

数学思想方法

数学解题思维策略有两条线,一条是明线,即高中数学知识的应用;一条是暗线,即数学思想方法的应用.数学思想蕴含于数学知识中,数学知识是数学思想的载体,通过对知识的研究,挖掘背后的思想方法.

1. 函数与方程思想

函数的思想,是用运动和变化的观点,分析和研究数学中的数量关系,是对函数概念的本质认识,通过建立函数关系或构造函数,运用函数的图像和性质去分析问题、转化问题,从而使问题获得解决.

方程的思想,就是分析数学问题中变量间的等量关系,建立方程或方程组,或者构造函数,通过解方程或方程组,

或者运用方程的性质去分析、转化问题,使问题获得解决.方程的思想是对方程概念的本质认识,用于指导解题就是善于利用方程或方程组的观点观察处理问题,即寻找等量关系.

其中函数思想在中学数学解题中的应用主要表现在两个方面:一是借助有关初等函数的性质,解有关求值、解(证)不等式、解方程以及讨论参数的取值范围等问题;二是在问题的研究中,通过建立函数关系式或构造中间函数,把所研究的问题转化为讨论函数的有关性质,达到化难为易,化繁为简的目的.许多有关方程的问题可以用函数的方法解决,反之,许多函数问题也可以用方程的方法来解决.

(1) 函数思想在方程问题中的应用

函数与方程是两个不同的概念,但它们之间有着密切的联系:方程 $f(x)=0$ 的解就是函数 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴的交点的横坐标,函数 $y=f(x)$ 也可以看作二元方程 $f(x)-y=0$,通过方程进行研究.对于复杂方程的根的个数问题,不能直接求解,可以转化为两个简单函数图像的交点个数来研究,即用函数研究方程.

(2) 函数思想在不等式问题中的应用

对于不等式恒成立问题或存在性问题,可以构造函数,转化为求函数的最值,从而求出参数的范围. (练习运用: 重难突破 3 题组 4 第 2 题)

不等式 $f(x) \geq a$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min} \geq a$; 不等式 $f(x) \leq a$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max} \leq a$; 不等式 $f(x) \geq a$ 有解 $\Leftrightarrow f(x)_{\max} \geq a$; 不等式 $f(x) \leq a$ 有解 $\Leftrightarrow f(x)_{\min} \leq a$.

(3) 方程思想在三角函数中的应用

在三角函数求值中,把所求的量看作未知量,其余的量通过三角函数关系化为未知量的表达式,那么问题就能化为未知量的方程来解.

(4) 方程思想在平面向量中的应用

用平面内两个不共线的向量表示同一个平面内的另一个向量,利用平面向量基本定理建立方程组,从而求解.

(5) 函数思想在数列中的应用

数列的通项与前 n 项和都是自变量为正整数的函数,借助于函数的单调性、最值和图像研究数列的性质. 如等差数列的通项可以视为一次函数,等差数列的前 n 项和可以视为二次函数,等比数列可以视为指数函数.

(6) 函数与方程思想在立体几何中的应用

立体几何中有关线段的长、面积、体积的计算,经常需要运用列方程或建立函数表达式的方法加以解决. (练



(7) 函数与方程思想在解析几何中的应用

解析几何中的许多问题,例如直线与二次曲线的位置关系问题,需要通过解二元方程组才能解决.这都涉及二次方程与二次函数的有关理论.在最值与范围中,经常需要设出变量,将所求的量表示为该变量的函数式,利用导数或基本不等式来求解.

2. 数形结合思想

所谓数形结合思想,就是根据数与形之间的对应关系,通过数与形的相互转化来解决数学问题的一种重要思想方法.数形结合思想包含“以形助数”和“以数辅形”两个方面,其应用大致可以分为两种情形:一是借助形的生动性和直观性来阐明数之间的联系,即以形作为手段,数作为目的,比如应用函数的图像来直观地说明函数的性质;二是借助于数的精确性和规范严密性来阐明形的某些属性,即以数作为手段,形作为目的,如应用曲线的方程来精确地阐明曲线的几何性质.

运用数形结合思想要遵循三个原则:

① **等价性原则**.在数形结合时,代数性质和几何性质的转换必须是等价的,否则解题将会出现漏洞.有时,由于图形的局限性,不能完整的表现数的一般性,这时图形的性质只能是一种直观而浅显的说明,要注意其带来的负面效应.

② **双方性原则**.既要进行几何直观分析,又要进行相应的代数抽象探求,仅对代数问题进行几何分析容易出错.

③ **简单性原则**.不要为了“数形结合”而数形结合.具体运用时,一要考虑是否可行和是否有利;二要选择好突破口,恰当设参、用参、建立关系、做好转化;三要挖掘隐含条件,准确界定参变量的取值范围,特别是运用函数图像时应设法选择动直线与定二次曲线.

运用数形结合思想还应注意以下两点:

① 准确画出函数图像,注意函数的定义域.

② 用图像法讨论方程(特别是含参数的方程)的解的个数是一种行之有效的方法,值得注意的是首先要把方程两边的代数式看作是两个函数的表达式(有时可能先作适当调整,以便于作图),然后作出两个函数的图像,由图求解.

(1) 数形结合思想在集合中的应用

在集合中的关系问题、运算问题,借助于韦恩图、数轴,简单明了.当集合中的元素为点时,如 $\{(x, y) | \dots\}$,作出方程的曲线,转化为交点个数问题.

(2) 数形结合思想在函数中的应用

由于函数的表示法中有图像法,因而可以通过函数图像来反映函数总体的特征,如单调性、奇偶性、最值.如二次函数的根分布问题,可以根据对称轴,曲线与坐标轴的交点来研究;方程根的个数问题可以转化为求两条曲线的交点的个数问题来解决.(练习运用:重难突破 2 题组 1 第 3 题)

(3) 数形结合思想在不等式中的应用

① 解不等式问题经常联系函数的图像,根据不等式中量的特点,选择适当的两个(或多个)函数,利用两个函数图像的上、下位置关系转化为数量关系来解决问题,往往可以避免繁琐的运算,获得简洁的解答.

② 在某些不等式恒成立问题和有解性问题中,用代数方法很难得到解答,而用函数图像的方法能使问题得到完美的解决.(练习运用:重难突破 2 题组 4 第 5 题)

③ 数形结合思想在不等式中的应用还有:在解高次不等式或分式不等式时,常用序轴标根法快速求解.常见

代数式的几何意义有： $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ 表示点 (x,y) 与点 (a,b) 的距离， $\frac{y-b}{x-a}$ 表示点 (x,y) 与点 (a,b) 连线的斜率值.

(4) 数形结合思想在三角函数中的应用

在三角函数中,利用数形结合的思想解决一些问题可以带来极大的方便,也容易理解,使一些抽象的问题形象化.三角函数的定义既有代数表示,如 $\sin \alpha = \frac{y}{r}$,又有几何表示,如 $\sin \alpha = MP$,故对于三角方程或三角不等式的问题,都可以在单位圆中,运用三角函数的几何表示来解决.在判断交点个数、单调性、比较大小时,可以作出三角函数的图像,迅速判断.注意图像要画准确.

(5) 数形结合思想在平面向量中的应用

由于平面向量的代数运算含有平行、垂直、距离、角度等几何意义,因此结合几何意义,构造三角形、平行四边形、圆等,将复杂问题简单化,抽象问题直观化.

(6) 数形结合思想在复数中的应用

复数的概念及其运算都有几何意义,因此可以转化为复平面上用几何意义解决.

(7) 数形结合思想在平面解析几何中的应用

解析几何的本质是用坐标法研究几何问题.充分利用平面几何性质如斜率、截距、距离、位置关系等,有时可大大减少计算量,使问题变得简单明了,同时数形结合有助于认识数学内容之间的内在联系.

(8) 数形结合思想在概率中的应用

将数形结合思想适当地应用到概率中,可使复杂的问题简单化.

3. 分类讨论思想

所谓分类讨论思想,就是当问题所给的对象不能进行统一研究时,就需要对研究对象按某个标准分类,然后对每一类分别研究得出每一类的结论,最后综合各类结果得到整个问题的解答.

对于何时需要分类讨论,则要视具体问题而定,并无死的规定,实质上,分类讨论是“化整为零,各个击破,再积零为整”的数学解题策略.其基本思路是将一个较复杂的数学问题分解(或分割)成若干个基础性问题,通过对基础性问题的解答来实现解决原问题的思想策略.对问题实行分类与整合,分类标准等于增加一个已知条件,实现了有效增设,将大问题(或综合性问题)分解为小问题(或基础性问题),优化了解题思路,降低了问题难度.

分类讨论的原则:

- ①不重不漏;
- ②标准要统一,层次要分明;
- ③能不分类的要尽量避免或尽量推迟,决不无原则地讨论.

分类讨论的步骤:

- ①确定分类讨论的对象,即对哪个变量或参数进行分类讨论;
- ②对所讨论的对象进行合理的分类;
- ③逐类讨论:即对各类问题详细讨论,逐步解决;
- ④归纳总结:将各类情况总结归纳.

(1) 分类讨论思想在集合中的应用

在集合问题中,涉及字母参数的问题常常出现.特别是在含有子集的问题中,一般按集合中元素的多少和包



4 小帮手(高考数学小题狂做·巅峰篇)

含关系来划分标准,按照元素由少到多,由包含到不包含的原则,做到不重不漏.特别注意空集,当集合可能为空集时,要进行讨论.

(2) 分类讨论思想在函数中的应用

函数中的分类讨论思想通常有以下类型:

- ①对数或指数函数中的底数 a ,一般应分 $a>1$ 和 $0<a<1$ 的讨论;
- ②二次函数中二次项系数是否为 0,对称轴与区间的位置关系,判别式的正负;
- ③由分段函数引起的讨论;
- ④问题中含有需讨论的参数,问题中的条件是分类给出的,需要讨论;
- ⑤由函数图形的形状、位置的变化需要分类讨论;
- ⑥根据函数的性质进行分类讨论;
- ⑦去绝对值引起的分类讨论.

(3) 分类讨论思想在不等式中的应用

不等式中的分类讨论常常围绕以下几点展开:

- ①一次不等式的一次项系数如果含有参数,则要进行讨论.
- ②二次不等式的二次项系数如果含有参数,则需要讨论系数的符号.
- ③二次不等式的判别式如果含有参数,往往要对判别式进行讨论.
- ④在二次函数 $f(x)$ 与 x 轴有两个交点 $(x_1, 0), (x_2, 0)$ 的情况下,求 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$ 的解集,若 x_1, x_2 中含有参数,要对 x_1 与 x_2 的大小关系进行讨论.
- ⑤指数、对数不等式的底数如果含有参数,要对底数分成 $(0, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 两个区间讨论.
- ⑥去绝对值引起的分类讨论.
- ⑦基本不等式的等号条件是否成立.

(4) 分类讨论思想在三角函数中的应用

- ①当角所在象限不确定时,三角函数值的符号也不相同,需要分类讨论. (练习运用: 重难突破 5 题组 2 第 8 题)
- ②解三角形时,已知正弦值,角可能在第一象限,也可能在第二象限,需要分类讨论.
- ③解三角形时,在运算过程中,等式两边同时除以 $\cos \alpha$,要讨论 $\cos \alpha$ 是否为 0.
- ④解三角形时,由于图形的形状不同,需要分类讨论.

(5) 分类讨论思想在平面向量中的应用

由于零向量的方向任意,故向量平行的充要条件是使用时要注意其中一个向量是否为零向量,以及向量垂直转化为数量积为 0 时,也要讨论其中有没有零向量.共线向量方向不确定时,要分同向和反向两种情况讨论.

(6) 分类讨论思想在数列中的应用

- ①运用 a_n 与 S_n 的关系式 $a_n = \begin{cases} S_1, & n=1, \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$ 时,要分 $n=1$ 和 $n \geq 2$ 两种情况讨论.
- ②求等比数列的前 n 项和时,要对公比是否为 1 进行讨论.
- ③当数列的通项是由分段的形式给出时,要分段进行讨论.

(7) 分类讨论思想在立体几何中的应用

主要是点线面及图形位置关系的不确定性引起的讨论.

答案详析

重难点突破 1 函数与基本初等函数 I

题组 1 函数的奇偶性与单调性

1. B 因为 $f(3) = -8 = -f(-3)$, 所以 $f(-3) = 8$, 即 $(-3)^2 + \frac{a}{-3} = 8$, 解得 $a = 3$.

2. D 由解析式易知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 又 $f(a) < f(6-a)$, 所以 $a < 6-a$, 解得 $a < 3$.

3. $\frac{1}{2^{|x|}}$ (答案不唯一) 【思路分析】②说明函数为偶函数,

③说明函数在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 本题难点在于①, 自变量与对应函数的积, 显然指数运算法则符合, 故想到构造指数型函数即可.

比如 $f(x) = \frac{1}{2^{|x|}}$, $f(x+y) = \frac{1}{2^{|x+y|}}$, $f(x)f(y) = \frac{1}{2^{|x|}} \cdot \frac{1}{2^{|y|}} = \frac{1}{2^{|x+y|}}$, 满足 $f(x+y) = f(x)f(y)$, 又 $f(-x) = \frac{1}{2^{|-x|}} = \frac{1}{2^{|x|}} = f(x)$, 也满足 $f(x) = f(-x)$, 且 $f(x)$ 满足在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

4. BD 因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且两函数在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 所以 $f(1) < f(2)$, $g(0) = 0 > g(1) > g(2)$, 所以 $f[g(1)] < f[g(2)]$, $g[f(1)] > g[f(2)]$, $g[g(1)] < g[g(2)]$, 所以 B, D 正确, C 错误. 若 $|f(1)| > |f(2)|$, 则 $f[f(1)] > f[f(2)]$, A 错误.

【易错警示】1. 在求解本题时, 有的学生会采用特殊函数法, 比如取 $f(x) = x^2$, $g(x) = -x$, 这样就会错选 A. 问题的关键在于 $f(1)$, $f(2)$ 的正负是无法确定的, 而取特殊函数时, 就会确定它们之间的关系, 这样就会导致出错. 取 $f(x) = x^2$ 时, 有 $0 < f(1) < f(2)$; 若取 $f(x) = x^2 - 5$, 则 $f(1) < f(2) < 0$.

2. 本题若改成函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 则函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上未必单调递减.

5. C 由函数 $f(x) = \frac{a^x}{b} - \frac{b}{a^x}$ 为奇函数, 得 $f(0) = 0$, 所以 $\frac{a^0}{b} - \frac{b}{a^0} = 0$, 即 $\frac{1}{b} - \frac{b}{1} = 0$, 所以 $b = \pm 1$. $f(-x) = \frac{a^{-x}}{b} - \frac{b}{a^{-x}} = \frac{1}{ba^x} - ba^x = \frac{1}{b^2} \cdot \frac{b}{a^x} - b^2 \cdot \frac{a^x}{b} = \frac{b}{a^x} - \frac{a^x}{b} = -f(x)$, 即 $f(x) = \frac{a^x}{b} - \frac{b}{a^x}$ 为奇函数的充要条件是 $b = \pm 1$. 根据选项知 C 正确.

6. ACD 【思路分析】根据函数奇偶性的定义即可判断 A, B, 根据奇偶性的性质即可判断 C, 根据函数的单调性即可判断 D.

令 $F(x) = f(x)g(x)$, 则 $F(-x) = f(-x)g(-x)$, 定义域为 $\mathbf{R}$, 关于原点对称, 因为 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 所以 $f(-x) = -f(x)$, $g(-x) = g(x)$, 所以 $F(-x) = -f(x)g(x) = -F(x)$, 所以 $F(x) = f(x)g(x)$ 是奇函数, A 正确. 同样, 令 $G(x) = f(x)|g(x)|$, 定义域为 $\mathbf{R}$, 关于原点对称, 则 $G(-x) = f(-x)|g(-x)| = -f(x)|g(x)| = -G(x)$, 所以 $G(x)$ 是奇函数, B 错误. 对于 C,

解法 1 (赋值法) 令 $x = -1$, 代入 $g(x) - f(x) = x^3 + x^2 + 1$, 得 $g(-1) - f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + 1 = 1$, 又 $g(-1) = g(1)$, $f(-1) = -f(1)$, 所以 $g(1) + f(1) = 1$, C 正确.

解法 2 (方程组法求解解析式) 由 $g(x) - f(x) = x^3 + x^2 + 1$ ①, 将 x 用 $-x$ 代换得 $g(-x) - f(-x) = -x^3 + x^2 + 1$

②. 因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(-x) = -f(x)$, 因为 $g(x)$ 是偶函数, 所以 $g(-x) = g(x)$, 由①+②得 $g(x) = x^2 + 1$, 由①-②得, $f(x) = -x^3$, 从而 $g(1) = 2$, $f(1) = -1$, 所以 $g(1) + f(1) = 1$, C 正确. 对于 D, 因为 $f(1) = -1$, 所以 $f(-1) = 1$, 要使 $-1 \leq f(x-2) \leq 1$ 成立, 则需 $f(1) \leq f(x-2) \leq f(-1)$, 由于 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减, 则 $-1 \leq x-2 \leq 1$, 所以 $1 \leq x \leq 3$, D 正确.

【解后反思】对于 A 和 B, 可以使用小结论: 在同一定义域内, 奇函数乘奇函数是偶函数; 偶函数乘奇函数是奇函数; 偶函数乘偶函数是偶函数.

7. -1 因为函数 $f(x) = \ln(e^{2x} - a) - x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 所以 $a \leq 0$. 又函数 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(-x) = f(x)$ 恒成立, 即 $\ln(e^{-2x} - a) + x = \ln(e^{2x} - a) - x$, 则 $\ln(e^{2x} - a) - \ln(e^{-2x} - a) = 2x$, 则 $\ln \frac{e^{2x} - a}{e^{-2x} - a} = 2x$, 所以 $\frac{e^{2x} - a}{e^{-2x} - a} = e^{2x}$, 整理得 $(a+1)(e^{2x} - 1) = 0$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 所以 $a = -1$.

8. B 令 $h(x) = f(x) + e^x$, 由 $h(x)$ 为偶函数得 $h(-x) = h(x)$, 从而 $f(-x) + e^{-x} = f(x) + e^x$, 即 $f(-x) - f(x) = e^x - e^{-x}$. 令 $g(x) = f(x) - 3e^x$, 由 $g(x)$ 为奇函数得 $g(-x) = -g(x)$, 从而 $f(-x) - 3e^{-x} = -f(x) + 3e^x$, 即 $f(-x) + f(x) = 3e^x + 3e^{-x}$, 所以 $f(x) = e^x + 2e^{-x} \geq 2\sqrt{e^x \cdot 2e^{-x}} = 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $x = \ln \sqrt{2}$ 时取等号.

9. D 解法 1 (赋值法) 对于选项 A, 令 $x = y = 1$, 则 $f(1) + f(1) = f(\sqrt{2}) = 2$, 所以 $f(\sqrt{2}) + f(\sqrt{2}) = f(2) = 4$, 故 A 错误; 对于选项 B, 令 $x = y = -1$, 则 $f(-1) + f(-1) = f(\sqrt{2}) = 2$, 所以 $f(-1) = 1$, 所以 $f(x)$ 不是奇函数, 故 B 错误; 对于选项 C, 因为 $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上不是单调递减的, 故 C 错误; 对于选项 D,

【思路分析】要解不等式, 需明确函数 $f(x)$ 的单调性和奇偶性, 为此先赋值, 再通过定义法判断函数的性质.

令 $x = y = 0$, 则 $f(0) + f(0) = f(0)$, 所以 $f(0) = 0$, 令 $y = 0$, 则 $f(x) = f(|x|)$, 故 $f(x)$ 为偶函数, 又 $y = f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的图象是一条连续不断的曲线, 且与 x 轴有且仅有一个交点, 所以该交点为 $(0, 0)$, 又 $f(1) = 1 > 0$, 所以 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$, 设 $0 < x_1 < x_2$, 令 $x = x_1$, $y = \sqrt{x_2^2 - x_1^2}$, 则 $f(x_1) + f(\sqrt{x_2^2 - x_1^2}) = f(x_2)$, 所以 $f(x_1) - f(x_2) = -f(\sqrt{x_2^2 - x_1^2}) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 由 $f(x) \leq 4$ 可得 $f(|x|) \leq f(2)$, 则 $|x| \leq 2$, 解得 $-2 \leq x \leq 2$, 故 D 正确.

解法 2 (构造函数法) 【思路分析】可以根据所给条件中函数的运算性质, 构造满足条件的函数.

对任意 $x, y \in \mathbf{R}$, $f(x) + f(y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$, $y = f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的图象是一条连续不断的曲线, 且与 x 轴有且仅有一个交点, 可以设 $f(x) = kx^2$, 又 $f(1) = 1$, 所以 $k = 1$, 则 $f(x) = x^2$, 易得 A, B, C 错误, 由 $x^2 \leq 4$ 可得 $x \in [-2, 2]$, 故 D 正确.

【解后反思】求解抽象函数有关问题, 通常运用赋值法求解, 也可以根据所学函数的性质找出相关的函数模型来帮助解题.

10. B (思想方法: 转化与化归思想) 解法 1 易得 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增且为奇函数. 由题可得 $f(x+2m) > -mf(x) = mf(-x)$ (*). 当 $m \geq 0$ 时, 对于 $x \geq 1$, 有 $mf(-x) = m(-x^2) = -(\sqrt{m}x)^2 = f(-\sqrt{m}x)$, 所以 (*) 式变形为 $f(x+2m) > f(-\sqrt{m}x)$, 所以 $x+2m > -\sqrt{m}x$ 对 $\forall x \geq 1$ 恒成立, 故 $-2m < [(\sqrt{m} + 1)x]_{\min} = \sqrt{m} + 1$, 即 $2(\sqrt{m})^2 + \sqrt{m} + 1 > 0$, 此不等式恒成立, 故 $m \geq 0$ 满足要求. 当

$m < 0$ 时, 对于 $x \geq 1$, 有 $mf(-x) = m(-x^2) = (\sqrt{-mx})^2 = f(\sqrt{-mx})$, 所以 (*) 式变形为 $f(x+2m) > f(\sqrt{-mx})$, 所以 $x+2m > \sqrt{-mx}$, 即 $(1-\sqrt{-m})x+2m > 0$ 对任意 $x \geq 1$ 恒成立, 故 $\begin{cases} 1-\sqrt{-m} \geq 0, \\ 1-\sqrt{-m}+2m > 0, \end{cases}$ 解得 $-\frac{1}{4} < m < 0$. 综上, m 的取值范围是 $(-\frac{1}{4}, +\infty)$.

解法 2 当 $m \geq 0$ 时, 满足对任意 $x \geq 1$, $f(x+2m) + mf(x) = (x+2m)^2 + mx^2 > 0$ 恒成立, 符合要求, 故排除选项 C, D; 当 $x=1$ 时, 有 $f(1+2m) + m > 0$, 取 $m = -\frac{1}{2}$, 则 $f(1+2m) + m = 0 - \frac{1}{2} < 0$, 不符合要求, 排除选项 A.

【解后反思】 本题在处理函数不等式时要将 m 转化为函数的输入值, 而 $m = \begin{cases} (\sqrt{m})^2, & m \geq 0, \\ (\sqrt{-m})^2, & m < 0, \end{cases}$ 因此被迫要讨论 m 的符号, 有较大难度, 其中涉及不少正负号的处理, 计算时要细心.

【题组总结】 本节常从下面三个方面进行考查:

(1) 注重数学本质, 考查概念的理解和运用. 此类题目首先要判断函数的定义域, 紧接着直接利用函数奇偶性的判定法则和单调性的定义进行判断;

(2) 依托具体函数, 设计为分段函数形式. 此类试题主要考查对函数奇偶性概念的理解和运用、奇偶性函数性质等, 试题往往与单调性等综合, 将未知转化为已知是解决此类问题的基本思想方法;

(3) 设计类对称性函数结构, 迁移构造函数, 利用单调性解决问题. 解决此类问题要洞察函数结构的对称性, 迁移奇函数的对称性, 利用放缩巧妙构造新的函数, 结合单调性的思想解决问题.

针对高考真题和模拟题研究, 不难发现这样一个事实: 所有函数性质试题都是基于函数单调性基础上设计的, 要想很好的突破这些试题, 首先必须要准确掌握基本的思想方法, 实际上就是人们经常所说的“套路”! 在积累扎实的基础知识和基本解题策略时, 将它们通过习题训练进行有效连接, 形成详实的知识网络, 从容应对一些常规试题, 甚至部分具有创新背景的试题, 以不变应万变.

题组 2 函数的周期性

1. C 因为 $f(x+4) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是周期函数, 且周期为 4, 又 $f(x)$ 是偶函数, 所以 $f(1) = f(-1) = f(3) = 2^{3-2} = 2$.

2. 2 因为 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数, 所以 $f(-x) = -f(x)$, 又 $f(1) = 2$, 由 $f(x) = f(x+1) + f(x-1)$ 得 $f(x+1) = f(x+2) + f(x)$ ①, $f(x+2) = f(x+3) + f(x+1)$ ②, 由①+②, 整理得 $f(x+3) = -f(x)$, 从而 $f(x+6) = -f(x+3) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 的周期为 6, 因此 $f(2024) = f(6 \times 337 + 2) = f(2) = f(-1+3) = -f(-1) = f(1) = 2$.

3. A 由 $f(x) = f(x+1) - f(x+2)$, 得 $f(x+1) = f(x+2) - f(x+3)$, 两式相加得 $f(x+3) = -f(x)$, 所以 $f(x+6) = -f(x+3) = f(x)$, 所以 $f(18) = f(0)$. 因为 $f(2x+1)$ 为偶函数, 所以 $f(2x+1) = f(-2x+1)$, 等价于 $f(x+1) = f(-x+1)$, 则 $f(2) = f(0)$. 又 $f(x) = f(x+1) - f(x+2)$, 令 $x=0$ 得 $f(0) = f(1) - f(2)$, 所以 $f(0) = \frac{1}{2}f(1) = 1$, 故 $f(18) = 1$.

4. BC **【思路分析】** 首先探究出 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数, 然后分析 $f(x)$ 的性质, 通过求导运算, 得出 $f'(x)$ 的相应性质. 对于选项 D, 可在 $f'(x+2) = -f'(-x)$ 中令 $x = -1$ 求得 $f'(1)$.

因为函数 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(-x) = -f(x)$, 又 $f(x+2) = f(-x)$, 所以 $f(x+2) = f(-x) = -f(x)$, 所以

$f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$, 即 $f(x+4) = f(x)$, 故 $f(x)$ 的周期为 4, 所以 $f'(x+4) = f'(x)$, 故 $f'(x)$ 的周期为 4, 故 B 正确. $f(2023) = f(4 \times 505 + 3) = f(3) = f(-1) = -f(1) = -2$, 故 A 错误. 因为函数 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(-x) = -f(x)$, 所以 $-f'(-x) = -f'(x)$, 即 $f'(-x) = f'(x)$, 所以 $f'(x)$ 为偶函数, 故 C 正确. 因为 $f(x+2) = f(-x)$, 所以 $f'(x+2) = -f'(-x)$, 令 $x = -1$, 可得 $f'(1) = -f'(1)$, 解得 $f'(1) = 0$, 故 D 错误.

5. B 因为函数 $g(x)$ 为奇函数, 所以有 $g(-x) = -g(x)$, $g(0) = 0$, 又因为 $g(x+1)$ 为偶函数, 所以 $g(x+1) = g(-x+1)$, $g(2) = g(0) = 0$, 于是有 $g(x+2) = g(-x) = -g(x)$, 故 $g(x+4) = -g(x+2) = g(x)$, 所以函数 $g(x)$ 的周期为 4. 因为 $g(x) = f(x+1) - 2$, $f(2) = 1$, 所以 $g(1) = f(1+1) - 2 = -1$, $g(3) = g(-1) = -g(1) = 1$, $g(4) = g(0) = 0$, 所以 $g(1) + g(2) + g(3) + g(4) = 0$, 于是 $\sum_{k=1}^{23} g(k) = 5 \times [g(1) + g(2) + g(3) + g(4)] + g(1) + g(2) + g(3) = 0 - 1 + 0 + 1 = 0$.

6. ABD (思想方法: 转化与化归思想) 对于 A, 令 $x = 1-t$, 则 $f(t) + f(2-t) = 2$, 即 $f(x) + f(2-x) = 2$, 又 $f(2+x) + f(2-x) = 4$, 所以 $f(x+2) = 4 - f(2-x) = 4 - [2 - f(x)] = f(x) + 2$. 令 $x=0$ 得 $f(1) + f(1) = 2$, $f(2) + f(2) = 4$, 所以 $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, 则由 $f(x+2) = f(x) + 2$ 可知, 当 $x \in \mathbf{Z}$ 时, $f(x) = x$, A 正确; 对于 B, 令 $x = 1+t$, 则 $f(-t) + f(2+t) = 2$, 即 $f(-x) + f(2+x) = 2$, 所以 $f(-x) = 2 - f(2+x) = 2 - [4 - f(2-x)] = f(2-x) - 2$, 由选项 A 的推导过程知 $f(2-x) = 2 - f(x)$, 所以 $f(-x) = 2 - f(x) - 2 = -f(x)$, B 正确; 对于 C, 因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 所以当 $T > 0$ 时, $x+T > x$, 则 $f(x+T) > f(x)$, 当 $T < 0$ 时, $x+T < x$, 则 $f(x+T) < f(x)$, 所以不存在非零实数 T , 使得任意 $x \in \mathbf{R}$, $f(x+T) = f(x)$, C 错误; 对于 D, 当 $c=1$ 时, $|f(x) - cx| = |f(x) - x|$, 由 $f(1-x) + f(1+x) = 2$, $f(2+x) + f(2-x) = 4$ 知, $f(x)$ 关于 $(1, 1)$, $(2, 2)$ 成中心对称, 则当 $a \in \mathbf{Z}$ 时, (a, a) 为 $f(x)$ 的对称中心, 当 $x \in [0, 1]$ 时, 因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, 所以 $f(x) \in [0, 1]$, 所以 $|f(x) - x| \leq 1$, 由图象对称性可知, 此时对任意 $x \in \mathbf{R}$, $|f(x) - cx| \leq 1$, D 正确.

7. ACD 对于 A, 若函数 $f(x) = 3^{-x}$ 是“类周期函数”, 则存在非零常数 T , 使 $f(x+T) = T \cdot f(x)$, 即 $3^{-(x+T)} = T \cdot 3^{-x}$, 即 $(T-3^{-T}) \cdot 3^{-x} = 0$, 即 $T-3^{-T} = 0$, 令 $g(T) = T-3^{-T}$, 因为 $g(0) = 0-1 = -1 < 0$, $g(1) = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3} > 0$, 且函数 $g(T)$ 在 $(0, 1)$ 上连续, 所以函数 $g(T) = T-3^{-T}$ 在 $(0, 1)$ 上存在零点, 即方程 $T-3^{-T} = 0$ 在 $(0, 1)$ 上有解, 即存在常数 $T (T \neq 0)$, 对于任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x+T) = T \cdot f(x)$, 所以函数 $f(x) = 3^{-x}$ 是“类周期函数”, 故 A 正确. 对于 B, 若函数 $f(x) = x^3$ 是“类周期函数”, 则存在非零常数 T , 使 $f(x+T) = T \cdot f(x)$, 即 $(x+T)^3 = T \cdot x^3$, 则 $T = \frac{(x+T)^3}{x^3}$, 即 $\sqrt[3]{T} = \frac{x+T}{x} = 1 + \frac{T}{x}$ 对任意的 x 恒成立, 则 $T=0$, 矛盾, 所以不存在常数 $T (T \neq 0)$, 对于任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x+T) = T \cdot f(x)$, 所以函数 $f(x) = x^3$ 不是“类周期函数”, 故 B 错误. 对于 C, 若函数 $f(x) = \cos \omega x$ 是“类周期函数”, 则存在非零常数 T , 使 $f(x+T) = T \cdot f(x)$, 即 $\cos(\omega x + \omega T) = T \cos \omega x$, 故 $T=1$ 或 $T=-1$. 当 $T=1$ 时, $\cos(\omega x + \omega) = \cos \omega x$, 由诱导公式得 $\omega = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$; 当 $T=-1$ 时, $\cos(\omega x - \omega) = -\cos \omega x$, 由诱导公式得 $\omega = (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}$. 故“ $\omega = k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ”, 故 C 正确. 对于 D, 如果“类周期函数” $y = f(x)$ 的“类周期”为 -1 , 则 $f(x-1) = -f(x)$, 则 $f[(x+1)-1] = f(x) = -f(x+1)$, 所以 $f(x-1) = f(x+1)$, 故它是周期为 2 的周期函数, 故 D 正确.

8. ACD 对于 A, 因为 $f(x+1)-f(x)=2x+2$, 令 $x=0$, 可得 $f(1)-f(0)=2$, 即 $f(1)=f(0)+2$, 又因为 $x \in [0, 1]$ 时, $|f(x)| \leq 1$, 即 $-1 \leq f(x) \leq 1$, 则 $\begin{cases} -1 \leq f(0) \leq 1, \\ -1 \leq f(0)+2 \leq 1, \end{cases}$ 可得 $-1 \leq f(0) \leq -1$, 所以 $f(0)=-1$, 故 A 正确. 对于 B, 由 A 可得 $f(1)=f(0)+2=1$, 令 $x=-1$, 可得 $f(0)-f(-1)=0$, 解得 $f(-1)=-1$, 所以 $f(-1) \neq f(1)$, 所以函数 $f(x)$ 不是偶函数, 故 B 错误. 对于 C, 因为 $f(x+1)-f(x)=2x+2$, 当 $n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$ 时, $f(n)=[f(n)-f(n-1)]+[f(n-1)-f(n-2)]+\cdots+[f(2)-f(1)]+f(1)=2n+2(n-1)+\cdots+2 \times 2+1=2(n+n-1+\cdots+2)+1=2 \times \frac{(n-1)(n+2)+1}{2}=n^2+n-1$, 且 $f(1)=1$, 符合上式, 所以 $f(n)=n^2+n-1$, 令 $n=2024$, 则 $f(2024)=2024^2+2023 > 2024 \times 2024$, 即存在 $n \in \mathbf{N}^*$, 使得 $f(n) > 2024n$, 故 C 正确. 对于 D, 令 $g(x)=f(x)-x^2-x$, 则 $g(x+1)-g(x)=[f(x+1)-(x+1)^2-(x+1)]-[f(x)-x^2-x]=f(x+1)-f(x)-2x-2=0$, 即 $g(x+1)=g(x)$, 即函数 $g(x)$ 是以 1 为周期的周期函数, 因为 $x \in [0, 1]$ 时, $|f(x)| \leq 1$, 则 $|g(x)|=|f(x)-x^2-x| \leq |f(x)|+|x^2+x| \leq 3$, 结合周期性可知, 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 均有 $|g(x)| \leq 3$, 所以 $|f(x)|=|g(x)+x^2+x| \leq |g(x)|+|x^2+x| \leq x^2+|x|+3$, 又由 C 可得 $f(x)=x^2+x-1$, 令 $|f(x)|=x^2+|x|+3$, 即 $|x^2+x-1|=x^2+|x|+3$, 即 $(x^2+x-1)^2=(x^2+|x|+3)^2$, 当 $x=0$ 时, 上式不成立; 当 $x>0$ 时, 上式化简得 $x^2+x+1=0$, 此时方程无解; 当 $x<0$ 时, 上式化简得 $(x-2)(x^2+1)=0$, 此时方程无解; 可得对于任意 $x \in \mathbf{R}, |f(x)| \neq x^2+|x|+3$, 所以对于任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $|f(x)| < x^2+|x|+3$ 成立, 故 D 正确.

【解后反思】对于函数的新定义试题的求解:

1. 根据函数的新定义, 可通过举出反例说明其错误, 同时正确理解新定义与高中知识的联系和转化.

2. 正确理解函数的定义的内涵, 紧紧结合定义, 结合函数的基本性质(如单调性、奇偶性和周期性等性质)进行推理、论证求解.

3. 利用函数的周期性时, 将自变量较大的函数值转化为自变量较小的函数值, 直到自变量的值进入已知解析式的区间内或与已知的函数值相联系, 必要时可再次运用奇偶性将自变量的符号进行转化.

9. BCD 解法 1(特殊函数法) 令 $f(x)=\cos \frac{\pi}{2}x-2$, $g(x)=-\sin \frac{\pi}{2}x$, 满足题意, 则 $f'(x)=-\frac{\pi}{2}\sin \frac{\pi}{2}x, g'(x)=-\frac{\pi}{2}\cos \frac{\pi}{2}x$. 对于 A, $g(x+2)=-\sin \frac{\pi}{2}(x+2)=-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}x\right)=\sin \frac{\pi}{2}x$ 为奇函数, 故 A 错误; 对于 B, $f'(x+2)=-\frac{\pi}{2}\sin\left[\frac{\pi}{2}(x+2)\right]=-\frac{\pi}{2}\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}x\right)=\frac{\pi}{2}\sin \frac{\pi}{2}x$ 为奇函数, 故 B 正确; 对于 C, $f(x)=\cos \frac{\pi}{2}x-2$ 的一个周期为 4, 故 C 正确; 对于 D, $g(x)=-\sin \frac{\pi}{2}x$ 的一个周期为 4, 且 $g(1)+g(2)+g(3)+g(4)=0$, 则 $\sum_{k=1}^{2024} g(k)=506[g(1)+g(2)+g(3)+g(4)]=506 \times 0=0$, 故 D 正确.

解法 2(赋值法) 对于 A, 由 $g(-x+2)=-g(x+2)$, 得 $g(x+2)$ 为奇函数, 故 A 错误; 对于 B, 由 $g(x)-f(3-x)=2$, 得 $g'(x)+f'(3-x)=0$, 又 $f'(x)=g'(x-1)$, 所以 $f'(x+1)=g'(x)=-f'(3-x)$, 即 $f'(x+2)=-f'(2-x)$, 又 $f'(x+2)$ 定义在 $\mathbf{R}$ 上, 所以 $f'(x+2)$ 为奇函数, 故 B 正确; 对于 C, 因为 $f'(x)=g'(x-1)$, 所以 $[f(x)-g(x-1)]'=0$, 即 $f(x)-$

$g(x-1)=c(c$ 为常数), 因为 $g(x)-f(3-x)=2$, 所以 $g(3-x)-f(x)=2$, 所以 $g(3-x)-g(x-1)-2=c$, 令 $x=2$, 得 $c=-2$, 所以 $g(3-x)=g(x-1)$, 又 $g(-x+2)=-g(x+2)$, 所以 $g(x+1)=-g(-x+3)$, 所以 $g(x+1)=-g(x-1)$, 所以 $g(x+3)=-g(x+1)=g(x-1)$, 所以函数 $g(x)$ 是周期为 4 的函数, 因为 $f(x)=g(x-1)-2$, 所以 $f(x)$ 也是周期为 4 的函数, 故 C 正确; 对于 D, 因为 $g(x+1)=-g(x-1)$, 所以 $g(3)=-g(1), g(4)=-g(2)$, 所以 $g(1)+g(2)+g(3)+g(4)=0$, 又 $g(x)$ 是周期为 4 的函数, 所以 $\sum_{k=1}^{2024} g(k)=506[g(1)+g(2)+g(3)+g(4)]=0$, 故 D 正确.

【解后反思】本题是抽象函数的图象和性质问题, 是高频考点, 解法 1 是利用满足题中条件的具体函数, 再将四个选项依次判断即可, 需要强调的是, 列举具体的函数时, 首选三角函数, 较易; 解法 2 是利用函数与导数的关系, 函数的奇偶性、对称性与周期性的定义, 借助赋值法与函数性质逐项判断, 难度大, 考场上不建议考生使用.

【题组总结】函数的周期性问题主要包括: 已知函数的周期性(显性的), 求函数值以及已知函数的周期性(隐性的), 求函数值. 常考查以下两个题型:

题型一 已知函数的周期性(显性的), 求函数值, 利用函数的周期性, 可将其他区间上的求值等问题, 转化到已知区间上, 进而解决问题.

题型二 已知函数的周期性(隐性的), 求函数值, 已知函数的周期性(隐性的), 可利用周期性的性质, 先明确了周期再将其他区间上的求值转化到已知区间上, 进而解决问题. 奇偶性、单调性、周期性的综合性问题, 关键是利用奇偶性和周期性将未知区间上的问题转化为已知区间上的问题, 周期性起到转换自变量值的作用, 奇偶性起到调节符号作用.

题组 3 函数的图象

1. A 【思路分析】不等式 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 等价于图象为上凸的函数, 再结合函数性质判断各选项.

因为 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则函数为上凸函数, 对于 A, $f(x)=\ln x$ 的图象是上凸的, 符合题意; 对于 B, $f(x)=x^2+1$ 的图象是下凸的, 不符合题意; 对于 C, $f(x)=2^x$ 的图象是下凸的, 不符合题意; 对于 D, $f(x)=x^{\frac{4}{3}}$ 的图象是下凸的, 不符合题意.

2. D 【思路分析 1】从函数的性质来分析排除.

解法 1(定性分析法) 观察图象可知函数为偶函数. 对于 A, $f(-x)=\sin[\tan(-x)]=\sin(-\tan x)=-\sin(\tan x)=-f(x)$, 为奇函数, 排除 A; 对于 B, $f(-x)=\tan[\sin(-x)]=\tan(-\sin x)=-\tan(\sin x)=-f(x)$, 为奇函数, 排除 B; 同理, 可得 C, D 选项为偶函数, 而对于 C 项, 其定义域为 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k \in \mathbf{Z})$, 不是 $\mathbf{R}$, 舍去, 故 D 正确.

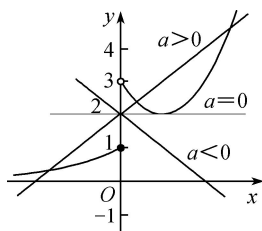
【思路分析 2】从特殊的数值来进行排除.

解法 2(定量分析法) 根据函数的图象可知, $f(0) \neq 0$, 故排除选项 A, B; 根据图象可知, 函数的定义域为 $\mathbf{R}$, 但选项 C 的定义域为 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k \in \mathbf{Z})$, 故排除 C, 从而选 D.

3. A 设 $g(x)=\frac{1-e^x}{1+e^x}$, 则 $g(-x)=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{e^x-1}{1+e^x}=-g(x)$, 所以 $g(x)$ 为奇函数, 设 $h(x)=\cos 2x$, 可知 $h(x)$ 为偶函数, 所以 $f(x)=\frac{1-e^x}{1+e^x}\cos 2x$ 为奇函数, 故 B, C 错误; 易知 $f(0)=0$, 故 A 正确, D 错误.

4. C 【思路分析】将原问题转化为直线 $y=ax+2$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象交点的个数,作出 $y=f(x)$ 的图象,分为 $a>0$, $a=0$, $a<0$ 三种情况讨论,结合图象求解即可.

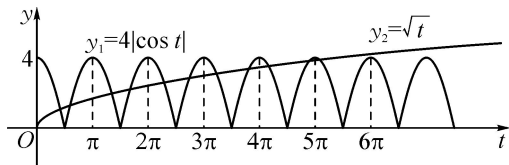
(思想方法:数形结合思想)作出函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示,将原问题转化为直线 $y=ax+2$ (过定点 $(0,2)$) 与函数 $y=f(x)$ 的图象交点的个数问题.由图可知,当 $a=0$ 时,直线 $y=2$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象只有 1 个交点;当 $a<0$ 时,直线 $y=ax+2$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象没有交点;当 $a>0$ 时,直线 $y=ax+2$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象有 3 个交点,所以直线 $y=ax+2$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象不可能有 2 个交点.



5. B 因为 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 所以取 $a>0, c>0, b=0$, 此时 $f(x)=\frac{ax}{x^2+c}$, 当 $x>0$ 时, $f(x)>0$, 当 $x<0$ 时, $f(x)<0$, 故只有 B 符合题意.

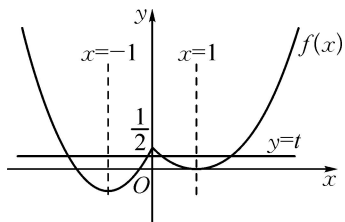
6. C 【思路分析】判断方程实数根的个数,通常会将其转化为两个函数图象的交点的个数,为此,将方程转化为 $4|\cos t|=\sqrt{t}$, 从而构造出两个函数 $y_1=4|\cos t|, y_2=\sqrt{t}$. 判断它们有几个交点,关键在于判断它们在什么范围内有交点,为此,可从函数的值域来分析.

设 $y_1=4|\cos t|, y_2=\sqrt{t}$. 在同一平面直角坐标系内画出 $y_1=4|\cos t|$ 与 $y_2=\sqrt{t}$ 的大致图象,如图. 当 $t=5\pi$ 时, $y_1=4>\sqrt{5\pi}=y_2$; 当 $t=6\pi$ 时, $y_1=4<\sqrt{6\pi}=y_2$. 根据图象可知两个函数共有 11 个交点, 所以方程 $4|\cos t|-\sqrt{t}=0$ 有 11 个实数根.



7. ABD 【思路分析】作出 $f(x)=\begin{cases} 2^{x-1}+2^{1-x}-2, & x\geq 0, \\ x^2+2x+\frac{1}{2}, & x<0 \end{cases}$ 和 $y=t$ 的图象,利用数形结合法判断.

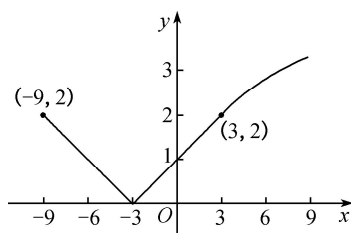
如图所示,作出 $f(x)=\begin{cases} 2^{x-1}+2^{1-x}-2, & x\geq 0, \\ x^2+2x+\frac{1}{2}, & x<0 \end{cases}$ 和 $y=t$ 的图象.



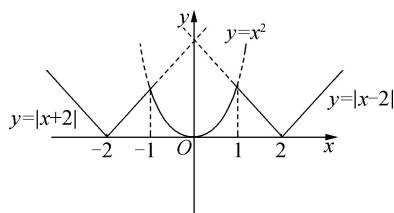
当 $x=0$ 时, $f(0)=\frac{1}{2}+2-2=\frac{1}{2}$. 因为存在 x_1, x_2, x_3, x_4 , 使得 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)$, 所以 $0<t<\frac{1}{2}$. 由图可知 x_1, x_2 关于 $x=-1$ 对称, 所以 $\frac{x_1+x_2}{2}=-1$, 所以 $x_1+x_2=-2$, 故 A 正确. 令 $\begin{cases} 2^{x-1}+2^{1-x}-2=\frac{1}{2}, \\ x\geq 0, \end{cases}$ 解得 $x=0$ 或 $x=2$,

由图可知 $0<x_3<1<x_4<2$, 故 B 正确. 因为当 $x\geq 0$ 时, $f(x)=2^{x-1}+2^{1-x}-2$, 所以 $f(1+x)=2^x+2^{-x}-2, f(1-x)=2^{-x}+2^x-2$, 所以当 $0\leq x\leq 2$ 时, 有 $f(1+x)=f(1-x)$, 即 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 所以 x_3, x_4 关于 $x=1$ 对称, 所以 $\frac{x_3+x_4}{2}=1$, 所以 $x_3+x_4=2$, 即 $x_4=2-x_3$, 所以 $x_3x_4=(2-x_3)x_3=-(x_3-1)^2+1$ ($0\leq x_3<1$). 因为 $x_3<1$, 所以 $x_3x_4<1$, 故 C 错误. 由 $x_3+x_4=2, x_1+x_2=-2$, 得 $x_1+x_2+x_3+x_4=0$, 故 D 正确.

8. $(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}]$ 画出 $f(x)$ 的图象如图所示, 由图可知 $x_1+x_2=-6, 0<f(x_1)\leq 2$. 当 $x_3\neq x_2$ 时, $2<f(x_3)<4$ 且 $f(x_3)=\log_2(x_3+1)$. 所以 $2<\log_2(x_3+1)<4$, 解得 $3<x_3<15$, 则 $\frac{x_3}{x_1+x_2}=\frac{x_3}{-6}\in(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$; 当 $x_3=x_2$ 时, $x_3=x_2=3$, 则 $x_1=-6-x_2=-9, \frac{x_3}{x_1+x_2}=-\frac{1}{2}$. 综上, $\frac{x_3}{x_1+x_2}$ 的取值范围是 $(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}]$.



9. C (思想方法:数形结合思想)如图所示,由题意可得, $f(x)$ 为偶函数, 当 $x\geq 0$ 时, $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in[0,1], \\ |x-2|, & x\in(1,+\infty), \end{cases}$ 当 $1\leq x\leq 2$ 时, $-1\leq x-2\leq 0, f(x-2)=f(2-x)\leq 2-x=f(x)$, 当 $2<x\leq 3$ 时, $0<x-2\leq 1, f(x-2)\leq x-2=f(x)$, 所以 B 不正确, A 也不正确; C 中, 从图象上看, $x\in[0, +\infty)$, $f(x)\leq x$, 令 $t=f(x)$, 则 $t\geq 0$, 所以 $f(t)\leq t$, 即 $f[f(x)]\leq f(x)$, 故 C 正确, D 不正确.

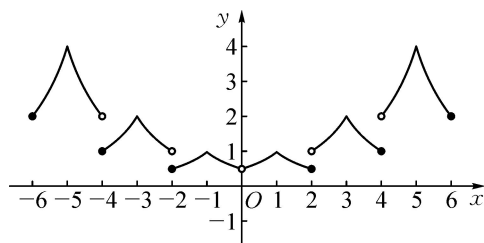


10. AC 【思路分析】根据函数表达式以及迭代关系, 分析得到函数 $f(x)$ 的变化规律.

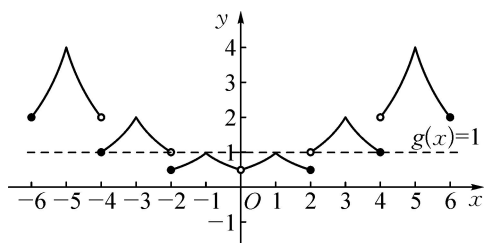
由已知当 $0<x\leq 2$ 时, $f(x)=2^{-|x-1|}$, 又 $x>2$ 时, $f(x)=2f(x-2)$, 所以当 $2k<x\leq 2k+2, k\in\mathbf{N}^*$ 时, $f(x)=2f(x-2)=4f(x-4)=\dots=2^k f(x-2k)=2^k 2^{-|x-2k-1|}$. 又 $f(x)$ 为偶函数, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称.

【思路分析】结合性质和表达式作图, 数形结合解决问题.

根据以上信息作出函数 $f(x)$ 的图象如下:

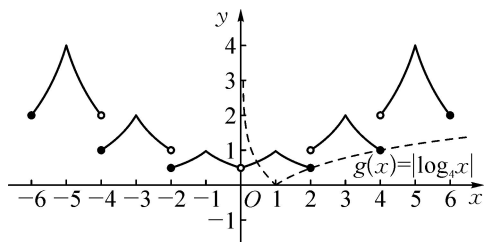


对于 A, 再作函数 $g(x)=1$ 的图象可得,



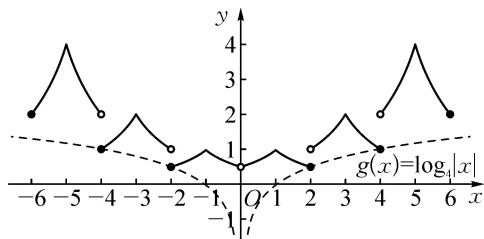
观察图象可得函数 $f(x)$ 的图象与函数 $g(x)$ 的图象有四个交点, 所以方程 $g(x)=f(x)$ 有四个不相等的实数根, A 正确;

对于 B, 再作函数 $g(x)=|\log_4 x|$ 的图象如下:



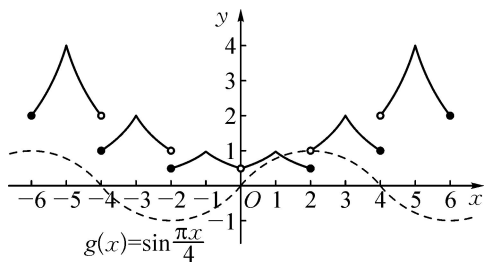
观察图象可得函数 $f(x)$ 的图象与函数 $g(x)$ 的图象有三个交点, 所以方程 $g(x)=f(x)$ 有三个不相等的实数根, B 错误;

对于 C, 再作函数 $g(x)=\log_4 |x|$ 的图象如下:



观察图象可得函数 $f(x)$ 的图象与函数 $g(x)$ 的图象有四个交点, 所以方程 $g(x)=f(x)$ 有四个不相等的实数根, C 正确;

对于 D, 再作函数 $g(x)=\sin \frac{\pi x}{4}$ 的图象如下:



观察图象可得函数 $f(x)$ 的图象与函数 $g(x)$ 的图象有一个交点, 所以方程 $g(x)=f(x)$ 只有一个实数根, D 错误.

【题组总结】 函数的图象与性质主要考查三种能力:

(1) 识图, 这里的“识图”是指题目给出一个函数解析式, 识别在所给出的函数图象中哪一个符合所给函数. 解决这类问题的方法一般是利用间接法抓住函数的性质, 定性分析: 利用函数的定义域判断函数图象的左右位置; 利用函数的值域判断函数图象的上下位置; 利用函数的奇偶性判断函数图象的对称性; 利用函数的单调性判断函数图象的升降趋势等. 除此之外, 还可以从函数图象上的特殊点入手, 利用特殊点的函数值来分析.

(2) 作图, 在解决有些函数的问题时, 需要根据题目条件作出所需函数的图象, 主要是利用基本初等函数图象或函数图象变换作出所需图象, 然后通过图象研究函数的性质, 并通过性质解决不等式、零点等问题;

(3) 用图, 在解决有关函数的问题时, 有时需要运用已有的基本初等函数图象或运用函数图象变换作出所研究函数的图象, 再利用作出的图象研究函数的性质, 从而解决问题.

题组 4 函数图象的对称性

1. A 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 是奇函数, 且对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+1)=f(1-x)$, 故函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 所以 $f(x)=f(2-x)$, 故 $f(-x)=f(2+x)=-f(x)$, 所以 $f(x)=-f(2+x)=f(4+x)$, 所以 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数, 则 $f(2023)=f(505 \times 4 + 3)=f(3)=-f(-3)=2$.

2. C **【思路分析 1】** 由题意得 $f(x+1)$ 是奇函数, 根据定义域的对称性依次求得 a, b 的值, 即可求得 $\log_a b$.

解法 1 依题意将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 1 个单位长度后, 其关于原点对称, 即 $f(x+1)=\log_2 \left(a - \frac{1}{x+2}\right) + b$ 是奇函数, 因为奇函数的定义域关于原点对称, 而 $x=-2$ 时, 函数 $f(x+1)$ 无意义, 故 $x=2$ 时, $f(x+1)$ 也无意义, 即 $a - \frac{1}{4} = 0$, 解得 $a = \frac{1}{4}$, 此时 $f(x+1) = \log_2 \frac{x-2}{x+2} - 2 + b$ 为奇函数, 则 $f(x+1) + f(-x+1) = \log_2 \frac{x-2}{x+2} - 2 + b + \log_2 \frac{x+2}{x-2} - 2 + b = 2b - 4 = 0$, 解得 $b = 2$, 故 $\log_a b = \log_{\frac{1}{4}} 2 = -\frac{1}{2}$.

【思路分析 2】 直接利用 $f(x) + f(2-x) = 0$, 将其化成 $2b + \log_2 \left[a^2 + \frac{1-4a}{4(3-x)} + \frac{1-4a}{4(x+1)}\right] = 0$, 再由等式恒成立得到 $1-4a=0$, 继而求得 $\log_a b$.

解法 2 依题意 $f(x) + f(2-x) = 0$ 恒成立, 代入得 $f(x) + f(2-x) = 2b + \log_2 \left(a - \frac{1}{x+1}\right) + \log_2 \left(a - \frac{1}{3-x}\right) = 0$, 化简得 $2b + \log_2 \left[a^2 - \frac{a}{3-x} - \frac{a}{x+1} + \frac{1}{(3-x)(x+1)}\right] = 0$, 整理得 $2b + \log_2 \left[a^2 - \frac{a}{3-x} - \frac{a}{x+1} + \frac{3-x+x+1}{4(3-x)(x+1)}\right] = 0$, 即 $2b + \log_2 \left[a^2 + \frac{1-4a}{4(3-x)} + \frac{1-4a}{4(x+1)}\right] = 0 (*)$, 依题意, 此式在函数的定义域内恒成立, 故 $1-4a=0$, 即 $a = \frac{1}{4}$, 代入 $(*)$ 式可得 $2b-4=0$, 即 $b=2$, 故 $\log_a b = -\frac{1}{2}$.

3. $f(x) = -\cos \pi x$ (答案不唯一, 满足条件即可) **【思路分析】** 根据题意得 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 关于点 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 对称, 进而结合三角函数性质和条件③求解即可.

由① $f(1+x)=f(1-x)$ 可知, 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称; 由② $f\left(\frac{3}{2}+x\right)=-f\left(\frac{3}{2}-x\right)$ 可知, 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 对称, 所以 $f(2+x)=-f(1-x)=-f(1+x)$, 即 $f(1+x)=-f(x)$, 所以 $f(2+x)=-f(x+1)=f(x)$, 故函数 $f(x)$ 的周期为 2, 故考虑余弦型函数. 不妨令 $f(x)=A \cos \omega x$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$, 即 $f(x)=A \cos \pi x$, 满足性质①②. 由③ $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 得 $A < 0$, 故不妨取 $A = -1$, 即 $f(x) = -\cos \pi x$, 此时满足已知三个条件.

4. A 对于选项 A, 若 $x = \frac{m}{n}$ 是有理数, 则 $1-x = \frac{n-m}{n}$ 也为有理数, 则 $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n} = f\left(\frac{n-m}{n}\right)$, 若 x 为无理数, 则 1

$-x$ 也为无理数, 即 $f(x)=f(1-x)=1$, 所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称, 故 A 正确; 对于选项 B, C, 由题意知 $f(\sqrt{2}-\frac{1}{2})=f(-\sqrt{2}+\frac{3}{2})=1$, 显然 $f(x)$ 的图象不关于点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 对称, 而 $0 < -\sqrt{2}+\frac{3}{2} < \sqrt{2}-\frac{1}{2} < 1$, 故 B, C 错误; 对于选项 D, 若 x 为有理数, 则 $f(x)=\frac{1}{n}$, 显然函数 $f(x)$ 无最小值, 故 D 错误.

【解后反思】 抽象函数可以适当选取特殊值验证选项, 从而提高解题速度, 而验证 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称时, 要根据对称性的定义 $f(x)=f(1-x)$ 判断, 需注意讨论 x 为有理数和无理数两种情形.

5. BC **【思路分析】** 由“ $f(x+\frac{7}{2})+f(x)=0$ ”知函数 $f(x)$ 的最小正周期, 由“ $y=f(x-\frac{7}{4})$ 是奇函数”知函数 $f(x)$ 是中心对称图形, 结合三角函数图象的特征可知函数 $f(x)$ 具有奇偶性.

解法 1(推理法) 由 $f(x+\frac{7}{2})+f(x)=0$, 得 $f(x+\frac{7}{2})=-f(x)$, 将 $x+\frac{7}{2}$ 代入, 得 $f(x+\frac{7}{2}+\frac{7}{2})=-f(x+\frac{7}{2})=-[-f(x)]$, 即 $f(x+7)=f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 的一个周期为 7, 故 A 错误. 由 $y=f(x-\frac{7}{4})$ 是奇函数, 得 $f(-x-\frac{7}{4})=-f(x-\frac{7}{4})$, 所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{7}{4}, 0)$ 中心对称, 故 B 正确, D 错误. 由 $f(-x-\frac{7}{4})=-f(x-\frac{7}{4})$, 知 $f(-x-\frac{7}{2})+f(x)=0$. 又由 $f(x+\frac{7}{2})+f(x)=0$, 得 $f(x+\frac{7}{2})=f(-x-\frac{7}{2})$, 即 $f(-x)=f(x)$, 即函数 $f(x)$ 为偶函数, 故 C 正确.

解法 2(特殊函数法) 不妨设 $f(x-\frac{7}{4})=A\sin(\omega x)$, 即 $f(x)=A\sin(\omega x+\frac{7}{4}\omega)$, 则 $f(x+\frac{7}{2})=A\sin(\omega x+\frac{7}{2}\omega+\frac{7}{4}\omega)$, 故 $f(x+\frac{7}{2})+f(x)=A\sin[\omega x+\frac{7}{2}\omega+\frac{7}{4}\omega]+A\sin[\omega x+\frac{7}{2}\omega-\frac{7}{4}\omega]=2A\sin(\omega x+\frac{7}{2}\omega)\cos(\frac{7}{4}\omega)=0$ 对于 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 故 $\cos(\frac{7}{4}\omega)=0$, 则 $\omega=\frac{2}{7}\pi$, 所以 $f(x)=A\sin(\frac{2}{7}\pi x+\frac{\pi}{2})=A\cos(\frac{2}{7}\pi x)$, 故选项 B, C 正确, A, D 错误.

【解后反思】 解法 1 是推理法, 需要很强的推理能力, 解法 2 用特殊函数法, 只需要对三角恒等变换技巧熟悉即可, 两种方法都值得揣摩学习.

6. ACD 由题意知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 因为 $f(x)+f(-x)=\lg 100=2$, 所以 $f(x)$ 的图象关于 $(0, 1)$ 对称, 故 A 正确; 因为 $g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $g(x)+g(-x)=2$, 所以 $g(x)$ 的图象关于 $(0, 1)$ 对称, 故 B 不正确; 因为 $F(x)=$

$f(x)+g(x)$, 所以 $F(x)$ 的图象关于 $(0, 2)$ 对称, 所以对任意的 $x \in [-a, a] (a>0)$, $F(x)$ 最大值与最小值之和为 4, 故 C 正确; 由 $\frac{F(x-3)+x-3}{x-1} < 1$, 得 $\frac{F(x-3)+x-3}{x-1} - 1 = \frac{F(x-3)-2}{x-1} < 0$, 又 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 且 $F(0)=2$, 所以 $\begin{cases} x-3>0, \\ x-1>0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-3<0, \\ x-1<0, \end{cases}$ 解得 $x>3$ 或 $x<1$, 故 D 正确.

7. D **【思路分析】** 根据题设, 利用抽象函数的性质求解. 因为 $g'(3-x)$ 的图象关于原点对称, 所以 $g(3-x)$ 的图象关于 y 轴对称, 且 $g'(3-x)=-g'(3+x)$, 所以 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称, $g'(x)$ 的图象关于点 $(3, 0)$ 对称, 且 $g'(3)=0$. 又 $f'(\frac{3}{2}+x)+f'(\frac{3}{2}-x)=2$, 即 $g(\frac{3}{2}+x)+g(\frac{3}{2}-x)=2$, 则 $g(x)$ 的图象关于点 $(\frac{3}{2}, 1)$ 对称. 综上, $g(6-x)=g(x)$, $g(3-x)+g(x)=2$, 则 $g(6-x)+g(3-x)=2$, 所以 $g(6-\frac{3}{2})+g(3-\frac{3}{2})=g(\frac{9}{2})+g(\frac{3}{2})=2$. 而 $g(\frac{3}{2})=1$, 故 $g(\frac{9}{2})=1$. 又 $g'(x)-g'(3-x)=0$, 所以 $g'(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{3}{2}$ 对称, 即 $g'(3-x)=g'(x)$, 又 $g'(3-x)=-g'(3+x)$, 所以 $g'(x)=-g'(x+3)$, 所以 $g'(9)=-g'(6)=g'(3)=0$, 所以 $g'(9)+g(\frac{9}{2})=1$.

【解后反思】 本题作为单选题, 不妨设 $f(x)=x$, 则易得 $g'(9)+g(\frac{9}{2})=1$.

8. D **【思路分析】** 由 $f(x)$ 的解析式可知 $f(x)$ 为奇函数, 进而可得 $f(x)$ 的对称中心, 根据 $g(x)$ 满足的关系式, 可得函数 $g(x)$ 的对称中心, 由两个函数的对称中心相同, 即可判断出其零点的特征, 进而求得 $(2n+1)$ 个零点之和.

函数 $f(x)=x^2(1-\frac{2}{e^x+1})=x^2 \cdot \frac{e^x-1}{e^x+1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(-x)=x^2 \cdot \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=-x^2 \cdot \frac{e^x-1}{e^x+1}=-f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 其图象关于点 $(0, 0)$ 对称, 从而函数 $f(x-2)$ 的图象关于点 $(2, 0)$ 对称. 因为函数 $g(x)$ 满足 $g(1+3x)+g(3-3x)=0$, 即 $g(1+x)+g(3-x)=0$, 所以函数 $g(x)$ 的图象关于点 $(2, 0)$ 对称, 且 $g(2)=0$. 因为 $G(x)=f(x-2)-g(x)$ 的图象关于点 $(2, 0)$ 对称, 且 $G(2)=f(0)-g(2)=0$, 所以函数 $G(x)$ 的零点即为函数 $f(x-2)$ 与 $g(x)$ 图象交点的横坐标, 又因为 $G(x)$ 有 $(2n+1) (n \in \mathbf{N}^*)$ 个零点, 所以函数 $f(x-2)$ 与 $g(x)$ 图象的交点恰有 $(2n+1) (n \in \mathbf{N}^*)$ 个, 其中一个零点为 2, 其余 $2n (n \in \mathbf{N}^*)$ 个交点关于点 $(2, 0)$ 对称, 所以这 $(2n+1) (n \in \mathbf{N}^*)$ 个零点之和为 $4n+2 (n \in \mathbf{N}^*)$.

【解后反思】 本题的求解关键是能够通过函数解析式和抽象函数关系式确定函数的对称中心, 从而可确定零点所具有的对称关系.

9. $\sqrt{5}$ **【思路分析】** 先证明 $f(x+1)+f(-x+1)=2$, 进而可得 $3x^2+2y^2-4=2$, 设 $x+y=t$, 则直线 $x+y=t$ 与椭圆 $3x^2+2y^2=6$ 有交点, 联立方程, 则 $\Delta \geq 0$, 即可得解.

由题意, $f(x)=x^3-3x^2+3x+2^{x-1}-2^{-x+1}=(x-1)^3+2^{x-1}-2^{-x+1}+1$, 则 $f(x+1)+f(-x+1)=2$. 又 $f(3x^2)+f(2y^2-4)=2$, 所以 $3x^2+2y^2-4=2$, 即 $3x^2+2y^2=6$. 设 $x+y=t$, 则直线 $x+y=t$ 与椭圆 $3x^2+2y^2=6$ 有交点, 联立 $\begin{cases} x+y=t, \\ 3x^2+2y^2=6, \end{cases}$ 得 $5x^2-4tx+2t^2-6=0$, 则 $\Delta=16t^2-20(2t^2-6)$