}+\mathrm{i}$，则 z 的虚部为 （　　）

A. 2　　B. 1

C. 2i　　D. i

3. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，且 $|\boldsymbol{a}|=1$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=2$，则 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为 （　　）

A. 1　　B. -1

C. $-\boldsymbol{a}$　　D. $\boldsymbol{a}$

4. 已知一个圆锥的母线长为 $2\sqrt{3}$，高为 3，则该圆锥的表面积为 （　　）

A. 3π　　B. 6π

C. 9π　　D. 12π

5. 若 $(2x-1)^5=a_0+a_1(x-1)+\cdots+a_5(x-1)^5$，则 $a_1=$ （　　）

A. -10　　B. -1

C. 1　　D. 10

6. 当 $x\in[-2\pi,2\pi]$ 时，曲线 $y=\sin x$ 与 $y=|\mathrm{e}^x-1|$ 的交点个数为 （　　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

7. 已知随机变量 $\xi\sim N(2,\sigma^2)$，且 $P(\xi\leqslant a-3b)=P(\xi\geqslant b)$，则当 $b<x<\dfrac{a}{2}$ 时，$\dfrac{1}{a-2x}+\dfrac{1}{x-b}$ 的最小值为 （　　）

A. $\dfrac{1+\sqrt{2}}{4}$　　B. $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{4}$

C. $\dfrac{7}{4}$　　D. $\dfrac{9}{4}$

8. 已知函数 $f(x)=\sin\dfrac{\omega x}{2}\cos\dfrac{\omega x}{2}+\cos^2\dfrac{\omega x}{2}$，其中实数 $\omega>0$，存在 $x_0\in(0,2\pi)$，使得 $f(x)$ 在区间 $[0,x_0)$ 上有最大值 M，在区间 $[x_0,2\pi)$ 上有最小值 m，且 $M+m=1$，则 ω 的取值范围是 （　　）

A. $\left(\dfrac{3}{8},+\infty\right)$

B. $\left(\dfrac{5}{8},+\infty\right)$

C. $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

D. $\left(\dfrac{3}{4},+\infty\right)$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 已知变量 x,y 的样本数据如下表，根据最小二乘法，得经验回归方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+3.4$，则 （　　）

x	1	2	3	4	5
y	5	9	10	11	15

附：样本相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$，经验回归方程的斜率 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{r=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，截距 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

A. $\hat{b}=2.3$

B. 当 $x=5$ 时，对应样本点的残差为 0.6

C. 表中 y 的所有样本数据的第 70 百分位数是 11

D. 去掉样本点 $(3,10)$ 后，y 与 x 的样本相关系数不变

10. 已知函数 $f(x)$ 与其导函数 $g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，且 $f(x+1)$ 为奇函数，$g(x)+g(1-x)=4$，则 （　　）

A. $f(x)+f(2-x)=0$

B. $g(x)+g(x+1)=0$

C. $g(-3)+g(-4)=4$

D. $f(x)-f(1-x)=4x$

11. 在平面直角坐标系 xOy 中，给定 n 个点 $A_i(u_i,v_i)(i=1,2,\cdots,n)$，到这 n 个点的距离之和为定值 d 的点的轨迹，称为“多焦点曲线”，其轨迹方程记为 $f(A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n;d)=0$. 已知 $A_1(-1,0)$，$A_2(1,0)$，$A_3(0,\sqrt{3})$，则 （　　）

A. 多焦点曲线 $f(A_1;1)=0$ 所围成图形的面积为 π

B. 多焦点曲线 $f(A_1,A_2;2)=0$ 是焦点为 A_1,A_2 的椭圆

C. 若存在满足方程 $f(A_1,A_2,A_3;d)=0$ 的点 $M(x,y)$，则 $d\geqslant 2\sqrt{3}$

D. 若多焦点曲线 $f(A_1,A_2,A_3;4)=0$ 所围成图形的面积为 S，则 $\sqrt{3}<S<\dfrac{4\pi}{3}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知随机事件 A,B 相互独立，且 $P(A)=1-P(B)$，$P(A)\cdot P(B)=\dfrac{1}{8}$，则 $P(A\cup B)$ 的值为________.

13. 写出一个同时满足下列条件①②③的圆的标准方程：________.

① 圆心在 x 轴上；② 与 y 轴相切；③ 与圆 $x^2+y^2-2y-3=0$ 相交.

14. 从数列 $\{2^n\}$ 的前 100 项中，选出不同的 3 项，使其从小到大排列后，构成等比数列，则共有________种选法；所有符合要求的选法得到的递增等比数列的公比之和为________.

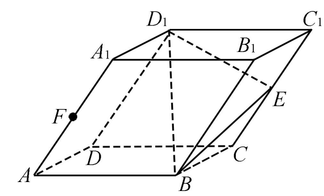
四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. （本小题满分 13 分）

如图，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，$AA_1=AB=2AD$，$\angle D_1DC=60^\circ$，平面 $DCC_1D_1\perp$ 平面 $ABCD$，E,F 分别为棱 CC_1,AA_1 的中点.

(1) 求证：B,E,D_1,F 四点共面；

(2) 求平面 BD_1E 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 夹角的余弦值.



16. (本小题满分 15 分)

记△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,已知$\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\cos B+\cos C}{2-\cos A}$.

(1) 求 A 的值;

(2) 若边 BC,AC 上的两条中线 AM,BN 相交于点 P,且 $2AM=\sqrt{21}\,c$,求∠MPN 的正切值.

17. (本小题满分 15 分)

已知 $f(x)=x\ln x$,$g(x)=x^2+ax$,其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1) 若 $f(x)\leqslant g(x)$ 恒成立,求 a 的取值范围;

(2) 判断方程 $af(x+1)=g(x)$ 解的个数,并说明理由.

导数中的零点个数问题

18. (本小题满分 17 分)

已知椭圆 C:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,左、右焦点分别是 F_1,F_2,过点 F_2 的直线与椭圆 C 交于 M,N 两点,△MF_1N 的周长为 $4\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 若 $OM\perp ON$,记线段 MN 的中点为 R.

① 求点 R 的坐标;

② 过点 R 的动直线 l 与椭圆 C 交于 P,Q 两点,PQ,PN 的中点分别是 S,T,求△RST 面积的最大值.

19. (本小题满分 17 分)

已知数列$\{a_n\}(a_n\in\mathbf{N}^*)$,满足 $a_1=1$,$a_n\leqslant a_{n+1}$,记 S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和.若有穷数列$\{b_{n,k}\}$ $(k=1,2,\cdots,S_n)$满足$(1+x^{a_1})(1+x^{a_2})\cdots(1+x^{a_n})=1+b_{n,1}x+b_{n,2}x^2+\cdots+b_{n,S_n}x^{S_n}(x\in\mathbf{R})$,则称数列$\{b_{n,k}\}$为$\{a_n\}$的生成数列.

(1) 若 $b_{n,k}=1(n\in\mathbf{N}^*,k=1,2,\cdots,S_n)$,求$\{a_n\}$的通项公式.

(2) 记集合$\{k\,|\,b_{n,k}\neq 0,k=1,2,\cdots,S_n\}$中元素的个数为 x_n.

① 若 $a_n=3^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$,求$\{x_n\}$的通项公式;

② 若$\dfrac{b_{n,1}+2b_{n,2}+\cdots+S_n\cdot b_{n,S_n}}{1+b_{n,1}+b_{n,2}+\cdots+b_{n,S_n}}\leqslant\dfrac{1}{2}(a_{n+1}-1)$,$x_n=S_n(n\in\mathbf{N}^*)$,且$\dfrac{a_1}{(a_1+1)(a_2+1)}+\dfrac{a_2}{(a_2+1)(a_3+1)}+\cdots+\dfrac{a_n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}<m$ 恒成立,求实数 m 的最小值.

江苏省南通、泰州、镇江 2025 届高三第一次调研测试

数学

(满分 150 分,考试时间 120 分钟)

答案见 P69

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$,$B=\{x\mid \ln x\geqslant 0\}$,则 $A\cap B=$ ( )

A. $[-1,2]$　B. $[1,2]$
C. $(0,2]$　D. $(0,1]$

2. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(3,1)$,$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=(-1,2)$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 ( )

A. $\frac{\pi}{6}$　B. $\frac{\pi}{4}$
C. $\frac{\pi}{3}$　D. $\frac{\pi}{2}$

3. 某正四棱锥的底面边长为 2,侧棱与底面的夹角为 $60°$,则该正四棱锥的体积为 ( )

A. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$　B. $\frac{8\sqrt{2}}{3}$
C. $\frac{5\sqrt{15}}{3}$　D. $\frac{4\sqrt{6}}{9}$

4. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,且 S_{n+1},S_n,S_{n+2} 成等差数列,则 $\frac{a_6}{a_4}=$ ( )

A. 1　B. 2　C. 4　D. 9

5. 在某个时期,某湖泊中的蓝藻每天以 $p\%$ 的增长率呈指数增长. 若增长为原来的 $\frac{5}{4}$ 倍,经过了 4 天,则增长为原来的 2 倍需要经过的天数约为(参考数据:$\lg 2\approx 0.3$) ( )

A. 6　B. 12　C. 16　D. 20

6. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(4-x)$,且 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上单调递增. 设 $a=f\left(\frac{7}{4}\right)$,$b=f\left(\frac{7}{2}\right)$,$c=f(-13)$,则 ( )

A. $a<b<c$　B. $c<b<a$
C. $b<a<c$　D. $b<c<a$

7. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,A 为双曲线 C 的左支上一点,AF_1 与双曲线 C 的一条渐近线平行. 若 $|AF_2|=|F_1F_2|$,则双曲线 C 的离心率为 ( )

A. 2　B. $2\sqrt{2}$　C. 3　D. $3\sqrt{3}$

8. 设函数 $f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$,若 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上有且只有 2 个零点,且对任意实数 a,$f(x)$ 在 $\left(a,a+\frac{\pi}{3}\right)$ 上存在极值点,则 ω 的取值范围是 ( )

A. $\left(\frac{7}{3},3\right)$　B. $\left(\frac{7}{3},3\right]$
C. $\left(3,\frac{13}{3}\right)$　D. $\left(3,\frac{13}{3}\right]$

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

9. 已知 z_1,z_2 是复数,则下列说法正确的是 ( )

A. 若 z^2 为实数,则 z 是实数
B. 若 z^2 为虚数,则 z 是虚数
C. 若 $z_2=\overline{z_1}$,则 z_1z_2 是实数
D. 若 $z_1^2+z_2^2=0$,则 $z_1z_2=0$

10. 口袋内装有大小、质地均相同,颜色分别为红、黄、蓝的 3 个球. 从口袋内无放回地依次抽取 2 个球,记“第一次抽到红球”为事件 A,“第二次抽到黄球”为事件 B,则 ( )

A. $P(A)=\frac{1}{3}$
B. $P(B|A)=\frac{1}{2}$
C. A 与 B 为互斥事件
D. A 与 B 相互独立

11. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2,E,F 分别是棱 AB,A_1D_1 的中点,则 ( )

A. $C_1F\perp$ 平面 DD_1E
B. 向量 $\overrightarrow{A_1E}$,$\overrightarrow{BF}$,$\overrightarrow{B_1D_1}$ 不共面
C. 平面 CEF 与平面 $ABCD$ 的夹角的正切值为 $\frac{2\sqrt{5}}{3}$
D. 平面 CEF 截该正方体所得的截面面积为 $\sqrt{29}$

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. 设 $(2x-1)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$,则 $a_1+a_3+a_5=$________.

13. 已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F,直线 l 的倾斜角为 $45°$,且 l 过点 F. 若 l 与抛物线 C 交于 A,B 两点,则以 AB 为直径的圆被 y 轴截得的弦长为________.

14. 将 1,2,3,4,5,6 随机排成一行,前 3 个数字构成三位数 a,后三个数字构成三位数 b. 记 $m=|a-b|$,则 m 的最小值为________,m 小于 100 的概率为________.

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

某学校举行运动会,为了了解学生参加跳绳比赛与学生的性别是否有关,对学生进行简单随机抽样,得到如下数据:

	女	男
未参加跳绳比赛	75	90
参加跳绳比赛	25	10

(1) 能否有 99% 的把握认为学生参加跳绳比赛与学生的性别有关?

(2) 为了进一步了解女生平时的运动情况,利用分层抽样的方法从这 100 人中抽取 12 人进行研究. 老师甲从这 12 人中随机选取 3 人,求至少有 1 人参加跳绳比赛的概率.

附:$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,其中 $n=a+b+c+d$.

$P(\chi^2\geqslant k)$	0.100	0.050	0.010	0.005	0.001
k	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

16.（本小题满分 15 分）

已知在$\triangle ABC$中，$\tan A=\frac{4}{3}$，$\sin(A-B)=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

（1）求 B；

（2）若 AD 为$\angle BAC$ 的平分线，$\triangle ABC$ 的面积为 14，求 AD 的长.

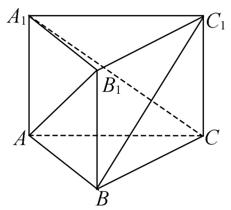
17.（本小题满分 15 分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB_1=BC_1=CA_1$，$BC_1\perp CA_1$.

（1）求证：三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是正三棱柱；

（2）求证：$AB_1\perp CA_1$；

（3）设 $AB_1\subset$平面 α，$BC_1/\!/$平面 α，若直线 BC_1 与平面 α 的距离为$\sqrt{3}$，求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接球的表面积.



立体几何中的外接球问题

18.（本小题满分 17 分）

已知函数 $f(x)=x^3+ax$ 的图象与 x 轴的三个交点为 A,O,B（O 为坐标原点）.

（1）讨论 $f(x)$的单调性；

（2）若函数 $g(x)=f(x)-2\ln\frac{1-x}{1+x}$有三个零点，求实数 a 的取值范围；

（3）若 $a\neq-1$，点 P 在 $y=f(x)$的图象上，且异于 A,O,B 三点，点 Q 满足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{QA}=0$，$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{QB}=0$，求$|OQ|$的最小值.

19.（本小题满分 17 分）

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，且经过点 $A\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 定义第 $n(n\in\mathbf{N}^*)$次操作为：经过椭圆 C 上点 A_n 作斜率为 k 的直线与椭圆 C 交于另一点 B_n，记点 B_n 关于 x 轴的对称点为 A_{n+1}. 若点 A_{n+1} 与点 B_n 重合，则操作停止；否则一直继续下去.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）若 A_1 为椭圆 C 的左顶点，经过 3 次操作后停止，求 k 的值；

（3）若 $k=-\frac{b}{a}$，A_1 是椭圆 C 上在第一象限与点 A 不重合的一点，求证：$\triangle A_nA_{n+1}A_{n+2}$ 的面积为定值.

重庆市2025届高三学业质量调研抽测(第一次)

(满分150分,考试时间120分钟)

答案见P75

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M=\{-1,3\}$,$N=\{x|\log_3 x\leqslant 1\}$,则 $M\cap N=$ ( )

A. $\varnothing$　　B. $\{-1\}$

C. $\{3\}$　　D. $\{-1,3\}$

2. 已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一条渐近线方程为$\sqrt{3}x-y=0$,则该双曲线的离心率为 ( )

A. $\sqrt{5}$　　B. 2

C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$

3. 有4名同学各掷骰子5次(骰子出现的点数可能为1,2,3,4,5,6),分别记录自己每次出现的点数,4位同学根据统计结果,对自己的试验数据分别做了如下描述,可以判断一定没有出现点数1的是 ( )

A. 平均数为3,中位数为4

B. 中位数为3,众数为5

C. 平均数为4,方差为1.2

D. 中位数为4,方差为1.6

4. 已知 a,b 是空间中的两条直线,α,β 是两个平面,则 ( )

A. 若 $a\subset\alpha,b\subset\beta$,则 a,b 是异面直线

B. 若 $a\subset\alpha,b\subset\alpha,a/\!/\beta,b/\!/\beta$,则 $\alpha/\!/\beta$

C. 若 $a\subset\alpha,b\subset\beta,\alpha/\!/\beta$,则 $a/\!/b$

D. 若 $a\perp\alpha,b\perp\beta,\alpha/\!/\beta$,则 $a/\!/b$

5. 某校数学建模兴趣小组收集了一组恒温动物体重W(单位:克)与心率f(单位:次/分)的对应数据$(W_i,f_i)(i=1,2,\cdots,8)$.根据生物学常识和散点图得出$f$与$W$近似满足$f=cW^k(c,k$为参数$)$,令$x_i=\ln W_i$,$y_i=\ln f_i$,计算得到$\bar{x}=7$,$\bar{y}=4$.由最小二乘法得到经验回归方程为$\hat{y}=\hat{b}x+6.8$,则$k$的值为 ( )

A. -0.4　　B. 0.4　　C. -0.2　　D. 0.2

6. 已知在平行四边形$ABCD$中,$\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$,$CE$与$BF$交于点$G$.若$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,则$\overrightarrow{AG}=$ ( )

A. $\dfrac{2}{5}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{5}\boldsymbol{b}$　　B. $\dfrac{2}{5}\boldsymbol{a}+\dfrac{3}{5}\boldsymbol{b}$

C. $\dfrac{3}{7}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{7}\boldsymbol{b}$　　D. $\dfrac{4}{7}\boldsymbol{a}+\dfrac{2}{7}\boldsymbol{b}$

7. 已知$a>0,b>0$,则使$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geqslant 4$成立的一个必要不充分条件是 ( )

A. $a^2+b^2=1$　　B. $a+b\geqslant 4ab$

C. $a+b=1$　　D. $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\geqslant 8$

8. 已知函数$y=f(x)$满足:① $y=f(-1-x)$是偶函数;② 在$(-\infty,-1]$上单调递增.若$x_1<0$,$x_2>0$且$x_1+x_2+2>0$,则$f(x_1)$与$f(x_2)$的大小关系是 ( )

A. $f(x_1)>f(x_2)$　　B. $f(x_1)<f(x_2)$

C. $f(x_1)=f(x_2)$　　D. 无法确定

二、选择题:本题共3小题,每小题6分,共18分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得6分,部分选对的得部分分,有选错的得0分.

9. 已知函数$f(x)=2\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$的最小正周期为$\dfrac{\pi}{2}$,则 ( )

A. $f(0)=1$

B. $\omega=2$

C. $f(x)$的单调递增区间为$\left[-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2},\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$

D. 将函数$f(x)$的图象向右平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位长度后,再将得到的图象上各点的横坐标伸长到原来的4倍,纵坐标不变,得到函数$g(x)$的图象,则$g(x)=-2\cos x$

10. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$,$a_n=a_{n+1}(1+3a_n)$,$n\in\mathbf{N}^*$,则 ( )

A. 数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是等差数列

B. $a_n=3n-2$

C. 若$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}=\dfrac{16}{49}$,则$n=16$

D. $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n=\dfrac{n(3n-1)}{2}$

11. 已知抛物线$C:y^2=4x$的焦点为F,过点F作两条互相垂直的直线l_1,l_2,l_1与抛物线C交于P,Q两点,l_2与抛物线C交于M,N两点,线段PQ的中点为G,线段MN的中点为H,则 ( )

抛物线的综合问题

A. 当直线l_1的斜率为$\sqrt{3}$时,$|PQ|=\dfrac{16}{3}$

B. 当$|PF|=2|QF|$时,$|MN|=36$

C. $|PQ|+|MN|$的最小值为18

D. $\triangle FGH$的面积的最小值为4

三、填空题:本题共3小题,每小题5分,共15分.

12. 若$\dfrac{3+b\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=a+b\mathrm{i}$($a,b$为实数,i为虚数单位),则$a+b=$________.

13. 酒驾是严重危害交通安全的违法行为.为了保障交通安全,根据国家有关规定:100 mL血液中酒精含量大于或者等于20 mg且小于80 mg认定为饮酒驾车,大于或等于80 mg认定为醉酒驾车.假设某驾驶员喝了一定量的酒后,其血液中的酒精含量上升到了0.6 mg/mL.如果停止喝酒以后,他血液中酒精含量会以每小时30%的速度减少,那么他至少经过________小时后才能驾驶(结果取整数,参考数据:$\lg 3\approx 0.48$,$\lg 7\approx 0.85$).

14. 已知各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$满足$a_7=a_6+2a_5$.若存在两项a_m,a_n,使得$\sqrt{a_ma_n}=16a_1$,则m^2+n^2的最小值为________.

四、解答题:本题共5小题,共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分13分)

在$\triangle ABC$中,内角A,B,C的对边分别为a,b,c,已知$b^2=ac$,且$\cos B=\dfrac{2}{3}$.

(1) 求$\dfrac{\sin B}{\sin A\sin C}$的值;

(2) 设$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{3}{2}$,求$a+c$的值.

16.（本小题满分 15 分）

已知曲线 $f(x)=ax^4\ln x+bx^4-c$ 在 $x=\mathrm{e}$ 处的切线方程为 $y=48\mathrm{e}^3x-39\mathrm{e}^4-c$，其中 a,b,c 为常数，e 为自然对数的底数.

(1) 试确定 a,b 的值；

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

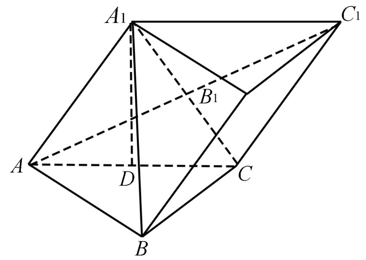
(3) 若对任意 $x>0$，不等式 $f(x)\geqslant -4c^2$ 恒成立，求 c 的取值范围.

17.（本小题满分 15 分）

如图，在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BA_1\perp AC_1$，$BC\perp CC_1$，$AC=BC=4$，点 A_1 在底面 ABC 上的射影恰为 AC 的中点 D.

(1) 求证：$BC\perp$平面 ACC_1A_1；

(2) 求二面角 $A-A_1B-C$ 的正弦值.



18.（本小题满分 17 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，其左焦点到点 $P(3,3)$ 的距离为 5 .

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 若直线 $l:y=kx+m$ 与椭圆 C 相交于 A,B （A,B 不是椭圆 C 的左、右顶点）两点，且以 AB 为直径的圆过椭圆 C 的左顶点，求证：直线 l 过定点，并求出该定点的坐标.

19.（本小题满分 17 分）

在某场乒乓球比赛中，甲、乙两名运动员进入了比赛决胜局，且在该局中的比分为 10：10，接下来比赛规则如下：两人轮流各发一个球，谁赢此球谁就获得 1 分，直到有一方得分超过对方 2 分时即可获得该局的胜利. 已知甲先发球，且甲此球取胜的概率为 0.6. 比赛既是实力的较量，也是心态的比拼，以后每球比赛，若上一球甲获胜则甲在下一球比赛中获胜的概率为 0.8，若上一球乙获胜则甲在下一球比赛中获胜的概率为 p $(0<p<1)$.

(1) 求甲以 12：10 的比分赢得比赛的概率；

(2) 若要使甲运动员以后每球比赛获胜的概率都大于 0.6，求 p 的取值范围；

(3) 若 $p=0.55$，设甲运动员在第 n 球比赛中获胜的概率为 P_n，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\frac{32}{|15P_n-11|}-4$，求证：$\frac{n}{4}-\frac{1}{4}<\frac{b_1}{b_2}+\frac{b_2}{b_3}+\frac{b_3}{b_4}+\cdots+\frac{b_n}{b_{n+1}}<\frac{n}{4}$.

（参考知识：当 $c\in(0,1)$ 时，若 $n\to+\infty$，则 $c^n\to 0$）

广东省深圳市2025届高三年级第一次调研考试

（满分150分，考试时间120分钟）

答案见P80

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 集合 $M=\{x\mid\sqrt{x}<2\}$，$N=\{-2,-1,0,1,2\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A. $\{0,1\}$　　B. $\{1,2\}$

C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{-1,0,1,2\}$

2. 已知 $z=\dfrac{1+2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$（i为虚数单位），则 $|z|=$（　　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$

C. 2　　D. 4

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,3)$，若 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})$，则 $\lambda=$（　　）

A. -2　　B. -1

C. 1　　D. 2

4. 已知 $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=3$，则 $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}=$（　　）

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{1}{2}$

C. 2　　D. 3

5. 已知函数 $f(x)$ 的周期为2，且在 $(0,1)$ 上单调递增，则 $f(x)$ 可以是（　　）

A. $f(x)=\sin\pi x$　　B. $f(x)=\left|\sin\dfrac{\pi}{2}x\right|$

C. $f(x)=\cos 2\pi x$　　D. $f(x)=\tan\pi x$

6. 已知双曲线 E 的中心为原点，焦点在 x 轴上，两条渐近线夹角为 $60°$，且点 $(1,1)$ 在双曲线 E 上，则双曲线 E 的离心率为（　　）

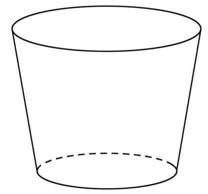
A. $\sqrt{3}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

C. 2　　D. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 或2

7. 已知曲线 $y=\mathrm{e}^{x-1}$ 与曲线 $y=a\ln x+a\,(a>0)$ 只有一个公共点，则 $a=$（　　）

A. $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$　　B. 1　　C. e　　D. e^2

8. 如图，已知圆台形水杯盛有水（不计厚度），杯口的半径为4，杯底的半径为3，高为6.5，当杯底水平放置时，水面的高度为水杯高度的一半，若放入一个半径为 r 的球（球被完全浸没），水恰好充满水杯，则 $r=$（　　）



A. 1.5　　B. 2　　C. 3　　D. 3.25

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．

9. 一组样本数据 (x_i,y_i)，$i\in\{1,2,3,\cdots,100\}$．其中 $x_i>1895$，$\sum\limits_{i=1}^{100}x_i=2\times10^5$，$\sum\limits_{i=1}^{100}y_i=970$，求得其经验回归方程为 $\hat{y}=-0.02x+\hat{a}_1$，残差为 $\hat{e}_i$．对样本数据进行处理：$x_i'=\ln(x_i-1895)$，得到新的数据 (x_i',y_i)，求得其经验回归方程为 $\hat{y}=-0.42x+\hat{a}_2$，其残差为 $\hat{u}_i$，$\hat{e}_i$，$\hat{u}_i$ 的分布如图所示，且 $\hat{e}\sim N(0,\sigma_1^2)$，$\hat{u}\sim N(0,\sigma_2^2)$，则（　　）

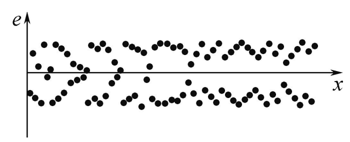


图1

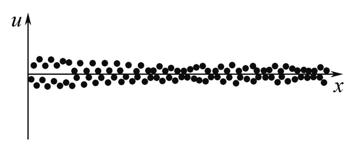


图2

A. 样本 (x_i,y_i) 负相关

B. $\hat{a}_1=49.7$

C. $\sigma_1^2<\sigma_2^2$

D. 处理后的决定系数变大

10. 已知函数 $f(x)=\sin x+\sin 2x$，则（　　）

A. $f(x)$ 为周期函数

B. 存在 $t\in\mathbf{R}$，使得 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=t$ 对称

C. $f(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{3\pi}{4}\right)$ 上单调递减

D. $f(x)$ 的最大值为2

11. 已知 $O(0,0)$，$A(a,0)$，$B(a,1)$，$C(0,1)$，$D(0,-1)$，其中 $a\neq0$．点 M，N 分别满足 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{ON}=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}$，其中 $0<\lambda<1$．若直线 CM 与直线 DN 交于点 P，则（　　）

A. 当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，直线 CM 与直线 DN 斜率乘积为 $-\dfrac{1}{a^2}$

B. 当 $a=-1$ 时，存在点 P，使得 $|DP|=2$

C. 当 $a=2$ 时，$\triangle PAC$ 面积的最大值为 $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

D. 若存在 λ，使得 $|DP|>2$，则 $a\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分．

12. $\left(2x+\dfrac{1}{x^2}\right)^6$ 的展开式中常数项是________（用数字作答）．

13. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1a_3=9$，$a_2+a_4=9$，则 $a_4=$________．

14. 某次考试共5道试题，均为判断题．计分的方法是：每道题答对的给2分，答错或不答的扣1分，每个人的基本分为10分．已知赵、钱、孙、李、周、吴6人的作答情况及前5个人的得分情况如下表，则吴的得分为________．

逻辑推理

题号＼人	赵	钱	孙	李	周	吴
1	√	√	×	×	√	√
2	×	√	×	√	√	√
3	√	×	×	√	×	×
4	√	×	×	×	√	×
5	×	×	√	√	√	√
得分	14	11	14	14	11	

四、解答题：本题共5小题，共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15.（本小题满分13分）

已知在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$c^2=a^2+b^2-ab$，$\cos 2B=\sin C$．

(1) 求 B；

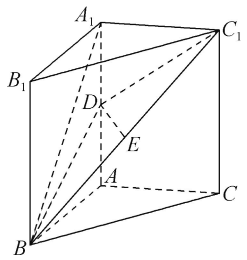
(2) 若 $b=1$，求 $\triangle ABC$ 的面积．

16.（本小题满分 15 分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AC=2\sqrt{3}$，$\angle BAC=120^\circ$，D 为 AA_1 的中点，E 为 BC_1 的中点.

(1) 求证：$DE\perp$ 平面 B_1BCC_1；

(2) 若 $BB_1=6$，求直线 A_1B 与平面 DBC_1 所成角的正弦值.



17.（本小题满分 15 分）

甲参加围棋比赛，采用三局两胜制，且每局比赛甲获胜的概率为 p $(0<p<1)$，输的概率为 $1-p$，每局比赛的结果是独立的.

(1) 当 $p=\dfrac{2}{3}$ 时，求甲最终获胜的概率.

(2) 为了增加比赛的趣味性，设置两种积分奖励方案. 方案一：最终获胜者得 3 分，失败者得 -2 分. 方案二：最终获胜者得 1 分，失败者得 0 分. 请讨论选择哪种方案，能使得甲获得积分的数学期望更大.

18.（本小题满分 17 分）

已知抛物线 $y^2=2x$，过点 $N(2,0)$ 作两条直线 l_1，l_2 分别交抛物线于点 A，B 和点 C，D（其中点 A，C 在 x 轴上方）.

(1) 当直线 l_1 垂直于 x 轴，且四边形 $ACBD$ 的面积为 $4\sqrt{5}$ 时，求直线 l_2 的方程；

(2) 当直线 l_1，l_2 的倾斜角互补时，直线 AC 与直线 BD 交于点 M，求 $\triangle MAB$ 的内切圆圆心的横坐标的取值范围.

19.（本小题满分 17 分）

已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足：a_1，a_2 为正整数，$a_n=|a_{n+1}-a_{n+2}|$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 若 $a_1=1$，$a_3=2$，求 a_4.

(2) 求证：“存在 $k\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_k=0$”是“$\{a_n\}$ 是周期为 3 的数列”的必要不充分条件.

(3) 若 $a_1\neq a_2$，是否存在数列 $\{a_n\}$，使得 $a_n<2025$ 恒成立？若存在，求出一组 a_1，a_2 的值；若不存在，请说明理由.

湖北省武汉市2025届高中毕业生二月调研考试

(满分150分,考试时间120分钟)

答案见P86

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$,$B=\{x\mid x^2-4x-5<0\}$,则 $A\cap B=$ ( )

A. $\{2,3,4,5\}$

B. $\{1,2,3\}$

C. $\{1,2,3,4\}$

D. $\{2,3,4\}$

2. 若复数 z 满足 $(z+\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})=5$,则 $|z|=$ ( )

A. $\sqrt{2}$ B. 1

C. 2 D. $\sqrt{5}$

3. 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,设 $\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$,$M$,$N$ 分别为 AB,CC_1 的中点,则 $\overrightarrow{MN}=$ ( )

A. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

B. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

C. $\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$

D. $\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

4. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,若 $S_{10}=0$,$S_6=2S_3-12$,则 $a_1=$ ( )

A. 6 B. 8

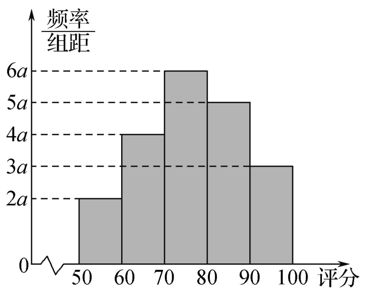
C. 10 D. 12

5. 有四对双胞胎共8人,从中随机选出4人,则其中恰有一对双胞胎的选法数为 ( )

A. 40 B. 48

C. 52 D. 60

6. 某批产品检验后的评分,由统计结果制成如图所示的频率分布直方图,则下列说法正确的是 ( )



A. $a=0.05$

B. 评分的众数估值为70

C. 评分的第25百分位数估值为67.5

D. 评分的平均数估值为76

7. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=f(x)+f(x+2)$,若 $f(1)=2$,$f(11)=3$,则 $f(2025)=$ ( )

A. 1 B. -1

C. 5 D. -5

8. 已知 O 为坐标原点,过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点的直线与该抛物线交于 A,B 两点,若 $|AB|=12$,且△OAB 的面积为 $4\sqrt{6}$,则 $p=$ ( )

A. 4 B. 3

C. $2\sqrt{6}$ D. $3\sqrt{2}$

二、选择题:本题共3小题,每小题6分,共18分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得6分,部分选对的得部分分,有选错的得0分.

9. 函数 $f(x)=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,则下列关于 $f(x)$ 的说法正确的是 ( )

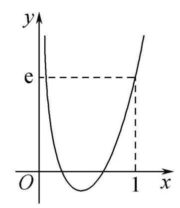
A. $f(x)$ 的最小正周期是 π

B. $f(x)$ 的最大值是2

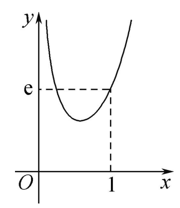
C. $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ 上单调递减

D. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{6},1\right)$ 中心对称

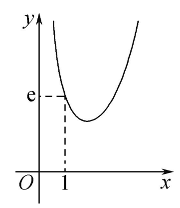
10. 已知 $a>0$ 且 $a\neq \mathrm{e}$,则函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-a\ln x$ 的图象可能是 ( )



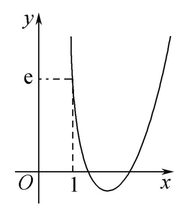
A



B



C



D

11. 已知 $n\in\mathbf{N}^*$,记 $|A|$ 为集合 A 中元素的个数,$\min(A)$ 为集合 A 中的最小元素.若非空数集 $A\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$,且满足 $|A|\leqslant\min(A)$,则称集合 A 为"n 阶完美集".记 a_n 为全部 n 阶完美集的个数,则下列说法正确的是 ( )

A. $a_4=7$

B. 将 n 阶完美集 A 中的元素全部加1,得到的新集合是 $(n+1)$ 阶完美集

C. 若 A 为 $(n+2)$ 阶完美集,$|A|>1$ 且 $n+2\in A$,则满足条件的集合 A 的个数为 $a_{n+1}-n$

D. 若 A 为 $(n+2)$ 阶完美集,$|A|>1$ 且 $n+2\notin A$,则满足条件的集合 A 的个数为 $a_{n+1}-n-1$

三、填空题:本题共3小题,每小题5分,共15分.

12. 若直线 $3x+2y=6$ 经过椭圆 $m^2x^2+n^2y^2=1$ 的两个顶点,则该椭圆的离心率为________.

13. 已知 $\tan\alpha\tan\beta=2$,$\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$,则 $\cos(\alpha+\beta)=$________.

14. 已知在四棱锥 $P-ABCD$ 中,$AB=AD=\sqrt{10}$,$CB=CD=5$,$\angle BAD=90^\circ$,$PB=4$,$PC=3$.若△PBC 内部一点 Q 满足四棱锥 $Q-ABCD$ 与三棱锥 $Q-PAD$ 的体积相等,则 PQ 长的最小值为________.

四、解答题:本题共5小题,共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分13分)

已知函数 $f(x)=x(a+\ln x)$,曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\mathrm{e},f(\mathrm{e}))$ 处的切线与直线 $y=4x-1$ 平行.求:

(1) a 的值;

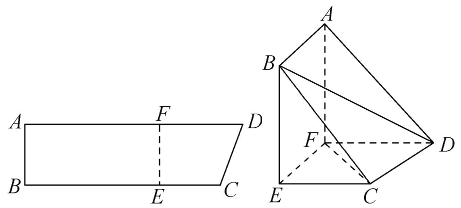
(2) $f(x)$ 的极值.

16.（本小题满分 15 分）

如图，在直角梯形 $ABCD$ 中，$BC \parallel AD$，$AB \perp AD$，$BC=8$，$AD=9$，$AB=2\sqrt{3}$，E 为线段 BC 上不与端点重合的一点，过点 E 作 AB 的平行线交 AD 于点 F，将矩形 $ABEF$ 翻折至与梯形 $ECDF$ 垂直，得到六面体 $ABCDEF$.

(1) 若 $CF \perp BD$，求 BE 的长；

(2) 求异面直线 BC 与 AD 所成角的余弦值的最小值.

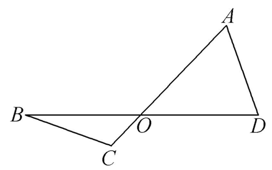


17.（本小题满分 15 分）

如图，$\triangle AOD$ 与 $\triangle BOC$ 存在对顶角 $\angle AOD=\angle BOC=\frac{\pi}{4}$，$AC=2$，$BD=2\sqrt{2}$，且 $BC=AD$.

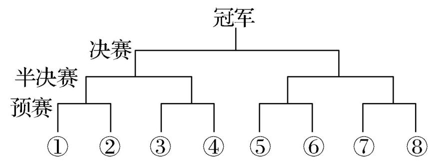
(1) 求证：O 为 BD 的中点；

(2) 若 $\sqrt{5}\sin 2A+\cos B=\sqrt{5}$，求 OC 的长.



18.（本小题满分 17 分）

有 A，B，C，D，E，F，G，H 八名运动员参加乒乓球赛事，该赛事采用预赛、半决赛和决赛三轮淘汰制决定最后的冠军. 八名运动员在比赛开始前随机抽签决定各自的位置编号. 已知 B～H 这七名运动员彼此间互相对决时的获胜概率均为 $\frac{1}{2}$，A 运动员与其他运动员对决时，A 获胜的概率为 $\frac{2}{3}$，每场对决没有平局，且结果相互独立. 求：



(1) 这八名运动员各自获得冠军的概率；

(2) B 与 A 对决过且最后获得冠军的概率；

(3) B 与 C 对决过且最后获得冠军的概率.

条件概率与全概率公式

19.（本小题满分 17 分）

已知双曲线 E：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一个顶点在直线 l：$y=x+1$ 上，且其离心率为 $\sqrt{5}$.

(1) 求双曲线 E 的标准方程.

(2) 若一条直线与双曲线恰有一个公共点，且该直线与双曲线的渐近线不平行，则定义该直线为双曲线的切线，定义该公共点为切线的切点. 已知点 T 在直线 l 上，且过点 T 恰好可作双曲线 E 的两条切线，设这两条切线的切点分别为 P，M.

① 设点 T 的横坐标为 t，求实数 t 的取值范围；

② 设直线 TP 和直线 TM 分别与直线 $x=-1$ 交于点 Q 和点 N，求证：直线 PN 和直线 MQ 的交点在定直线上.

（附：双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 以 (m,n) 为切点的切线方程为 $\frac{m}{a^2}x-\frac{n}{b^2}y=1$）

直线与双曲线的位置关系及定直线问题

江苏省南京市、盐城市2025届高三第一次模拟考试

(满分150分,考试时间120分钟)

答案见P90

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x\mid x^2-4\leqslant 0\}$,$B=\{x\mid x+a\leqslant 0\}$.若 $A\subseteq B$,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,2)$　　B. $(-\infty,2]$

C. $(-\infty,-2)$　　D. $(-\infty,-2]$

2. 已知复数 z 满足 $\frac{1}{z+\mathrm{i}}=\mathrm{i}$($\mathrm{i}$ 为虚数单位),则 $|z|=$ ( )

A. 4　　B. 2

C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

3. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 均为单位向量.若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 夹角的大小是 ( )

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

4. 某项比赛共有10个评委评分,若去掉一个最高分与一个最低分,则与原始数据相比,一定不变的是 ( )

A. 极差　　B. 第45百分位数

C. 平均数　　D. 众数

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列,公比为2,且 $a_1+a_2=3$.若 $a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{k+9}=2^{14}-2^4$,则正整数 k 的值是 ( )

A. 4　　B. 5

C. 6　　D. 7

6. 在锐角三角形 ABC 中,角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c.若 $b-2c=a\cos C-2a\cos B$,则 $\frac{c}{b}=$ ( )

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. 1　　D. 2

7. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点、右顶点分别为 F,A,过点 F 且倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$ 的直线分别交双曲线 C 的两条渐近线于点 M,N.若 $\triangle AMN$ 为等边三角形,则双曲线 C 的渐近线方程是 ( )

A. $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$

B. $y=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}x$

C. $y=\pm\sqrt{3}x$

D. $y=\pm\frac{4\sqrt{3}}{3}x$

8. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{a^{2x}+1}-ax^3$,$a>1$,则关于 x 的不等式 $f(x^2)+f(5x-6)>1$ 的解集是 ( )

A. $(-6,1)$　　B. $(2,3)$

C. $(-\infty,1)$　　D. $(2,+\infty)$

二、选择题:本题共3小题,每小题6分,共18分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得6分,部分选对的得部分分,有选错的得0分.

9. 已知 $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{4}$,$\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}$,则 ( )

A. $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{12}$

B. $\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{6}$

C. $\tan\alpha\tan\beta=-\frac{1}{3}$

D. $\sin 2\alpha\sin 2\beta=\frac{1}{12}$

10. 在边长为2的菱形 $ABCD$ 中,$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$,将菱形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折成四面体 $A'BCD$,使得 $\angle A'BC=\frac{\pi}{2}$,则 ( )

A. 直线 $A'C$ 与直线 BD 所成的角为 $\frac{\pi}{2}$

B. 直线 $A'C$ 与平面 BCD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

C. 四面体 $A'BCD$ 的体积为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

D. 四面体 $A'BCD$ 外接球的表面积为 8π

11. 已知函数 $f(x)$ 满足对任意 $x,y\in\mathbf{R}$,$xf(y)+yf(x)=f(xy)$,且当 $0<x<1$ 时,$f(x)>0$,则下列说法正确的是 ( )

A. $f(0)+f(1)=0$

B. $f(x)$ 为偶函数

C. 当 $|x|>1$ 时,$xf(x)<0$

D. $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减

三、填空题:本题共3小题,每小题5分,共15分.

12. 若函数 $f(x)=\sin x+a\cos x$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称,则实数 a 的值是________.

13. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的上顶点为 A,直线 $l:y=kx+m$ 交椭圆 C 于 M,N 两点.若 $\triangle AMN$ 的重心为 $\left(\frac{1}{2},0\right)$,则实数 k 的值是________.

14. 将9个互不相同的向量 $\boldsymbol{a}_i=(x_i,y_i)$,$x_i,y_i\in\{-1,0,1\}$,$i=1,2,\cdots,9$,填入 3×3 的方格中,使得每行、每列的三个向量的和都相等,则不同的填法种数是________.

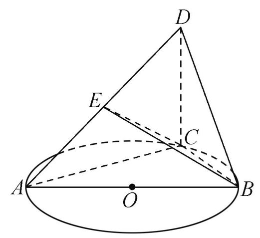
四、解答题:本题共5小题,共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分13分)

如图,$\triangle ABC$ 内接于圆 O,AB 为圆 O 的直径,$CD\perp$ 平面 ABC,E 为线段 AD 的中点.

(1) 求证:平面 $BCE\perp$ 平面 ACD;

(2) 若 $AB=\sqrt{5}$,$BC=1$,$CD=2\sqrt{3}$,求平面 BCE 与平面 BDE 所成锐二面角的余弦值.



16.（本小题满分 15 分）

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 满足$\frac{S_n}{n}=a_n+(1-n)t$，$n\in\mathbf{N}^*$，t 为常数，且 $a_2=a_1+2$.

(1) 求 t 的值；

(2) 求证：$\{a_n\}$为等差数列；

(3) 若 $n^2<S_n<(n+1)^2$，$n\in\mathbf{N}^*$，求 a_1 的取值范围.

17.（本小题满分 15 分）

甲、乙两人组队准备参加一项挑战比赛，该挑战比赛共分 $n(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2)$关，规则如下：首先某队员先上场从第一关开始挑战，若挑战成功，则该队员继续挑战下一关；否则该队员被淘汰，并由第二名队员接力，从上一名队员失败的关卡开始继续挑战；当两名队员均被淘汰或者 n 关都挑战成功时，挑战比赛结束. 若甲每一关挑战成功的概率均为 $p(0<p<1)$，乙每一关挑战成功的概率均为 $q(0<q<1)$，且甲、乙两人每关挑战成功与否互不影响，每关挑战成功与否也互不影响.

(1) 已知甲先上场，$p=\frac{1}{2}$，$q=\frac{1}{3}$，$n=2$.

① 求挑战没有一关成功的概率；

② 设 X 为挑战比赛结束时挑战成功的关卡数，求 $E(X)$.

(2) 如果 n 关都挑战成功，那么比赛挑战成功. 试判断甲先上场与乙先上场比赛，挑战成功的概率是否相同，并说明理由.

18.（本小题满分 17 分）

已知函数 $f(x)=x\mathrm{e}^x+a\sin x$，$a\in\mathbf{R}$.

(1) 当 $a=0$ 时，求证：$\frac{f(x)}{x}>x+1$；

(2) 若 $f(x)>0$ 对于 $x\in(0,\pi)$恒成立，求 a 的取值范围；

(3) 若存在 $x_1,x_2\in(0,\pi)$，使得 $f(x_1)=f'(x_2)=0$，求证：$x_1<2x_2$.

极值点偏移

19.（本小题满分 17 分）

设 M 是由直线构成的集合，对于曲线 C，若 C 上任意一点处的切线均在 M 中，且 M 中的任意一条直线都是曲线 C 上某点处的切线，则称 C 为 M 的包络曲线.

(1) 已知圆 C_1：$x^2+y^2=1$ 为 M_1 的包络曲线，判断直线 l：$x\sin\theta-y\cos\theta=1$（$\theta$ 为常数，$\theta\in\mathbf{R}$）与集合 M_1 的关系.

(2) 已知 M_2 的包络曲线为 C_2：$x^2=4y$，直线 l_1，$l_2\in M_2$. 设 l_1，l_2 与 C_2 的公共点分别为 P，Q，记 $l_1\cap l_2=A$，C_2 的焦点为 F.

① 求证：$|FA|$是$|FP|$，$|FQ|$的等比中项；

② 若点 A 在圆 $x^2+(y+1)^2=1$ 上，求$\frac{|FA|}{|FP|}$的最大值.

江西省南昌市2025届高三第一次模拟检测

(满分150分,考试时间120分钟)

答案见P96

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 二项式$(x+1)^5$的展开式中,x的系数为 ( )

A. -10　B. -5

C. 10　D. 5

2. 已知复数z满足$z+2\bar{z}=6+\mathrm{i}$,则$z=$ ( )

A. $2+\mathrm{i}$　B. $2-\mathrm{i}$

C. $1-2\mathrm{i}$　D. $1+2\mathrm{i}$

3. 设p:$0<a<1$;q:关于x的方程$\sqrt{3}\sin x+\cos x=a$有实数解,则p是q的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2-2x, & x<0,\\ 2^x, & x\geqslant 0,\end{cases}$则方程$f(x)=8$的所有根之和为 ( )

A. 1　B. 2

C. 5　D. 7

5. 已知$\{a_n\}$为等比数列,若$a_2+4a_4=4a_3$,则数列$\{a_n\}$的公比$q=$ ( )

A. -2　B. 2

C. $-\dfrac{1}{2}$　D. $\dfrac{1}{2}$

6. 直线$y=2x$与圆$x^2+y^2-2x-3=0$交于A,B两点,$|OA|=\sqrt{5}$,则$|OB|=$ ( )

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　B. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

C. $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$　D. $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

7. 我们约定:若两个函数的极值点个数相同,并且图象从左往右看,极大值点和极小值点分布的顺序相同,则称这两个函数的图象"相似".已知$f(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}x^2+(x-1)^2$,则下列给出的函数的图象与$y=f(x)$的图象"相似"的是 ( )

A. $y=x^2$　B. $y=-x^2$

C. $y=x^3-3x$　D. $y=-x^3+3x$

8. 已知双曲线C:$x^2-\dfrac{y^2}{24}=1$的左、右焦点分别为F_1,F_2,P为双曲线C第一象限上一点,$\angle F_1PF_2$的平分线为l,过点O作PF_2的平行线,分别与PF_1,l交于M,N两点.若$|MN|=\dfrac{2}{3}|PF_2|$,则$\triangle PF_1F_2$的面积为 ( )

A. 20　B. 12

C. 24　D. 10

二、选择题:本题共3小题,每小题6分,共18分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得6分,部分选对的得部分分,有选错的得0分.

9. 现从甲、乙两名射击运动员中选择一人参加大型选拔赛,各进行了10次射击,射击成绩(单位:环)如表所示:

次数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
甲	7	7	8	9	8	9	10	9	9	9
乙	8	9	7	8	10	7	10	10	7	10

依据该次选拔赛成绩,下列说法正确的是 ( )

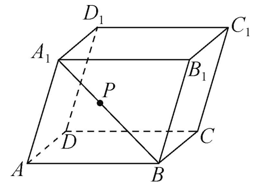
A. 甲的平均成绩高于乙的平均成绩

B. 预计对手平均成绩较差,稳定发挥水平就能获得冠军,则选择乙参加比赛

C. 预计对手平均成绩9.2环,则选择乙参加比赛

D. 预计对手平均成绩8.8环,则选择甲参加比赛

10. 如图,平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的体积为6,P为线段A_1B上的一动点,则下列三棱锥体积为1的有 ( )



A. 三棱锥$P-C_1CD$

B. 三棱锥$P-B_1D_1D$

C. 三棱锥$P-D_1B_1C$

D. 三棱锥$P-D_1AC$

11. 已知$f(x)$是$\mathbf{R}$上的连续函数,且满足$\forall x,y\in\mathbf{R}$,有$f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$,且$f(1)=1$,则下列说法正确的是 ( )

A. $f(0)=0$

B. $f(x)$为偶函数

C. $f(x)$的一个周期为6

D. 点$\left(\dfrac{3}{2},0\right)$是$f(x)$图象的一个对称中心

三、填空题:本题共3小题,每小题5分,共15分.

12. 已知集合$A=\{x\mid \ln x<1\}$,$B=\{0,1,2,3,4\}$,则$A\cap B$的元素个数为________.

13. 已知等差数列$\{a_n\}$各项不为零,前n项和为S_n,若$S_n=a_na_{n+1}$,则$a_{13}=$________.

14. 三角形是常见的几何图形,除了我们已经学习的性质外,三角形还有很多性质,如:

三角形中的新定义

性质1:$\triangle ABC$的面积$S=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\sin A=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\tan A$.

性质2:对于$\triangle ABC$内任意一点P,有$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.

性质3:$\triangle ABC$内存在唯一一点P,使得$\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA=\alpha$,这个点$P$称为$\triangle ABC$的"勃罗卡点",角$\alpha$称为$\triangle ABC$的"勃罗卡角".

若$\triangle ABC$的三边长分别为1,1,$\sqrt{3}$,根据以上性质,可以计算出$\triangle ABC$的"勃罗卡角"的正切值为________.

四、解答题:本题共5小题,共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分13分)

在$\triangle ABC$中,角A,B,C的对边a,b,c成公差为2的等差数列.

(1)若$\triangle ABC$为锐角三角形,求a的取值范围;

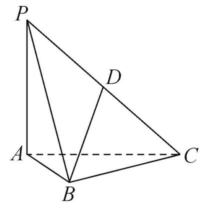
(2)若$7\sin A=3\sin C$,求$\triangle ABC$的面积.

16.（本小题满分 15 分）

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，$AB=BC=1$，$\angle ABC=120^\circ$，$PA=AC$，D 为 PC 的中点.

(1) 求证：$BD\perp AC$；

(2) 求直线 BD 与平面 PAB 所成角的正弦值.



17.（本小题满分 15 分）

已知函数 $f(x)=x\ln(x-1)-ax(a\in\mathbf{R})$.

(1) 若 $f(x)$ 在定义域上单调递增，求 a 的取值范围；

(2) 若 $y=f(x)$ 有极大值 m，求证：$m<-4$.

18.（本小题满分 17 分）

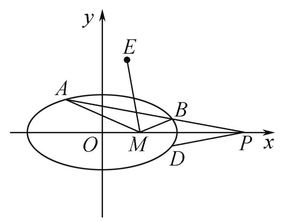
如图，已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，过点 $P(4,0)$ 作直线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点（点 A 在点 B 上方），当 l 的斜率为 $-\frac{1}{4}$ 时，点 A 恰与椭圆的上顶点重合.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 已知点 $M(1,0)$，设直线 MA，MB 的斜率分别为 k_1，k_2，设 $\triangle AMB$ 的外接圆圆心为点 E，点 B 关于 x 轴的对称点为 D.

① 求 k_1+k_2 的值；

② 求证：$ME\perp PD$.



19.（本小题满分 17 分）

通过抛掷骰子产生随机数列 $\{a_n\}$，具体产生方式为：若第 $k(k=1,2,3,\cdots,n)$ 次抛掷得到点数 $i(i=1,2,3,4,5,6)$，则 $a_k=i$. 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，X_n 为 S_n 除以 4 的余数.

(1) 若 $n=2$，求 $S_2=4$ 的概率；

(2) 若 $n=2$，比较 $P(X_2=0)$ 与 $P(X_2=3)$ 的大小，并说明理由；

(3) 若 $n=20$，设 $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^{20}=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{120}x^{120}$，试确定该展开式中各项系数与事件 $S_n=j(j\in\mathbf{N}_+, j\leqslant 120)$ 的联系，并求 $X_{20}=0$ 的概率.

河南省郑州市2025届高三第二次质量预测

(满分150分,考试时间120分钟)

答案见P101

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M=\{x\mid \ln x<0\}$,$N=\{x\mid |x|\leqslant 1\}$,则 $M\cap N=$ ( )

A. $(-1,1)$　B. $(0,1)$
C. $(0,1]$　D. $(-\infty,1)$

2. 某小区随机调查了10位业主2月份每户的天然气使用量,数据如下(单位:m^3):18,19,20,20,21,21,22,23,23,24.根据样本数据估计该小区业主月均用气量的60%分位数为 ( )

A. 21　B. 21.5
C. 22　D. 22.5

3. 已知圆锥的侧面展开图是半径为3的半圆,则该圆锥的体积为 ( )

A. $\frac{2\pi}{3}$　B. $\frac{9\sqrt{3}\pi}{2}$
C. $\frac{9\sqrt{3}\pi}{8}$　D. $\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$

4. 若 $\tan(\alpha-\beta)=3$,$\frac{\tan^2\alpha-\tan^2\beta}{1-\tan^2\alpha\tan^2\beta}=18$,则 $\tan 2\alpha=$ ( )

A. $-\frac{1}{2}$　B. -2　C. $-\frac{3}{19}$　D. $-\frac{9}{17}$

5. 函数 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 与函数 $g(x)=\log_2 x$ 的图象交点个数为 ( )

A. 3　B. 5
C. 6　D. 7

6. 某高校计划安排甲、乙、丙、丁、戊、己6名教师到4所不同的学校进行宣讲,每个学校至少安排1人,其中甲、乙必须安排在同一个学校的概率为 ( )

A. $\frac{2}{13}$　B. $\frac{2}{11}$　C. $\frac{1}{13}$　D. $\frac{1}{11}$

7. 已知 F 是抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点,直线 l 是抛物线 C 的准线,N 是抛物线 C 上一点且位于第一象限,直线 FN 的斜率为正数,且与圆 $A:x^2+y^2-6x+6=0$ 相切,过点 N 作直线 l 的垂线,垂足为 P,则△PFN 的面积为 ( )

A. $2\sqrt{3}$　B. 4　C. $4\sqrt{3}$　D. $16\sqrt{3}$

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}ax-\ln x-1, & x>0,\\ -2x^3-ax^2+1, & x\leqslant 0,\end{cases}$ $\forall x\in(0,+\infty)$,$f(x)\cdot f(-x)\geqslant 0$ 恒成立,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $[1,+\infty)$　B. $[1,2\sqrt{2}]$
C. $\left[\frac{1}{e},2\right]$　D. $[1,3]$

二、选择题:本题共3小题,每小题6分,共18分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得6分,部分选对的得部分分,有选错的得0分.

9. 已知复数 z 满足 $|z+1|+|z-1|=4$,则下列说法正确的是 ( )

A. $|z|\leqslant 2$
B. $|z-1|\geqslant 1$
C. 若 $z\in\mathbf{R}$,则 $|z|=2$
D. 若 $z^2\in\mathbf{R}$,则 $|z|=2$

10. 在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E 是棱 CC_1 的中点,则 ( )

A. 过点 E 有且只有一条直线与直线 AB 和 A_1D_1 都相交
B. 过点 E 有且只有一个平面与直线 AB 和 A_1D_1 所成的角相等
C. 若过 A,D_1,E 三点的截面把正方体分成两部分,则该截面的周长为 $2\sqrt{2}+\sqrt{5}$
D. Q 是正方形 B_1BCC_1 内的一动点,若 $A_1Q\perp BC_1$,则点 Q 的运动轨迹长度为 $\sqrt{2}$

11. 已知对于任意非零实数 x,函数 $f(x)$ 均满足 $f(x)=f\left(\frac{2}{x}\right)$,$f(x)=2-f\left(\frac{1}{x}\right)$,则下列结论正确的有 ( )

A. $f(1)=1$
B. $f(2^x)$ 的图象关于点 $(0,1)$ 中心对称
C. $f(2^x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称
D. $f(2)+f(2^2)+f(2^3)+\cdots+f(2^{10})=10$

三、填空题:本题共3小题,每小题5分,共15分.

12. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,2)$,向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影向量的模长为 $\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|$,写出一个满足条件的向量 $\boldsymbol{b}=$________.

13. 设 F_1,F_2 分别为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点,过点 F_2 且斜率为 $-\frac{3}{4}$ 的直线 l 与双曲线 C 的右支交于点 A,与双曲线 C 的左支交于点 B,点 D 满足 $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$,$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{F_1D}=0$,则双曲线 C 的离心率为________.

14. 已知正四棱锥 $M-P_1P_2P_3P_4$ 的底面边长与高均为2,设 U 是正方形 $P_1P_2P_3P_4$ 及其内部的点构成的集合,点 P_0 是正方形 $P_1P_2P_3P_4$ 的中心.若集合 $S=\{P\mid P\in U,PP_0\leqslant PP_i,i=1,2,3,4\}$,则直线 MP 与平面 $P_1P_2P_3P_4$ 所成角的正切值的最小值为________.

四、解答题:本题共5小题,共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分13分)

近年来,儿童近视问题日益严重,已成为影响儿童健康的重要问题之一,教育部提出了一系列措施,旨在通过学校、家庭和社会的共同努力,减少儿童近视的发生率.多项研究表明,每天增加户外活动时间可以显著降低儿童近视的发生率.为研究近视是否与户外活动时长有关,某学校数学兴趣小组采用简单随机抽样的方法调查了六年级的100名学生,其中有55名同学的户外活动时间超过2小时;100名同学中近视的学生有60人,这60人中每天户外活动时间不足2小时的有35人.

(1)根据所给数据,得到成对样本数据的分类统计结果,完成以下列联表,依据小概率值 $\alpha=0.005$ 的 χ^2 独立性检验,分析学生患近视与户外活动时间长短是否有关.

	近视人数	未近视人数	合计
户外活动时间不足2小时	35		
户外活动时间超过2小时			55
合计	60		

(2)用频率估计概率,从已经近视的学生中采用随机抽样的方式选出1名学生,利用"物理+药物"治疗方案对该学生进行治疗.已知"物理+药物"治疗方案的治愈数据如下:在已近视的学生中,对每天户外活动时间超过2小时的学生的治愈率为 $\frac{5}{6}$,对每天户外活动时间不足2小时治愈率为 $\frac{2}{3}$,求该近视学生被治愈的概率.

参考公式与数据:

$$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

其中 $n=a+b+c+d$.

α	0.10	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

16. （本小题满分 15 分）

记$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$b(\cos A+\sqrt{3}\sin A)=a+c$.

(1) 求B.

(2) 若$a=2,c=5$，边AC,AB上的中线BE,CF相交于点M.求：

① BE的长；

② $\cos\angle EMF$的值.

17. （本小题满分 15 分）

已知函数$f(x)=(a-x)e^x,a\in\mathbf{R}$.

(1) 若$a=2$，求曲线$y=f(x)$的斜率为1的切线方程；

(2) 若不等式$f(x)>1-x$没有整数解，求实数a的取值范围.

18. （本小题满分 17 分）

已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_{2n}=2a_n+1,S_4=4(a_3-1),n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式.

(2) 设$b_n=\begin{cases}k, & n=a_k,\\ b_{n-1}+k, & n=a_k+1,\end{cases}$其中$k$是正整数.求：

① b_1,b_2,b_3,b_4；

② $\sum\limits_{i=1}^{2^n}b_i(n\in\mathbf{N}^*)$.

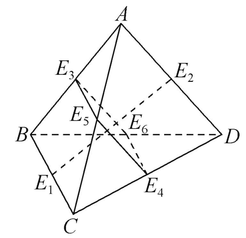
19. （本小题满分 17 分）

若一个四面体三组对棱分别相等，我们称它为"等腰四面体".已知在等腰四面体$ABCD$中，E_i $(i=1,2,3,\cdots,6)$分别为所在棱的中点，如图所示.

(1) 求证：$E_1E_2\perp$平面$E_3E_5E_4E_6$.

(2) 若$E_1E_2=\sqrt{6},E_3E_4=E_5E_6=2$，求二面角$A-BC-D$的大小.

(3) 在空间直角坐标系$O-xyz$中，xOy平面内有椭圆$H:\frac{x^2}{2}+y^2=1$，直线$x=my+1$与H交于M,N两点.P为空间中一点，若四面体$PMNO$为等腰四面体，求其外接球表面积的最小值.



立体几何与椭圆融合

河北省唐山市2025届高三第一次模拟演练

（满分150分，考试时间120分钟）

答案见P107

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知$a\in\mathbf{R}$，若$(a-2)+(a-1)\mathrm{i}$（i为虚数单位）是纯虚数，则$a=$（　　）

A. -2　　B. -1

C. 1　　D. 2

2. 已知命题p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2>0$，命题q：$\exists x>0$，$\ln x<0$，则（　　）

A. p和q都是真命题

B. p是假命题，q是真命题

C. p是真命题，q是假命题

D. p和q都是假命题

3. 若等比数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=2^n+m(m\in\mathbf{R})$，则$m=$（　　）

A. -1　　B. 0

C. 1　　D. 2

4. 随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$\sigma>0$.若$P(X<\mu+\sigma)=p$，则$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=$（　　）

A. $1-p$　　B. $2-2p$

C. $p-\dfrac{1}{2}$　　D. $2p-1$

5. 已知$f(x)=\mathrm{e}^{|x|}$，则下列说法正确的是（　　）

A. $f(5)>f(-3)>f(2)$

B. $f(-3)>f(2)>f(5)$

C. $f(5)>f(2)>f(-3)$

D. $f(2)>f(5)>f(-3)$

6. 已知圆O：$x^2+y^2=5$与抛物线C：$y^2=4x$交于A，B两点，则$|AB|=$（　　）

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 5

7. 在三棱锥$A-BCD$中，$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EB}$，$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FC}$，$\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{GD}$.设三棱锥$A-EFG$的体积为$V_1$，三棱锥$A-BCD$的体积为$V_2$，则$V_1:V_2=$（　　）

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{1}{4}$

C. $\dfrac{1}{6}$　　D. $\dfrac{1}{8}$

8. $\forall x\in[0,1]$，$f(x)+f(1-x)=2$，且$f(x)=2f\left(\dfrac{x}{6}\right)$，当$0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant 1$时，$f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则$f\left(\dfrac{1}{4050}\right)=$（　　）

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{8}$

C. $\dfrac{1}{16}$　　D. $\dfrac{1}{32}$

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.

9. 已知函数$f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，则关于$f(x)$的说法正确的是（　　）

A. 在区间$\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right]$上单调递增

B. $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$是$f(x)$的最大值

C. 图象关于点$\left(\dfrac{\pi}{3},0\right)$对称

D. 把$y=f(x)$的图象向左平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位长度得到$g(x)=\cos x$的图象

10. 已知双曲线C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过点$F_2$的直线$y=x-2$与双曲线$C$的一条渐近线平行，且与双曲线$C$交于点$P$，则（　　）

A. 双曲线C的离心率为$\sqrt{2}$

B. 双曲线C的实轴长为4

C. $\triangle PF_1F_2$的面积为1

D. $|PF_1|+|PF_2|=3\sqrt{2}$

11. 已知函数$f(x)=x^3-mx-n(m,n\in\mathbf{R})$，则下列说法正确的是（　　）

A. 当$m\leqslant 0$时，$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增

B. 函数$y=f(x)$图象的对称中心为点$(0,-n)$

C. $\exists m\in\mathbf{R}$，使得$y=\pm x-n$与曲线$y=f(x)$的公共点中存在四点能连接成正方形

D. $\forall m>0$，总存在两条斜率互为相反数的相交直线与曲线$y=f(x)$都相切

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12. 在菱形$ABCD$中，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=$________.

13. 已知$\tan\beta=\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$，则$\tan(\beta-\alpha)=$________.

14. 已知费马数是形如$F(n)=2^{2^n}+1(n\in\mathbf{N})$的素数，如第一个费马数为$F(0)=3$，则$F(2)=$________.正多边形的边数若能写成$2^k$与$m$个不同的费马数的乘积$(k\in\mathbf{N},m\in\mathbf{N})$，则正多边形就可以用尺规作图.将这种正多边形的边数按从小到大排列，记为数列$\{a_n\}$.注：若$m=0$，则边数可以取$2^2=4$等；若$m=1$，则边数可以取$2^0\times 3=3$等，则$a_9=$________.

四、解答题：本题共5小题，共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分13分）

记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$a\sin B=c$.

(1) 若$c=2$，求$\triangle ABC$的面积；

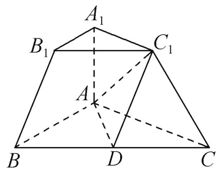
(2) 若$a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$，求B.

16.（本小题满分 15 分）

如图，在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$ 底面 ABC，$A_1B_1=1$，$AB=AC=2$，D 为 BC 的中点，$AC\perp C_1D$.

(1) 求证：$AC\perp AB$；

(2) 若 $AA_1=\sqrt{2}$，求平面 BCC_1B_1 与平面 ADC_1 夹角的余弦值.



17.（本小题满分 15 分）

已知某类考试中，有一种题型为多项选择题，每道题中有四个选项，其中有两个或三个选项正确. 每道题所赋分值为 6 分，若有两个正确选项，则这两个选项中每个选项所赋分值为 3 分；若有三个正确选项，则这三个选项中每个选项所赋分值为 2 分. 另外，有错误选项得 0 分. 已知每道题有两个正确选项的概率为 $m(m>0)$.

(1) 设每道题所得分数为 X，写出 X 的所有可能取值.

(2) 对于一道多项选择题，已知选项 A 正确，考生甲选择了 A，又在其余的三个选项中随机选择了一个选项. 请写出考生甲此题得分 Y 的分布列和数学期望.

18.（本小题满分 17 分）

若一个数列各项的倒数成等差数列，则这个数列称为调和数列，如数列 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}$ 就是一个调和数列.

(1) 在集合$\{1,2,3,4,5,6\}$中从小到大取三个数，使其构成调和数列（只需写出一个数列即可）.

(2) 若 A,C,B,D 四点共线，顺次排列，且$\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB}$，则称此四点构成了一个调和点列.

① 求证：三个线段长度 AC,AB,AD 构成一个调和数列；

② 直线 l 过点 $P(-4,0)$，且与椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 相交于 M,N 两点，已知 P,M,Q,N 四点构成一个调和点列，求点 Q 的轨迹长度.

数列与圆锥曲线
知识交汇

19.（本小题满分 17 分）

已知函数 $f(x)=ax^2-x+\sin x$.

(1) 当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 的极小值；

(2) 当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 0$，求实数 a 的取值范围.

江苏省苏锡常镇四市2025届高三教学情况调研(一)

(满分150分,考试时间120分钟)

答案见P112

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知i为虚数单位,复数z满足$z(1+\mathrm{i})=2$,则$|z|=$ ( )

A. $\sqrt{2}$　　B. 1

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

2. "$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}>0$"是"$2^a>2^b$"的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

3. 已知平面向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$是两个单位向量,$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影向量为$\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,则$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=$ ( )

A. 1　　B. $\frac{3}{2}$

C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}$

4. 已知S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和,若$a_4=4a_3-4a_2$,则$\frac{S_4}{a_1+a_2}=$ ( )

A. 5　　B. 9

C. -9　　D. -5

5. 已知$\sin(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}$,$\tan\alpha=2\tan\beta$,则$\sin(\alpha-\beta)=$ ( )

A. $-\frac{1}{5}$　　B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{3}{5}$

6. 已知一圆柱内接于半径为1的球,当该圆柱的体积最大时,其高为 ( )

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

7. 在空间中,过点A作平面τ的垂线,记垂足$B=f^{\tau}(A)$.设两个不同平面α,β,对任意一点P,$M=f^{\alpha}(f^{\beta}(P))$,$N=f^{\beta}(f^{\alpha}(P))$,恒有$|\overrightarrow{PM}|=|\overrightarrow{PN}|$成立,则 ( )

A. $\alpha /\!/ \beta$

B. α,β的夹角为45°

C. α,β的夹角为60°

D. $\alpha\perp\beta$

8. 我市某校共有1 500名学生在学校用午餐,每次午餐只能选择在楼上或楼下的一个食堂用餐.经统计,当天在楼上食堂用午餐的学生中,有10%的学生第二天会到楼下食堂用午餐;而当天在楼下食堂用午餐的学生中,有15%的学生第二天会到楼上食堂用午餐.则一学期后,在楼上食堂用午餐的学生人数大约为 ( )

A. 700　　B. 800

C. 900　　D. 1000

二、选择题:本题共3小题,每小题6分,共18分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得6分,部分选对的得部分分,有选错的得0分.

9. 某中学举行数学史知识竞赛,其中6个小组的比赛成绩分别为70,85,89,75,96,89,则这组数据的 ( )

A. 极差为26

B. 中位数大于平均数

C. 方差为472

D. 下四分位数为75

10. 已知函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+1$,其导函数为$f'(x)$,则 ( )

A. 直线$y=-2x$是曲线$y=f(x)$的切线

B. 函数$f(x)$有三个零点

C. $f'(2-x)=f'(x)$

D. 若$f(x)$在区间$(a,a+4)$上有最大值,则实数a的取值范围是$(-4,0)$

11. 已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1,点P满足$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}+z\overrightarrow{AA_1}$,其中$x$,$y$,$z\in[0,1]$,则 ( )

空间中的位置关系与长度问题

A. 当$x=y$,$y\neq 0$,$z\neq 0$时,$B_1B /\!/$平面ACP

B. 当$x=y=z$,$z\neq 0$时,异面直线AP与BC所成的角为45°

C. 当$x+y=1$,$z=0$时,$D_1P\perp A_1C_1$

D. 当$x+y+z=1$时,线段AP长的最小值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$

三、填空题:本题共3小题,每小题5分,共15分.

12. 请写出一个同时满足以下三个条件的函数$f(x)=$________.

① $f(-x)+f(x)=0$;② $f(x+\pi)=f(x)$;③ $f(x)$不是常数函数.

13. 已知抛物线C_1:$x^2=4y$,C_2:$x^2=-8y$的焦点分别为F_1,F_2,一条平行于y轴的直线分别与抛物线C_1,C_2交于A,B两点.若$|AF_1|=|BF_2|$,则四边形AF_1F_2B的周长为________.

14. 在一个不透明的袋子中装有4个形状大小相同,颜色互不相同的小球.某人先后两次任意摸取小球(每次至少摸取1个小球),第一次摸取后记下摸到的小球颜色,再将摸到的小球放回袋中;第二次摸取后,也记下摸到的小球颜色,则"两次记下的小球颜色能凑齐4种颜色,且恰有一种颜色两次都被记下"的概率为________.

四、解答题:本题共5小题,共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分13分)

在$\triangle ABC$中,角A,B,C所对的边分别为a,b,c,且$2b\cos C=2a+\sqrt{2}c$.

(1) 求角B的大小;

(2) 若$b=\sqrt{13}$,$c=2\sqrt{2}$,D为AC的中点,求BD的长.

16. (本小题满分 15 分)

在① $S_n=n^2-2^n$,② $a_1=1,a_{n+1}=\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}$,③ $2\sqrt{S_n}-1=a_n$ 这三个条件中,选择一个合适的条件,补充在下题横线上(只要写序号),并解答该题.

已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数,其前 n 项和为S_n,且对任意正整数n,有________.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式;

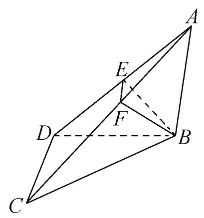
(2) 设 $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{S_n\cdot S_{n+1}}$,数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n,求证:$\dfrac{3}{4}\leqslant T_n<1$.

17. (本小题满分 15 分)

如图,在四面体 $ABCD$ 中,$AB=BD=2$,$\angle ADC=\angle BDC=90^\circ$,$E$ 为棱 AD 的中点,F 为棱AC 上的动点.

(1) 求证:平面 $ACD\perp$平面 BEF;

(2) 已知二面角 $A-DC-B$ 的大小为 30°,当直线 BF 与平面ACD 所成角的正弦值的最大值为$\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$时,求此时四面体 $ABEF$ 的体积.



18. (本小题满分 17 分)

已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右顶点 A 到其渐近线的距离为$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,点 $B(2,1)$在双曲线 C 的渐近线上,过点 B 的直线 l 与双曲线 C 交于 P,Q 两点,直线 AP,AQ 分别与 y 轴交于M,N 两点.

(1) 求双曲线 C 的标准方程;

(2) 若$\triangle APQ$ 的面积为$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$,求直线 l 的方程;

(3) 求证:线段 MN 的中点为定点.

19. (本小题满分 17 分)

我们把 $d=b-a(a<b)$称为区间$[a,b]$的长度.若函数 $f(x)$是定义在区间 I 上的函数,且存在$[a,b]\subseteq I$,使得$\{f(x)\mid x\in[a,b]\}=[a,b]$,则称$[a,b]$为 $f(x)$的自映射区间.已知函数 $f(x)=x-\sin x(x\in I)$,$g(x)=m\ln x(m>0)$.

(1) 若 $I=[-10,10]$,任取 $f(x)$的一个自映射区间,求其区间的长度 $d>\pi$ 的概率.

(2) 已知 $g(x)$存在自映射区间$[a,b]$.

① 求 m 的取值范围;

② 求证:$ab>e^2$,且$[a,b]$的长度 $d>2\sqrt{m^2-em}$.

福建省 2025 届高中毕业班适应性练习卷

(满分 150 分,考试时间 120 分钟)

答案见 P117

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数 $z=\frac{\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$,$\bar{z}$ 为 z 的共轭复数,则 $|\bar{z}|=$ ( )

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ B. $\frac{5}{9}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{1}{5}$

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,0)$,$\boldsymbol{b}=(-3,\sqrt{3})$,则 $\cos\langle\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle=$ ( )

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

3. 已知集合 $A=\{1,3,\sqrt{m}\}$,$B=\{1,m\}$,则"$m=3$"是"$A\cup B=A$"的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 若 $\left(1+\cos\frac{2\pi}{5}\right)\sin x=\sin\frac{2\pi}{5}\cos x$,且 $x\in(0,\pi)$,则 $x=$ ( )

A. $\frac{\pi}{5}$ B. $\frac{3\pi}{10}$

C. $\frac{7\pi}{10}$ D. $\frac{4\pi}{5}$

5. 已知一个圆锥与一个圆台的高相等,圆锥的底面积和圆台的一个底面的面积相等. 若圆台的体积是圆锥的体积的 7 倍,则圆台的上、下底面的面积之比为 ( )

A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

6. 在一定条件下,大气压强 p(单位:百帕)随海拔高度 h(单位:m)的变化满足如下函数关系式:$p=p_0\mathrm{e}^{-kh}$(p_0,k 为正常数). 已知海拔高度 0 m 处的大气压强为 1000 百帕,海拔高度 10000 m 处的大气压强为 250 百帕. 若大气压强增加 1 倍,则海拔高度降低 ( )

A. 100 m B. 2500 m

C. 5000 m D. 7500 m

7. 已知△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,面积为 S. 若 $a=1$,$C=\frac{\pi}{4}$ 且 $4S=\cos B+b\cos A$,则角 $B=$ ( )

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{5\pi}{12}$ D. $\frac{7\pi}{12}$

8. 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一个焦点为 $F(1,0)$,中心为 O,C 是椭圆 E 上的动点,P 是以 CF 为直径的圆上的动点,且 $|OP|$ 的最大值为 4,则椭圆 E 的离心率为 ( )

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

9. 已知甲组样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,由这组数据得到乙组样本数据 $y_1,y_2,\cdots,y_n$,其中 $y_i=2x_i-1$ ($i=1,2,\cdots,n$),则 ( )

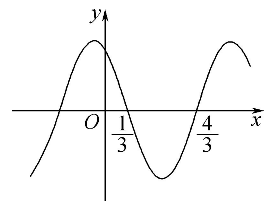
A. 乙组样本数据的极差是甲组样本数据极差的 2 倍

B. 乙组样本数据的中位数是甲组样本数据中位数的 2 倍

C. 乙组样本数据的平均数是甲组样本数据平均数的 2 倍

D. 乙组样本数据的标准差是甲组样本数据标准差的 2 倍

10. 函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$的部分图象如图所示,则 ( )



A. $f\left(x+\frac{1}{3}\right)$是奇函数

B. $f\left(x+\frac{5}{6}\right)$是偶函数

C. $f\left(-\frac{2022}{5}\right)<f\left(\frac{2025}{4}\right)$

D. $f(x)=\sin\left(\pi x+\frac{2\pi}{3}\right)$

11. 在平面直角坐标系 xOy 中,直线 $mx-y=0$ 与曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 交于 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$两点,直线 $x+my=0$ 与曲线 $y=-\ln x$ 交于 $C(x_3,y_3)$,$D(x_4,y_4)$两点,且 $x_1<x_2$,$x_3<x_4$,则下列说法正确的是 ( )

A. $AC/\!/BD$

B. m 的取值范围是$(1,+\infty)$

C. △OAD 与△OBC 的面积相等

D. 若△OBD 的周长等于△OAC 的周长的 2 倍,则 $m=2\log_2\mathrm{e}$

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. 已知抛物线的准线方程为 $x=-1$,则该抛物线的标准方程为________.

13. 已知函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,函数 $g(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且 $f(x)-g(x)=-x$,则 $g(x)$可以是________(写出一个满足条件的函数即可).

14. 项数为 m 的数列$\{a_n\}$满足 $a_i\in\{0,1\}$($i=1,2,\cdots,m$),当且仅当 $a_{i-1}=a_{i+1}$ 时,$a_i=0$(其中 $i=1,2,\cdots,m$,规定:$a_0=a_m$,$a_{m+1}=a_1$),称$\{a_n\}$为"好数列". 在项数为 6 且 $a_i\in\{0,1\}$($i=1,2,\cdots,6$)的所有$\{a_n\}$中,随机选取一个数列,该数列是"好数列"的概率为________.

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.(本小题满分 13 分)

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,$a_1=1$ 且 $a_{n+1}-S_n=1$.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式;

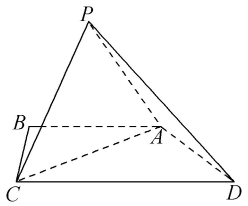
(2) 设数列$\{b_n\}$满足 $b_n=\frac{n^2}{a_n}$,求 b_n 的最大值.

16.（本小题满分 15 分）

如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，$\angle ADC=45^\circ$，$CD=2\sqrt{2}$. 现将$\triangle ABC$ 沿 AC 翻折至$\triangle APC$，使得 $PD=2\sqrt{2}$.

(1) 求证：平面 $PAC\perp$平面 ACD；

(2) 已知 M 是线段 PA 上的点，它到直线 CD 的距离为$\dfrac{\sqrt{14}}{2}$，求直线 CM 与平面 PAD 所成的角.



17.（本小题满分 15 分）

电商平台人工智能推荐系统是根据用户的喜好为用户推送商品的. 某体育用品供应商在甲电商平台推广新品 A 和 B，在乙电商平台推广新品 C. 已知甲平台向一用户推送 A 的概率为 0.7，推送 B 的概率为 0.5，同时推送 A 和 B 的概率为 0.3；乙平台向该用户推送 C 的概率为 0.6，且甲平台的推送结果与乙平台的推送结果互相不受影响.

(1) 在甲平台没有向该用户推送 A 的条件下，求它向该用户推送 B 的概率；

(2) 求这两个平台至少向该用户推送 A，B，C 中的一种的概率.

18.（本小题满分 17 分）

已知函数 $f(x)=\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\sin x+ax-\cos x$，$a\in\mathbf{R}$.

(1) 若曲线 $y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线的斜率为$\dfrac{\pi}{2}$，讨论 $f(x)$在$(0,2\pi)$上的单调性.

(2) 曲线 $y=f(x)$上是否存在四点，使得以这四点为顶点的四边形是平行四边形？证明你的结论.

利用函数探究平行四边形的存在性

19.（本小题满分 17 分）

已知点 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，P 是直线 AB 外的一个动点，$PQ\perp AB$，垂足为 Q，且点 Q 在线段 AB 外，$|PQ|^2=3|AQ|\cdot|BQ|$，记点 P 的轨迹为曲线 C.

(1) 求曲线 C 的方程.

(2) 若不过原点的直线 l 交曲线 C 于 M，N 两点，点 M 关于 x 轴的对称点为 T，请再从条件①②③中选择一个合适的作为已知，证明以下问题：

(ⅰ) 直线 l 过定点$(3,0)$；

(ⅱ) $\triangle BMN$ 不可能为锐角三角形.

条件：① 直线 TB 和 NA 的斜率之和为 0；

② 直线 TB 和 NB 的斜率之积为 6；

③ 直线 TB 和 NA 的斜率之商为 2.

注：如果选择的条件不符合要求，第(2)问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

广东省 2025 届高三模拟测试(一)

(满分 150 分,考试时间 120 分钟)

答案见 P123

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\mid 2^x>4\}$,集合 $B=\{1,2,3,4\}$,则 $A\cap B=$ ( )

A. $\{3\}$　B. $\{3,4\}$　C. $\{2,3,4\}$　D. $\{1,2,3,4\}$

2. 记复数 z 的共轭复数为 $\bar{z}$,若 $z=3+4i$,则$\frac{1}{\bar{z}}=$ ( )

A. $\frac{3-4i}{5}$　B. $\frac{3+4i}{5}$　C. $\frac{3-4i}{25}$　D. $\frac{3+4i}{25}$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,则"$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$"是"$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$"的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 某学校为了了解学生美育培养的情况,用分层随机抽样的方法抽样调查,拟从美术、音乐、舞蹈兴趣小组中共抽取 30 名学生.已知该校美术、音乐、舞蹈兴趣小组分别有 20,30,50 名学生,则不同的抽样结果种数为 ( )

A. $C_{20}^{4}C_{30}^{6}C_{50}^{20}$　B. $C_{20}^{5}C_{30}^{10}C_{50}^{15}$

C. $C_{20}^{6}C_{30}^{9}C_{50}^{15}$　D. $C_{20}^{10}C_{30}^{10}C_{50}^{10}$

5. 若空间中四个不同的平面 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$,满足 $\alpha_1\perp\alpha_2,\alpha_2\perp\alpha_3,\alpha_3\perp\alpha_4$,则下列结论一定正确的是 ( )

A. $\alpha_1\perp\alpha_4$

B. $\alpha_1/\!/\alpha_4$

C. α_1,α_4 既不垂直也不平行

D. α_1,α_4 的位置关系不确定

6. 已知 F_1,F_2 是椭圆 C 的两个焦点,P 为椭圆 C 上一点,且$\angle F_1PF_2=120^\circ$,$|PF_1|=3|PF_2|$,则椭圆 C 的离心率为 ( )

A. $\frac{\sqrt{13}}{4}$　B. $\frac{\sqrt{13}}{8}$　C. $\frac{\sqrt{7}}{4}$　D. $\frac{\sqrt{7}}{8}$

7. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$在区间$\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{12}\right)$上单调递减,且直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 和点$\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$分别是函数 $y=f(x)$图象的对称轴和对称中心,则 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=$ ( )

A. 1　B. $\sqrt{3}$　C. $\frac{1}{2}$　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 设$[x]$表示不大于 x 的最大整数,记$\{x\}=x-[x]$,则对任意实数 x,y,有 ( )

A. $\{-x\}=\{x\}$　B. $\{2x\}=2\{x\}$

C. $\{x\}+\{y\}\leqslant\{x+y\}$　D. $\{x\}-\{y\}\leqslant\{x-y\}$

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

9. 已知公差不为 0 的等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且 $S_3=9$,a_3 是 a_1 与 a_4 的等比中项,则下列说法正确的是 ( )

A. $a_2=3$

B. $d=-1$

C. 数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是递增数列

D. 当 $S_n>0$ 时,n 的最大值为 8

10. 已知函数 $f(x)=x(x-1)(e^x-a)$,则下列说法正确的是 ( )

A. 若 $a=e$,则 $f(x)$有 2 个零点

B. 若 $a\leqslant0$,则 $f(x)<0$ 的解集为$(0,1)$

C. $\forall a>0$,$f(x)$在$(0,+\infty)$上有极小值

D. $\exists 0<a<1$,$f(x)$在$(0,+\infty)$上有极大值

11. 已知正四面体 $A-BCD$ 的棱长为 6,M,N 分别是 BC,AD 的中点,则下列几何体能够整体放入正四面体 $A-BCD$ 的有 ( )

A. 底面在平面 BCD 上,且底面半径为$\sqrt{2}$,高为 $2\sqrt{6}$ 的圆锥

B. 底面在平面 BCD 上,且底面半径为$\sqrt{2}$,高为 1 的圆柱

C. 轴为直线 MN,且底面半径为$\sqrt{2}$,高为 2 的圆锥

D. 轴为直线 MN,且底面半径为$\sqrt{2}$,高为 0.2 的圆柱

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. 若函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x, & x\geqslant0,\\ x^2+ax, & x<0\end{cases}$是奇函数,则 $f[f(3)]=$________.

13. 已知 α 是锐角,若 $\tan 2\alpha=\frac{3\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$,则 $\tan\alpha=$________.

14. 已知 F_1,F_2 分别为双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点,A,C 两点在双曲线上且关于原点对称(点 A 在第一象限),直线 CF_2 与双曲线的另一个交点为点 B.若$|AF_1|-|BF_2|=6$,则$\triangle ABC$的面积为________.

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x)=a\ln x-bx^2+1(a,b\in\mathbf{R})$,曲线 $y=f(x)$在 $x=1$ 处与直线 $y=0$ 相切.

(1) 求 a,b 的值;

(2) 求 $f(x)$在$\left[\frac{1}{e},e^2\right]$上的最大值和最小值(其中 $e=2.718\cdots$为自然对数的底数).

16. (本小题满分 15 分)

已知$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,且$\frac{a}{\cos A}+\frac{b}{\cos B}=\frac{c}{\sin C}$.

(1) 求证:$\cos A\cos B=\sin C$;

(2) 若$\triangle ABC$ 的面积为$\frac{c^2}{10\sin C}$,求 $\cos C$.

17.（本小题满分 15 分）

近年来，中国新能源汽车产业，不仅技术水平持续提升，市场规模也持续扩大，取得了令人瞩目的成就，国产新能源汽车正逐步引领全球新能源汽车的发展潮流．某新能源汽车制造企业对某地区新能源汽车的销售情况进行了调研，得到数据如表：

时间	2023 年 12 月	2024 年 1 月	2024 年 2 月	2024 年 3 月	2024 年 4 月
月份代码 x	1	2	3	4	5
销量 y/千辆	14	15	16	18	19

（1）若 y 与 x 线性相关，求 y 关于 x 的经验回归方程，并估计该地区新能源汽车在 2025 年 1 月份的销量．

（2）该企业为加强新能源汽车宣传推广，计划引进人工智能工具，并对宣传部门员工进行人工智能工具使用培训．为节约培训成本，需要将宣传部门部分员工调整至其他部门，剩余宣传部门员工全部参加培训．培训分为四期，每期培训的结果是否“优秀”相互独立，且每期培训中员工达到“优秀”标准的概率均为$\dfrac{2}{3}$，员工至少两期培训达到“优秀”标准，才能使用人工智能工具．该企业宣传部门现有员工 100 人，开展培训前，员工每人每年平均为企业创造净利润 12 万元，开展培训后，能使用人工智能工具的员工预计每人每年平均为企业创造净利润 18 万元，本次培训费每人 1 万元（计入年度部门成本）．若要确保调整后第一年，宣传部门员工创造的年净利润不低于调整前，请应用概率知识进行决策，预计最多可调整多少人去其他部门．

参考公式：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$．

18.（本小题满分 17 分）

如图 1，已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，准线交 x 轴于点 D，过点 F 作倾斜角为 θ 的直线交抛物线于 A，B 两点（点 A 在第一象限）．当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$时，$|OA|=\sqrt{5}$．

（1）求抛物线 C 的方程．

（2）如图 2，把$\triangle ADF$ 沿 DF 翻折为$\triangle PDF$，使得二面角 $P-DF-B$ 的大小为$\dfrac{2\pi}{3}$．

① 若 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，求直线 BD 与平面 PBF 所成角的正弦值；

② 求证：三棱锥 $D-PBF$ 的体积为定值．

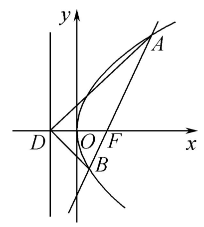


图 1

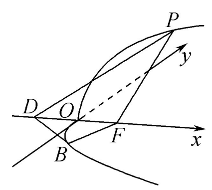


图 2

圆锥曲线与立体几何交汇

19.（本小题满分 17 分）

对于一个递增正整数数列$\{a_n\}$，若它的奇数项为奇数，偶数项为偶数，则称它是一个交错数列．规定只有一项且是奇数的数列也是一个交错数列．将每项都取自集合$\{1,2,\cdots,n\}$的所有交错数列的个数记为 A_n．例如，当 $n=1$ 时，取自集合$\{1\}$的交错数列只有 1 一种情况，则 $A_1=1$；当 $n=2$ 时，取自集合$\{1,2\}$的交错数列有 1 和 1，2 两种情况，则 $A_2=2$．

（1）求 A_3 和 A_4 的值；

（2）求证：取自集合$\{1,2,\cdots,n\}(n\geqslant 3)$的首项不为 1 的交错数列的个数为 A_{n-2}；

（3）记数列$\{A_n\}$的前 n 项和为 S_n，求使得 $S_n>2025$ 成立的 n 的最小值．

浙江省温州市 2025 届高三第二次适应性考试

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）

答案见 P128

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．双曲线$\frac{y^2}{a^2}-x^2=1(a>0)$的一个焦点为$(0,2)$，则$a=$（　　）

A．$\sqrt{3}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$

C．3　　D．$\frac{1}{3}$

2．扇形的半径等于 2，面积等于 6，则它的圆心角为（　　）

A．1　　B．$\frac{3}{2}$

C．3　　D．6

3．已知随机变量$\xi\sim N(3,4)$，则“$a=3$”是“$P(\xi<a)=\frac{1}{2}$”的（　　）

A．充分不必要条件

B．必要不充分条件

C．充要条件

D．既不充分也不必要条件

4．若向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{b}|=3$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6$，则$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影向量是（　　）

A．$-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　B．$-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$

C．$\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$　　D．$-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$

5．已知数列$\{a_n\}$满足$a_n=\begin{cases}a_{n+1}-1, & n\text{ 为奇数},\\ 2a_{n+1}, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$若$a_4\in[2,3]$，则$a_1$的取值范围是（　　）

A．$[2,4]$　　B．$[1,3]$

C．$[3,5]$　　D．$[5,9]$

6．某班级有 30 名男生和 20 名女生，现调查学生周末在家学习时长（单位：小时），得到男生样本数据的平均值为 8，方差为 2，女生样本数据的平均值为 10.5，方差为 0.75，则该班级全体学生周末在家学习时长的平均值$\overline{x}$和方差s^2的值分别是（　　）

A．$\overline{x}=9.5$，$s^2=1.5$

B．$\overline{x}=9$，$s^2=1.5$

C．$\overline{x}=9.5$，$s^2=3$

D．$\overline{x}=9$，$s^2=3$

7．已知函数$f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$，则下列两个函数的图象仅通过平移就可以重合的是（　　）

A．$y=f(x)-g(x)$与$y=f(x)$

B．$y=[f(x)]^2-[g(x)]^2$与$y=f(x)g(x)$

C．$y=f[f(x)]$与$y=f[g(x)]$

D．$y=f[f(x)]$与$y=g[f(x)]$

8．一个圆台形的木块，上、下底面的半径分别为 4 和 8，高为 3，用它加工成一个与圆台等高的四棱台，棱台下底面为一边长等于 9 的矩形，且使其体积最大．现再从余下的四块木料中选择一块车削加工成一个球，则所得球的半径最大值是（加工过程中不计损耗）（　　）

A．$\frac{7}{10}$

B．$\frac{3}{4}$

C．1

D．$\sqrt{2}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9．已知二项展开式$(1-x)^{2025}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2025}x^{2025}$，则（　　）

A．$a_0=1$

B．$a_1+a_2+\cdots+a_{2025}=0$

C．$a_1+a_{2024}=0$

D．$a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2024}=2^{2024}$

10．在四棱锥$P-ABCD$中，E,F分别是AP,BC上的点，$\frac{AE}{EP}=\frac{BF}{FC}$，则下列条件可以确定$EF$∥平面$PCD$的是（　　）

A．AD∥BC

B．AB∥CD

C．BC∥平面PAD

D．CD∥平面PAB

11．甲、乙两人用《哪吒 2》动漫卡牌玩游戏．游戏开局时桌上有n盒动漫卡牌，每个盒子上都标有盒内卡牌的数量，每盒卡牌的数量构成数组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，游戏规则如下：两人轮流抽牌，每人每次只能选择其中一盒并抽走至少一张卡牌，若轮到某人时无卡可抽，则该人输掉游戏．现由甲先抽，则下列开局中，能确保甲有必胜策略的是（　　）

逻辑推理与策略应用

A．$(1,3)$

B．$(1,2,3)$

C．$(3,3,6)$

D．$(3,4,5)$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12．若复数$a^2-2a+a\mathrm{i}$是纯虚数，则实数a的值为________．

13．已知A是抛物线$y^2=4x$在第一象限上的点，F是抛物线的焦点，$\angle AFO=60^\circ$（O为坐标原点），则抛物线在点A处切线的斜率是________．

14．已知函数$f(x)$满足：①$f(1)=\frac{2}{5}$；②$\forall x,y\in\mathbf{R}$，$2^xf(y)-2^yf(x)\geqslant(4^x-4^y)f(x)f(y)$．则$f(x)$的最大值为________．

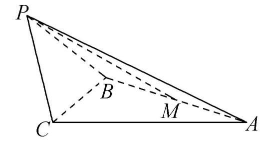
四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（本小题满分 13 分）

如图，在三棱锥$P-ABC$中，$\triangle PBC$是边长为 2 的正三角形，$\angle ACB=90^\circ$，M为AB的中点．

（1）求证：$BC\perp PM$；

（2）若$AC=2\sqrt{3}$，$\cos\angle ACP=-\frac{\sqrt{3}}{4}$，求点$M$到平面$PBC$的距离．

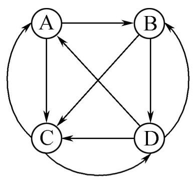


16.（本小题满分 15 分）

PageRank 算法是某搜索引擎用来衡量网页重要性的一种经典算法. 其核心思想是通过分析网页之间的链接关系，评估每个网页的相对重要性. 假设一个小型的互联网由 A，B，C，D 四个网页组成，它们之间按图中的箭头方向等可能地单向链接，假设某用户从网页 A 开始浏览（记为第 1 次停留）.

（1）求该用户第 3 次停留在网页 D 上的概率.

（2）某广告公司准备在网页 B，C 中选择一个投放广告，以用户前 4 次在该网页上停留的平均次数作为决策依据. 试问该公司应该选择哪个网页？请说明理由.



17.（本小题满分 15 分）

已知函数 $f(x)=\ln(x+1)+\dfrac{ax}{x+1}(a\in\mathbf{R})$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 上恰有一个零点，求 a 的取值范围；

（3）当 $a>0$ 时，解方程 $f'(x)-f(x)=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}-\ln\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

18.（本小题满分 17 分）

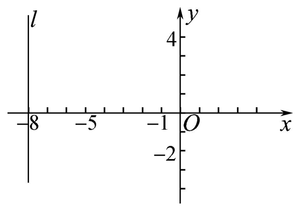
在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $F(-1,0)$，P 是直线 $l:x=-8$ 右侧区域内的动点，P 到直线 l 与 y 轴的距离之和等于它到点 F 距离的 4 倍，记点 P 的轨迹为 E.

（1）求 E 的方程，并在图中画出该曲线.

（2）直线 l' 过点 F，与 E 交于 A，B 两点.

① 若 $|AB|=\dfrac{9}{2}$，求直线 l' 的方程；

② 若 $|AB|=4$，T 是点 F 关于 y 轴的对称点，延长线段 AT 交 E 于点 C，延长线段 BT 交 E 于点 D，直线 CD 交 x 轴于点 $M(m,0)$，求 m 的最小值.



椭圆与圆的性质

19.（本小题满分 17 分）

给定正数 t 与无穷数列 $\{a_n\}$，若存在 $N\in\mathbf{N}^*$，当 $m>n\geqslant N$ 时，都有 $|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_m|<t$，则称数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P(t)$.

（1）求证：数列 $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$ 具有性质 $P\left(\dfrac{1}{2025}\right)$.

（2）若无穷数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P(1)$，求证：存在正数 M，使得 $|a_n|<M(n\in\mathbf{N}^*)$.

（3）若对任意正数 t，数列 $\{a_n\}$ 都具有性质 $P(t)$，则称 $\{a_n\}$ 为“S-数列”. 若正项数列 $\{b_n\}$ 是“S-数列”，试判断数列 $\{e^{b_n}-1\}$ 是否也是“S-数列”，并证明你的结论.

（注：e=2.718…）

安徽省合肥市2025届高三第二次教学质量检测

（满分150分，考试时间120分钟）

答案见P133

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid x+1>0\}$，$B=\{x\mid |x+1|\leqslant 3\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{-1,0,1,2\}$　　B. $\{-1,0,1\}$

C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{0,1\}$

2. 在复平面内，复数 z 对应的点的坐标是 $(-1,2)$，则复数 $\frac{5\mathrm{i}}{z}$ 的虚部是（　　）

A. -1　　B. 1

C. -2　　D. 2

3. 若空间中三条不同的直线 a,b,c 满足 $a\perp c$，$b\perp c$，则"$a/\!/b$"是"a,b,c 共面"的（　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 已知向量 $\boldsymbol{e}_1=(1,0)$，$\boldsymbol{e}_2=(1,\sqrt{3})$，设 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

5. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，过顶点 A 作 C 的一条渐近线的垂线，交 y 轴于点 B，且 $|AB|=\sqrt{a^2+b^2}$，则双曲线 C 的离心率为（　　）

A. 3　　B. 2

C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$

6. 已知 $\frac{\tan\theta\tan 2\theta}{\tan\theta-\tan 2\theta}=\frac{4}{5}$，则 $\sin^4\theta+\cos^4\theta=$（　　）

A. $\frac{9}{25}$　　B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{17}{25}$　　D. $\frac{24}{25}$

7. 已知 AB 为圆锥 PO 的底面直径，O 为底面圆心，正三角形 ACD 内接于圆 O. 若 $PA=6$，圆锥的侧面积为 $12\sqrt{2}\pi$，则 PA 与 BD 所成角的余弦值为（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

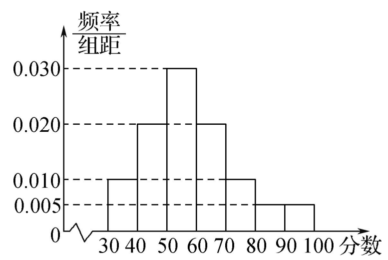
8. 已知点 $A(-2\sqrt{3},0)$，C，D 是圆 $O:x^2+y^2=16$ 与 x 轴的交点. 点 B 满足，以 AB 为直径的圆与圆 O 相切，则 $\triangle BCD$ 面积的最大值为（　　）

A. $4\sqrt{3}$　　B. 8

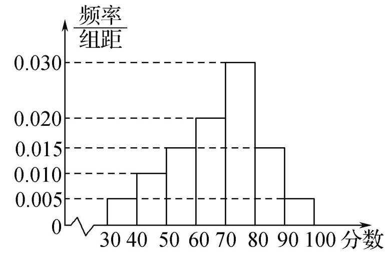
C. 12　　D. 16

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.

9. 从某校高一和高二年级分别随机抽取100名学生进行知识竞赛，按得分（满分100分）绘制如图所示的频率分布直方图.根据频率分布直方图，并用频率估计概率，记高一年级学生得分平均数的估计值为 x，高二年级学生得分中位数与平均数的估计值分别为 y,z. 从高一和高二年级各随机抽取一名学生，记事件 $M=$"高一年级学生得分不低于60分，高二年级学生得分不低于80分"，事件 $N=$"高一年级学生得分不低于80分，高二年级学生得分不低于60分"，则（　　）



高一年级学生得分



高二年级学生得分

A. $x<z$　　B. $y>z$

C. 事件 M,N 互斥　　D. $P(M)=P(N)$

10. 将函数 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，则（　　）

A. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{7\pi}{4}$ 对称

B. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{4\pi}{3},0\right)$ 对称

C. 当 $x\in\left(\frac{7\pi}{3},\frac{8\pi}{3}\right)$ 时，$f(x)>g(x)$

D. 当 $x\in(2\pi,4\pi)$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象恰有4个交点

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(x)f(1-y)+f(y)f(1-x)=2f(x+y)$，$f(0)=1$，则（　　）

A. $f(2)=1$

B. $\exists x_0\in\mathbf{R}$，$f(x_0)<0$

C. $f(x)$ 的图象关于点 $(0,1)$ 对称

D. $f(x)$ 为偶函数

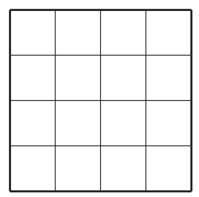
三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12. 已知 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，且 $AB=5$，$AC=6$，$\triangle ABC$ 的面积为 $6\sqrt{6}$，则 $BC=$________.

13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x-a|-a+1, & x>1,\\ x^2-2ax+3, & x\leqslant 1\end{cases}$ 的最小值为 -1，则实数 $a=$________.

14. 如图，在 4×4 的方格中放入棋子，每个格子内至多放一枚棋子，若每行都放置两枚棋子，则恰好每列都有两枚棋子的概率为________.

条件概率



四、解答题：本题共5小题，共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分13分）

已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，$\{b_n\}$ 是等比数列，且 $a_1=b_1=3$，$a_2+a_4=2b_2$，$a_1a_3=b_3$. 求：

(1) 数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

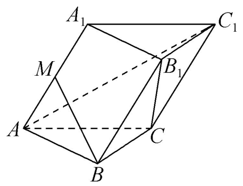
(2) 数列 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和.

16.（本小题满分15分）

如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长都为2，$\angle A_1AC=60^\circ$，M 是 AA_1 的中点，$AC_1\perp BM$.

(1) 求证：平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 ABC；

(2) 求 CB_1 与平面 ABB_1A_1 所成角的正弦值.



17.（本小题满分15分）

已知函数 $f(x)=(x-1)e^x-ax-b$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $x+y+2=0$.

(1) 求实数 a,b 的值；

(2) 讨论 $f(x)$ 的零点个数，并证明所有零点之和为0.

18.（本小题满分17分）

已知抛物线 $\Gamma:x^2=\frac{4}{3}y$，圆 $E:x^2+(y-1)^2=r^2\left(0<r\leqslant\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$，点 P 在抛物线 Γ 上.

(1) 求 $|PE|$ 的最小值.

(2) 设点 P 的横坐标为2，过点 P 作圆 E 的两条切线，分别交抛物线 Γ 于 B,C 两点.

① 求直线 BC 斜率的取值范围；

② 求证：直线 BC 过定点.

19.（本小题满分17分）

当前，以大语言模型为代表的人工智能技术正蓬勃发展，而数学理论和方法在这些模型的研发中发挥着重要作用. 例如，当新闻中分别出现“7点钟，一场大火在郊区燃起”和“7点钟，太阳从东方升起”这两个事件的描述时，它们提供的“信息量”是不一样的，前者比后者要大，会吸引人们更多关注. 假设通常情况下，它们发生的概率分别是 $p=0.0001$ 和 $p=0.9999$，用 $\ln\frac{1}{p}$ 这个量来刻画“信息量”的大小，计算可得前者约为9，后者接近于0. 现在假设离散型随机变量 X 的分布列为 $P(X=x_i)=p_i$，$0<p_i<1$，$i=1,2,\cdots,m$，则称 $H(X)=\sum_{i=1}^{m}\left(p_i\ln\frac{1}{p_i}\right)$ 为 X 的信息熵，用它来刻画随机变量 X 蕴含的信息量的大小.

(1) 若 X 的分布列为 $P(X=x_1)=p$，$P(X=x_2)=1-p$，$0<p<1$，求 $H(X)$ 的最大值；

(2) 求证：$e^{H(X)}\leqslant m$；

(3) 若 $X\sim B(n,p)$，且 n 为定值，设 $H(X)=f(p)$，求证：$f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

山东省济南市 2025 届高三 3 月模拟考试

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）

答案见 P138

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x \mid \log_2 x<1\}$，$B=\{x \mid x<1\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $(-\infty,1)$　　B. $(0,1)$

C. $(-\infty,2)$　　D. $(0,2)$

2. 设复数 z 满足 $\dfrac{1+z}{2-\mathrm{i}}=\mathrm{i}$（i 为虚数单位），则 $z=$（　　）

A. $2\mathrm{i}$　　B. $-2\mathrm{i}$

C. $-2+2\mathrm{i}$　　D. $-2-2\mathrm{i}$

3. 若直线 $l_1:(m-2)x+3y+3=0$ 与直线 $l_2:2x+(m-1)y+2=0$ 平行，则实数 $m=$（　　）

A. 4

B. -4

C. 1 或 -4

D. -1 或 4

4. 若数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，则“$\{a_n\}$ 为等比数列”是“$\{\ln a_n\}$ 为等差数列”的（　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. 抛物线 $y=x^2+2x+2$ 的焦点坐标为（　　）

A. $\left(-1,\dfrac{3}{2}\right)$　　B. $\left(-1,\dfrac{5}{4}\right)$

C. $\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$　　D. $\left(1,\dfrac{5}{4}\right)$

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-x}-1, & x\leqslant 0, \\ 1-\mathrm{e}^{x}, & x>0, \end{cases}$ 则 $f(2x)+f(x-3)>0$ 的解集是（　　）

A. $(-\infty,1)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $(-\infty,-3)$　　D. $(-3,+\infty)$

7. 已知圆台的侧面展开图是半个圆环，侧面积为 4π，则圆台上、下底面面积之差的绝对值为（　　）

A. π　　B. 2π

C. 4π　　D. 8π

8. 已知 $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，则（　　）

A. $\sin\alpha-\sin\beta<\alpha-\beta$

B. $\alpha-\beta<\tan\alpha-\tan\beta$

C. $\alpha\sin\beta<\beta\cos\alpha$

D. $\tan\beta>\alpha\beta$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 为了验证牛的毛色（黑色、红色）和角（有角、无角）这两对相对性状是否相关，某学院进行了一次数据统计，并根据形成的 2×2 列联表，计算得到 $\chi^2\approx2.727$，根据小概率值为 α 的独立性检验，则（　　）

附：

$P(\chi^2\geqslant x_0)$	0.100	0.050	0.010
x_0	2.706	3.841	6.635

A. 若 $\alpha=0.100$，则认为“毛色”和“角”无关

B. 若 $\alpha=0.100$，则认为“毛色”和“角”有关，此推断犯错误的概率不超过 10%

C. 若 $\alpha=0.010$，则认为“毛色”和“角”无关

D. 若 $\alpha=0.010$，则认为“毛色”和“角”有关，此推断犯错误的概率不超过 1%

10. 已知 F_1，F_2 分别是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点，O 为坐标原点，P 为椭圆 C 上异于左、右顶点的一点，H 是线段 PF_2 的中点，则（　　）

A. $|OH|+|HF_2|=2$

B. $|OH|>1$

C. $\triangle OHF_2$ 内切圆半径的最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

D. $\triangle HF_1F_2$ 外接圆半径的最小值为 1

11. 已知递增数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正整数，且满足 $a_{a_n}=3n$，则（　　）

A. $a_{a_1}=3$

B. $a_n>n$

C. $a_5=6$

D. $a_{2025}=81a_{25}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 将两个 1，两个 3，一个 5 排成一行，则不同的排法种数为________（用数字作答）.

13. 函数 $f(x)=|\sin x|+\cos x$ 的最小值为________.

14. 已知正四面体 $ABCD$ 的棱长为 $2\sqrt{2}$，动点 P 满足 $PA^2+PB^2=PC^2+PD^2$，用所有这样的点 P 构成的平面截正四面体，则所得截面的面积为________.

动点轨迹与截面问题

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. （本小题满分 13 分）

某公司升级了智能客服系统，在测试时，当输入的问题表达清晰时，智能客服的回答被采纳的概率为 $\dfrac{7}{8}$，当输入的问题表达不清晰时，智能客服的回答被采纳的概率为 $\dfrac{1}{2}$. 已知输入的问题表达不清晰的概率为 $\dfrac{1}{5}$.

（1）求智能客服的回答被采纳的概率；

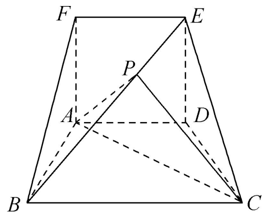
（2）在某次测试中输入了 3 个问题，设 X 表示智能客服的回答被采纳的次数，求 X 的分布列、数学期望及方差.

16.（本小题满分 15 分）

如图，正方形 $ADEF$ 所在平面和等腰梯形 $ABCD$ 所在平面互相垂直，已知 $BC=4$，$AB=AD=2$，点 P 在线段 BE 上.

（1）求证：平面 $ACP\perp$ 平面 ABF；

（2）当直线 AP 与平面 BCE 所成角的正弦值为 $\frac{3\sqrt{21}}{14}$ 时，求 $\frac{BP}{PE}$.



17.（本小题满分 15 分）

已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{2}$，O 为坐标原点，过双曲线 C 的右焦点的直线 l 交双曲线 C 的右支于 P，Q 两点，当 $l\perp x$ 轴时，$|PQ|=2\sqrt{2}$.

（1）求双曲线 C 的方程.

（2）过点 P 作直线 $x=1$ 的垂线，垂足为 N.

① 求证：直线 QN 过定点；

② 求 $\triangle OQN$ 面积的最小值.

18.（本小题满分 17 分）

已知 $a,b\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=e^x-a\sqrt{x}-bx$，$x\in[0,+\infty)$.

（1）当 $a=0$ 时，求 $f(x)$ 的极值.

（2）若 $f(x)$ 存在零点.

① 当 $b=0$ 时，求 a 的取值范围；

② 求证：$a^2+b^2>2$.

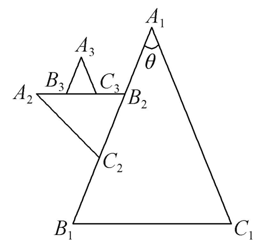
19.（本小题满分 17 分）

如图，已知给定线段 B_1C_1 长为 2，以 B_1C_1 为底边作顶角为 $\theta(0°<\theta\leqslant 90°)$ 的等腰三角形 $A_1B_1C_1$，取 $\triangle A_1B_1C_1$ 的腰 A_1B_1 的三等分点 B_2，C_2（点 B_2 靠近点 A_1），以 B_2C_2 为底边向 $\triangle A_1B_1C_1$ 外部作顶角为 θ 的等腰三角形 $\triangle A_2B_2C_2$，…，依次类推，取 $\triangle A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$ 的腰 $A_{n-1}B_{n-1}$ 的三等分点 B_n，C_n（点 B_n 靠近点 A_{n-1}），以 B_nC_n 为底边向 $\triangle A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$ 外部作顶角为 θ 的等腰三角形 $A_nB_nC_n(n\geqslant 2)$，得到三角形列 $\{\triangle A_nB_nC_n\}$.

（1）用 θ 表示出 $\triangle A_2B_2C_2$ 的外接圆半径；

（2）当 $\theta=60°$ 时，求证：$\{\triangle A_nB_nC_n\}$ 各顶点均在 $\triangle A_1B_1C_1$ 外接圆上或其内部；

（3）若 $\{\triangle A_nB_nC_n\}$ 各顶点均在 $\triangle A_1B_1C_1$ 外接圆上或其内部，求 $\cos\theta$ 的取值范围.



湖北省八市 2025 届高三 3 月联考

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）

答案见 P143

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\mid y=\sqrt{x-1}\}$，$B=\{y\mid y=2-x^2\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $[1,+\infty)$　　B. $[0,2]$

C. $\varnothing$　　D. $[1,2]$

2. 已知在复平面内，复数 z_1 对应的点与复数 $z_2=\frac{3+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$ 对应的点关于实轴对称，则 $z_1=$（　　）

A. $1+\mathrm{i}$　　B. $-1-\mathrm{i}$

C. $-1+\mathrm{i}$　　D. $1-\mathrm{i}$

3. 已知圆 $C:(x-1)^2+y^2=1$ 和直线 $l:y=kx-\sqrt{3}$，则“$k>\frac{\sqrt{3}}{3}$”是“直线 l 与圆 C 有公共点”的（　　）

A. 充要条件

B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 已知 $\cos(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta$，$\tan\alpha\tan\beta=-2$，则 $\tan(\alpha+\beta)=$（　　）

A. $-\frac{7}{3}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{7}{9}$　　D. $-\frac{7}{9}$

5. 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 1，取 $\triangle ABC$ 各边的中点 A_1,B_1,C_1 作 $\triangle A_1B_1C_1$，再取 $\triangle A_1B_1C_1$ 各边的中点 A_2,B_2,C_2 作 $\triangle A_2B_2C_2$，……依此方法一直继续下去. 记 $\triangle A_nB_nC_n(n\in\mathbf{N}^*)$ 的面积为 a_n，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则（　　）

A. 数列 $\{2^na_n\}$ 为常数列

B. 数列 $\{2^na_n\}$ 为递增数列

C. 数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为递减数列

D. 数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为递增数列

6. 给出下列四个命题：

① 直线 a 不平行于平面 α，$a\not\subset\alpha$，则平面 α 内不存在与 a 平行的直线；

② 两直线平行是它们与同一平面所成的角相等的充分不必要条件；

③ 若平面 $\alpha\perp$ 平面 β，$\alpha\cap\beta=l$，过 α 内的任意一点作交线 l 的垂线，则此垂线必垂直于平面 β；

④ 空间中，一个角的两边分别垂直于另一个角的两边，那么这两个角相等或互补.

其中正确的命题是（　　）

A. ①②　　B. ①②③

C. ①③④　　D. ②③④

7. 根据变量 Y_1 和 x 的成对样本数据，由一元线性回归模型① $\begin{cases}Y_1=b_1x+a_1+e_1,\\E(e_1)=0,D(e_1)=\sigma_1^2,\end{cases}$ 得到经验回归模型 $\hat{y}=\hat{b}_1x+\hat{a}_1$，对应的残差如图 1 所示. 根据变量 Y_2 和 x 的成对样本数据，由一元线性回归模型② $\begin{cases}Y_2=b_2x+a_2+e_2,\\E(e_2)=0,D(e_2)=\sigma_2^2,\end{cases}$ 得到经验回归模型 $\hat{y}=\hat{b}_2x+\hat{a}_2$，对应的残差如图 2 所示，则（　　）

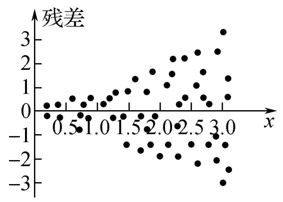


图 1

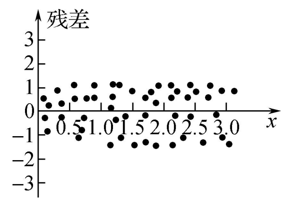


图 2

A. 模型①的误差满足一元线性回归模型的 $E(e_1)=0$ 的假设，不满足 $D(e_1)=\sigma_1^2$ 的假设

B. 模型①的误差不满足一元线性回归模型的 $E(e_1)=0$ 的假设，满足 $D(e_1)=\sigma_1^2$ 的假设

C. 模型②的误差满足一元线性回归模型的 $E(e_2)=0$ 的假设，不满足 $D(e_2)=\sigma_2^2$ 的假设

D. 模型②的误差不满足一元线性回归模型的 $E(e_2)=0$ 的假设，满足 $D(e_2)=\sigma_2^2$ 的假设

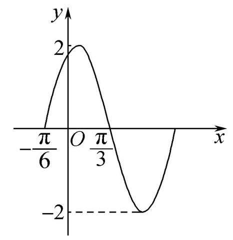
8. 已知函数 $f(x)=ax\mathrm{e}^x+\ln\frac{a}{x}$，$g(x)=x^2-x$，若存在实数 x_0，使得 $f(x_0)\leqslant g(x_0)$，则实数 a 的取值范围为（　　）

A. $(0,1]$　　B. $(-\infty,0)\cup(0,1]$

C. $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$　　D. $(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示，则（　　）



A. $f(x)$ 的解析式可以为 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

B. 将 $f(x)$ 图象上的所有点的横坐标变为原来的 2 倍，再向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到 $g(x)$ 的图象，则 $g(x)=f\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$

C. $f(x)$ 图象的对称中心为 $\left(-\frac{\pi}{6}+k\pi,0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$

D. 若 $x_1,x_2\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$，$f(x_1)=f(x_2)$ $(x_1\neq x_2)$，则 $f(x_1+x_2)=\sqrt{3}$

10. 已知椭圆 $C:\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上、下焦点分别为 F_1,F_2，左、右顶点分别为 B,A,O 为坐标原点，M 为线段 AO 上一点，直线 F_1M 垂直平分线段 AF_2 且交椭圆 C 于 P,Q 两点，则下列说法正确的有（　　）

A. 椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$

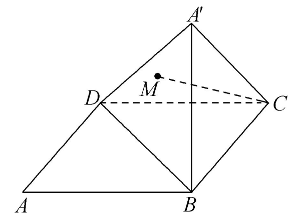
B. $\triangle APQ$ 的周长为 $4a$

C. 以点 M 为圆心，$|MB|$ 为半径的圆与椭圆 C 恰有三个公共点

D. 若直线 AP,BQ 的斜率分别为 k_1,k_2，则 $k_1=2k_2$

11. 在一次数学兴趣小组的实践活动中，李怡同学将一张边长为 10 cm 的菱形纸片 $ABCD$ 沿对角线 BD 折叠，形成一个二面角模型 $A'-BD-C$，$BD=12$ cm，如图所示. 下列说法正确的有（　　）

立体几何的翻折问题



A. 四面体 $A'-BCD$ 体积的最大值为 $384\ \mathrm{cm}^3$

B. 在折叠的过程中，存在某个时刻，使 $DA'\perp BC$

C. 当 $A'C=8$ cm 时，动点 M 在平面 $A'BD$ 内且 $CM\leqslant7$ cm，则动点 M 的轨迹所形成区域的面积为 $\pi\ \mathrm{cm}^2$

D. 在 C 的条件下，若直线 CM 与直线 BD 所成的角为 α，则 $\cos\alpha$ 的最大值为 $\frac{1}{7}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. $(1+x^2)(1+x)^5$ 的展开式中 x^4 的系数为________.

13. 若平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=8$，则 $\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rangle$ 的最小值为________.

14. 一袋中装有 3 个红球、5 个黑球，从中任意取出一球，然后放回并放入 2 个与取出的球颜色相同的球，再从袋中任意取出一球，然后放回并再放入 2 个与取出的球颜色相同的球，一直重复相同的操作.

(1) 第二次取出的球是黑球的概率为________；

(2) 在第一次取出的球是红球的条件下，第二次和第 2025 次取出的球都是黑球的概率为________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. （本小题满分 13 分）

已知 a,b,c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A,B,C 的对边，向量 $\boldsymbol{m}=(a,b+c)$，$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3}\sin C+\cos C,$

1），$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=2(b+c)$.

（1）求 A；

（2）若 $c=2\sqrt{3}$，$\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MC}$，$AM=2$，求$\triangle ABC$的面积.

16.（本小题满分 15 分）

已知函数 $f(x)=\ln x-mx^2$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $x+my=0$.

（1）求实数 m 的值；

（2）已知 $a>0$，函数 $g(x)=f(x)+1-\dfrac{x-b}{a}+x^2$，若 $g(x)\leqslant 0$，求证：$ab\leqslant\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

17.（本小题满分 15 分）

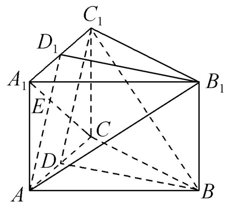
如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\overrightarrow{A_1D_1}=\lambda\overrightarrow{A_1C_1}$，$\overrightarrow{AD}=\mu\overrightarrow{AC}$（$\lambda,\mu\in(0,1)$），且平面 AB_1D_1//平面 BDC_1.

（1）求实数 λ,μ 的值.

（2）若 $A_1C\perp$ 平面 AB_1D_1，$AB=\sqrt{2}AA_1$，$A_1C\cap AD_1=E$.

① 求证：$BD\perp AC$；

② 求二面角 $E-BC_1-D$ 的余弦值.



18.（本小题满分 17 分）

已知两点 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，平面内的动点 M 到定点 F_2 的距离与到直线 $l:x=1$ 的距离之比为$\sqrt{2}$，点 M 的轨迹为曲线 C.

（1）求曲线 C 的方程.

（2）点 P 在曲线 C 上，且在第一象限，连接 PF_2 并延长与曲线 C 交于点 Q，$\overrightarrow{PF_2}=\lambda\overrightarrow{F_2Q}$（$\lambda>0$），以点 P 为圆心，$|PF_2|$为半径的圆与线段 PF_1 交于点 N，记$\triangle PF_2N$，$\triangle PF_1Q$ 的面积分别为 S_1，S_2.

① 若点 P 的坐标为(x_1,y_1)，求证：$\dfrac{|PF_1|}{|PF_2|}=\dfrac{x_1+1}{x_1-1}$；

② 求$\dfrac{S_2+\lambda S_1}{S_1}$的最小值.

19.（本小题满分 17 分）

有穷等差数列$\{a_n\}$共有 m 项（$m>2$），公差为 1，前 n 项和为 S_n，$a_1=a^2$，$a_m=b^2$（a，b 为正整数）. T 为集合 $A=\{a_k\mid a_k$ 为完全平方数，$k=1,2,\cdots,m\}$中所有元素之和.

（1）当 $a=2$，$b=6$ 时，求$\dfrac{T}{S_m}$.

（2）从数列$\{a_n\}$中任取一项 a_i，若 $a_i\in A$ 的概率为$\dfrac{1}{100}$，试求出所有的数对(a,b).

（3）设 X 为正整数，将 X^2 从正中间分割为两个数（若 X^2 的位数是奇数，在数的前面补上 0 再分割），若这两个数的和恰好等于 X，则称 X^2 为“漂亮数”. 例如：$9^2=81$，$8+1=9$，所以 81 是一个“漂亮数”，$297^2=88209$，$88+209=297$，所以 88209 是一个“漂亮数”. 当 $a=32$，$b=99$ 时，从集合 A 中任取一个元素，求该元素为“漂亮数”的概率.

浙江省宁波市2025届第二学期高考模拟考试

（满分150分，考试时间120分钟）

答案见P149

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid x^2-x-2>0\}$，则 $\complement_{\mathbf{Z}}A=$ （　　）

A. $\{-1,0,1,2\}$
B. $\{0,1,2\}$
C. $\{1,2\}$
D. $\{-1,0\}$

2. 下列四个函数以 π 为最小正周期，且在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减的是 （　　）

A. $y=\cos x$
B. $y=|\sin x|$
C. $y=\tan x$
D. $y=\sin\frac{x}{2}$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=9$，则 $\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$ （　　）

A. 3　　B. 4
C. 6　　D. 7

4. 设 $z=\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}-2\mathrm{i}$，则 $|z|=$ （　　）

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$
C. 1　　D. $\sqrt{2}$

5. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=1$，记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$2S_n=na_n$，则 a_{2025} 的值为 （　　）

A. 2023　　B. 2024
C. 2025　　D. 2026

6. 已知点 $M(a,0)$，$N(2,3)$ 到同一直线的距离分别为2，3．若这样的直线恰有2条，则实数 a 的取值范围是 （　　）

A. $(-2,0)$　　B. $(-2,6)$
C. $(0,6)$　　D. $(2,6)$

7. 一个长方体墨水瓶的长、宽、高分别为10 cm，8 cm，15 cm，内部装有400 mL墨水．将墨水瓶倾斜，使其一条长边（10 cm）置于水平地面，高边（15 cm）所在直线与水平地面成45°角，则此时墨水与墨水瓶接触部分的面积为 （　　）

A. 180 cm^2　　B. 220 cm^2
C. 260 cm^2　　D. 300 cm^2

8. 已知函数 $f(x)=(x-a)(x-b)^2$，其中 $a<b$，5为函数 $f(x)$ 的极小值点．若函数 $f(x)$ 在区间 $(a,a+3)$ 上有最大值，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(-4,5)$
B. $(-4,5]$
C. $\left(-4,\frac{11}{4}\right)$
D. $\left(-4,\frac{11}{4}\right]$

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．

9. 下列说法正确的是 （　　）

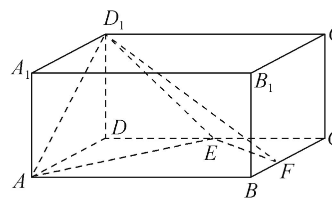
A. 若数据 $2x_1,2x_2,\cdots,2x_{16}$ 的方差为8，则数据 $x_1,x_2,\cdots,x_{16}$ 的方差为4
B. 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是等差数列，则这些数的中位数与平均数相等
C. 若 X 是随机变量，则 $E(X^2)\geqslant E^2(X)$
D. 若两个具有线性相关关系的变量的相关性越强，则线性相关系数 r 的值越接近于1

10. 国家知识产权局信息显示，华为技术有限公司申请一项名为“三进制逻辑门电路、计算电路、芯片及其电子设备”的专利，该项专利可以实现大幅度减少二进制逻辑电路的晶体管数量，降低电路的功耗，提高计算效率．该专利蕴含的数学背景是一种以3为基数，以 $-1,0,1$ 为基本数码的计数体系（对称三进制）：三进制数 $(a_ka_{k-1}\cdots a_0.b_1b_2\cdots b_t)_3$ 对应的十进制数为 $a_k\cdot 3^k+a_{k-1}\cdot 3^{k-1}+\cdots+a_1\cdot 3^1+a_0\cdot 3^0+b_1\cdot 3^{-1}+b_2\cdot 3^{-2}+\cdots+b_t\cdot 3^{-t}$，其中 $a_0,a_1,\cdots,a_{k-1},b_1,b_2,\cdots,b_t\in\{-1,0,1\}$，$a_k\in\{-1,1\}$，为了记号的方便，我们用 F 表示数码 -1，比如 $(11)_3=1\times 3^1+1\times 3^0=4$，$(1.F)_3=1\times 3^0+(-1)\times 3^{-1}=\frac{2}{3}$，$(FFF)_3=(-1)\times 3^2+(-1)\times 3^1+(-1)\times 3^0=-13$．下列选项正确的是 （　　）

A. $(10F1)_3=25$
B. $(101010)_3-(10101)_3=(F0F0F)_3$
C. 若 $n=(0.b_1b_2\cdots b_m)_3$，$b_i\in\{-1,0,1\}$，$i=1,2,\cdots,m$，$m\in\mathbf{N}^*$，则 $|n|<\frac{1}{2}$
D. 存在唯一的 $a_1,a_2,a_3,a_4,b_1,b_2,b_3,b_4\in\{0,1\}$，使得 $(1a_4a_3a_2a_1)_3-(1b_4b_3b_2b_1)_3=20$ 成立

11. 如图，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$AD_1=\sqrt{2}$，$BC=CC_1=1$，$CC_1\perp CD$，$\angle ADC=120°$，E 为 CD 的中点，点 F 在线段 BC 上（包含端点），则下列说法正确的是 （　　）

平行六面体中的存在性问题



A. 存在点 F，使得 A_1F∥平面 AD_1E
B. 存在点 F，使得平面 $AD_1E\perp$ 平面 D_1EF
C. 不存在点 F，使得 $|D_1F|+|EF|=\sqrt{10}$
D. 不存在点 F，使得四棱锥 $F-CDD_1C_1$ 有内切球

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分．

12. $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6$ 展开式中的常数项为________．

13. 在 $\triangle ABC$ 中，$\sin A=8\sin B\sin C$，$\cos A=8\cos B\cos C$，则 $\tan A=$________．

14. 关于 x 的方程 $\mathrm{e}^x+b^x=2$（$b>0$ 且 $b\neq 1$）有唯一实数解，其中 e 为自然对数的底数，则实数 b 的取值范围是________．

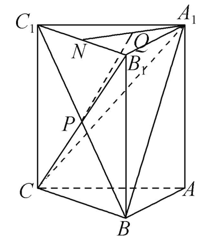
四、解答题：本题共5小题，共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. （本小题满分13分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC=2$，$AA_1=2\sqrt{2}$．N 是 B_1C_1 的中点，P 是 BC_1 与 B_1C 的交点．

（1）若 Q 是 A_1N 的中点，求证：PQ∥平面 A_1BC；

（2）求直线 A_1P 与平面 A_1BC 所成角的正弦值．



16. (本小题满分 15 分)

在 1,2,3,…,7 这 7 个自然数中,任取 3 个数.

(1) 求这 3 个数中恰有 1 个是偶数的概率;

(2) 设 X 为这 3 个数中两数相邻的组数(例如:若取出的数为 1,2,3,则有两组相邻的数 1,2 和 2,3,此时 X 的值是 2),求随机变量 X 的分布列及其数学期望 $E(X)$.

17. (本小题满分 15 分)

已知函数 $f(x)=\ln(x+1)+ax^2-x(a\in\mathbf{R})$.

(1) 当 $a=1$ 时,讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)\geqslant 0$ 恒成立,求 a 的取值范围;

(3) 求证:当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,$1+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{3^2}+\cdots+\frac{2n-1}{n^2}<2\ln(n+1)$.

18. (本小题满分 17 分)

已知椭圆 E:$\frac{x^2}{m+2}+y^2=1(m>0)$,点 $P(0,-1)$ 到椭圆 E 上点的距离的最大值为$\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 若过定点(0,2)的直线 l 交椭圆 E 于点 A,B,设点 $Q\left(0,\frac{1}{2}\right)$,直线 AP 与直线 BQ 交于直线 $y=\frac{5}{4}$上一点,求直线 AB 的方程.

19. (本小题满分 17 分)

设 n 维向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$\boldsymbol{b}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,定义运算:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$.

(1) 当 $n=2$ 时,若 $\boldsymbol{c}=(y_2,y_1)$且 $x_1<x_2$,$y_1<y_2$,试比较 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 的大小.

(2) 已知 $n\in\mathbf{N}^*$,记 $M(n)=\{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\mid\boldsymbol{a}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\boldsymbol{b}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 且 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 均为 $1,2,\cdots,n$ 的某一排列$\}$.

① 求 $M(3)$,$M(4)$;

② 若 $n\geqslant 4$,求 $M(n)$.

$\left(\text{提示:}1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$

江西省南昌市2025届高三第二次模拟检测

(满分150分,考试时间120分钟)

答案见P157

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设α,β是两个不同的平面,则$\alpha /\!/ \beta$的一个充分条件是 ( )

A. α,β平行于同一条直线

B. α,β平行于同一个平面

C. α,β垂直于同一个平面

D. α内有无数条直线与β平行

2. 已知复数z满足$iz=3+4i$,则$|z|=$ ( )

A. $\sqrt{2}$ B. 2

C. 5 D. 7

3. 已知集合$A=\{x \mid |x-1|<3\}$,$B=\{x \mid y=\sqrt{x^2-4}\}$,则$A\cap B=$ ( )

A. $[2,4]$ B. $[2,4)$

C. $[-2,4)$ D. $(-\infty,4)$

4. 在$\triangle ABC$中,角A,B,C的对边分别是a,b,c.若$b=3$,$2a\cos C+2c\cos A=3a$,则$a=$ ( )

A. 2 B. 3

C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{9}{2}$

5. 如图是江西省博物馆中典藏的元青白釉印花双凤纹碗,高5.7 cm,口径17 cm.若将该碗的内表面近似于一个球面的一部分,则这个球的半径近似于 ( )

A. 9.6 cm B. 10.6 cm

C. 10.2 cm D. 9.2 cm

6. 已知角α,β的终边不重合,$\sin\alpha-3\cos\beta=\sin\beta-3\cos\alpha$,则$\tan(\alpha+\beta)=$ ( )

A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

7. 将双曲线绕其中心旋转一个合适的角度,可以得到一些熟悉的函数图象,比如反比例函数$y=\frac{1}{x}$,"对勾"函数$y=x+\frac{1}{x}$,"飘带"函数$y=x-\frac{1}{x}$等,它们的图象都能由某条双曲线绕原点旋转而得.现将双曲线$C_1:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$绕原点旋转一个合适的角度,得到"飘带"函数$y=\frac{x}{4\sqrt{3}}-\frac{1}{x}$的图象$C_2$,则双曲线$C_1$的离心率为 ( )

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{21}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{21}}{4}$ D. $2\sqrt{3}$

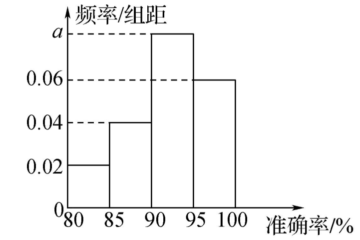
8. 已知函数$f(x)$满足$f(x-y)f(y)=2f(x)$,$f(x)\neq 0$且$f(1)=4$,则$f(2-x)+f(x)$的最小值为 ( )

A. 4 B. $2\sqrt{2}$

C. 8 D. $4\sqrt{2}$

二、选择题:本题共3小题,每小题6分,共18分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得6分,部分选对的得部分分,有选错的得0分.

9. 人工智能是新一轮科技革命和产业变革的重要驱动力量,是研究、开发用于模拟、延伸和扩展人的智能的理论、方法、技术及应用系统的一门新技术科学.很多学校已经推出基于DeepSeek的人工智能通识课程,帮助学生深入了解人工智能的历史、关键技术及其在科学研究、社会发展中的高效应用,培养跨学科思维,推动人工智能技术在多领域的深度融合与创新.某探究小组利用DeepSeek解答了50份高考模拟试卷,收集其准确率,整理得到如图所示的频率分布直方图,则下列说法正确的是 ( )



A. $a=0.08$

B. 估计准确率的30%分位数为90%

C. 估计准确率的平均数为90%

D. 估计准确率的中位数为92.5%

10. 已知函数$f(x)=x^3+ax^2+bx-2$.若不等式$f(x)<2$的解集为$\{x \mid x<1且x\neq -2\}$,则下列说法正确的是 ( )

A. 函数$f(x)$的极大值点为1

B. 函数$f(x)$的图象的对称中心为点$(-1,0)$

C. 过点$(-1,0)$可作一条直线与曲线$y=f(x)$相切

D. 当$-2<x<-\frac{1}{2}$时,$f(2x+1)>-2$

11. 数学中有许多形状优美的曲线,曲线$C:\frac{y^2}{2}+\sin x=1$就是其中之一,下列选项中关于曲线C的说法正确的有 ( )

A. 当$x\in[-8,8]$时,曲线C与x轴有4个交点

B. 曲线C关于直线$x=\frac{\pi}{2}$对称

C. 当$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时,曲线$C$上的一点$P$到原点距离的最小值小于$\frac{\sqrt{7}}{2}$

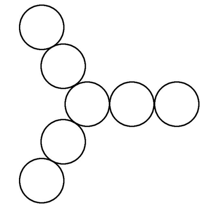
D. 当$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时,曲线$C$上的一点$P$到原点距离的最小值大于$\frac{1}{2}$

三、填空题:本题共3小题,每小题5分,共15分.

12. 已知函数$f(x)=\begin{cases}2^x, & x\geq 0,\\ x+2, & x<0.\end{cases}$若$f(a)=4$,则$a=$________.

13. 已知向量$\boldsymbol{a}=(1,-2)$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=5$,则$|\boldsymbol{b}|$的最小值是________.

14. 某次庆典后,墙壁上的装饰品需要取下来,如图,由于材料特性,每次只能取一个,且所取的装饰品只能有1个或0个相邻的装饰品,则不同的取法有________种.



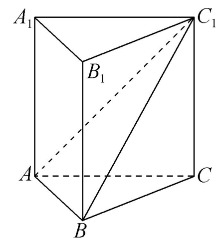
四、解答题:本题共5小题,共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分13分)

如图,在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中,侧面ACC_1A_1是边长为4的正方形,$BC_1=2\sqrt{7}$,$AB=2$,$AB\perp BC$.

(1) 求证:平面$ACC_1A_1\perp$平面ABC;

(2) 求二面角$B-AC_1-C$的余弦值.



16.（本小题满分 15 分）

已知抛物线 $C:y^2=4x$，过点 $D(4,0)$ 作斜率大于 0 的直线 l 与曲线 C 交于 A,B 两点. 原点 O 关于直线 AB 的对称点为记点 M.

（1）求证：$OA\perp OB$；

（2）当点 M 在抛物线 C 上时，求 $\triangle ABM$ 的面积.

17.（本小题满分 15 分）

为弘扬中华优秀传统文化，某校组织古诗词知识比赛. 比赛分为两阶段. 第一阶段为基础知识问答，每位选手都需要回答 3 个问题，答对其中至少 2 个问题，进入第二阶段，否则被淘汰. 第二阶段分高分组和低分组，第一阶段 3 个问题都答对的选手进入高分组，共回答 4 个问题，每答对 1 个得 20 分，答错不得分；第一阶段答对 2 个问题的选手进入低分组，共回答 4 个问题，每答对 1 个得 10 分，答错不得分. 第一阶段，每个问题选手甲答对的概率都是 $\frac{2}{3}$；第二阶段，若选手甲进入高分组，每个问题答对的概率都是 $\frac{1}{4}$，若选手甲进入低分组，每个问题答对的概率都是 $\frac{1}{2}$.

（1）求选手甲第一阶段不被淘汰的概率；

（2）求选手甲在该次比赛得分为 40 分的概率；

（3）已知该次比赛选手甲进入了高分组，记选手甲在该次比赛中得分数为 X，求随机变量 X 的分布列和期望值.

18.（本小题满分 17 分）

已知函数 $f(x)=xa^x-e^x+1(a>1)$.

（1）当 $a=e$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）当 $a\geqslant e$ 时，求证：$f(x)\geqslant 0$；

（3）当 $1<a\leqslant\sqrt{e}$ 时，试讨论函数 $f(x)$ 的零点个数.

利用导数求解函数零点问题

19.（本小题满分 17 分）

对于共 k 项的等差数列 $\{a_n\}$（公差不为 0）各项重新排列得到新数列 $\{b_n\}$，若 $\{b_n\}$ 中的任意两项的等差中项都不在这两项所在位置之间，则称数列 $\{b_n\}$ 是等差数列 $\{a_n\}$ 的"无均数列".

（1）若 $k=4$，写出等差数列 $\{a_n\}$（公差不为 0）的 4 个不同的"无均数列"；

（2）若 $k=8$，写出等差数列 $\{a_n\}$（公差不为 0）的 1 个"无均数列"；

（3）若 $k=2025$，判断等差数列 $\{a_n\}$（公差不为 0）的"无均数列"是否存在，并证明你的结论.

福建省泉州市2025届高中毕业班适应性练习卷

(满分150分,考试时间120分钟)

答案见P163

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-1=0\}$,$B=\left\{x\in\mathbf{Z}\left|\frac{x-3}{x+1}<0\right.\right\}$,则 $A\cup B=$ ( )

A. $\{1\}$　　B. $\{-1,1\}$

C. $\{-1,0,1,2\}$　　D. $\{-1,0,1,2,3\}$

2. 为了得到函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象,只需把函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象上所有的点 ( )

A. 向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度

B. 向右平移$\frac{2\pi}{3}$个单位长度

C. 向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度

D. 向左平移$\frac{2\pi}{3}$个单位长度

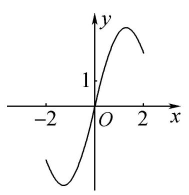
3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,0)$,$\boldsymbol{b}=(1,2)$.若 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$,则 $\lambda=$ ( )

A. -1　　B. $-\frac{3}{5}$　　C. $-\frac{1}{5}$　　D. 0

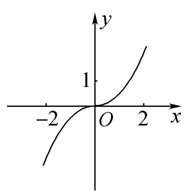
4. 已知 α,β 都是锐角,$\sin\alpha=\frac{3}{5}$,$\sin(\beta-\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{10}$,则 $\cos\beta=$ ( )

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{7\sqrt{2}}{25}$　　D. $\frac{31\sqrt{2}}{50}$

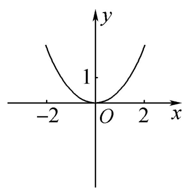
5. 函数 $f(x)=x\ln\frac{4+|x|}{4-|x|}$ 在 $[-2,2]$ 上的大致图象为 ( )



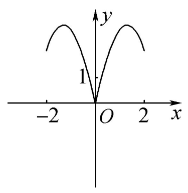
A



B



C



D

6. 已知某八面体是由两个共底面且棱长均相等的四棱锥拼接而成,其顶点都在同一个球面上,则该八面体与球的体积之比为 ( )

A. $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$　　B. $\frac{1}{\pi}$

C. $\frac{1}{2\pi}$　　D. $\frac{1}{3\pi}$

7. 已知抛物线 $C_1:y^2=2px$ 的焦点 F 为双曲线 $C_2:x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的右焦点,$Q(x_0,y_0)$ 为 C_1 和 C_2 的一个公共点.若 $|QF|=5$,则 $|y_0|=$ ( )

A. 3　　B. $2\sqrt{3}$

C. 4　　D. $2\sqrt{6}$

8. 在一场AI体验活动中,主办方准备了语言处理、图像识别、数据分析三种不同功能的设备.现有2个语言处理设备、2个图像识别设备和1个数据分析设备,规定一轮体验规则:参与者先随机选取2个设备,如果选取的设备功能相同,那么再从剩余设备中随机选取2个,否则,再从剩余设备中随机选取1个.若某人参与一轮AI体验活动,则他能体验到三种功能的概率为 ( )

A. $\frac{4}{15}$　　B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{8}{15}$　　D. $\frac{3}{5}$

二、选择题:本题共3小题,每小题6分,共18分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得6分,部分选对的得部分分,有选错的得0分.

9. 已知复数 $z_1=1+\mathrm{i}$,$z_2=-1+\mathrm{i}$,则下列说法正确的是 ( )

A. $\left|\frac{z_2}{z_1}\right|=1$

B. $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

C. $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$

D. 若 z_1 是关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$ $(p,q\in\mathbf{R})$ 的一个根,则 $p=q$

10. 已知 P 是圆 $O:x^2+y^2=4$ 上的动点,$Q(m,0)$ $(m>0)$,线段 PQ 的垂直平分线交直线 OP 于点 M,记点 M 的运动轨迹为 Γ,则下列说法正确的是 ( )

A. 当 $m=2$ 时,Γ 是抛物线

B. 当 $0<m<2$ 时,Γ 是离心率为$\frac{m}{2}$的椭圆

C. 当 $m>2$ 时,Γ 是离心率为$\frac{m}{2}$的双曲线

D. 若 Γ 与圆 O 有公共点,则 m 的取值范围是 $(2,6]$

11. 设 $x\in\mathbf{R}$,用 $||x||$ 表示 x 与任意整数之差的绝对值的最小值,例如 $||3.1||=0.1$,$||-2.7||=0.3$,则下列说法正确的是 ( )

关于绝对值的新定义

A. $||n+x||=||x||$ $(n\in\mathbf{Z})$

B. $||x||+||y||\leqslant||x+y||$

C. 方程 $||\ln x||=\frac{1}{2}$ 在 $(0,1)$ 上的根从大到小依次为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,则 $x_n=\mathrm{e}x_{n+1}$

D. 曲线 $y=\tan\pi x$ $(x>0)$ 与直线 $y=x$ 的交点的纵坐标从小到大依次为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$,则 $y_{25}-||y_{25}||=25$

三、填空题:本题共3小题,每小题5分,共15分.

12. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$.若 $P(X\geqslant1)=0.5$,且 $P(X\leqslant0.6)=0.3$,则 $P(X\leqslant1.4)=$________.

13. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c.若 $\cos A=\frac{1}{3}$,且 $\frac{b^2+c^2-a^2}{b^2}=\frac{\sin C}{\sin A}$,则 $\sin B=$________.

14. 已知 $a>0,b>0$.若 $x\in[0,\pi]$,$(x-b)\sin ax\leqslant0$,则$\frac{a-1}{b}$的最大值为________.

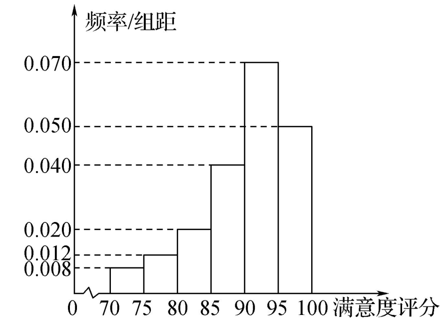
四、解答题:本题共5小题,共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分13分)

某旅行社推出“文化古城游”旅游路线后,为了了解游客的满意度,对该路线的游客进行随机抽样调查,得到如图所示的满意度评分的频率分布直方图.

(1) 估计游客对“文化古城游”路线满意度评分的众数和第80百分位数(同一组中的数据以该组的组中值作为代表);

(2) 现从参与“文化古城游”的游客中随机抽取3人,设这3人中满意度评分不低于90分的人数为 X,求 X 的分布列和数学期望(以样本数据中游客的满意度评分位于各区间的频率作为游客的满意度评分位于该区间的概率).



16. （本小题满分 15 分）

我们把公差不为零的等差数列称为一阶等差数列. 若$\{a_{n+1}-a_n\}$是一阶等差数列，则称$\{a_n\}$为二阶等差数列.

(1) 若$a_n=n^2+n+1$，判断$\{a_n\}$是否为二阶等差数列，并说明理由.

(2) 若$\{a_n\}$是二阶等差数列，且$a_1=1$，$a_2=4$，$a_3=9$. 求：

①数列$\{a_n\}$的通项公式；

②数列$\left\{\dfrac{a_n}{4a_n-1}\right\}$的前$n$项和$S_n$.

17. （本小题满分 15 分）

已知函数$f(x)=\ln(x+1)-ae^x+1$.

(1) 当$a=1$时，求$f(x)$的单调区间；

(2) 若$f(x)\leqslant \ln a$，求实数a的取值范围.

18. （本小题满分 17 分）

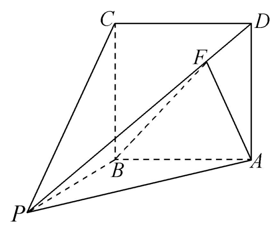
如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为正方形，平面$ABCD\perp$平面ABP，$\angle PAB=60°$，$AD=1$，$AP=2$，点F在线段PD上(点F与点P，D不重合).

(1) 若平面$AFB\cap$平面$PCD=l$，求证：$l\,/\!/$平面$ABCD$；

(2) 当$\triangle AFB$的面积最小时，求二面角$P-AF-B$的正弦值；

(3) 在(2)的条件下，若$F_1,F_2,\cdots,F_n$是线段PF的$n+1$等分点，分别过点$F_1,F_2,\cdots,F_n$在四棱锥上作平行于平面AFB的截面，记相应的截面面积为$S_i(i=1,2,3,\cdots,n)$，求证：$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}S_i<\dfrac{7\sqrt{3}}{48}$.

$\left(\text{参考公式：}1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$



19. （本小题满分 17 分）

已知椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且过点$(\sqrt{2},1)$.

(1) 求椭圆E的方程.

(2) 若直线与椭圆交于两点，当以这两点和椭圆的中心为顶点的三角形面积达到最大值时，称该直线为椭圆的“好直线”.

①设O为坐标原点，若斜率存在的直线l是椭圆E的“好直线”，直线l与椭圆E交于A，B两点，求$\triangle AOB$的面积；

②已知四边形$MNPQ$为平行四边形，若直线MN，NP，PQ，QM均为椭圆E的“好直线”，且不与y轴平行，求四边形$MNPQ$面积的最小值.

广东省广州市 2025 届普通高中毕业班综合测试(二)

(满分 150 分,考试时间 120 分钟)

答案见 P171

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{0,1,2,3\}$,$B=\{x\mid 2^x<7\}$,则 $A\cap B$ 的元素个数为 ( )

A. 4　　B. 3

C. 2　　D. 1

2. 已知复数 z 满足 $|z-2\mathrm{i}|=1$,则 $|z|$ 的最小值为 ( )

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

3. 声强级 L_I(单位:dB)由公式 $L_I=10\lg\dfrac{I}{10^{-12}}$ 给出,其中 I 为声强(单位:$\mathrm{W/m^2}$). 轻柔音乐的声强一般在 $10^{-8}\sim10^{-6}\ \mathrm{W/m^2}$,则轻柔音乐的声强级范围是 ( )

A. 0～20 dB　　B. 20～40 dB

C. 40～60 dB　　D. 60～80 dB

4. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)(1-2x)^4$ 的展开式中,x^2 的系数为 ( )

A. 24　　B. -24

C. -36　　D. -40

5. 已知 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,$\tan 2\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{1+\sin 2\theta}}$,则 $\tan\theta=$ ( )

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{1}{2}$

C. 2　　D. 3

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x\leqslant 0,\\ x-\dfrac{a}{x}, & x>0,\end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(x)-a$ 恰有 2 个零点,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,0)$　　B. $(0,1]$

C. $(0,4]$　　D. $(4,+\infty)$

7. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,过点 F_2 的直线与椭圆 C 相交于 A,B 两点,且 $|AF_1|=|AB|$,$|BF_1|=a$,则椭圆 C 的离心率为 ( )

A. $\dfrac{1}{6}$　　B. $\dfrac{1}{3}$

C. $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

8. 已知函数 $f(x)=\sin x+\dfrac{3}{2}\sin 2x+2(x-1)$ 在 $[-2\pi,2\pi]$ 上的所有极值点从小到大依次记为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,则 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)=$ ( )

A. -32　　B. -16

C. -8　　D. -4

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

9. 一组成对样本数据 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)(n\geqslant10,n\in\mathbf{N}^*)$ 的散点位于一条直线附近,它的样本相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}\left(\text{其中 }\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i,\bar{y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\right)$,由最小二乘法求得经验回归方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$,其中 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$,则 ( )

A. 若 $r>0$,则 $\hat{b}>0$

B. 若 $z_i=y_i-2(i=1,2,\cdots,n)$,则成对数据 (x_i,z_i) 的样本相关系数 r_1 等于 r

C. 若 $z_i=2y_i(i=1,2,\cdots,n)$,则成对数据 (x_i,z_i) 的样本相关系数 r_2 大于 r

D. 若 $z_i=2y_i(i=1,2,\cdots,n)$,则成对数据 (x_i,z_i) 的经验回归方程为 $\hat{z}=2\hat{b}x+2\hat{a}$

10. 瑞士著名数学家欧拉在 1765 年提出:三角形的外心、重心、垂心位于同一直线上,这条直线被后人称为三角形的"欧拉线". 若 $\triangle ABC$ 的三个顶点坐标分别为 $A(3,4)$,$B(-1,2)$,$C(1,0)$,其"欧拉线"为 l,圆 $M:(x-a)^2+y^2=1$,则 ( )

A. 过 A 作圆 M 的切线,切点为 P,则 $|AP|$ 的最小值为 4

B. 若直线 l 被圆 M 截得的弦长为 2,则 $a=-1$

C. 若圆 M 上有且只有两个点到 l 的距离为 1,则 $-1-2\sqrt{2}<a<-1+2\sqrt{2}$

D. 存在 a,使圆 M 上有三个点到 l 的距离都为 1

11. 已知 A,B 是球 O 的球面上两点,C 为该球面上的动点,球 O 的半径为 4,$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$,二面角 $O-AB-C$ 的大小为 120°,则 ( )

A. $\triangle ABC$ 是钝角三角形

B. 直线 OC 与平面 ABC 所成的角为定值

C. 三棱锥 $O-ABC$ 体积的最大值为 $8\sqrt{2}$

D. 三棱锥 $O-ABC$ 外接球的表面积为 $\dfrac{128\pi}{3}$

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. 若函数 $f(x)=\log_a|x-m|(a>0$,且 $a\neq1)$ 是偶函数,且 $f(-2)=2$,则 $a=$________.

13. 一个袋子里有大小和质地相同的 4 个球,标号为 1,2,3,4. 从中有放回地随机取球,每次取 1 个球,共取 4 次,把每次取出的球的标号排成一列数,则这列数中恰有 3 个不同整数的概率为________.

14. 在平面四边形 $ABCD$ 中,$AC=AD=4$,$\angle CAD=60^\circ$,$\angle ABC=90^\circ$. 若 $\triangle ABD$ 的面积是 $\triangle BCD$ 的面积的 2 倍,则 BD 的长为________.

解三角形问题

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,且 a_n 是 S_n 和 8 的等差中项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

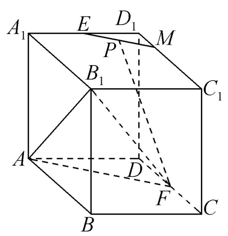
(2) 令 $b_n=\log_2 a_n$,数列 $\left\{\dfrac{1}{b_nb_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n,求证:$\dfrac{1}{12}\leqslant T_n<\dfrac{1}{3}$.

16.（本小题满分 15 分）

如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是菱形，$\angle BAD$ 为锐角，E，F 分别为棱 A_1D_1，CD 的中点，点 M 在棱 C_1D_1 上，且 $C_1M=3MD_1$，$AA_1=AB=4$，点 P 在直线 EM 上.

(1) 求证：EM∥平面 AB_1F；

(2) 若直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $32\sqrt{3}$，当直线 FP 与平面 AB_1F 所成角的正弦值最大时，求 MP 的长.



17.（本小题满分 15 分）

已知函数 $f(x)=e^{2x}$，$g(x)=\sqrt{ax}$（$a\in\mathbf{R}$，且 $a\neq0$）.

(1) 若 $a>0$，直线 l：$y=2x+m$ 与曲线 $y=f(x)$ 和曲线 $y=g(x)$ 都相切，求 a 的值；

(2) 若 $f(x)\geqslant g(x)$，求 a 的取值范围.

18.（本小题满分 17 分）

已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点 $F(2,0)$ 到双曲线 C 的一条渐近线的距离为 $\sqrt{3}$.

(1) 求双曲线 C 的方程.

(2) 设点 P 在双曲线 C 的右支上，过点 P 作圆 O：$x^2+y^2=\dfrac{3}{2}$ 的两条切线，一条与双曲线 C 的左支交于点 M，另一条与 C 的右支交于点 N（异于点 P）.

①求证：$OM\perp OP$；

②当 $\triangle PMN$ 的面积最小时，求直线 PM 和直线 PN 的方程.

19.（本小题满分 17 分）

设 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant4$，集合 $P_n=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n),x_i\in\{0,1\},1\leqslant i\leqslant n,i\in\mathbf{N}^*\}$（$\boldsymbol{x}$ 为向量）. 若 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)\in P_n$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3,\cdots,b_n)\in P_n$，定义 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i$.

(1) 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in P_4$，且 $\boldsymbol{a}=(0,1,1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,1,0,1)$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=2$，写出所有的 $\boldsymbol{c}$；

(2) 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in P_n$，且 $\boldsymbol{a}=(1,1,1,\cdots,1)$，设满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=m$ 的 $\boldsymbol{b}$ 的个数为 $f(m)$，求 $\sum\limits_{m=0}^{n-1}(-1)^m f(m)$ 的值；

(3) 从集合 P_n 中任取两个不同的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，记 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=X$，求 X 的分布列与数学期望.

湖北省武汉市2025届高中毕业生四月调研考试

(满分150分,考试时间120分钟)

答案见P179

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-4x\leqslant 0\}$,$B=\{x|-3<x\leqslant 4\}$,则 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=$ ( )

A. $(0,4)$　　B. $[-3,4]$

C. $(-3,0)$　　D. $[4,+\infty)$

2. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^n-11$,S_n 为其前 n 项和,则 S_n 的最小值为 ( )

A. -9　　B. -7

C. -3　　D. -19

3. 若向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,且 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$,则向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 ( )

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

4. 随着DeepSeek的流行,各种AI大模型层出不穷.现有甲、乙两个AI大模型,在对甲、乙两个大模型进行深度体验后,6位评委分别对甲、乙进行打分(满分10分),得到如下所示的统计表格,则下列结论错误的是 ( )

模型名称	评委编号 1	2	3	4	5	6
甲	7.0	9.3	8.3	9.2	8.9	8.9
乙	8.1	9.1	8.5	8.6	8.7	8.6

A. 甲得分的平均数大于乙得分的平均数

B. 甲得分的众数大于乙得分的众数

C. 甲得分的中位数大于乙得分的中位数

D. 甲得分的方差大于乙得分的方差

5. 若 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=7$,则 $\cos 2\alpha$ 的值为 ( )

A. $\frac{7}{25}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{12}{25}$

D. $\frac{4}{5}$

6. 在△ABC 中,内角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c,且 $C=\frac{\pi}{3}$,$c=6$,△ABC 的面积为 $\sqrt{3}$,D 为边 AB 上的一点,CD 是∠ACB 的平分线,则 $CD=$ ( )

A. $\sqrt{3}$　　B. 1

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

7. 已知正四棱锥的侧棱长为 $3\sqrt{3}$,当该棱锥的体积最大时,它的高为 ( )

A. 1　　B. $\sqrt{3}$

C. 2　　D. 3

8. 已知连续型随机变量 ξ 服从正态分布 $N\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$,记函数 $f(x)=P(\xi\leqslant x)$,则 $f(x)$ 的图象 ( )

A. 关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称

B. 关于直线 $x=\frac{1}{4}$ 对称

C. 关于点 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 中心对称

D. 关于点 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ 中心对称

二、选择题:本题共3小题,每小题6分,共18分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得6分,部分选对的得部分分,有选错的得0分.

9. 若复数 $z=\frac{3-5\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$,则 ( )

A. $\bar{z}=4-\mathrm{i}$

B. $|\bar{z}|=\sqrt{17}$

C. z 在复平面内对应的点位于第四象限

D. 复数 ω 满足 $|\omega|=1$,则 $|\omega-z|$ 的最大值为 $\sqrt{17}+1$

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+2a_2+\cdots+2^{n-1}a_n=n\cdot 2^n$,且 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,则 ( )

A. $a_1=2$

B. 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列

C. S_n,S_{2n},S_{3n} 构成等差数列

D. 数列 $\left\{\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}\right\}$ 的前100项和为 $\frac{25}{51}$

11. 已知曲线 C:$\sin(x+2y)=2x-y$,$P(x_0,y_0)$ 为曲线 C 上任意一点,则下列说法正确的有 ( )

A. 曲线 C 与直线 $y=x+1$ 恰有四个公共点

B. 曲线 C 与直线 $y=2x-1$ 相切

C. y_0 是关于 x_0 的函数

D. x_0 是关于 y_0 的函数

三、填空题:本题共3小题,每小题5分,共15分.

12. 双曲线 $x^2-\frac{y^2}{m}=1$ 的离心率为2,则实数 $m=$________.

13. 为了响应节能减排号召,某地政府决定大规模铺设光伏太阳能板.该地区未来第 x 年底光伏太阳能板的保有量 y(单位:万块)满足模型 $y=\frac{N}{1+\left(\frac{N}{y_0}-1\right)\mathrm{e}^{-px}}$,其中 N 为饱和度,y_0 为初始值,p 为年增长率.若该地区2024年底的光伏太阳能板的保有量约为20万块,以此为初始值,以后每年的增长率均为10%,饱和度为1020万块,则2030年底该地区光伏太阳能板的保有量约为________万块(结果四舍五入保留到整数,参考数据:$\mathrm{e}^{-0.5}\approx 0.61$,$\mathrm{e}^{-0.6}\approx 0.55$,$\mathrm{e}^{-0.7}\approx 0.49$).

14. 在各棱长均相等的正四面体 $PABC$ 中,取棱 PC 上一点 T,使得 $PT=2TC$,连接 TA,TB,若三棱锥 $T-PAB$ 的内切球的球心为 M,三棱锥 $T-ABC$ 的内切球的球心为 N,则平面 MAB 与平面 NAB 的夹角的正弦值是________.

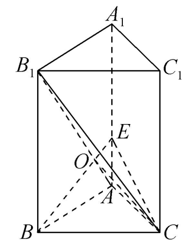
四、解答题:本题共5小题,共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分13分)

如图,在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AB=AC=2$,$AA_1=4$,$AB\perp AC$,AA_1 上的点 E 满足 $BE\perp AB_1$.

(1) 求证:$BE\perp$ 平面 AB_1C;

(2) 求平面 CBE 与平面 ABE 夹角的余弦值.



16.（本小题满分 15 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{a}{x}-1$.

(1) 若在点$(1,f(1))$处的切线斜率为-1,求实数 a 的值；

(2) 若 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

17.（本小题满分 15 分）

13 张大小、质地完全相同的卡牌中有 8 张数字牌,正面标有 1～8,此外还有 5 张字母牌,正面标有 A～E,将这 13 张牌随机排成一行.

(1) 求 5 张字母牌互不相邻的概率；

(2) 求在标有 8 的卡牌左侧没有数字牌的概率；

(3) 对于给定的整数 $k(1\leqslant k\leqslant 8)$,记“在标有 k 的数字牌左侧没有标号比 k 小的数字牌”为事件 A_k,求 A_k 发生的概率(结果用含 k 的式子表示).

18.（本小题满分 17 分）

已知集合 $A=\{x\mid x=m+\sqrt{3}n,m\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{Z}\}$,集合 B 满足 $B=\left\{x\,\middle|\,x\in A,且\dfrac{1}{x}\in A\right\}$.

(1) 判断 $2+\sqrt{3},3-\sqrt{3},0,7+4\sqrt{3}$ 中的哪些元素属于 B；

(2) 求证:若 $x\in B,y\in B$,则 $xy\in B$；

(3) 求证:若 $x=m+\sqrt{3}n\in B$,则 $m^2-3n^2=1$.

集合中的新定义

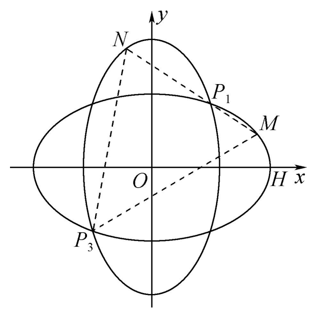
19.（本小题满分 17 分）

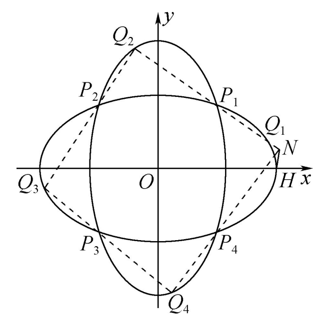
如图,椭圆 $\Gamma_1:\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{y^2}{n}=1(m>n>0)$,$\Gamma_2:\dfrac{x^2}{n}+\dfrac{y^2}{m}=1$,已知 Γ_1 的右顶点为 $H(2,0)$,且它们的交点分别为 $P_1(1,1),P_2(-1,1),P_3(-1,-1),P_4(1,-1)$.

(1) 求 Γ_1 与 Γ_2 的标准方程；

(2) 过点 P_1 作直线 MN,交 Γ_1 于点 M,交 Γ_2 于点 N,设直线 P_3M 的斜率为 k_1,直线 P_3N 的斜率为 k_2,求$\dfrac{k_2}{k_1}$(上述各点均不重合)；

(3) 若 Q_1 是 Γ_1 上的动点,直线 Q_1P_1 交 Γ_2 于点 Q_2,直线 Q_2P_2 交 Γ_1 于点 Q_3,直线 Q_3P_3 交 Γ_2 于点 Q_4,直线 Q_4P_4 与直线 Q_1P_1 交于点 N,求点 G 的坐标,使得直线 NG 与直线 NH 的斜率之积为定值(上述各点均不重合).





广东省深圳市 2025 届高三第二次调研考试

(满分 150 分,考试时间 120 分钟)

答案见 P184

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 下列各组数据中方差最大的一组是 ( )

A. 6,6,6,6,6

B. 5,5,6,7,7

C. 4,5,6,7,8

D. 4,4,6,8,8

2. 双曲线 $4x^2-y^2=4$ 的离心率为 ( )

A. $\sqrt{3}$　　B. 2

C. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\sqrt{5}$

3. 在四边形 $ABCD$ 中,若 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$,则“$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$”是“四边形 $ABCD$ 为正方形”的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 若 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3}{5}$,$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,则 $\sin\alpha=$ ( )

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

B. $\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$

C. $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

D. $\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$

5. 已知正四棱锥的底面边长为 6,且其侧面积是底面积的 2 倍,则此正四棱锥的体积为 ( )

A. $36\sqrt{3}$

B. $36\sqrt{6}$

C. $108\sqrt{3}$

D. $108\sqrt{6}$

6. 已知函数 $f(x)=ae^x-e^{-x}$(a 为常数),则 ( )

A. $\forall a\in\mathbf{R}$,$f(x)$为奇函数

B. $\exists a\in\mathbf{R}$,$f(x)$为偶函数

C. $\forall a\in\mathbf{R}$,$f(x)$为增函数

D. $\exists a\in\mathbf{R}$,$f(x)$为减函数

7. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差为$\dfrac{2\pi}{3}$,集合 $S=\{\cos a_n\mid n\in\mathbf{N}^*\}$. 若 $S=\{a,b,c\}$,则 $a+b+c=$ ( )

A. -1　　B. 0

C. 1　　D. $\sqrt{3}$

8. 已知复数 z_1,z_2 均不为 0,则下列等式不恒成立的是 ( )

A. $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

B. $|z_1-z_2|=|\overline{z_1}-\overline{z_2}|$

C. $z_1\cdot\overline{z_2}=\overline{z_1}\cdot z_2$

D. $|z_1\cdot\overline{z_2}|=|\overline{z_1}\cdot z_2|$

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $f(x)=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$,则 ( )

A. 函数 $f(x)$的最大值为 1

B. 函数 $f(x)$的最小正周期为 π

C. 函数 $f(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上单调递增

D. 函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$对称

10. 已知函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,$[f(x)]^2+[f(y)]^2=f(x+y)f(x-y)+1$,且 $f(1)=0$,则 ( )

A. $f(0)=0$　　B. $f(3)=0$

C. $f(x)$为偶函数　　D. $f(x)$的最大值为 1

11. 对于 $n\in\mathbf{N}^*$,将 n 表示为 $n=a_0\cdot 3^0+a_1\cdot 3^1+a_2\cdot 3^2+\cdots+a_k\cdot 3^k$,其中 $a_i\in\{-1,0,1\}(i=0,1,2,\cdots,k)$,$a_k\neq 0$. 记 $I(n)$为上述表示中 a_i 为 0 的个数(例如 $8=(-1)\cdot 3^0+0\cdot 3^1+1\cdot 3^2$,则 $I(8)=1$),则下列结论正确的有 ( )

A. $I(9)=2$

B. $I(3^n-1)=n-1$

C. $I(9n)=I(n)+2$

D. $I(9n+4)=I(n)+4$

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\leqslant 0,\\ x\ln x, & x>0.\end{cases}$若 $f(a)=e$,则实数 $a=$________.

13. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$的焦点为 $F(1,0)$,抛物线 C 的准线与 x 轴的交点为 T. 若过点 T 的直线 l 与抛物线C 交于A,B 两点,且 $FA=3FB$,则$\triangle TFA$ 的面积为________.

14. 将五张标有 1,2,3,4,5 的卡片按如图所示的方式摆放,若逐一取走这些卡片,每次取走的一张卡片与剩下的卡片中至多一张有公共边,则把这样的取卡顺序称为“和谐序”(例如按 1—3—5—4—2 取走卡片的顺序是“和谐序”,按 1—5—2—3—4 取走卡片的顺序不是“和谐序”). 现依次不放回地随机抽取这 5 张卡片,则取卡顺序是“和谐序”的概率为________.

古典概型问题

1	2	3
	4	
	5	

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

已知在$\triangle ABC$ 中,$A=\dfrac{\pi}{3}$,边 BC 上的高为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}BC$.

(1) 求 $\sin B\sin C$ 的值;

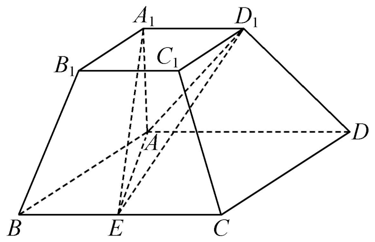
(2) 若 $BC=2$,求$\triangle ABC$ 的周长.

16.（本小题满分 15 分）

如图，在四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$AA_1\perp$平面 $ABCD$，$\angle ABC=60°$，$AA_1=A_1B_1=1$，E 是 BC 的中点.

(1) 求证：$DD_1\perp$平面 AD_1E；

(2) 求平面 AD_1E 与平面 A_1D_1E 夹角的余弦值.



17.（本小题满分 15 分）

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$F$ 为椭圆 E 的右焦点，P 为椭圆 E 上的动点，当直线 PF 与 x 轴垂直时，$PF=\frac{1}{2}$，R 是直线 $y=2$ 上一动点，PR 长的最小值为 1.

(1) 求椭圆 E 的方程；

(2) 过点 R 作椭圆 E 的两条切线分别交 x 轴于点 M，N，求$\triangle RMN$ 面积的取值范围.

18.（本小题满分 17 分）

已知函数 $f(x)=x\ln x-1$，函数 $f(x)$图象上的一点$(x_0,f(x_0))\left(x_0\neq\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$，按照如下的方式构造切线 $l_n(n\in\mathbf{N}^*)$：在点$(x_{n-1},f(x_{n-1}))$处作 $f(x)$的切线 l_n，记切线 l_n 与 x 轴交点的横坐标为 x_n.

(1) 写出 x_n 与 x_{n-1} 的递推关系式.

(2) 记 $f(x)$的零点为 r，且 $x_0>r$. 求证：

①当 $x_{n-1}>r$ 时，$x_n>r$；

②对于任意的 $C\in\left[\frac{1}{2},1\right)$，都有 $|x_n-r|<C^n|x_0-r|$.

利用导数结合数列
知识证明不等式

19.（本小题满分 17 分）

从编号为 $1,2,\cdots,n(n\in\mathbf{N}^*)$的座位中按照如下方式选取座位：选取至少 2 个座位，并且选取的座位中没有相邻的座位，则称这样的座位选取方案为“社交排位”.

(1) 若 n 个座位排成一排，对应的“社交排位”数为 u_n，例如当 $n=1$ 时，由于至少要选取 2 个座位，故 $u_1=0$；当 $n=3$ 时，由于只能选取第 1，3 个座位，故 $u_3=1$. 求：

①u_4，u_5；

②使得 $u_n\geqslant 300$ 的最小正整数 n.

(2) 若 n 个座位排成一圈，对应的“社交排位”数为 r_n，求数列$\{r_n\}$中第 2025 个奇数对应的正整数 n.

江苏省苏锡常镇四市2025届高三教学情况调研(二)

(满分150分,考试时间120分钟)

答案见P188

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{x\mid 0<\log_2 x<2\}$,则 $A\cap B=$ ( )

A. $\{2,3\}$　B. $\{2,3,4\}$

C. $\{1,2,3\}$　D. $\{1,2,3,4\}$

2. 已知 $z+2\mathrm{i}=\dfrac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}+1}$,则 $z=$ ( )

A. $-2\mathrm{i}$　B. $-\mathrm{i}$

C. i　D. $2\mathrm{i}$

3. 诗歌朗诵比赛共有八位评委分别给出某选手的原始评分.评定该选手的成绩时,从8个原始评分中去掉1个最高分和1个最低分,得到6个有效评分.6个有效评分与8个原始评分相比,一定不变的数字特征是 ( )

A. 极差　B. 平均数

C. 中位数　D. 标准差

4. 已知圆 $C:x^2+(y-2)^2=\dfrac{10}{3}$,将直线 $l_1:\sqrt{3}x-y=0$ 绕原点按顺时针方向旋转30°后得到直线 l_2,则 ( )

A. 直线 l_2 过圆心 C

B. 直线 l_2 与圆 C 相交,但不过圆心

C. 直线 l_2 与圆 C 相切

D. 直线 l_2 与圆 C 无公共点

5. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}(0<\alpha<\pi)$,则 $\tan 2\alpha=$ ( )

A. $-\dfrac{24}{7}$　B. $\dfrac{24}{7}$

C. $-\dfrac{24}{25}$　D. $\dfrac{24}{25}$

6. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q\neq-1$,前 n 项和为 S_n,则 $\forall n\in\mathbf{N}^*$,下列结论一定正确的是( )

A. $S_n+S_{3n}=2S_{2n}$

B. $3S_n+S_{3n}=2S_{2n}$

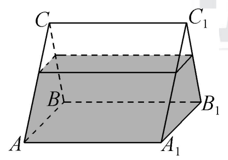
C. $S_{2n}^2=S_nS_{3n}$

D. $S_{2n}(S_{2n}-S_n)=S_n(S_{3n}-S_n)$

7. 已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$. 若 $f(x+1)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数,且 $f(x)-g(x-2)=2-x$,则 $f(g(-1))=$ ( )

A. -1　B. 0　C. 1　D. 2

8. 一个底面边长和侧棱长均为4的正三棱柱密闭容器 $ABC-A_1B_1C_1$,其中盛有一定体积的水,当底面 ABC 水平放置时,水面高为 $\dfrac{15}{4}$. 当侧面 AA_1B_1B 水平放置时(如图),容器内的水形成新的几何体.若该几何体的所有顶点均在同一个球面上,则该球的表面积为 ( )



A. $\dfrac{100}{3}\pi$　B. $\dfrac{200}{3}\pi$

C. 100π　D. $\dfrac{400}{3}\pi$

二、选择题:本题共3小题,每小题6分,共18分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得6分,部分选对的得部分分,有选错的得0分.

9. 在 $(1-2x)^5$ 的展开式中,则 ( )

A. x 的系数为 -10

B. 第3项与第4项的二项式系数相等

C. 所有项的二项式系数和为32

D. 所有项的系数和为32

10. 已知函数 $f(x)=\sin x+\cos x+|\sin x-\cos x|$,则 ( )

A. $f(x)$ 的图象关于点 $(\pi,0)$ 对称

B. $f(x)$ 的最小正周期为 2π

C. $f(x)$ 的最小值为 -2

D. $f(x)=\sqrt{3}$ 在 $[0,2\pi]$ 上有四个不同的实数解

11. 已知 P 为曲线 $E:y^4=4x$ 上一个动点(异于原点),曲线 E 在 $P(x,y)(y\neq0)$ 处的切线是指曲线 $y=\pm\sqrt[4]{4x}$ 在点 P 处的切线.直线 m 为曲线 E 在点 P 处的切线,过点 P 作 m 的垂线 n. 若直线 m,n 分别与 x 轴交于 A,B 两点,则 ( )

A. 曲线 E 关于 x 轴对称

B. 点 P 到点 $F(1,0)$ 的距离不小于点 P 到直线 $x=-1$ 的距离

C. 存在点 P,使得 $2|PA|=|PB|$

D. 当 $|AB|$ 取得最小值时,直线 OP 的斜率为 $\pm4\sqrt{2}$

三、填空题:本题共3小题,每小题5分,共15分.

12. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$, $\boldsymbol{b}=(x,3)$. 若 $\boldsymbol{a}\parallel(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$,则实数 x 的值为________.

13. 在平面直角坐标系 xOy 中,双曲线 C 的中心在原点,焦点在 x 轴上,焦距长为 $4\sqrt{3}$. 若双曲线 C 和抛物线 $y^2=x$ 交于 A,B 两点,且 $\triangle OAB$ 为正三角形,则双曲线 C 的离心率为________.

14. 已知随机变量 X,Y 相互独立,且 $X\sim N(4,4)$, $Y\sim B\left(8,\dfrac{1}{2}\right)$,则 $P(X\leqslant4,Y\leqslant4)=$________;若 $Z=X+Y$,则 $\sum\limits_{t=1}^{15}P(Z\leqslant t)=$________.

正态分布与二项分布的综合

四、解答题:本题共5小题,共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分13分)

某种产品可以采用甲、乙两种工艺来生产,为了研究产品的质量与所采用的生产工艺之间的关联性,现对该种产品进行随机抽查,得到的结果如表所示.

	工艺甲	工艺乙	合计
合格	60	40	100
不合格	20	30	50
合计	80	70	150

(1) 依据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验,分析产品的质量是否与采用的生产工艺有关;

(2) 在不合格的50件样本产品中任选3件,求在这3件样本产品中至少有1件是采用工艺甲生产的条件下,这3件样本产品中恰有一件是采用工艺乙生产的概率.

附: $\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $n=a+b+c+d$.

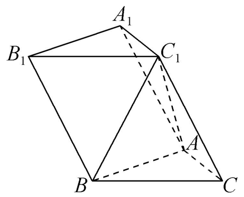
α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

16.（本小题满分 15 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=2$，$BC=2\sqrt{2}$，$\angle ABC=45°$，$BC_1\perp AC$.

(1) 求证：$AC\perp$平面 ABC_1；

(2) 若 $CC_1=2\sqrt{2}$，二面角 C_1-AC-B 的大小为 $60°$，求直线 BC_1 与平面 AA_1B_1B 所成角的正弦值.



17.（本小题满分 15 分）

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为 $\frac{3}{5}$，且经过点$\left(3,\frac{16}{5}\right)$，$F_1$，$F_2$ 分别是椭圆 E 的左、右焦点.

(1) 求椭圆 E 的标准方程.

(2) 过点 F_2 的直线与椭圆 E 交于 P，Q 两点. 若 $\triangle F_1PQ$ 的内切圆半径为 r，且 $r=\frac{\sqrt{3}}{10}|PQ|$，求 $|F_2P|\cdot|F_2Q|$ 的值.

18.（本小题满分 17 分）

已知函数 $f(x)=\sin x$，$g(x)=e^{ax}$，$a\in\mathbf{R}$.

(1) 若曲线 $y=f(x)$在点 $O(0,0)$处的切线也是曲线 $y=g(x)$的切线，求 a 的值；

(2) 讨论函数 $h(x)=\frac{x-1}{g(x)}$在区间$(0,+\infty)$上的单调性；

(3) 若 $f(x)g(x)<x$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$恒成立，求 a 的取值范围.

19.（本小题满分 17 分）

若无穷数列$\{a_n\}$满足：$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_1>\frac{a_1+a_2}{2}>\cdots>\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}>\cdots$，则称$\{a_n\}$为“均值递减数列”.

(1) 已知无穷数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若$\{a_n\}$为“均值递减数列”，求证：$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$S_n>na_{n+1}$；

(2) 若数列$\{b_n\}$的通项公式为 $b_n=-6(n-4)^3+n^2$，判断$\{b_n\}$是否为“均值递减数列”，并说明理由；

(3) 若两个正项数列$\{c_n\}$和$\{d_n\}$均为“均值递减数列”，求证：数列$\{c_nd_n\}$也为“均值递减数列”.

江苏省南通等苏北七市2025届高三第三次调研测试

（满分150分，考试时间120分钟）

答案见P193

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\mid -1<x<1\}$，$B=\{x\mid 0\leqslant x<2\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{x\mid -1<x<2\}$

B. $\{x\mid 0\leqslant x<2\}$

C. $\{x\mid 0\leqslant x<1\}$

D. $\{x\mid -1<x<1\}$

2. 若复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})z=\mathrm{i}$，则在复平面内，$z$ 对应的点所在的象限是（　　）

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

3. 第九届亚冬会在哈尔滨举行，参加自由式滑雪女子大跳台决赛的六位选手的得分如下：119.50，134.75，154.75，159.50，162.75，175.50. 该组数据的第40百分位数为（　　）

A. 134.75　　B. 144.75

C. 154.75　　D. 159.50

4. 已知函数 $f(x)=x^3-3ax-1$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与 x 轴平行，则 $a=$（　　）

A. -3　　B. -1

C. 0　　D. 1

5. 在正项数列 $\{a_n\}$ 中，设甲：$a_{m+n}=a_m a_n$，乙：$\{a_n\}$ 是等比数列，则（　　）

A. 甲是乙的充分不必要条件

B. 甲是乙的必要不充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲是乙的既不充分又不必要条件

6. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x$ 的图象关于直线 $x=x_0$ 对称，则 $\tan 2x_0=$（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $-\sqrt{3}$

7. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$x_0(x_0\neq 0)$ 是 $f(x)$ 的极大值点，则（　　）

A. $-x_0$ 是 $f(-x)$ 的极小值点

B. $-x_0$ 是 $-f(x)$ 的极大值点

C. $-x_0$ 是 $-f(-x)$ 的极小值点

D. $-x_0$ 是 $f(|x|)$ 的极大值点

8. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，左、右焦点分别为 F_1，F_2，过点 F_2 的直线交椭圆 C 于 A，B 两点. 若 $AF_1\perp AF_2$，则 $\dfrac{|AF_2|}{|BF_2|}=$（　　）

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 5

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.

9. 已知 $a=\log_2 10$，$b=\log_3\dfrac{1}{10}$，则（　　）

A. $ab<0$

B. $4^a\cdot 9^b=1$

C. $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}>1$

D. $\log_5 6=\dfrac{b-a}{ab-b}$

10. 已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，直线 l：$y=kx$ 交双曲线 C 于 A，B 两点，则（　　）

A. $|k|<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\big||AF_1|-|BF_1|\big|=2\sqrt{3}$

C. $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}$ 的最小值为 -3

D. 点 F_2 到 l 的距离的最大值为 $\sqrt{3}$

11. 定义：一个平面封闭区域内任意两点之间的距离的最大值称为该区域的“直径”. 在 $\triangle ABC$ 中，$BC=1$，BC 边上的高等于 $\tan A$，以 $\triangle ABC$ 的各边为直径向 $\triangle ABC$ 外分别作三个半圆，记三个半圆围成的平面区域为 W，其“直径”为 d，则（　　）

三角形中的新定义

A. $AB^2+AC^2=3$

B. $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$

C. 当 $\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$d=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

D. d 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{6}+1}{2}$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12. 若随机变量 $X\sim N(1,\sigma^2)$，$2P(X<0)=P(X\leqslant 2)=m$，则 $m=$________.

13. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(x-2)$，且 $f(x)=\begin{cases}2\cos\dfrac{\pi}{2}x, & -1<x\leqslant 1,\\ 1-|x-2|, & 1<x\leqslant 3,\end{cases}$ 则方程 $3f(x)=x$ 的实数解的个数为________.

14. 某封闭的圆锥容器的轴截面为等边三角形，高为6. 一个半径为1的小球在该容器内自由运动，则小球能接触到的圆锥容器内壁的最大面积为________.

四、解答题：本题共5小题，共77分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分13分）

已知某校有甲、乙两支志愿服务队，甲队由3名男生和3名女生组成，乙队由4名男生和1名女生组成.

(1) 先从两队中选取一队，选取甲队的概率为 $\dfrac{2}{3}$，选取乙队的概率为 $\dfrac{1}{3}$，再从该队中随机选取一名志愿者，求该志愿者是男生的概率；

(2) 在某次活动中，从甲队中随机选取2名志愿者支援乙队，记 X 为乙队中男生与女生人数之差，求 X 的分布列与期望.

16.（本小题满分 15 分）

已知数列$\{a_n\}$是等差数列，记其前 n 项和为 S_n，且 $S_3=a_5$，$a_{2n}=2a_n+\frac{1}{4}$.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式.

(2) 将数列$\{a_n\}$与$\{\sqrt{S_n}\}$的所有项从小到大排列得到数列$\{b_n\}$.

①求数列$\{b_n\}$的前 20 项和；

②求证：$\frac{1}{b_1^2}+\frac{1}{b_2^2}+\cdots+\frac{1}{b_n^2}<32$.

17.（本小题满分 15 分）

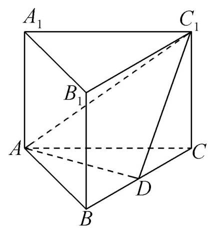
如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，点 D 在边 BC 上，$AD\perp DC_1$.

(1) 求证：$AD\perp$平面 BB_1C_1C.

(2) 若 $AB=AC=2\sqrt{2}$，$AB\perp AC$，二面角 $C-AC_1-D$ 的大小为$\frac{\pi}{3}$.

①求直线 AC 与平面 ADC_1 所成角的正弦值；

②点 E 在侧面 ABB_1A_1 内，且三棱锥 $E-ADC_1$ 的体积为$\frac{4}{3}$，求点 E 运动轨迹的长度.



18.（本小题满分 17 分）

设 O 为坐标原点，抛物线 C_1：$y^2=2x$ 与 C_2：$y^2=2px(p>0)$的焦点分别为 F_1，F_2，F_1 为线段 OF_2 的中点，点 A_1，B_1 在抛物线 C_1 上(点 A_1 在第一象限)，点 A_2，B_2 在曲线 C_2 上，$\overrightarrow{A_2B_2}=2\overrightarrow{A_1B_1}$.

(1) 求曲线 C_2 的方程；

(2) 设直线 A_1B_1 的方程为 $y=2x-2$，求直线 A_1A_2 的斜率；

(3) 若直线 A_1A_2 与 B_1B_2 的斜率之积为-2，求四边形 $A_1A_2B_2B_1$ 面积的最小值.

19.（本小题满分 17 分）

记 $\prod_{i=1}^{n}a_i=a_1a_2\cdots a_n$，已知函数 $f(x)$和 $g(x)$的定义域都为 D，若存在 $x_1,x_2,\cdots,x_m\in D$，使得$[f(x)-g(x)]\cdot\prod_{i=1}^{m}(x-x_i)\leqslant 0$，当且仅当 $x=x_i$，$i=1,2,\cdots,m$ 时，等号成立，则称 $f(x)$和 $g(x)$在 D 上“m 次缠绕”.

(1) 判断 $f(x)=\sin x$ 和 $g(x)=\cos x$ 在$(0,2\pi)$上“几次缠绕”，并说明理由；

(2) 设 $f(x)=\ln x+\frac{a}{x^2}$，若 $f(x)$和 $f\left(\frac{1}{x}\right)$在$(0,+\infty)$上“3 次缠绕”，求实数 a 的取值范围；

(3) 记所有定义在区间(a,b)上的函数组成集合 A，求证：给定 $m\in\mathbf{N}^*$，对任意 $F(x)\in A$，都存在 $f(x)$，$g(x)\in A$，使得 $F(x)=f(x)+g(x)$，且 $f(x)$和 $g(x)$在(a,b)上“m 次缠绕”.

安徽省合肥市 2025 届高三 5 月教学质量检测

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）

答案见 P199

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\mid\sqrt{x}\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid x^2-x>0\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $(1,4]$　　B. $(0,4]$

C. $(0,1)$　　D. $(0,2]$

2. 若复数 z 满足 $(2+\mathrm{i})\cdot z=\mathrm{i}$，则 $z\cdot\bar{z}=$（　　）

A. $-\dfrac{3}{25}$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$　　D. $\dfrac{1}{5}$

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，若 $a_2=1$，$a_6=8$，则 $a_4=$（　　）

A. 4　　B. ± 4

C. $2\sqrt{2}$　　D. $\pm 2\sqrt{2}$

4. 已知空间中两条直线 a，b 无公共点，则"直线 a，b 与平面 α 所成的角相等"是"$a/\!/b$"的（　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. 有 4 名同学到书店购买课外书，每人购买一本，根据需求，书店有 5 种书适合 4 名同学购买，那么 4 名同学恰好购买了 3 种书的方法有（　　）

A. 240 种

B. 360 种

C. 480 种

D. 500 种

6. 设双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过点 F_2 且斜率为 $-2\sqrt{2}$ 的直线在第一象限交双曲线 C 于点 P. 若 $|PF_1|=|F_1F_2|$，则双曲线 C 的离心率为（　　）

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$

C. 3　　D. $3\sqrt{2}$

7. 已知函数 $f(x)=|\ln(x-a)|$，其中 $a>0$. 若 $f(x_1)=f(x_2)$，$x_1\neq x_2$，$a(x_1+x_2)<x_1x_2$，则 a 的取值范围是（　　）

A. $(1,+\infty)$

B. $(2,+\infty)$

C. $(1,2)$

D. $(0,1)$

8. 已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的所有棱长都为 3，点 G 是 $\triangle PAC$ 的重心，过点 G 作平面 α. 若平面 $\alpha/\!/$平面 PCD，则平面 α 截正四棱锥 $P-ABCD$ 的截面面积为（　　）

A. $\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$

B. $\dfrac{5\sqrt{15}}{8}$

C. $2\sqrt{3}$

D. $2\sqrt{15}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 有一组样本数据 1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，现去除其中的两个数据，去除的两个数据记为 x 和 y，则下列说法一定正确的是（　　）

A. 若 $xy=18$，则极差不变

B. 若 $xy=18$，则第 75 百分位数不变

C. 若 $x+y=11$，则平均数不变

D. 若 $x+y=11$，则中位数不变

10. 已知实数 a，b 满足 $a>0$，$b>1$，$\mathrm{e}^a-b<a^{-1}-(\ln b)^{-1}$，则下列结论正确的是（　　）

A. $\mathrm{e}^{2a}<b^2$

B. $\mathrm{e}a>b$

C. $\mathrm{e}^a+a>\ln b+b$

D. $a<b-1$

11. 已知 $f(x)f(x+2)+2f(x+1)=0$，$f(x)\neq 0$，且当 $0<x<3$ 时 $f(x)=2^x$，则下列说法正确的是（　　）

A. $f(x)=f(x+3)$

B. 当 $x\in(9,12)$ 时，$f(x)=2^{11-x}$

C. $f(5^{2025})=1$

D. $\sum\limits_{n=1}^{100}nf(n)=3350$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(x,1)$，$\boldsymbol{b}=(-2,1)$，若 $(\boldsymbol{a}-x\boldsymbol{b})/\!/\boldsymbol{b}$，则 $x=$________.

13. 已知点 P 在椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 上，点 Q 在圆 $x^2+y^2-2y=0$ 上，$F(-1,0)$，则 $|PQ|+|PF|$ 的最大值为________.

14. 已知函数 $f(x)=x^3-x^2-2x$，若 $f(\sin x)>f(\cos x)$，则 $\tan x$ 的取值范围是________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. （本小题满分 13 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且满足 $\sqrt{3}a\sin C+a\cos C=b+c$.

(1) 求角 A；

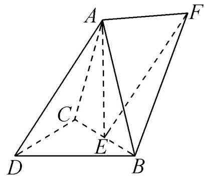
(2) 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $10\sqrt{3}$，$BC=7$，求边 BC 上的中线 AD 的长.

16.（本小题满分 15 分）

如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，$DB=DC=BC=2$，$AD=\sqrt{7}$，$AB=\sqrt{5}$，平面 $ACB\perp$ 平面 DCB，E 是 BC 的中点，且满足 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}$.

(1) 证明：$AE\perp BC$；

(2) 求二面角 $D-AB-F$ 的正弦值.



17.（本小题满分 15 分）

某城市推广垃圾分类，设置智能回收箱（方式 A）和传统垃圾桶（方式 B）. 统计显示，60% 的居民选择方式 A，40% 的居民选择方式 B. 若垃圾被正确分类，则垃圾被回收，不用填埋. 智能回收箱的正确分类率为 85%，错误分类后需人工处理，人工处理可将错误分类垃圾的 40% 重新正确分类，其余直接填埋；传统垃圾桶的正确分类率为 75%，错误分类后直接填埋.

(1) 求垃圾最终被填埋的概率；

(2) 若某吨垃圾被填埋，求其最初通过传统垃圾桶投放的概率；

(3) 现有一吨垃圾要整体处理，设 X 为其处理成本（单位：元），正确分类无需成本，人工处理成本为 200 元，填埋成本为 500 元，求 X 的分布列及数学期望.

18.（本小题满分 17 分）

已知抛物线 C：$y^2=2px\ (p>0)$，过抛物线焦点 F 且斜率为 $\frac{4}{3}$ 的直线与抛物线 C 交于 A，B 两点（点 A 在第一象限），线段 AB 的中点 M 的纵坐标为 $\frac{3}{2}$.

(1) 求抛物线 C 的方程.

(2) 点 P 在抛物线上移动，位于 A，B 两点之间且与 A，B 两点不重合. 若直线 AP 交准线于点 D，直线 BP 交准线于点 E，其中点 E 在点 D 的上方.

①是否存在点 P，使 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PDE}$？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

②求线段 DE 长的最小值.

抛物线中的面积及最值问题

19.（本小题满分 17 分）

已知函数 $f(x)=e^x$.

(1) 求证不等式：$f(x)\geqslant f'(m)(x-m)+f(m)$；

(2) 记 $a_n=f(n)$，求证：$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\geqslant n\cdot e^{\frac{n+1}{2}}$；

(3) 已知 $k_1,k_2,\cdots,k_n>0$，求证：$\frac{k_1+k_2+\cdots+k_n}{n}>\sqrt[n]{k_1\cdot k_2\cdot\cdots\cdot k_n}$.

山东省青岛市、淄博市2025届高三第二次适应性检测

（满分150分，考试时间120分钟）

答案见P203

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{2,3,5\}$，$B=\{1,2,6\}$，则 $(\complement_U A)\cap B=$（　　）

A. $\{1\}$　　B. $\{1,2\}$

C. $\{1,6\}$　　D. $\{2,6\}$

2. 命题"$\forall x>y, x^2>y^2$"的否定为（　　）

A. $\forall x>y, x^2\leqslant y^2$

B. $\forall x<y, x^2\leqslant y^2$

C. $\exists x<y, x^2\leqslant y^2$

D. $\exists x>y, x^2\leqslant y^2$

3. 某市开展"全民阅读"实施效果的调查研究，按区域划分为核心区、开发区、远郊区，各区的人口比例为 $2:3:4$. 现采用分层抽样的方法从各区中抽取人员进行调研. 已知从开发区抽取的人数为300，则从核心区抽取的人数为（　　）

A. 90　　B. 120

C. 180　　D. 200

4. 记等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_2+a_3=6$，$a_1a_4=8$，则 $S_4=$（　　）

A. 15　　B. 14

C. 13　　D. 12

5. 设函数 $f(x)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，则下列结论正确的是（　　）

A. $f(x)$ 的周期为 2π

B. $y=f(x)$ 的图象关于点 $(\pi,0)$ 中心对称

C. $f\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的一个极值点是 $\dfrac{\pi}{6}$

D. $f(x)$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}\right)$ 上单调递减

6. 已知一个圆锥的侧面展开图是个半圆，其母线长为 $2\sqrt{3}$，被平行于其底面的平面所截，截去一个底面半径为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 的圆锥，则所得圆台的体积为（　　）

A. $\dfrac{13\pi}{9}$　　B. $\dfrac{13\pi}{3}$

C. $\dfrac{26\pi}{9}$　　D. $\dfrac{13\sqrt{3}\pi}{9}$

7. 直线 $l: y=kx+2$ 与圆 $O: x^2+y^2=4$ 交于 A,B 两点，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-2$，则 $k=$（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $\pm\sqrt{3}$

C. $\dfrac{1}{3}$　　D. ± 1

8. 对于非空集合 M，定义函数 $\varphi_M(x)=\begin{cases}0, x\notin M,\\ 1, x\in M,\end{cases}$ $A=\left\{x\,\middle|\,\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\geqslant\dfrac{1}{2}\right\}$，$B=\{x\mid a<x<2a, a>0\}$，若存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使得 $\varphi_A(x_0)+\varphi_B(x_0)=2$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)\cup\left(\dfrac{5\pi}{6},\pi\right)$

B. $\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)\cup\left(\dfrac{3\pi}{4},+\infty\right)$

C. $\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)\cup\left(\dfrac{2\pi}{3},2\pi\right)$

D. $\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)\cup\left(\dfrac{13\pi}{12},+\infty\right)$

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.

9. 若随机变量 X 服从正态分布 $N(0,2^2)$，随机变量 Y 服从正态分布 $N(2,3^2)$，则（　　）

A. $E(2X+1)=1$

B. $D(2Y+1)=12$

C. $P(X\leqslant -2)+P(X\leqslant 2)=1$

D. $P(|X|\leqslant 2)>P(|Y|\leqslant 2)$

10. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_n=\begin{cases}2^n, & n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{n}{2}+1, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 则（　　）

A. 2025是数列 $\{a_n\}$ 中的项

B. 数列 $\{a_{2n-1}\}$ 是公比为2的等比数列

C. $S_6=51$

D. 若 $c_n=a_{2n}$，则数列 $\left\{\dfrac{1}{c_nc_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和小于 $\dfrac{1}{2}$

11. 设函数 $f(x)=\dfrac{\sin\pi x\cos 2\pi x}{e^{1-x}+e^x}$，则（　　）

A. 曲线 $y=f(x)$ 关于直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 对称

B. $f(x)$ 的最小值为 $-\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$

C. 方程 $f(x)=\sin 4\pi x$ 在 $[0,1]$ 上有4个根

D. 存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $f(x)\leqslant\dfrac{1}{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+n}$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12. 若 $(1+2i)z=4+3i$，则 $\bar{z}=$________.

13. 若抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的焦点与双曲线 $W: \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点 F 重合，抛物线 C 的准线交双曲线 W 于 A,B 两点，$\triangle ABF$ 为等边三角形，则双曲线 W 的离心率为________.

14. 已知三棱锥 $O-ABC$ 的体积为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，$OA\perp BC$，$OA=4$，$BC=2$，$\triangle OAB$ 与 $\triangle OAC$ 的周长均为10，则 $\tan\angle OBA=$________.

椭圆与立体几何的综合运用

四、解答题：本题共5小题，共77分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分13分）

记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 若 $\boldsymbol{m}=(b-a,c)$，$\boldsymbol{n}=(a+c,b+a)$，$\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$.

(1) 求 B；

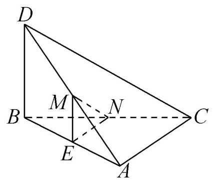
(2) 若 $b=2\sqrt{3}$，求边 AC 上的高的最大值.

16.（本小题满分 15 分）

如图，在三棱锥 $D-ABC$ 中，$AC=AB=BD=2$，$AB\perp BD$，$AB\perp AC$，E，M，N 分别为 AB，AD，BC 的中点.

(1) 求证：平面 $EMN\perp$ 平面 ABC；

(2) 若 $CD=2\sqrt{3}$，求直线 MN 与平面 ACD 所成的角.



17.（本小题满分 15 分）

设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，焦距为 $2\sqrt{6}$，点 $A(2,1)$ 在椭圆 C 上.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 设 l 为 $\angle F_1AF_2$ 的平分线所在的直线，椭圆 C 上是否存在关于直线 l 对称的相异两点？若存在，请找出这两点；若不存在，请说明理由.

18.（本小题满分 17 分）

盒子中装有 $N(N\in\mathbf{N}^*,N\geqslant 3)$ 个小球，除颜色外，小球的大小、质地完全相同，每次从中无放回地随机取出 1 个球.

(1) 若盒中有 2 个白球，其余为黑球，2 次取球后，求取出的 2 个球不同色的概率；

(2) 若盒中白球数为随机变量 X，$E(X)=M$，求证：第 1 次取出白球的概率为 $\dfrac{M}{N}$；

(3) 若盒中白球数为 $m(m\in\mathbf{N}^*,m<N)$，每次取球后，将 1 个白球放回盒中，保持盒中球的总数不变，求第 n 次取出白球的概率.

参考公式：若 X，Y 是离散型随机变量，则 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

19.（本小题满分 17 分）

函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 有相同的定义域，导函数分别为 $f'(x)$，$g'(x)$，若在定义域内均有 $f'(x)\leqslant g'(x)$，则称 $y=f(x)$ 是 $y=g(x)$ 的“DT－函数”.

(1) 判断 $y=-x^3-x$ 是否为 $y=\cos x$ 的“DT－函数”，并证明；

(2) 设 $y=f(x)$ 和 $y=h(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，已知 $f(-x)=f(x)$，$g(x)=h(x)+h(-x)$，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的“DT－函数”，求证：$g(x)-f(x)=c$（c 为常数）；

(3) 若 $-1<a<0$，$f(x)=x\ln x-(a+2)x$，$g(x)=e^{x+a}(x-2)$，$x>0$，求证：$f(x)$ 是 $g(x)$ 的“DT－函数”.

浙江省温州市2025届高三第三次适应性考试

（满分150分，考试时间120分钟）

答案见P210

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都是单位向量，夹角为 $60°$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的值为　（　　）

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}$

2. 已知集合 $A=\{-1,1,2,3\}$，$B=\{x\,|\ln x<1\}$，则 $A\cap B=$　（　　）

A. $\{1\}$　　B. $\{-1,1\}$

C. $\{1,2\}$　　D. $\{-1,1,2\}$

3. 已知 $\bar{z}$ 是复数 z 的共轭复数，$\bar{z}\cdot \mathrm{i}=1$（i 为虚数单位），则 z 的虚部是　（　　）

A. i　　B. $-$i

C. 1　　D. -1

4. 已知圆 $x^2+y^2=1$ 和圆 $(x-3)^2+y^2=r^2(r>0)$ 有公共点，则 r 的取值范围是　（　　）

A. $[2,+\infty)$　　B. $[2,4]$

C. $[3,4]$　　D. $[1,4]$

5. 已知 $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=2$，则 $\tan\theta=$　（　　）

A. 3　　B. 2

C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

6. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$\forall x,y\in\mathbf{R}$，$f(x)f(y)=f(x+y)$，且 $f(1)=\frac{1}{2}$，则　（　　）

A. $f(0)=0$

B. $f(-1)=-\frac{1}{2}$

C. $f(x+1)<f(x)$

D. $f(x+2)-f(x+1)<f(x+1)-f(x)$

7. 为了研究某种商品的广告投入 x（单位：万元）和收益 y（单位：万元）之间的相关关系，某研究小组收集了5组样本数据如表所示，得到经验回归方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+0.28$，则当广告投入为10万元时，收益的预测值为　（　　）

x/万元	1	2	3	4	5
y/万元	0.50	0.80	1.00	1.20	1.50

A. 2.48万元

B. 2.58万元

C. 2.68万元

D. 2.88万元

8. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1,F_2，点 P 在第二象限且在双曲线的渐近线上，$|PF_2|=|F_1F_2|$，线段 PF_2 的中点在双曲线的右支上，则双曲线的离心率为　（　　）

A. 4

B. $\sqrt{3}+1$

C. $\sqrt{5}$

D. 2

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．

9. 已知函数 $f(x)=\sin x(\cos x+a\sin x)$，则存在实数 a，使得　（　　）

A. $f(x)$ 的最小正周期为 π

B. $f(x)$ 是偶函数

C. $f(x)$ 是奇函数

D. $f(x)$ 的最大值为0

10. 抛掷一枚质地均匀的骰子，记试验的样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，事件 $M=\{1,2\}$，事件 $N=\{2,3,4\}$，则　（　　）

A. M 与 N 是互斥事件

B. M 与 N 是相互独立事件

C. $P(M|N)=P(N|M)$

D. $P(\overline{M}N)+P(M\overline{N})=\frac{1}{2}$

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $0\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_n(n\geqslant 3)$，定义：集合 $M=\left\{(a_i,a_j)\,|\,i<j,\exists p,q，使得 a_j-a_i=\frac{1}{2}(a_q-a_p)\right\}$．记该集合的元素个数为 $|M|$，则下列说法正确的是　（　　）

A. 若 $a_n=2^{n-1}(1\leqslant n\leqslant 3)$，则 $|M|=2$

B. 若 $a_n=2n-1(1\leqslant n\leqslant 4)$，则 $|M|=3$

C. 存在数列 $\{a_n\}$，其中有一项 $a_i(2\leqslant i\leqslant n-1)$，能使得 $(a_1,a_i)\in M$ 且 $(a_i,a_n)\in M$

D. 若任取数列 $\{a_n\}$ 中的两项 $a_i,a_j(i<j)$，(a_i,a_j) 恰好是 M 中元素的概率大于 $\frac{4}{5}$，则 $n>8$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分．

12. 2025年，浙江省属“三位一体”综合评价招生政策进行了调整，每位考生限报4所大学．某考生从6所大学中选择4所进行报名，其中甲、乙两所学校至多报一所，则该考生报名的可能情况有________种．

13. 在△ABC 中，$AB=6$，$BC=10$，AC 的中垂线交 BC 于点 M，则△ABM 的面积的最大值是________．

14. 已知圆台上、下底面半径分别为1，2，母线长为2，则圆台的体积为________；A 为下底面圆周上一定点，一只蚂蚁从点 A 出发，绕着圆台的侧面爬行一周又回到点 A，则爬行的最短距离为________．

圆台中的最短路径问题

四、解答题：本题共5小题，共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15.（本小题满分13分）

已知△ABC 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $\cos C(a\cos B+b\cos A)=\frac{\sqrt{3}}{2}c$．

(1) 求角 C 的大小；

(2) 若点 D 在边 BC 上，且 $CD=2$，$BD=AD=1$，求△ABC 的周长．

16.（本小题满分 15 分）

已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=2$，$a_{n+1}=3a_n+2n-1$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 若数列$\{b_n\}$满足：$b_n=a_n+n$，试判断$\{b_n\}$是否为等比数列，并说明理由；

(2) 若数列$\{c_n\}$满足：$c_n=(-1)^n a_n$，求数列$\{c_n\}$的前 $2n$ 项和 T_{2n}.

17.（本小题满分 15 分）

已知抛物线 C_1：$x^2=2p_1y$ 与 C_2：$y^2=2p_2x$ 的焦点分别为 F_1，F_2，$A(4,m)(m>0)$为抛物线 C_1，C_2 的一个交点，且$|AF_2|=5$.

(1) 求 p_1，p_2，m 的值；

(2) 已知 P，Q 是抛物线 C_1 上的两点，若四边形 F_1PF_2Q(按逆时针排列)为平行四边形，求此四边形的面积.

18.（本小题满分 17 分）

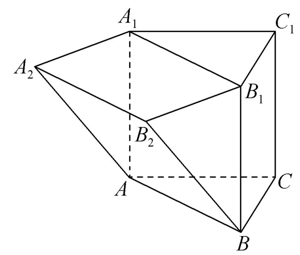
如图，几何体由两个直三棱柱拼接而成，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=AA_1=1$；在直三棱柱 $AA_1A_2-BB_1B_2$ 中，$\angle AA_1A_2=90°$. 直线 B_2B_1，B_2B 分别交平面 ACC_1A_1 于点 P，Q.

(1) 求证：$B_1B\parallel PQ$.

(2) 若$\angle A_2AA_1=\angle BAC=\alpha$，则

①当 $\alpha=45°$时，求线段 PQ 的长；

②当平面 ABB_2A_2 与平面 ACC_1A_1 的夹角与 α 互余时，求 $\sin\alpha$ 的值.



19.（本小题满分 17 分）

设曲线 C：$x^3-xy-y^3=1$.

(1) 求证：曲线 C 关于直线 $y=-x$ 对称；

(2) 求证：曲线 C 是某个函数的图象；

(3) 试求所有实数 k 与 m，使得直线 $y=kx+m$ 在曲线C 的上方.

附 1

2025 年普通高等学校招生全国统一考试

（新高考卷Ⅰ）

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）

答案见 P216

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. $(1+5i)i$ 的虚部为（　　）

A. -1　　B. 0

C. 1　　D. 6

2. 已知集合 $U=\{x\mid x$ 是小于 9 的正整数$\}$，$A=\{1,3,5\}$，则 $\complement_U A$ 中元素的个数为（　　）

A. 0　　B. 3

C. 5　　D. 8

3. 已知双曲线 C 的虚轴长是实轴长的 $\sqrt{7}$ 倍，则 C 的离心率为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. 2

C. $\sqrt{7}$　　D. $2\sqrt{2}$

4. 已知点 $(a,0)(a>0)$ 是函数 $y=2\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象的一个对称中心，则 a 的最小值为（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{4\pi}{3}$

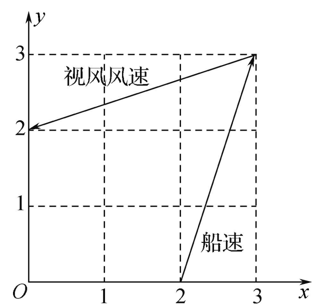
5. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 2 的偶函数，当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时，$f(x)=5-2x$，则 $f\left(-\frac{3}{4}\right)=$（　　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$

6. 帆船比赛中，运动员可借助风力计测定风速的大小和方向，测出的结果在航海学中称为视风风速. 视风风速对应的向量是真风风速对应的向量与船行风风速对应的向量之和，其中船行风风速对应的向量与船速对应的向量大小相等、方向相反. 下表给出了部分风力等级、名称与风速大小的对应关系. 已知某帆船运动员在某时刻测得的视风风速对应的向量与船速对应的向量如图所示（线段长度代表速度大小，单位：m/s），则该时刻的真风为（　　）

级数	名称	风速大小（单位：m/s）
2	轻风	1.6～3.3
3	微风	3.4～5.4
4	和风	5.5～7.9
5	劲风	8.0～10.7



A. 轻风　B. 微风　C. 和风　D. 劲风

7. 已知圆 $x^2+(y+2)^2=r^2(r>0)$ 上到直线 $y=\sqrt{3}x+2$ 的距离为 1 的点有且仅有 2 个，则 r 的取值范围是（　　）

A. $(0,1)$　　B. $(1,3)$

C. $(3,+\infty)$　　D. $(0,+\infty)$

8. 已知 $2+\log_2 x=3+\log_3 y=5+\log_5 z$，则 x,y,z 的大小关系不可能为（　　）

A. $x>y>z$　　B. $x>z>y$

C. $y>x>z$　　D. $y>z>x$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 为 BC 的中点，则（　　）

A. $AD\perp A_1C$　　B. $B_1C_1\perp$ 平面 AA_1D

C. $AD/\!/A_1B_1$　　D. $CC_1/\!/$ 平面 AA_1D

10. 设抛物线 $C:y^2=6x$ 的焦点为 F，过点 F 的一条直线交抛物线 C 于 A,B 两点，过点 A 作直线 $l:x=-\frac{3}{2}$ 的垂线，垂足为 D，过点 F 且垂直于 AB 的直线交 l 于点 E，则（　　）

A. $|AD|=|AF|$　　B. $|AE|=|AB|$

C. $|AB|\geqslant 6$　　D. $|AE|\cdot|BE|\geqslant 18$

11. 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{4}$，$\cos 2A+\cos 2B+2\sin C=2$，$\cos A\cos B\sin C=\frac{1}{4}$，则（　　）

A. $\sin C=\sin^2 A+\sin^2 B$

B. $AB=\sqrt{2}$

C. $\sin A+\sin B=\frac{\sqrt{6}}{2}$

D. $AC^2+BC^2=3$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 若直线 $y=2x+5$ 是曲线 $y=e^x+x+a$ 的一条切线，则 $a=$________.

13. 若一个等比数列的各项均为正数，且前 4 项和为 4，前 8 项和为 68，则这个数列的公比为________.

14. 有 5 个相同的球，分别标有数字 1，2，3，4，5，现从中有放回地随机取 3 次，每次取 1 个球. 记 X 为这 5 个球中至少被取出 1 次的球的个数，则 X 的数学期望 $E(X)=$________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）

为研究某疾病与超声波检查结果的关系，从做过超声波检查的人群中随机调查了 1000 人，得到如下列联表：

组别＼超声波检查结果	正常	不正常	合计
患该疾病	20	180	200
未患该疾病	780	20	800
合计	800	200	1000

（1）记超声波检查结果不正常者患该疾病的概率为 p，求 p 的估计值；

（2）根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，分析超声波检查结果是否与患该疾病有关.

附：$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

$P(\chi^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

16.（本小题满分15分）

已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，$\frac{a_{n+1}}{n}=\frac{a_n}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$.

（1）求证：数列$\{na_n\}$是等差数列；

（2）给定正整数m，设函数$f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$，求$f'(-2)$.

17.（本小题满分15分）

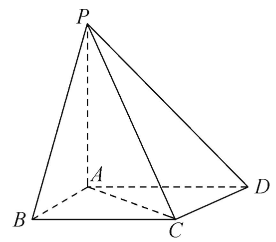
如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$底面$ABCD$，$AB\perp AD$，$BC/\!/AD$.

（1）求证：平面$PAB\perp$平面PAD.

（2）若$PA=AB=\sqrt{2}$，$BC=2$，$AD=\sqrt{3}+1$，且点P,B,C,D均在球O的球面上.

① 求证：点O在平面$ABCD$内；

② 求直线AC与直线PO所成角的余弦值.



18.（本小题满分17分）

已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$，下顶点为$A$，右顶点为$B$，$|AB|=\sqrt{10}$.

（1）求椭圆C的标准方程.

（2）已知动点P不在y轴上，点R在射线AP上，且满足$|AP|\cdot|AR|=3$.

① 设$P(m,n)$，求R的坐标（用m,n表示）；

② 设O为坐标原点，Q是椭圆C上的一动点，直线OR的斜率是直线OP的斜率的3倍，求$|PQ|$的最大值.

19.（本小题满分17分）

（1）求函数$f(x)=5\cos x-\cos 5x$在区间$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上的最大值；

（2）给定$\theta\in(0,\pi)$和$a\in\mathbf{R}$，求证：存在$y\in[a-\theta,a+\theta]$使得$\cos y\leqslant\cos\theta$；

（3）设$b\in\mathbf{R}$，若存在$\varphi\in\mathbf{R}$使得$5\cos x-\cos(5x+\varphi)\leqslant b$对$x\in\mathbf{R}$恒成立，求$b$的最小值.

附 2

2025 年普通高等学校招生全国统一考试

（新高考卷Ⅱ）

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）

答案见 P221

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 样本数据 2，8，14，16，20 的平均数为 （ ）

A. 8 B. 9 C. 12 D. 18

2. 已知复数 $z=1+i$，则 $\frac{1}{z-1}=$ （ ）

A. $-i$ B. i

C. -1 D. 1

3. 已知集合 $A=\{-4,0,1,2,8\}$，$B=\{x|x^3=x\}$，则 $A\cap B=$ （ ）

A. $\{0,1,2\}$ B. $\{1,2,8\}$

C. $\{2,8\}$ D. $\{0,1\}$

4. 不等式 $\frac{x-4}{x-1}\geqslant 2$ 的解集是 （ ）

A. $\{x|-2\leqslant x\leqslant 1\}$ B. $\{x|x\leqslant -2\}$

C. $\{x|-2\leqslant x<1\}$ D. $\{x|x>1\}$

5. 在 $\triangle ABC$ 中，$BC=2$，$AC=1+\sqrt{3}$，$AB=\sqrt{6}$，则 $A=$ （ ）

A. $45°$ B. $60°$

C. $120°$ D. $135°$

6. 设抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 A 在抛物线 C 上，过点 A 作抛物线 C 的准线的垂线，垂足为 B. 若直线 BF 的方程为 $y=-2x+2$，则 $|AF|=$ （ ）

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

7. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_3=6$，$S_5=-5$，则 $S_6=$ （ ）

A. -20 B. -15

C. -10 D. -5

8. 已知 $0<\alpha<\pi$，$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，则 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$ （ ）

A. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{5}$ C. $\frac{3\sqrt{2}}{10}$ D. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，q 为 $\{a_n\}$ 的公比，$q>0$. 若 $S_3=7$，$a_3=1$，则 （ ）

A. $q=\frac{1}{2}$ B. $a_5=\frac{1}{9}$

C. $S_5=8$ D. $a_n+S_n=8$

10. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=(x^2-3)e^x+2$，则 （ ）

A. $f(0)=0$

B. 当 $x<0$ 时，$f(x)=-(x^2-3)e^{-x}-2$

C. $f(x)\geqslant 2$，当且仅当 $x\geqslant\sqrt{3}$

D. $x=-1$ 是 $f(x)$ 的极大值点

11. 双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 左、右焦点分别为 F_1，F_2，左、右顶点分别为 A_1，A_2，以 F_1F_2 为直径的圆与双曲线 C 的一条渐近线交于 M，N 两点，且 $\angle NA_1M=\frac{5\pi}{6}$，则 （ ）

A. $\angle A_1MA_2=\frac{\pi}{6}$

B. $|MA_1|=2|MA_2|$

C. 双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{13}$

D. 当 $a=\sqrt{2}$ 时，四边形 NA_1MA_2 的面积为 $8\sqrt{3}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(x,1)$，$\boldsymbol{b}=(x-1,2x)$，若 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，则 $|\boldsymbol{a}|=$________.

13. 若 $x=2$ 是函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$ 的极值点，则 $f(0)=$________.

14. 一个底面半径为 4 cm，高为 9 cm 的封闭圆柱形容器(容器壁厚度忽略不计)内有两个半径相等的铁球，则铁球半径的最大值为________cm.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. （本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\cos(2x+\varphi)(0\leqslant\varphi<\pi)$，$f(0)=\frac{1}{2}$.

(1) 求 φ 的值；

(2) 设函数 $g(x)=f(x)+f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，求 $g(x)$ 的值域和单调区间.

16. （本小题满分 15 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，长轴长为 4.

(1) 求椭圆 C 的方程；

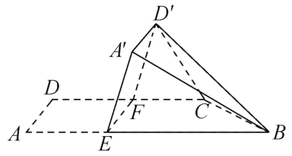
(2) 过点 $(0,-2)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点，O 为坐标原点，若 $S_{\triangle OAB}=\sqrt{2}$，求 $|AB|$.

17.（本小题满分 15 分）

如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，$\angle DAB=90^{\circ}$，F 为 CD 的中点，点 E 在线段 AB 上，$EF/\!/AD$，$AB=3AD$，$CD=2AD$. 将四边形 $EFDA$ 沿 EF 翻折至四边形 $EFD'A'$，使得平面 $EFD'A'$ 与平面 $EFCB$ 所成二面角为 60°.

(1) 求证：$A'B/\!/$平面 $CD'F$；

(2) 求平面 BCD' 与平面 $EFD'A'$ 所成二面角的正弦值.



18.（本小题满分 17 分）

已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^{2}-kx^{3}$，其中 $0<k<\frac{1}{3}$.

(1) 求证：$f(x)$在$(0,+\infty)$上存在唯一的极值点和唯一的零点.

(2) 设 x_1,x_2 分别为 $f(x)$在$(0,+\infty)$上的极值点和零点.

① 设函数 $g(t)=f(x_1+t)-f(x_1-t)$，求证：$g(t)$在$(0,x_1)$上单调递减；

② 比较 $2x_1$ 与 x_2 的大小，并证明.

19.（本小题满分 17 分）

甲、乙两人进行乒乓球练习，每个球胜者得 1 分，负者得 0 分. 设每个球甲获胜的概率为 $p\left(\frac{1}{2}<p<1\right)$. 乙获胜的概率为 q，$p+q=1$，且各球胜负独立. 对正整数 $k\geqslant 2$，记 p_k 为打完 k 个球后甲比乙至少多得 2 分的概率，q_k 为打完 k 个球后乙比甲至少多得 2 分的概率.

(1) 求 p_3，p_4(用 p 表示)；

(2) 若$\frac{p_4-p_3}{q_4-q_3}=4$，求 p；

(3) 求证：对任意正整数 m，$p_{2m+1}-q_{2m+1}<p_{2m}-q_{2m}<p_{2m+2}-q_{2m+2}$.