A01

江苏省苏州市 2025 届高三上学期开学考试

你有能力拿到的分数

1～7,9,10,12,13,15～17,18(1),19(1),合计 108 分.

上述分数是基础题和中档题的分数,是通过科学的训练能够拿到的分数,你拿到了吗?

必得分

1. C $\frac{2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\frac{(2-\mathrm{i})(-\mathrm{i})}{\mathrm{i}\times(-\mathrm{i})}=-1-2\mathrm{i}$.

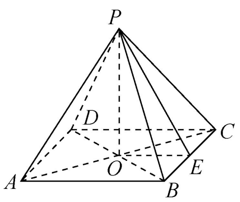
2. C 由 $B=\{x\,|\,x^2-4x<0\}$,得 $B=\{x\,|\,0<x<4\}$,故 $A\cap B=[2,4)$.

3. A 函数 $f(x)=\sin x$ 的图象先向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得到函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象,将 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 图象上所有点的纵坐标保持不变,横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$,得到函数 $g(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象,所以 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(2\times\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. A 因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $x^2=2-x$,解得 $x=-2$ 或 $x=1$,所以"$x=-2$"是"$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$"的充分不必要条件.

5. B 因为 $500\times60\%=300$,所以竞赛成绩不低于 80 分的人数至少为 $500-300=200$.

6. D 如图,在正四棱锥 $P-ABCD$ 中,点 O 是底面中心,E 是 BC 的中点,则 $PO\perp$ 平面 $ABCD$,PE 是斜高,$\angle PBO$ 即为侧棱 PB 与底面所成的角. 设底面边长为 a,$PE=h'$,由题意,得 $4\times\frac{1}{2}ah'=2a^2$,则 $h'=a$. 又 $OE=\frac{1}{2}a$,所以 $PO=\sqrt{PE^2-OE^2}=\sqrt{a^2-\frac{1}{4}a^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$,而 $OB=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,所以 $PB=\sqrt{PO^2+OB^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$,故 $\cos\angle PBO=\frac{OB}{PB}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.



7. C **审题指导** 求 $\frac{x_1}{x_2}$ 的最大值,这里含有两个变量,若变量 x_1,x_2 之间没有关系,则 $\frac{x_1}{x_2}$ 也就没有最大值. 因此我们必须寻找到 x_1,x_2 之间的关系,这是解题的关键,也是突破口. 因为 x_1 是函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}(x-a-1)$($\mathrm{e}$ 为自然对数的底数)的零点,所以 x_1 必与参数 a 有关,同理 x_2 也必与参数 a 有关,这样 x_1 与 x_2 就间接地通过参数 a 联系在一起. 如果能消去参数 a,就能得到 x_1,x_2 之间的直接关系,并进一步化简,再运用消元思想,将求 $\frac{x_1}{x_2}$ 的最大值的二元问题,转化为一元问题,那就简单了.

因为 x_1 是函数 $f(x)$ 的零点,所以 $\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}(x_1-a-1)=0$,即 $\mathrm{e}^{x_1-1}+(x_1-1)=a$ ①. 又因为 x_2 是函数 $g(x)$ 的零点,所以 $\ln(x_2\mathrm{e}^{x_2})-a=0$,即 $\ln x_2+x_2=a$ ②. 由①②消去 a 得 $\mathrm{e}^{x_1-1}+(x_1-1)=\ln x_2+x_2$,即 $\mathrm{e}^{x_1-1}+(x_1-1)=\mathrm{e}^{\ln x_2}+\ln x_2$ ③. 设函数 $h(x)=\mathrm{e}^x+x$,则③式可表示为 $h(x_1-1)=h(\ln x_2)$. 因为 $h'(x)=\mathrm{e}^x+1>0$,所以 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,所以 $x_1-1=\ln x_2$,即 $x_2=\mathrm{e}^{x_1-1}$,则 $\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_1}{\mathrm{e}^{x_1-1}}$. 设函数 $\varphi(x)=\frac{x}{\mathrm{e}^{x-1}}$,则 $\varphi'(x)=\frac{1-x}{\mathrm{e}^{x-1}}$,当 $x<1$ 时,$\varphi'(x)>0$,$\varphi(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增;当 $x>1$ 时,$\varphi'(x)<0$,$\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,所以 $\varphi(x)_{\max}=\varphi(1)=1$,即 $\frac{x_1}{x_2}$ 的最大值为 1.

解后反思 对于求解既含有指数式 e^x,同时又含有对数式 $\ln x$ 的问题,我们经常利用 $x=\mathrm{e}^{\ln x}=\ln \mathrm{e}^x$ 将对数式与指数式进行互化,从而构造同构式来解决问题.

8. A **审题指导** 求 AB 中点横坐标的最小值,首先我们要选择好变量表示 AB 中点的横坐标,再选择是用函数知识还是用不等式知识求最小值. AB 中点的横坐标直接与 A,B 两点的横坐标有关,而 A,B 两点横坐标又由直线 AB 确定,具体来说,就是和直线 AB 的斜率 k 和纵截距 m 有关,这样我们可以通过根与系数的关系以及中点坐标公式,用 k 和 m 来表示 AB 中点的横坐标,又由 $|AB|=6$,可以得到 k 和 m 满足的等量关系,从而求出最小值. 注意一些细节,如 A,B 为双曲线右支上两点,不过这样有点小题大做的嫌疑,我们也可以从 $|FA|+|FB|\geqslant|AB|$,结合圆锥曲线的第二定义来处理,这便有了两种解法.

解法 1(代数法) 当直线 AB 的斜率不存在时,直线 AB 的方程为 $x=\sqrt{10}$,此时 AB 的中点的横坐标为 $\sqrt{10}$;当直线 AB 的斜率存在时,设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$,联立 $\begin{cases}y=kx+m,\\x^2-y^2=1,\end{cases}$ 消去 y,得 $(1-k^2)x^2-2kmx-m^2-1=0$,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=\frac{2km}{1-k^2}$,$x_1x_2=\frac{m^2+1}{k^2-1}>0$,所以 $k^2>1$.

【启发式分析】注意到 $\frac{x_1+x_2}{2}$ 中含有两个变量 k,m,为此,利用 $|AB|=6$ 消去一个变量,从而简化问题.

因为 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{4m^2+4-4k^2}}{|1-k^2|}=\frac{2\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{m^2+1-k^2}}{k^2-1}=6$,所以 $m^2=\frac{10k^4-18k^2+8}{k^2+1}=\frac{9(k^2-1)^2}{k^2+1}+k^2-1$.

【启发式分析】注意到 $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{km}{1-k^2}$ 中的变量 m 为一次形式,为此,将它进行平方加以处理.

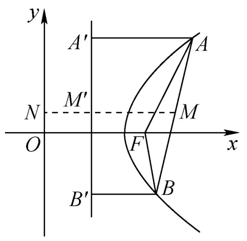
因为 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2=\left(\frac{km}{1-k^2}\right)^2=\frac{k^2}{(1-k^2)^2}\left[\frac{9(k^2-1)^2}{k^2+1}+k^2-1\right]=\frac{9k^2}{k^2+1}+\frac{k^2}{k^2-1}$.

【启发式分析】将 k^2 作为一个整体,可利用导数来求最值.

令 $t=k^2>1$,设 $f(t)=\frac{9t}{t+1}+\frac{t}{t-1}$,则 $f'(t)=\frac{9}{(t+1)^2}-\frac{1}{(t-1)^2}=\frac{4(2t-1)(t-2)}{(t+1)^2(t-1)^2}$. 当 $t\in(1,2)$ 时,$f'(t)<0$,$f(t)$ 单调递减;当 $t\in(2,+\infty)$ 时,$f'(t)>0$,$f(t)$ 单调递增. 故当 $t=2$ 时,$f(t)_{\min}=8$,所以 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)_{\min}=2\sqrt{2}$.

解法 2(第二定义法+几何法) 由圆锥曲线的统一定义知,双

曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$右支上的点到右焦点的距离与到准线$x=\frac{a^2}{c}$的距离之比等于离心率. 因为双曲线$C$为等轴双曲线,所以离心率$e=\sqrt{2}$. 如图,设双曲线右焦点为$F$,连接$AF$,$BF$,取$AB$的中点$M$,过点$A$,$B$,$M$分别作准线$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$的垂线,垂足分别为$A'$,$B'$,$M'$,则$\frac{|BF|}{|BB'|}=\frac{|AF|}{|AA'|}=e=\sqrt{2}$,故$|MM'|=\frac{1}{2}(|AA'|+|BB'|)=\frac{1}{2}\left(\frac{|AF|+|BF|}{e}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}(|AF|+|BF|)\geqslant\frac{\sqrt{2}}{4}|AB|=\frac{\sqrt{2}}{4}\times6=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,当且仅当$A$,$B$,$F$三点共线时,$|MM'|$取最小值,故此时中点$M$的横坐标的最小值为$\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$.



解后反思 两种解法中,解法1是基础解法,它需要学生有很强的运算能力,以及相应的运算技巧和方法;解法2对学生的思维能力要求相对较高,需要学生掌握圆锥曲线的统一定义,相对来讲,对运算能力的要求稍低.

A01

9. BC 由于$n=6$,故二项式系数最大的为C_6^3,为第4项,故A错误;$\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$的展开式的通项为$T_{r+1}=2^rC_6^rx^{6-r}x^{-\frac{1}{2}r}=2^rC_6^rx^{6-\frac{3}{2}r}$,$r=0,1,2,3,4,5,6$,令$6-\frac{3}{2}r=0$,解得$r=4$,故常数项为第5项,故B正确;令$6-\frac{3}{2}r=3$,则$r=2$,故含$x^3$的项为$2^2C_6^2x^3=60x^3$,故C正确;在$\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$中,令$x=1$,得$\left(1+\frac{2}{\sqrt{1}}\right)^6=3^6=729$,故D错误.

解后反思 对于二项式定理这部分内容,重点要掌握好以下四点:1. 二项式$(a+b)^n$的展开式的通项$T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r(r=0,1,2,\cdots,n)$;2. 注意二项式系数与系数的区别与联系;3. 赋值法;4. 夹逼法(主要用于求系数的最值).

10. BCD 【启发式分析】注意到所研究的对象随着α的变化而变化,为此,只需将所要研究的对象表示为关于α的函数.

对于A,若$\alpha=30°$,$AB\perp AC$,则$\angle BAC=90°$,$\angle CAD=60°$,故$\angle BAE=30°$,在$Rt\triangle ABE$中,$AB=\frac{AE}{\cos\angle BAE}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,故A错误;对于B,因为$AB\perp AC$,所以$\angle BAE=\angle ACD=\alpha$,$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,在$Rt\triangle ACD$中,$AC=\frac{AD}{\sin\angle ACD}=\frac{2}{\sin\alpha}$,在$Rt\triangle ABE$中,$AB=\frac{AE}{\cos\angle BAE}=\frac{1}{\cos\alpha}$,所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{2}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2}{\sin2\alpha}$,当$\sin2\alpha=1$,即$\alpha=\frac{\pi}{4}$时,$(S_{\triangle ABC})_{\min}=2$,故B正确;对于C,若$\triangle ABC$为等边三角形,则$\angle BAC=60°$,$\angle CAD=90°-\alpha$,所以$\angle BAE=180°-60°-(90°-\alpha)=30°+\alpha$,在$Rt\triangle ACD$中,$AC=\frac{AD}{\sin\angle ACD}=\frac{2}{\sin\alpha}$,在$Rt\triangle ABE$中,$AB=\frac{AE}{\cos\angle BAE}=\frac{1}{\cos(30°+\alpha)}$,因为$AC=AB$,所以$\frac{2}{\sin\alpha}=\frac{1}{\cos(30°+\alpha)}$,即$2\cos(30°+\alpha)=\sin\alpha$,所以$\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha=\sin\alpha$,即$\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin\alpha$,故$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,故C正确;对于D,若$\angle BAC=60°$,由C选项的分析知,$AC=\frac{2}{\sin\alpha}$,$AB=\frac{1}{\cos(30°+\alpha)}$,所以$\frac{1}{AB}+\frac{2}{AC}=\cos(30°+\alpha)+\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha=\sin(\alpha+60°)\leqslant1$,当$\alpha=30°$时,等号成立,故D正确.

11. ACD **审题指导** **此题四个选项的确定,都与数列$\{a_n\}$的通项公式有关,那如何求通项公式呢?研究数列通常从相邻项的关系开始,例如等差数列满足相邻两项的差为常数,等比数列满足相邻两项的比为常数,这里能否从相邻项的关系考虑呢?此题数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$,$\forall m,n\in\mathbf{N}^*$,有$\frac{1}{a_{n+m}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_m}$成立,该等式中涉及三项,但因为$\forall m,n\in\mathbf{N}^*$,所以我们不妨固定一项,如令$m=1$,则可转化为相邻两项之间的关系,从而知晓数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$为何种数列.**

对于选项A,令$m=1$,则$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_1}$,所以$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=1$,即$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是首项为1,公差为1的等差数列,所以$\frac{1}{a_n}=n$,即$a_n=\frac{1}{n}$,所以$a_{2024}=\frac{1}{2024}$,故A正确. 对于选项B,

【启发式分析】问题的本质就是求$a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{n+1}^2$的取值范围,注意到数列$\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$无法直接求和,为此,可利用不等式$\frac{1}{n^2}=\frac{4}{4n^2}<\frac{4}{4n^2-1}=2\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$进行放缩后求和.

因为$\frac{1}{n^2}=\frac{4}{4n^2}<\frac{4}{4n^2-1}=2\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$,所以$a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{n+1}^2=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}<2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{2}{3}-\frac{2}{2n+3}<\frac{2}{3}$,故不存在$n\in\mathbf{N}^*$,使得$a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{n+1}^2>\frac{2}{3}$,故B错误.

【启发式分析】注意到选项C,D所研究的不等式左边均为n项和的形式,为此,将不等式的右边也转化为n项和的形式,从而可将不等式的左、右两边进行逐项比较.

对于选项C,根据对数的性质,可知$\ln(n+1)=\ln\frac{n+1}{n}+\ln\frac{n}{n-1}+\ln\frac{n-1}{n-2}+\cdots+\ln\frac{2}{1}$,只需$\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}$,即$\ln(x+1)<x$. 令$f(x)=\ln(1+x)-x$,$x>-1$,则$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}$,当$-1<x<0$时,$f'(x)>0$,当$x>0$时,$f'(x)<0$,所以$f(x)$在$(-1,0)$上单调递增,在$(0,+\infty)$上单调递减,所以$f(x)\leqslant f(0)=0$,所以$\ln(1+x)\leqslant x$,当$x=0$时,取等号,所以$\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)<1$,$\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{2}$,$\cdots$,$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$,累加得$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}>$

$\ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)$，即 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n>\ln(n+1)$，故 C 正确. 对于选项 D，根据对数的性质，可知 $\ln(n+1)=\ln\frac{n+1}{n}+\ln\frac{n}{n-1}+\ln\frac{n-1}{n-2}+\cdots+\ln\frac{2}{1}$，只需 $\ln\frac{n+1}{n}>\frac{1}{n+1}$，即 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>\frac{1}{x+1}$，即 $\ln(1+x)>\frac{1}{\frac{1}{x}+1}=\frac{x}{1+x}$. 令 $g(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$，$x>0$，则 $g'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2}>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)>g(0)=0$，所以 $\ln(1+x)>\frac{x}{1+x}$，所以 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>\frac{1}{x+1}$，所以 $\frac{1}{1+1}<\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)$，$\frac{1}{2+1}<\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)$，…，$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$，累加得 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)$，即 $a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{n+1}<\ln(n+1)$，故 D 正确.

解后反思 本题在求解的过程中应用了几种常见的放缩关系，即 $\frac{1}{n^2}=\frac{4}{4n^2}<\frac{4}{4n^2-1}=2\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，$\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}$，$\ln\frac{n+1}{n}>\frac{1}{n+1}$，其中后两种不等关系的本质就是函数不等式 $\ln x\leqslant x-1$，$\ln(1+x)>\frac{x}{1+x}$ 的应用，平时要注意这些知识的积累与应用.

12. $3\sqrt{3}$ 由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，得 $13=a^2+4-4a\cos 30°$，即 $a^2-2\sqrt{3}a-9=0$，解得 $a=3\sqrt{3}$（负值舍去）.

13. $2\sqrt{3}$ **解法 1（几何法）** **【启发式分析】**注意到直线 l 过定点，为此，当直线 l 与 OP 垂直时，弦 AB 的长最小.

由题意，得直线 l：$(2k+1)x-ky-1=(2x-y)k+x-1=0$ 过定点 $P(1,2)$，圆 O：$x^2+y^2=8$ 的圆心为 $O(0,0)$，半径为 $r=2\sqrt{2}$，连接 OP，当直线 l 与 OP 垂直时，弦 AB 的长最小，且 $|OP|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，所以 AB 长的最小值为 $2\sqrt{r^2-|OP|^2}=2\sqrt{3}$.

解法 2（代数法） **【启发式分析】**应用直线与圆相交时的弦长公式，将 AB 表示为关于 k 的函数来求最值.

因为圆心 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{(2k+1)^2+k^2}}=\frac{1}{\sqrt{5\left(k+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}}}$，所以当 $k=-\frac{2}{5}$ 时，$d_{\max}=\sqrt{5}$，此时 $|AB|_{\min}=2\sqrt{r^2-d_{\max}^2}=2\sqrt{8-5}=2\sqrt{3}$.

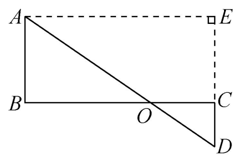
解后反思 解法 1 是利用直线过定点以及几何图形的直观性加以解决的，此解法运算量小；解法 2 是利用代数的方法，通过求函数的最值加以解决的，相对而言，运算量要比几何法大.

14. 6 **解法 1** **【启发式分析】**解决本题的第一要素是确定 4 条线段的长度. 注意到 AB，CD 之间是一种“对称关系”，为此，可先确定 BC，AD 的长度，同时，注意到 AD 是 4 条线段中最长的，为此，需分 $x>9$ 以及 $0<x<9$ 进行分类讨论.

当 $0<x<9$ 时，$AD=9$，若 $BC=1$，则不妨设 $AB=x$，$CD=5$，则 $\frac{x}{5}=\frac{BO}{1-BO}=\frac{AO}{9-AO}$，解得 $BO=\frac{x}{x+5}$，$AO=\frac{9x}{x+5}$，由 $AO^2=BO^2+AB^2$，得 $\left(\frac{9x}{x+5}\right)^2=\left(\frac{x}{x+5}\right)^2+x^2$，解得 $x=4\sqrt{5}-5$；若 $BC=5$，则不妨设 $AB=x$，$CD=1$，则 $\frac{x}{1}=\frac{BO}{5-BO}=\frac{AO}{9-AO}$，解得 $BO=\frac{5x}{x+1}$，$AO=\frac{9x}{x+1}$，由 $AO^2=BO^2+AB^2$，得 $\left(\frac{9x}{x+1}\right)^2=\left(\frac{5x}{x+1}\right)^2+x^2$，解得 $x=2\sqrt{14}-1$；若 $BC=x$，则不妨设 $AB=5$，$CD=1$，则 $\frac{5}{1}=\frac{BO}{x-BO}=\frac{AO}{9-AO}$，解得 $BO=\frac{5x}{6}$，$AO=\frac{15}{2}$，由 $AO^2=BO^2+AB^2$，得 $\left(\frac{15}{2}\right)^2=\left(\frac{5x}{6}\right)^2+25$，解得 $x=3\sqrt{5}$. 当 $x>9$ 时，$AD=x$，若 $BC=1$，则不妨设 $AB=9$，$CD=5$，则 $\frac{9}{5}=\frac{BO}{1-BO}=\frac{AO}{x-AO}$，解得 $BO=\frac{9}{14}$，$AO=\frac{9x}{14}$，由 $AO^2=BO^2+AB^2$，得 $\left(\frac{9x}{14}\right)^2=\left(\frac{9}{14}\right)^2+81$，解得 $x=\sqrt{197}$；若 $BC=5$，则不妨设 $AB=9$，$CD=1$，则 $\frac{9}{1}=\frac{BO}{5-BO}=\frac{AO}{x-AO}$，解得 $BO=\frac{9}{2}$，$AO=\frac{9x}{10}$，由 $AO^2=BO^2+AB^2$，得 $\left(\frac{9x}{10}\right)^2=\left(\frac{9}{2}\right)^2+81$，解得 $x=5\sqrt{5}$；若 $BC=9$，则不妨设 $AB=5$，$CD=1$，则 $\frac{5}{1}=\frac{BO}{9-BO}=\frac{AO}{x-AO}$，解得 $BO=\frac{15}{2}$，$AO=\frac{5x}{6}$，由 $AO^2=BO^2+AB^2$，得 $\left(\frac{5x}{6}\right)^2=\left(\frac{15}{2}\right)^2+25$，解得 $x=3\sqrt{13}$. 综上所述，满足条件的 x 共有 6 个不同的取值.

解法 2 **【启发式分析】**解法 1 是利用其中一个小直角三角形中的数量关系进行求解的，比较烦琐，为此考虑将四条线段放到一个直角三角形中进行求解.

如图，将线段 BC 平移到 AE 处，则 $\triangle ADE$ 是一个直角三角形，此时 $AE=BC$，$DE=AB+CD$. 若 $0<x<9$，则 $AD=9$，当 $AE=x$ 时，$x^2+(1+5)^2=9^2$，解得 $x=3\sqrt{5}$；当 $AE=1$ 时，$1^2+(x+5)^2=9^2$，解得 $x=4\sqrt{5}-5$；当 $AE=5$ 时，$5^2+(x+1)^2=9^2$，解得 $x=2\sqrt{14}-1$. 若 $x>9$，则 $AD=x$，当 $AE=9$ 时，$9^2+(1+5)^2=x^2$，解得 $x=3\sqrt{13}$；当 $AE=1$ 时，$1^2+(9+5)^2=x^2$，解得 $x=\sqrt{197}$；当 $AE=5$ 时，$5^2+(1+9)^2=x^2$，解得 $x=5\sqrt{5}$. 所以 x 的取值个数为 6.



解后反思 解法 1 是将问题转化到某个小三角形中进行求解，其本质是各个击破的方法；而解法 2 是将四条线段放到一个三角形中，其本质是整体化归的方法. 很显然，解法 2 比解法 1 更为简单、快捷，因为它更好地揭示了问题的本质.

15. 解：(1) **解法 1** 设“汤姆的选择中有 200 米服务”为事件 A，“汤姆的选择中有 1500 米服务”为事件 B，

则 $P(A)=\frac{C_5^2}{C_6^3}=\frac{1}{2}$，$P(AB)=\frac{C_4^1}{C_6^3}=\frac{1}{5}$， （4 分）

所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}$. （6 分）

解法 2 设“汤姆的选择中有 200 米服务”为事件 A，“汤姆的选择中有 1500 米服务”为事件 B，

则 $P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}=\frac{C_4^1}{C_5^2}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$. （6 分）

(2) X 的所有可能取值为 0，1，2，3，

且 $P(X=0)=\frac{C_6^3C_4^0}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$，$P(X=1)=\frac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}$，

$P(X=2)=\frac{C_6^1C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}$，$P(X=3)=\frac{C_6^0C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}$. （10 分）

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=\frac{6}{5}$. （13 分）

$\Big($或随机变量 X 服从超几何分布 $X\sim H(3,4,10)$，则 $E(X)=\frac{3\times4}{10}=\frac{6}{5}\Big)$[5]

规范书写【1】若用期望公式，则必须先说明随机变量 X 服从超几何分布 $X\sim H(3,4,10)$，否则扣 1 分.

16. (1) **证明**：因为 $\triangle ABD$ 是边长为 2 的正三角形，E 为 AD 的中点，所以 $BE\perp AD$. （2 分）

又因为平面 $BEF\perp$ 平面 ABD，平面 $BEF\cap$ 平面 $ABD=BE$，$AD\subset$ 平面 ABD，[1]

所以 $AD\perp$ 平面 BEF. （4 分）

(2) **解**：如图，取 AB 的中点 O，连接 OD，OC.

由于底面三角形 ABC 为等腰直角三角形，$\triangle ABD$ 是边长为 2 的正三角形，

故 $OD\perp AB$，$OC\perp AB$.

又平面 $ABC\perp$ 平面 ABD，且平面 $ABC\cap$ 平面 $ABD=AB$，$OD\subset$ 平面 ABD，所以 $OD\perp$ 平面 ABC. （6 分）

因为 $OC\subset$ 平面 ABC，所以 $OD\perp OC$，所以 OC，OA，OD 两两垂直，以 $\{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}\}$ 为正交基底，建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$，则 $A(0,1,0)$，$B(0,-1,0)$，$C(1,0,0)$，$D(0,0,\sqrt{3})$，

所以 $\overrightarrow{BC}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{CD}=(-1,0,\sqrt{3})$. （8 分）

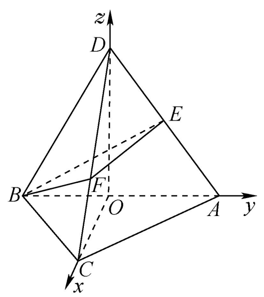
设平面 BCD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y=0,\\ -x+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$ 令 $z=1$，则 $x=\sqrt{3}$，$y=-\sqrt{3}$，所以 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},-\sqrt{3},1)$. （12 分）

因为 $AD\perp$ 平面 BEF，所以平面 BEF 的一个法向量为 $\overrightarrow{AD}=(0,-1,\sqrt{3})$. （13 分）

设平面 BEF 与平面 BCD 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{AD}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}|}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{AD}|}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}\times2}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

故平面 BEF 与平面 BCD 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$. （15 分）



规范书写【1】若此处没有交代“平面 $BEF\cap$ 平面 $ABD=BE$”和“$AD\subset$ 平面 ABD”，则此步骤不得分.

17. **解**：(1) 因为 $f'(x)=\cos x+e^x-4$，所以 $f'(0)=\cos 0+e^0-4=-2$，

所以 $f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=-2x+1$. （2 分）

设直线 $y=-2x+1$ 与 $y=g(x)$ 图象的切点为 $M(x_0,g(x_0))$.

因为 $g'(x)=3x^2-a$，所以 $g(x)$ 在点 M 处的切线方程为 $y-g(x_0)=(3x_0^2-a)(x-x_0)$，

即 $y=(3x_0^2-a)x-2x_0^3+3$，

从而 $\begin{cases}3x_0^2-a=-2,\\ -2x_0^3+3=1,\end{cases}$ （4 分）

解得 $\begin{cases}x_0=1,\\ a=5.\end{cases}$ （6 分）

(2)【启发式分析】注意到 $f(0)=1>0$，$f(-\pi)=4\pi+e^{-\pi}>0$，为此，猜测函数 $f(x)$ 在 $(-\pi,0]$ 上不存在零点，从而将问题转化为研究函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上零点的个数问题.

因为 $f'(x)=\cos x+e^x-4$，

当 $-\pi<x\leqslant0$ 时，$-1<\cos x\leqslant1$，$0<e^x\leqslant1$，所以 $f'(x)<0$，所以函数 $f(x)$ 单调递减，

所以 $f(x)\geqslant f(0)=1$，此时函数 $f(x)$ 无零点. （9 分）

【启发式分析】为研究函数 $f'(x)=\cos x+e^x-4$ 的零点情况，再次对它进行求导，来研究它的单调性.

当 $x>0$ 时，设 $h(x)=\cos x+e^x-4$，则 $h'(x)=-\sin x+e^x>1-\sin x\geqslant0$，所以 $h(x)$，即 $f'(x)$ 单调递增.

因为 $f'(1)=\cos 1+e-4<0$，$f'(2)=\cos 2+e^2-4>0$，

所以存在 $x_0\in(1,2)$，使得 $f'(x_0)=0$. （11 分）

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增. （13 分）

又 $f(0)=1>0$，$f(1)=\sin 1+e-4<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有一个零点.

又 $f(3)=\sin 3+e^3-12>0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,3)$ 上有一个零点.

综上所述，$f(x)$ 在 $(-\pi,+\infty)$ 上有 2 个零点. （15 分）

18. (1) **解**：因为 $A(-a,0)$，所以 $k_{PA}=\frac{2}{1+a}=\frac{2}{3}$，解得 $a=2$. （2 分）

又 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $c=\sqrt{3}$，从而 $b=1$，所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. （4 分）

(2)【启发式分析】根据 $\triangle PBC$ 的面积来确定点 B，C 是解第 (2) 问的第一步，关于 $\triangle PBC$ 的面积的表示方法，注意到 $MP\perp x$ 轴，且将 $\triangle PBC$ 分为两个部分，为此，$S_{\triangle PBC}$ 可表示为 $\frac{1}{2}|x_B-x_C|\cdot|MP|$ 最为简单.

证明：易知直线 l 的斜率不为 0，设直线 l 的方程为 $x=my+1$，$B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}x=my+1,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 整理得 $(m^2+4)y^2+2my-3=0$，

$\Delta=16(m^2+3)>0$，则 $y_1+y_2=\frac{-2m}{m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-3}{m^2+4}$， （5 分）

所以 $S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}|PM||x_1-x_2|=|m(y_1-y_2)|=|m|\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=|m|\cdot\frac{4\sqrt{m^2+3}}{m^2+4}=\frac{8}{5}$，解得 $m=\pm1$.

又直线 l 的斜率小于零，所以 $m=-1$，即直线 $l:y=-x+1$，

则有 $5y^2-2y-3=0$，解得 $y=1$ 或 $y=-\frac{3}{5}$，从而有 $B(0,1)$，$C\left(\frac{8}{5},-\frac{3}{5}\right)$. (7 分)

【启发式分析】在解析几何中求角的关系，一般有两种方法：一是通过向量法来研究角，二是通过夹角公式来研究角. 无论用哪种方法，都需有相关的坐标，为此，联立直线 PB 的方程与椭圆方程，解得点 D 的坐标.

证法 1 此时直线 PB 的方程为 $y=x+1$.

联立 $\begin{cases}y=x+1,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 整理得 $5x^2+8x=0$，所以 $x=0$ 或 $x=-\frac{8}{5}$，即 $x_D=-\frac{8}{5}$，

所以 $y_D=-\frac{3}{5}$，即 $D\left(-\frac{8}{5},-\frac{3}{5}\right)$，所以 $\overrightarrow{MD}=\left(-\frac{13}{5},-\frac{3}{5}\right)$，$\overrightarrow{MB}=(-1,1)$，

从而 $\cos\langle\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MD}\rangle=\frac{\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}}{|\overrightarrow{MB}||\overrightarrow{MD}|}=\frac{\frac{13}{5}-\frac{3}{5}}{\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{178}}{5}}=\frac{5}{\sqrt{89}}$. (9 分)

又 $\overrightarrow{PB}=(-1,-1)$，$\overrightarrow{PC}=\left(\frac{3}{5},-\frac{13}{5}\right)$，所以 $\cos\langle\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}\rangle=\frac{\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PC}|}=\frac{\frac{13}{5}-\frac{3}{5}}{\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{178}}{5}}=\frac{5}{\sqrt{89}}$.

所以 $\cos\langle\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MD}\rangle=\cos\langle\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}\rangle$，即 $\angle BMD=\angle BPC$.

(10 分)

证法 2 同证法 1 得 $D\left(-\frac{8}{5},-\frac{3}{5}\right)$，所以 $k_{MD}=\frac{-\frac{3}{5}-0}{-\frac{8}{5}-1}=\frac{3}{13}$.

又 $k_{BM}=-1$，所以 $\tan\angle BMD=\left|\frac{k_{BM}-k_{DM}}{1+k_{BM}\cdot k_{DM}}\right|=\frac{8}{5}$. (9 分)

因为 $k_{PC}=\frac{2+\frac{3}{5}}{1-\frac{8}{5}}=-\frac{13}{3}$，$k_{PD}=k_{PB}=\frac{2-1}{1-0}=1$，

所以 $\tan\angle BPC=\left|\frac{k_{PC}-k_{PB}}{1+k_{PC}\cdot k_{PB}}\right|=\frac{8}{5}=\tan\angle BMD$.

所以 $\angle BMD=\angle BPC$. (10 分)

证法 3 【启发式分析】从几何的角度，通过寻找图形的几何性质加以证明.

又 $k_{PB}=1$，$k_{BC}=-1$，所以 $BC=BD$，$PB\perp BC$. (8 分)

又 $PB=BM=\sqrt{2}$，所以 $\mathrm{Rt}\triangle BPC\cong\mathrm{Rt}\triangle BMD$，

所以 $\angle BMD=\angle BPC$. (10 分)

证法 4 又 $k_{PB}=1$，$k_{BC}=-1$，所以由对称性可得 $D\left(-\frac{8}{5},-\frac{3}{5}\right)$，所以 $DC\perp PM$，

所以点 M 为 $\triangle PDC$ 的垂心. (9 分)

如图 1，设 DM 与 PC 交于点 N，所以 P,B,M,N 四点共圆，则 $\angle BMD=\angle BPC$. (10 分)

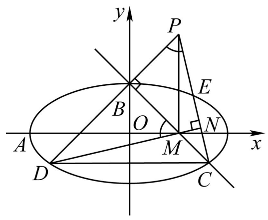


图 1

(3)【启发式分析】本题首先要考虑的是 B,D,C,E 四点之间是怎样的从属关系，即将哪些点看作是已知的，哪些点看作是未知的？根据所研究的对象——求直线 CD 的斜率，我们将 C,D 两点看作是已知的，从而只需将 B,E 两点用 C,D 的坐标表示出来即可.

解：假设存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{DC}$，则 $BE/\!/DC$，从而 $\overrightarrow{PB}=\lambda\overrightarrow{PD}$，$\overrightarrow{PE}=\lambda\overrightarrow{PC}$，由题意得 $\lambda\in(0,1)$. 设 $C(x_2,y_2)$，$D(x_3,y_3)$.

解法 1（两椭圆的公共弦法） 由 $\overrightarrow{PB}=\lambda\overrightarrow{PD}$，得 $B(\lambda x_3+1-\lambda,\lambda y_3+2-2\lambda)$.

【启发式分析】如何处理 B,D 两点？注意到它们是椭圆上的点，由此得到过点 D 的直线方程.

又点 B,D 均在椭圆上，所以 $\begin{cases}\frac{x_3^2}{4}+y_3^2=1,\\ \frac{(\lambda x_3+1-\lambda)^2}{4}+(\lambda y_3+2-2\lambda)^2=1,\end{cases}$ 可

得 $\begin{cases}\frac{x_3^2}{4}+y_3^2=1,\\ \lambda^2\left(\frac{x_3^2}{4}+y_3^2\right)+\frac{\lambda(1-\lambda)x_3}{2}+\frac{(1-\lambda)^2}{4}+4\lambda(1-\lambda)y_3+4(1-\lambda)^2=1,\end{cases}$

所以 $\frac{\lambda(1-\lambda)x_3}{2}+\frac{(1-\lambda)^2}{4}+4\lambda(1-\lambda)y_3+4(1-\lambda)^2=1-\lambda^2$，

整理得 $2\lambda x_3+16\lambda y_3+13-21\lambda=0$， (13 分)

同理可得 $2\lambda x_2+16\lambda y_2+13-21\lambda=0$，

所以直线 DC 的方程为 $2\lambda x+16\lambda y+13-21\lambda=0$， (15 分)

所以直线 DC 的斜率为 $-\frac{1}{8}$. (17 分)

解法 2（椭圆弦的性质） 【启发式分析】注意到 CD 为椭圆的弦，且需要求它的斜率，为此，联想到椭圆中的中点弦相关的性质，即 $k_{CD}\cdot k_{ON}=-\frac{b^2}{a^2}$（$N$ 为 CD 的中点，O 为坐标原点），从而利用它来求解.

如图 2，设 CD 的中点为 $N(x_0,y_0)$，

则 $\begin{cases}\frac{x_2^2}{4}+y_2^2=1,\\ \frac{x_3^2}{4}+y_3^2=1,\end{cases}$ 两式相减，得 $\frac{(x_2-x_3)(x_2+x_3)}{4}+(y_2-y_3)\cdot(y_2+y_3)=0$，

所以 $\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}\cdot\frac{2y_0}{2x_0}=-\frac{1}{4}$，即 $k_{CD}\cdot k_{ON}=-\frac{1}{4}$. (13 分)

同理，取 BE 的中点 G，则 $k_{BE}\cdot k_{OG}=-\frac{1}{4}$.

由 $BE/\!/DC$，得 $k_{CD}=k_{BE}$，所以 $k_{ON}=k_{OG}$，

所以点 O,N,G,P 共线，所以 $k_{ON}=k_{OP}=2$， (15 分)

则 $k_{CD}=\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{8}$. (17 分)

A01

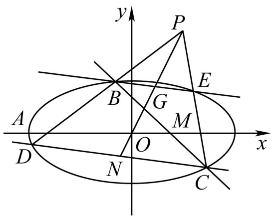


图 2

解后反思 在求解解析几何问题时,要注意以下问题:

1. 解析几何是用代数的方法来研究几何问题,因此,研究问题的基本方法就是联立方程组,通过将所要研究的对象转化为交点的坐标加以处理,但往往这种方法运算量比较大,有时很烦琐.

2. 为减少或避免通过代数方法所带来运算难、繁的问题,我们往往会从三个方面来寻找问题的突破口:

(1) 通过寻找条件与结论之间最简捷的通道,来简化运算的难度;

(2) 有效地利用图形的几何特征,通过应用图形的几何特征,从而减少运算量或直接解决问题;

(3) 有效地利用等价转化策略,充分利用圆锥曲线相关的性质来简化运算.

19. (1)**【启发式分析】**研究数列问题的基本策略是确定其通项公式,为此,就需要确定其递推关系,从而通过它的递推关系来求得通项公式.

解:因为 $b_n>1$,由 $b_{n+1}=\frac{1}{2}\left(b_n+\frac{1}{b_n}\right)$,得 $c_{n+1}=\ln\frac{b_{n+1}+1}{b_{n+1}-1}=$

$$\ln\frac{\frac{1}{2}\left(b_n+\frac{1}{b_n}\right)+1}{\frac{1}{2}\left(b_n+\frac{1}{b_n}\right)-1}=\ln\left(\frac{b_n+1}{b_n-1}\right)^2=2\ln\frac{b_n+1}{b_n-1}=2c_n,$$

即 $c_{n+1}=2c_n$,又 $c_n\neq0$,所以$\{c_n\}$为等比数列. (2 分)

所以 $c_{n+1}^2=c_nc_{n+2}$,符合凸数列要求,所以数列$\{c_n\}$为凸数列. (4 分)

(2)**【启发式分析】**注意到已知条件为$|f(a_2)-f(a_3)|=2$,而所求为 $\sum\limits_{i=2}^{10}|a_{i+1}-a_i|$,为此,需要将$\sum\limits_{i=2}^{10}|a_{i+1}-a_i|$放缩为含$|f(a_2)-f(a_3)|$的形式,由此不难想到用条件中的性质. 但由于条件中含有参数 λ,故需要确定参数 λ 的取值范围.

证明:因为 $a_{n+1}>a_n>0$,所以 $a_{n+1}\leqslant\sqrt{a_na_{n+2}}<\frac{a_n+a_{n+2}}{2}$,所以 $a_{n+1}-a_n<a_{n+2}-a_{n+1}$.

又 $a_n<a_{n+1}$,所以$|a_{n+1}-a_n|<|a_{n+2}-a_{n+1}|$. (5 分)

因为$|f(a_2)-f(a_3)|\leqslant\lambda^2|a_2-a_3|\leqslant|f(a_1)-f(a_2)|$,

且$|f(a_3)-f(a_4)|\leqslant\lambda^3|a_3-a_4|\leqslant|f(a_2)-f(a_3)|$,所以 $\lambda^3|a_3-a_4|\leqslant\lambda^2|a_2-a_3|$. (7 分)

又$|a_2-a_3|<|a_3-a_4|$,所以 $\lambda^3|a_3-a_4|<\lambda^2|a_3-a_4|$.

因为$|a_3-a_4|>0$,所以 $\lambda^3<\lambda^2$.

又 $\lambda>0$,所以 $0<\lambda<1$. (9 分)

所以$|f(a_n)-f(a_{n+1})|\leqslant\lambda^n|a_n-a_{n+1}|<|a_n-a_{n+1}|$,

所以 $\sum\limits_{i=2}^{10}|a_{i+1}-a_i|=|a_{11}-a_{10}|+\cdots+|a_3-a_2|>9|a_3-a_2|>9|f(a_2)-f(a_3)|=18$. (11 分)

(3)**【启发式分析】**将$|f(a_i)-f(a_j)|$转化为相邻的项的差并利用绝对值不等式进行放缩,这样就可以利用题设条件,转化为 a_i,a_j 之间的关系来研究.

证明:当 $i=j$ 时,$|f(a_i)-f(a_j)|=|a_i-a_j|$,结论显然成立; (12 分)

当 $2\leqslant i<j$ 时,结合第(2)问结论$|f(a_n)-f(a_{n+1})|<|a_n-a_{n+1}|$得$|f(a_i)-f(a_j)|=|f(a_j)-f(a_{j-1})+f(a_{j-1})-f(a_{j-2})+\cdots+f(a_{i+1})-f(a_i)|$

$\leqslant|f(a_j)-f(a_{j-1})|+|f(a_{j-1})-f(a_{j-2})|+\cdots+|f(a_{i+1})-f(a_i)|$ (14 分)

$<|a_j-a_{j-1}|+|a_{j-1}-a_{j-2}|+\cdots+|a_{i+1}-a_i|$

$=(a_j-a_{j-1})+(a_{j-1}-a_{j-2})+\cdots+(a_{i+1}-a_i)=|a_i-a_j|$.

综上所述,$|f(a_i)-f(a_j)|\leqslant|a_i-a_j|$. (17 分)

解后反思 本题属于新高考新背景下的新定义问题,这种考题一般都比较高屋建瓴,大多具有高等背景,多取材于课本的课后阅读材料、大学课本、竞赛一试,甚至直接改编于 IMO,难度一般比较大. 解决此类问题时,常可以通过以下方法或技巧来剖析问题:

1. 可通过举例子的方式,将抽象的定义转化为具体简单的应用,从而加深对信息的理解;

2. 可用自己的语言转述新信息所表达的内容,如果能清晰描述,那么说明对此信息的理解较为透彻;

3. 发现新信息与所学知识的联系,并从描述中体会信息的本质特征与规律;

4. 如果新信息是课本知识的推广,那么要关注此信息与课本中概念的不同之处,以及什么情况下可以使用书上的概念.

A02 湖北省武汉市 2025 届高三上学期九月调研考试

你有能力拿到的分数

1~7,9,10,12,13,15~17,18(1),19(1)(2),合计 112 分.

上述分数是基础题和中档题的分数,是通过科学的训练能够拿到的分数,你拿到了吗?

必得分

1. D 因为 $1+\frac{2}{z}=2-\mathrm{i}$,所以 $\frac{2}{z}=1-\mathrm{i}$,则 $z=\frac{2}{1-\mathrm{i}}=\frac{2(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=1+\mathrm{i}$.

2. C $A=(-1,3)$,$B=[0,+\infty)$,所以 $A\cap B=[0,3)$.

3. D $\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)^7$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_7^r(2x)^{7-r}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)^r=(-1)^r2^{7-r}\mathrm{C}_7^rx^{7-3r}$,令 $7-3r=-2$,得 $r=3$,故含$\frac{1}{x^2}$的项的系数为$(-1)^32^4\mathrm{C}_7^3=-16\times35=-560$.

4. C 由 $S_{10}-S_3=35$,得 $a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=35$,所以 $7a_7=35$,即 $a_7=5$. 由 $a_3+a_{10}=7$,得 $a_6+a_7=7$,则 $a_6=2$,故公差为 $a_7-a_6=3$.

5. B 设圆锥底面圆的半径为 r,高为 h,则$\frac{\pi r}{\frac{1}{2}\times2r\times h}=2\pi$,解得 $h=\frac{1}{2}$,所以 $r=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故该圆锥的体积为$\frac{1}{3}\pi\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{8}$.

6. A **【启发式分析】**由于指数与对数的底数不确定,故需对指数与对数的底数进行分类讨论.

当 $a>1$ 时,若 $x\leqslant a$,则 $f(x)=a^{x-a}$ 为增函数,$f(x)\leqslant f(a)=1$,若 $x>a$,则 $f(x)=\log_a(x+a)+1$ 为增函数,则 $f(x)>f(a)=\log_a2a+1=\log_a2+2>2$,不符合题意;当 $0<a<1$ 时,若 $x\leqslant a$,则 $f(x)=a^{x-a}$ 为减函数,$f(x)\geqslant f(a)=1$,若 $x>a$,则 $f(x)=\log_a(x+a)+1$ 为减函数,此时 $f(x)<f(a)=\log_a2a+$