第 7 章　幂的运算

巅峰训练 1　同底数幂的乘法　幂的乘方与积的乘方

1. C

2. A　**提示**：a 个 a 相乘为 a^a，所以原式$=(a^a)^2=a^{2a}$.

3. C　**提示**：因为 $3^1,3^2,3^3,3^4,3^5,\cdots$，的个位上的数字分别是 3，9，7，1，3，…，四个一循环，且 $123\div4$ 的余数为 3，所以 3^{123} 的个位上的数字是 7.

4. B　**提示**：因为 $25=a^{x+y}=a^x\cdot a^y=5\cdot a^y$，所以 $a^y=5$，所以 $a^x+a^y=5+5=10$.

5. D　**提示**：因为 $a^2=3^b=81$，$(\pm9)^2=3^4=81$，所以 $a=\pm9$，$b=4$，所以 $a-2b=9-8=1$ 或 $a-2b=-9-8=-17$.

6. $x^2-y^{14}+x^5y^7$　**提示**：因为 $x=5^7$，$y=7^5$，所以 $25^7-49^{35}+35^{35}=(5^2)^7-(7^2)^{35}+(5\times7)^{35}=(5^7)^2-(7^5)^{14}+(5^7)^5\times(7^5)^7=x^2-y^{14}+x^5y^7$.

7. 4 或 5　**提示**：因为原式$=2^{m-1}\times2^{2n}=2^{m-1+2n}=2^5$，所以 $m+2n-1=5$，所以 $n=\dfrac{6-m}{2}$. 因为 m,n 均为正整数，所以当 $m=2$ 时，$n=2$；当 $m=4$ 时，$n=1$. 所以 $m+n=2+2=4$ 或 $m+n=4+1=5$.

8. 8　**提示**：因为 $2x+5y-3=0$，所以 $2x+5y=3$，所以 $4^{4x+y}\times8^{y-2x}=(2^2)^{4x+y}\times(2^3)^{y-2x}=2^{8x+2y}\times2^{3y-6x}=2^{2x+5y}=2^3=8$.

9. $b<a$　**提示**：$a=2^{55}=(2^5)^{11}=32^{11}$，$b=5^{22}=(5^2)^{11}=25^{11}$. 因为 $25^{11}<32^{11}$，所以 $5^{22}<2^{55}$.

10. 解：(1) $a^{2m+3n}=(a^m)^2\cdot(a^n)^3=5^2\times3^3=675$.

(2) $(a^2b^3)^m=(a^m)^2\cdot(b^m)^3=5^2\times2^3=200$.

11. 解：$81^{31}=(3^4)^{31}=3^{124}$，$27^{41}=(3^3)^{41}=3^{123}$，$9^{61}=(3^2)^{61}=3^{122}$. 因为 $122<123<124$，所以 $3^{122}<3^{123}<3^{124}$，即 $9^{61}<27^{41}<81^{31}$.

12. 解：因为 $2x+5y-7=0$，所以 $2x+5y=7$，所以 $4^x\times32^y=2^{2x}\times2^{5y}=2^{2x+5y}=2^7=128$.

13. 解：(1) 原式$=x^8+x^8-x^8-x^8=0$.

(2) 原式$=(n-m)^3\cdot(n-m)^2-[-(n-m)^5]=(n-m)^5+(n-m)^5=2(n-m)^5$.

(3) 原式$=2^{2m-1}\times2^4\times2^{3m-3}+(-2^{2m})\times2^{3m}=2^{5m}+(-2^{5m})=0$.

14. 解：由 $3^{2x+1}\times4^x=1\ 512-9^x\times4^{x+1}$，得 $3^{2x}\times3\times4^x=1\ 512-3^{2x}\times4^x\times4$，即 $3\times9^x\times4^x=1\ 512-4\times9^x\times4^x$，所以 $3\times36^x=1\ 512-4\times36^x$，所以 $7\times36^x=1\ 512$，所以 $36^x=216$，所以 $6^{2x}=6^3$，所以 $x=\dfrac{3}{2}$.

15. 解：列表观察个位上数字的规律.

k	1	2	3	4	…
3^k 的个位上数字	3	9	7	1	…
2^k 的个位上数字	2	4	8	6	…
3^k+2^k 的个位上数字	5	3	5	7	…

从表中可知，当 $k=1$ 或 $k=3$ 时，3^k+2^k 的个位上数字是 5. 因为 a^m 与 a^{4n+m} 的个位上数字相同（m,n 都是正整数，a 是整数），即循环周期为 4，所以当 k 为正奇数时，3^k+2^k 都是 5 的倍数.

16. 解：(1) 2　4

(2) **证明**：因为 $(4,12)=a$，$(4,5)=b$，$(4,60)=c$，所以 $4^a=12$，$4^b=5$，$4^c=60$，所以 $4^a\times4^b=12\times5=60=4^c$，所以 $a+b=c$.

(3) 设 $(e,5)=(f,125)=k$，则 $e^k=5$，$f^k=125=5^3$. 因为 $(e^k)^3=5^3$，所以 $(e^3)^k=5^3$，所以 $(e^3)^k=f^k$，所以 $e^3=f$.

巅峰训练 2　同底数幂的除法

1. B　**2.** B

3. A　提示：因为 $a=-2^2=-4$，$b=2^{-2}=\frac{1}{4}$，$c=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$，$d=\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$，且 $-4<\frac{1}{4}<1<4$，所以 $a<b<d<c$.

4. C

5. A　提示：由题意，得 $300\div 600\ 000\ 000=0.000\ 000\ 5=5\times10^{-7}(\mathrm{mm}^2)$.

6. $\frac{1}{a^7b^8}$　提示：$56^{56}=(7\times8)^{7\times8}=7^{8\times7}\times8^{7\times8}=(7^8)^7\times(8^7)^8=a^7b^8$. 所以 $56^{-56}=\frac{1}{56^{56}}=\frac{1}{a^7b^8}$.

7. $\frac{5}{2}$　提示：因为 $9^y=3^{2y}=6$，所以 $3^{-2y}=\frac{1}{3^{2y}}=\frac{1}{9^y}=\frac{1}{6}$. 又因为 $3^x=5$，所以 $3^{x-2y+1}=3^x\times3^{-2y}\times3=5\times\frac{1}{6}\times3=\frac{5}{2}$.

8. 1　提示：因为 $m=\frac{15^4}{3^{44}}=\frac{3^4\cdot5^4}{3^{44}}=\frac{5^4}{3^{40}}$，所以 $m=n$，所以 $2\ 025^{m-n}=2\ 025^0=1$.

9. 9　提示：因为 $k^a=4$，$k^b=6$，$k^c=9$，所以 $k^a\cdot k^c=k^b\cdot k^b$，所以 $k^{a+c}=k^{2b}$，所以 $a+c=2b$，所以 $c=2b-a$. 因为 $2^{b+c}\times3^{b+c}=6^{a-2}$，所以 $(2\times3)^{b+c}=6^{a-2}$，所以 $b+c=a-2$，所以 $c=a-2-b$. 所以 $2b-a=a-2-b$，所以 $2a-3b=2$，所以 $9^a\div27^b=3^{2a-3b}=3^2=9$.

10. $X=Y$　提示：$X=\frac{(9\times11)^9}{9^{90}\times9^9}=\frac{9^9\times11^9}{9^{90}\times9^9}=\frac{11^9}{9^{90}}=Y$.

11. 解：(1) 因为 $a^m=2$，$a^n=4$，$a^k=32$，所以 $a^{3m}=2^3$，$a^{2n}=4^2=2^4$，$a^k=2^5$，所以 $a^{3m+2n-k}=a^{3m}\cdot a^{2n}\div a^k=2^3\cdot2^4\div2^5=2^{3+4-5}=2^2=4$.

(2) 因为 $a^{k-3m-n}=a^k\div a^{3m}\div a^n=2^5\div2^3\div2^2=2^0=1=a^0$，所以 $k-3m-n=0$.

12. 解：(1) 原式 $=4x^6\cdot(-x^2)\div x^6=-4x^2$.

(2) 原式 $=\frac{x^{-2}y^{-3}\cdot(-2)^{-2}x^6y^2}{2^{-1}x^2y^{-3}}=\frac{x^4y^{-1}\cdot(-2)^{-2}}{2^{-1}x^2y^{-3}}=\frac{1}{2}x^2y^2$.

13. 解：设 $S=2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+\cdots+2^{-2\ 025}$ ①，则 $2S=2\times2^{-1}+2\times2^{-2}+2\times2^{-3}+\cdots+2\times2^{-2\ 025}=2^0+2^{-1}+2^{-2}+\cdots+2^{-2\ 024}=1+2^{-1}+2^{-2}+\cdots+2^{-2\ 024}$ ②.

②－①，得 $S=1-2^{-2\ 025}$，即 $2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+\cdots+2^{-2\ 025}=1-2^{-2\ 025}$.

14. 解：由 $9^n\times27^{n-1}\div3^{3n+1}=81$，得 $(3^2)^n\times(3^3)^{n-1}\div3^{3n+1}=3^4$，所以 $3^{2n}\times3^{3(n-1)}\div3^{3n+1}=3^4$，所以 $3^{2n+3(n-1)-(3n+1)}=3^4$，所以 $2n+3(n-1)-(3n+1)=4$，解得 $n=4$. 当 $n=4$ 时，$n^{-2}=4^{-2}=\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16}$.

15. 解：因为 $a^3+a^{-3}=p$ ①，$a^3-a^{-3}=q$ ②，所以①＋②，得 $2a^3=p+q=4$，所以 $a^3=2$. ①－②，得 $p-q=2a^{-3}=\frac{2}{a^3}=1$.

16. 解：(1) 原数 $=3\times10^{-26}$.

(2) 6 g $=6\times10^{-3}$ kg，$6\times10^{-3}\div(3\times10^{-26})=2\times10^{23}$(个).

答：6 g 水中大约有 2×10^{23} 个水分子.

(3) 因为一个水分子是由两个氢原子和一个氧原子所构成，氧原子的质量约为 2.665×10^{-26} kg，所以一个氢原子的质量为 $(3\times10^{-26}-2.665\times10^{-26})\div2=1.675\times10^{-27}$(kg).

答：一个氢原子的质量为 1.675×10^{-27} kg.

17. B　提示：由题意，得 $\left(-\frac{1}{2}\right)\blacktriangle2=\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\times2+|-2|=4-1+2=5$.

18. 解：当 $2a-1=1$，即 $a=1$ 时，等式成立，所以符合题意；

当 $2a-1=-1$，即 $a=0$ 时，指数 $a+2=2$，2 为偶数，此时等式成立，所以符合题意；

当 $a+2=0$，即 $a=-2$ 时，底数 $2a-1=-5\neq0$，此时等式成立，所以符合题意.

综上所述，使等式 $(2a-1)^{a+2}=1$ 成立的 a 的值为 1 或 0 或 -2.

第 7 章综合练

1. D　**2.** B

3. D　**提示**：由 $2^c=2^b\times2$，得 $c=b+1$. 同理可得，$b=a+1$，$c=a+2$. 所以这 4 个等式都成立.

4. C　**提示**：因为 $x=3^m+1$，$y=2+9^m$，所以 $3^m=x-1$，所以 $y=2+(3^m)^2$，所以 $y=(x-1)^2+2$.

5. D

6. A　**提示**：因为 $N=2^{9+3}\times5^9=2^9\times2^3\times5^9=8\times(2\times5)^9=8\times10^9=8\ 000\ 000\ 000$，所以数 N 的位数是 10.

7. 2.5×10^{-6}

8. $\frac{2}{3}$　**提示**：因为 $3^m=4$，$3^n=6$，所以 $9^{2m+n}\div27^{m+n}=(3^2)^{2m+n}\div(3^3)^{m+n}=3^{4m+2n}\div3^{3m+3n}=3^{4m+2n-(3m+3n)}=3^{m-n}=3^m\div3^n=4\div6=\frac{2}{3}$.

9. 2　**提示**：因为 $4^m=16$，$2^n=8$，所以 $2^{2m}=16$，所以 $2^{2m-n}=2^{2m}\div2^n=16\div8=2$.

10. (1) $\frac{3}{25}$　**提示**：原式 $=\frac{2^x}{2^{2y}}=\frac{2^x}{(2^y)^2}=\frac{3}{25}$.

(2) 4　**提示**：原式 $=2^x\div2^{2y}\times2^3=2^{x-2y+1}\times2^2=2^0\times2^2=4$.

11. 1　**提示**：因为 $\frac{3^{1-2x}\times27^x}{9^{-x}}=81$，所以 $\frac{3^{1-2x}\times3^{3x}}{3^{-2x}}=3^4$，所以 $3^{1+x}\times3^{2x}=3^4$，所以 $3^{1+3x}=3^4$，所以 $1+3x=4$，所以 $x=1$.

12. $y=(x-1)^2+3$　**提示**：由 $x=2^m+1$，得 $2^m=x-1$，所以 $y=3+4^m=3+(2^m)^2=(x-1)^2+3$.

13. 解：(1) 因为 $h(1)=\frac{2}{3}$，$h(m+n)=h(m)\cdot h(n)$，所以 $h(2)=h(1+1)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$.

(2) 因为 $h(1)=k(k\neq0)$，$h(m+n)=h(m)\cdot h(n)$，所以 $h(2)=h(1)\cdot h(1)=k^2$，所以 $h(3)=h(2)\cdot h(1)=k^3$……所以 $h(n)=k^n$，所以 $h(n)\cdot h(2\ 025)=k^n\cdot k^{2\ 025}=k^{n+2\ 025}$.

14. 解：(1) 由题意，得 $2\times2^{3x}=2^7$，即 $2^{1+3x}=2^7$，所以 $1+3x=7$，解得 $x=2$.

(2) 由题意，得 $2\times2^{x+1}+2^{x+1}=24$，即 $3\times2^{x+1}=3\times2^3$，所以 $x+1=3$，解得 $x=2$.

15. 解：$a>c>b$. 理由如下：

$a=2^{-555}=(2^5)^{-111}=32^{-111}=\left(\frac{1}{32}\right)^{111}$. 同理，$b=\left(\frac{1}{81}\right)^{111}$，$c=\left(\frac{1}{36}\right)^{111}$. 因为 $\frac{1}{32}>\frac{1}{36}>\frac{1}{81}$，所以 $a>c>b$.

16. 解：因为 $3^m=4$，所以 $3^{m-4n}=3^m\div3^{4n}=4\div3^{4n}=\frac{4}{81}$，所以 $3^{4n}=81=3^4$，所以 $4n=4$，解得 $n=1$，所以 $2\ 025^n=2\ 025$.

17. (1) 4　64

(2) 15　**提示**：因为 $[3,60]=a$，$[3,4]=b$，$[3,m]=c$，所以 $3^a=60$，$3^b=4$，$3^c=m$，所以 $3^a\div3^b=60\div4=15$，即 $3^{a-b}=15$. 因为 $a-b=c$，所以 $3^c=15$，所以 $m=15$.

(3) **解**：①因为 $[4,28]=x$，$[7,28]=y$，所以 $4^x=7^y=28$，所以 $\frac{49^y}{64^x}=\frac{(7^2)^y}{(4^3)^x}=\frac{(7^y)^2}{(4^x)^3}=\frac{28^2}{28^3}=\frac{1}{28}$.

②由①，得 $4^x=7^y=28$，所以 $28^{x+y}=28^x\times28^y=(7^y)^x\times(4^x)^y=7^{xy}\times4^{xy}=(7\times4)^{xy}=28^{xy}$，所以 $x+y=xy$，所以 $t=\frac{x+y}{2xy}=\frac{xy}{2xy}=\frac{1}{2}$.

第 8 章　整式乘法

巅峰训练 3　单项式乘单项式　单项式乘多项式　多项式乘多项式

1. A

2. C　**提示**：$(x^2+ax)(x-b)=x^3-bx^2+ax^2-abx=x^3+(a-b)x^2-abx$. 因为不含 x^2 项，所以 $a-b=0$，所以 $a=b$.

3. B　**提示**：因为 $(x+k)(x-k+1)=x^2-kx+x+kx-k^2+k=x^2+x-k^2+k$，所以 $n=3$，所以原式 $=(x+2)(x-1)+(x+3)(x-2)=2x^2+2x-8=2x^2+2x+m$，所以 $m=-8$.

4. -4　**提示**：$x(x+3)+(x+2)(x-3)=x^2+3x+x^2-x-6=2x^2+2x-6=2(x^2+x-1)-4=0-4=-4$.

5. 5　**提示**：因为 $(x+a)(x+b)=x^2+bx+ax+ab=x^2+mx-16$，所以 $a+b=m$，$ab=-16$. 又因为 a，b 为整数，所以 $a=1$，$b=-16$，$a+b=-15$；$a=-1$，$b=16$，$a+b=15$；$a=2$，$b=-8$，$a+b=-6$；$a=-2$，$b=8$，$a+b=6$；$a=4$，$b=-4$，$a+b=0$；$a=-4$，$b=4$，$a+b=0$；$a=8$，$b=-2$，$a+b=6$；$a=-8$，$b=2$，$a+b=-6$；$a=16$，$b=-1$，$a+b=15$；$a=-16$，$b=1$，$a+b=-15$. 所以 m 的值一共有 5 种可能.

6. $-\frac{3}{2}$　**提示**：根据题意，得 $(x-2)(x-2)-(x+3)(x+1)=13$. 整理，得 $-8x=12$，解得 $x=-\frac{3}{2}$.

7. 解：$(2m^2n^{-3})^3(-mn^{-2})^{-2}=8m^6n^{-9}\cdot m^{-2}n^4=8m^4n^{-5}=\frac{8m^4}{n^5}$.

8. 解：因为 $5^m=6$，$6^n=5$，所以 $(6^n)^m=5^m=6$，即 $6^{mn}=6$，所以 $mn=1$，所以 $2m(3m-n)-m(2n+6m)+3=6m^2-2mn-2mn-6m^2+3=3-4mn=3-4=-1$.

9. 解：(1) 根据题意，得 $S_1=a(a+4b)=a^2+4ab$，$S_2=(a+3b)(a+4b)-(a^2+4ab)=a^2+4ab+3ab+12b^2-a^2-4ab=3ab+12b^2$.

(2) 当 $a=2$，$b=4$ 时，$S_2=3ab+12b^2=3\times2\times4+12\times4^2=24+192=216(\mathrm{m}^2)$.

10. 解：设 $3.456=a$，则 $2.456=a-1$，$5.456=a+2$，$1.456=a-2$，所以原式 $=a(a-1)(a+2)-a^3-(a-2)^2=a^3+a^2-2a-a^3-a^2+4a-4=2a-4$. 因为 $a=3.456$，所以原式 $=2a-4=2\times3.456-4=2.912$.

11. 解：(1) $(2x-3)m+2m^2-3x=2mx-3m+2m^2-3x=(2m-3)x+2m^2-3m$. 因为代数式的值与 x 的取值无关，所以 $2m-3=0$，解得 $m=\frac{3}{2}$.

(2) $3A+6B=3[(2x+1)(x-1)-x(1-3y)]+6(-x^2+xy-1)=-(6-15y)\cdot x-9$. 因为 $3A+6B$ 的值与 x 的取值无关，所以 $6-15y=0$，解得 $y=\frac{2}{5}$.

(3) 设 $AB=x$，则 $S_1=a(x-3b)=ax-3ab$，$S_2=2b(x-2a)=2bx-4ab$. 所以 $S_1-S_2=ax-3ab-(2bx-4ab)=(a-2b)x+ab$. 因为 S_1-S_2 的值与 AB 的取值无关，所以 $a-2b=0$，所以 $a=2b$.

巅峰训练 4　乘法公式

1. B

2. C　**提示**：根据题意，可知 $(x-2\ 021)(x-2\ 025)=x^2-4\ 046x+2\ 021\times2\ 025=15$，所以 $x^2-4\ 046x=15-2\ 021\times2\ 025$，所以原式 $=x^2-4\ 046x+2\ 022\times2\ 024=15-2\ 021\times2\ 025+2\ 022\times2\ 024=15-(2\ 023-2)\times(2\ 023+2)+(2\ 023-1)\times(2\ 023+1)=15-(2\ 023^2-4)+(2\ 023^2-1)=15-2\ 023^2+4+2\ 023^2-1=18$.

3. D　**提示**：因为大正方形 $ABCD$ 的边长为 $x+y=AB=11$，中间小正方形 $EFGH$ 的边长为 $x-y=$

$EF=5$，故选项 A 正确；因为 $(x+y)^2-(x-y)^2=121-25$，所以 $x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2=96$，所以 $xy=24$，故选项 B 正确；因为 $(x+y)(x-y)=11\times5$，所以 $x^2-y^2=55$，故选项 C 正确；因为 $(x+y)^2+(x-y)^2=121+25$，即 $x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2=146$，所以 $x^2+y^2=73$，故选项 D 错误.

4. A　**提示**：$f(x)+g(x)=2x+1+x^2+1=x^2+2x+1+1=(x+1)^2+1$. 因为 $(x+1)^2\geqslant0$，所以 $f(x)+g(x)\geqslant1$，即 $f(x)+g(x)$ 的最小值为 1.

5. D　**提示**：$A=-\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1+\frac{1}{3^1}\right)\times\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\times\left(1+\frac{1}{3^8}\right)\times\left(1+\frac{1}{3^{16}}\right)\times\left(1+\frac{1}{3^{32}}\right)\times\left(1+\frac{1}{3^{64}}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{3^{2^n}}\right)+1=-\left(1-\frac{1}{3^{2^{n+1}}}\right)+1=\frac{1}{3^{2^{n+1}}}$.

6. $25y^2$

7. 2 025　**提示**：原式$=\frac{2\ 025}{2\ 025^2-(2\ 025+1)\times(2\ 025-1)}=\frac{2\ 025}{2\ 025^2-2\ 025^2+1}=2\ 025$.

8. $\frac{11}{2}$　$\frac{3}{4}$

9. 1 或 $\frac{3}{4}$　**提示**：因为 $a+b-2=0$，所以 $a+b=2$，所以 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=4$，即 $a^2+b^2=4-2ab$. 因为 $ab>0$，所以 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2=4-4ab<4$. 因为 $a-b$ 为整数，所以 $(a-b)^2$ 为 0 或 1. 当 $(a-b)^2=0$ 时，$ab=1$；当 $(a-b)^2=1$ 时，$ab=\frac{3}{4}$. 综上所述，ab 的值为 1 或 $\frac{3}{4}$.

10. 3　**提示**：由题意，得 $a-b=-1$，$a-c=-2$，$b-c=-1$，所以原式$=\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+a^2-2ac+c^2)=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2]=\frac{1}{2}\times[(-1)^2+(-1)^2+(-2)^2]=3$.

11. 解：(1) 原式$=[(2x+3y)(2x-3y)]^2=(4x^2-9y^2)^2=16x^4-72x^2y^2+81y^4$.

(2) 原式$=[x-(2y-1)][x+(2y-1)]=x^2-(2y-1)^2=x^2-4y^2+4y-1$.

12. 解：根据题意，得 $a^2+2ab+b^2=7$，$a^2-2ab+b^2=3$. 两式相加，得 $2a^2+2b^2=10$，则 $a^2+b^2=5$. 将 $a^2+b^2=5$ 代入 $a^2+2ab+b^2=7$，得 $ab=1$. 所以 $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2(ab)^2=5^2-2\times1^2=23$.

13. 解：(1) 6　**提示**：因为 $2^2+1=5$，而 $2+1$，2^3+1，2^4+1，2^5+1，…，2^n+1 均为奇数，几个奇数与 5 相乘，末尾数字是 5，所以原式的末尾数字是 6.

(2) $2(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)+1=(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)+1=(3^8-1)(3^8+1)+1=3^{16}-1+1=3^{16}$.

14. -3　**提示**：设 $m=2\ 024-a$，$n=a-2\ 025$，则 $m+n=-1$，$m^2+n^2=7$. 所以原式$=mn=\frac{1}{2}[(m+n)^2-(m^2+n^2)]=-3$.

15. (1) **解**：如图 1，左图中的阴影部分面积是 a^2-b^2，右图中的阴影部分面积是 $(a+b)\cdot(a-b)$. 因为左图中的阴影部分面积等于右图中的阴影部分面积，所以 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，这就验证了平方差公式.

(2) 6^2　**提示**：如图 2，A 表示 1 个 1×1 的正方形，即 $1\times1\times1=1^3$，B 表示 1 个 2×2 的正方形，C 与 D 恰好可以拼成 1 个 2×2 的正方形，因此，B，C，D 就可以表示 2 个 2×2 的正方形，即 $2\times2\times2=2^3$. E 与 F，G 与 H 和 I 可以表示 3 个 3×3 的正方形，即 $3\times3\times3=3^3$，而整个图形恰好可以拼成一个 $(1+2+3)\times(1+2+3)$ 的大正方形，由此，可得 $1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2=6^2$.

(3) $\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$

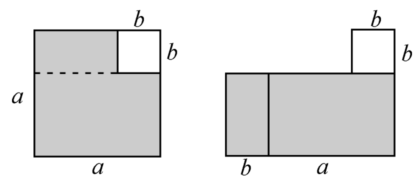


图 1

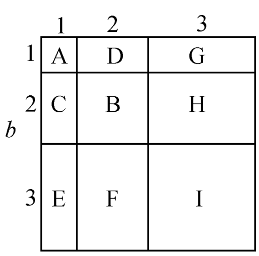


图 2

第 8 章综合练(1)

1. A　**提示:** 根据题意可知,$(x-2\ 025)(x+2\ 026)=x^2+2\ 026x-2\ 025x-2\ 025\times 2\ 026=x^2+(2\ 026-2\ 025)x-2\ 025\times 2\ 026=x^2+x-2\ 025\times 2\ 026$,又因为 $(x-2\ 025)(x+2\ 026)=x^2+mx-2\ 025\times 2\ 026$,所以对比一次项系数可得 $m=1$.

2. C　**提示:** 当 n 是奇数时,$\frac{1}{8}[1-(-1)^n]\cdot(n^2-1)=\frac{1}{8}\times(1+1)(n+1)(n-1)=\frac{(n+1)(n-1)}{4}$,设 $n=2k-1$(k 为整数),则 $\frac{(n+1)(n-1)}{4}=\frac{(2k-1+1)(2k-1-1)}{4}=k(k-1)$;当 n 是偶数时,$\frac{1}{8}[1-(-1)^n](n^2-1)=\frac{1}{8}(1-1)(n^2-1)=0$. 因为 0 和 $k(k-1)$(k 为整数)都是偶数,所以选项 C 正确.

3. A　**提示:** 由题意,得 $DI=x-5$,$DJ=x-3$. 因为 $(x-5)-(x-3)=-2$,所以 $[(x-5)-(x-3)]^2=4$,即 $(x-5)^2-2(x-5)(x-3)+(x-3)^2=4$. 又因为 $(x-5)^2+(x-3)^2=60$,所以 $60-2(x-5)(x-3)=4$,所以 $(x-5)(x-3)=28$,即重叠部分 $FJDI$ 的面积为 28.

4. C　**提示:** 由题图 2,可得 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)=69+2\times 50=169$,且 $a+b+c>0$,所以 $a+b+c=13$.

5. 1　**提示:** 设■$=a$,则原式 $=(x-2)(x+a)=x^2+ax-2x-2a=x^2+(a-2)x-2a$. 因为结果中的一次项系数为 -1,所以 $a-2=-1$,解得 $a=1$.

6. 36　**提示:** 因为 $M=x^2+4xy+5y^2-12y+k=x^2+4xy+4y^2+y^2-12y+6^2-6^2+k=(x+2y)^2+(y-6)^2+k-36$,所以当 $k=36$ 时,M 是“完美数”.

7. $\frac{n^2+n}{2}$　**提示:** 因为 $(x+1)(x+2)=x^2+3x+2$,展开式中 x^{n-1} 项的系数为 $1+2=3$,$(x+1)\cdot(x+2)(x+3)=x^3+6x^2+11x+6$,展开式中 x^{n-1} 项的系数为 $1+2+3=6$,$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=x^4+10x^3+35x^2+50x+24$,展开式中 x^{n-1} 项的系数为 $1+2+3+4=10$,所以 $(x+1)(x+2)(x+3)\cdot\cdots\cdot(x+n-1)(x+n)$ 展开式中 x^{n-1} 项的系数为 $1+2+3+4+\cdots+n-1+n=\frac{1+n}{2}\cdot n=\frac{n^2+n}{2}$.

8. 18　**提示:** 数字 1～9 的和为 $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$. 因为各边上的四个数字的和都等于 21,所以 $x+y+(x+y)=21\times 3-45=18$,即 $x+y=9$. 又因为每边四个数字的平方和 A,B,C 满足 $A+B+C=411$,且 $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2=285$,所以 $x^2+y^2+(x+y)^2=411-285$. 所以 $x^2+y^2+81=126$,即 $x^2+y^2=45$,所以 $(x+y)^2-2xy=45$. 所以 $xy=18$.

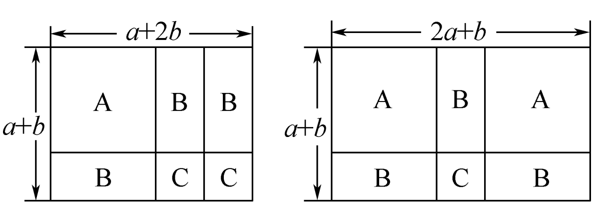
9. 解: (1) 原式 $=\frac{2}{3}x^3y^2\cdot\frac{9}{4}x^2y^4=\frac{3}{2}x^5y^6$.

(2) 原式 $=3x^2-xy-9x^2+12xy-4y^2=-6x^2+11xy-4y^2$.

(3) 原式 $=(a+2b)^2-(3c)^2=a^2+4ab+4b^2-9c^2$.

10. 解: (1) $(3a+b)(a+b)=3a^2+4ab+b^2$

(2) 如图所示.



(3) x,y,z 之间满足的等量关系是 $x+z=y$. 理由如下:

由(2)中图形,可得每 1 张 A 型或 C 型纸片,一定需要配合 1 张 B 型纸片,才能拼出满足条件的图形,因此 $x+z=y$.

11. 解: (1) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

提示: 根据题意可知,题图 3 中阴影部分边长为 $a-b$,所以 $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$,即 $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$.

(2) 由(1)，得$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$，所以$(a-b)^2=7^2-4\times\frac{13}{4}=49-13=36$.

(3) 因为 $a+b=25$，$a^2+b^2=337$，$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$，所以 $25^2=337+2ab$，$625=337+2ab$，$2ab=625-337$，解得 $ab=144$.

(4) 14 **提示**：因为$(2\ 025-x)^2+(x-2\ 015)^2=72$，$2\ 025-x+x-2\ 015=10$，所以$(2\ 025-x+x-2\ 015)^2=100$，所以$(2\ 025-x)^2+(x-2\ 015)^2+2(2\ 025-x)(x-2\ 015)=100$，所以$(2\ 025-x)(x-2\ 015)=14$.

第 8 章综合练(2)

1. B **提示**：因为$(x+m)(x+n)=x^2-6x+7$，所以 $x^2+nx+mx+mn=x^2-6x+7$，$x^2+(m+n)x+mn=x^2-6x+7$，所以 $m+n=-6$，$mn=7$，所以 $m(n+1)+n(m+1)=mn+m+mn+n=2mn+m+n=2\times7+(-6)=14-6=8$.

2. A **提示**：由题意，得 $2(a+b)=12$，$ab=7$，所以 $a+b=6$，所以$(a+1)(b+1)=ab+a+b+1=14$.

3. B **提示**：因为 $A=x^2+3x-a$，$B=-x$，$C=x^3+3x^2+5$，所以 $A\cdot B+C=(x^2+3x-a)(-x)+(x^3+3x^2+5)=-x^3-3x^2+ax+x^3+3x^2+5=ax+5$. 因为 $A\cdot B+C$ 的值与 x 的取值无关，所以 $a=0$，所以 $A=x^2+3x-a=x^2+3x$. 当 $x=-4$ 时，$A=(-4)^2+3\times(-4)=4$.

4. D **提示**：因为每个正方形顶点上的四个数字的和都等于 16，$0+1+2+3+4+5+6+7+8=36$，所以 $x+y+(x+y)=16\times3-36=48-36=12$，所以 $x+y=6$. 因为 $A+B+C=260$，$0^2+1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2=204$，所以 $x^2+y^2+(x+y)^2=260-204=56$. 因为 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$，所以 $6^2-2xy+6^2=56$，解得 $xy=8$，所以 xy 的值为 8.

5. $-3a^2\left(或-2a 或 6a 或-\frac{3}{4}\right)$ **提示**：易知①$4a^2-2a+1-3a^2=a^2-2a+1=(a-1)^2$；②$4a^2-2a+1-2a=4a^2-4a+1=(2a-1)^2$；③$4a^2-2a+1+6a=4a^2+4a+1=(2a+1)^2$；④$4a^2-2a+1-\frac{3}{4}=4a^2-2a+\frac{1}{4}=\left(2a-\frac{1}{2}\right)^2$. 所以加上的单项式为 $-3a^2$ 或 $-2a$ 或 $6a$ 或 $-\frac{3}{4}$.

6. 16 **提示**：设直角三角形的另一条直角边长为 a，则 $S_1=(a+4)^2-4\times\frac{1}{2}\times4a=a^2+8a+16-8a=a^2+16$，$S_2=a^2$，所以 $S_1-S_2=a^2+16-a^2=16$.

7. 1 000 **提示**：设 $a_1,a_2,\cdots,a_{2\,024}$ 中为 1 的有 x 个. 根据 $a_1+a_2+\cdots+a_{2\,024}=0$，得其中为 -1 的也有 x 个，则为 0 的有$(2\ 024-2x)$个. 又因为$(a_1+1)^2+(a_2+1)^2+\cdots+(a_{2\,024}+1)^2=4\ 024$，所以 $4x+(2\ 024-2x)=4\ 024$，解得 $x=1\ 000$.

8. $\frac{256}{5}$ **提示**：设正方形盒子的边长为 b，红、黄、绿三张一样大的正方形纸片的边长均为 a，则 $a^2=20$. 因为所放的三张纸片一样大，所以将左边和右边的空白部分(两个长方形)通过平移无缝拼接在一起可得到一个边长为 $b-a$ 的正方形，所以$(b-a)^2=b^2-20-13-11$，所以 $ab=32$，所以 $a^2b^2=32^2$. 所以正方形盒子的面积为 $b^2=\frac{32^2}{20}=\frac{256}{5}$.

9. 解：(1) 原式$=8x^2+14xy+12xy+21y^2=8x^2+26xy+21y^2$.

(2) 原式$=(-3a)^2-(2b)^2=9a^2-4b^2$.

(3) 设$a=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$，则原式$=(2+a)\cdot\left(a+\frac{1}{8}\right)-a\left(2+a+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{4}$.

10. 解：原式$=a^2+4a+4+a^2-9-2a^2-ab=4a-ab-5$. 因为$\frac{1}{2}ab=2a+1$，所以 $ab=4a+2$. 所以原式$=4a-4a-2-5=-7$.

11. 解：(1) x^2-ax+a^2

(2) $(x+a)(x^2-ax+a^2)=x\cdot x^2-x\cdot ax+x\cdot a^2+a\cdot x^2-a\cdot ax+a\cdot a^2=x^3-$

$ax^2+a^2x+ax^2-a^2x+a^3=x^3+a^3$.

(3) 由(1),可知$(x+a)(x^2-ax+a^2)=x^3+a^3$,所以原式$=x^3+4^3-(x^3+2^3)=x^3+4^3-x^3-2^3=64-8=56$.

12. 解:(1) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$.

(2) 由(1)可知,$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-(2ab+2bc+2ac)=121-2\times38=45$.

(3) 因为 $a+b=10$,$ab=20$,所以$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=a^2+b^2+40=100$,所以$a^2+b^2=60$,所以阴影部分的面积为$S_{正方形ABCD}+S_{正方形ECGF}-S_{\triangle ABD}-S_{\triangle BFG}=a^2+b^2-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}b(a+b)=\frac{1}{2}(a^2+b^2-ab)=\frac{1}{2}\times(60-20)=20$.

第 9 章　图形的变换

巅峰训练 5　平移

1. B　**提示**:①当两条斜边重合的时候可组成一个正方形,此时 $x=3$,$y=1$,$x+y=4$.

②当两条直角边重合时有两种情况:若 EF,AB 重合,此时 $x=5$,$y=1$,$x+y=6$;若 ED,CB 重合,此时 $x=3$,$y=3$,$x+y=6$.

综上所述,$x+y=4$ 或 $x+y=6$.

2. D　**提示**:当$\triangle ABC$ 向左平移时,则 $CE=BC+BE=7+3=10$;当$\triangle ABC$ 向右平移时,则 $CE=BC-BE=7-3=4$.所以 CE 的长为 10 或 4.

3. B　**提示**:由题知,$BE=t$ cm,$CE=(6-t)$cm,$BC=6$ cm.当点 B 到点 C 的距离是点 B 到点 E 距离的 2 倍时,$6=2t$,解得 $t=3$.当点 E 到点 B 的距离是点 E 到点 C 距离的 2 倍时,$t=2(6-t)$,解得 $t=4$.当点 E 到点 C 的距离是点 E 到点 B 距离的 2 倍时,$6-t=2t$,解得 $t=2$.当点 C 到点 B 的距离是点 C 到点 E 距离的 2 倍时,$6=2(6-t)$,解得 $t=3$.综上所述,t 的值为 2 或 3 或 4,所以乙的说法是正确的.

4. C　**提示**:如图 1,当点 B'在线段 BC 上时,过点 C 作 $CG\parallel AB$.因为$\triangle A'B'C'$由$\triangle ABC$ 平移得到,所以 $AB\parallel A'B'$.所以 $CG\parallel A'B'$.①当$\angle ACA'=2\angle CA'B'$时,设$\angle CA'B'=x$,则$\angle ACA'=2x$.因为 $CG\parallel AB$,$CG\parallel A'B'$,所以$\angle ACG=\angle BAC=60°$,$\angle A'CG=\angle CA'B'=x$.因为$\angle ACG=\angle ACA'+\angle A'CG$,所以$2x+x=60°$,解得 $x=20°$,所以$\angle ACA'=2x=40°$.②当$\angle CA'B'=2\angle ACA'$时,设$\angle CA'B'=x$,则$\angle ACA'=\frac{1}{2}x$.同理可得$\angle ACG=\angle BAC=60°$,$\angle A'CG=\angle CA'B'=x$.因为$\angle ACG=\angle ACA'+\angle A'CG$,所以$x+\frac{1}{2}x=60°$,解得 $x=40°$,所以$\angle ACA'=\frac{1}{2}x=20°$.

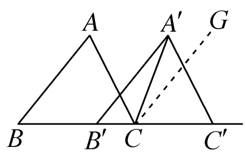


图 1

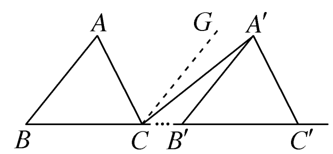


图 2

如图 2,当点 B'在线段 BC 的延长线上时,过点 C 作 $CG\parallel AB$.同理可得 $CG\parallel A'B'$.③当$\angle ACA'=2\angle CA'B'$时,设$\angle CA'B'=x$,则$\angle ACA'=2x$.同理可得$\angle ACG=\angle BAC=60°$,$\angle A'CG=\angle CA'B'=x$.因为$\angle ACA'=\angle ACG+\angle A'CG$,所以 $2x=x+60°$,解得 $x=60°$,所以$\angle ACA'=2x=120°$.④当$\angle CA'B'=2\angle ACA'$时,由图可知,$\angle CA'B'<\angle ACA'$,故不存在这种情况.

综上所述,$\angle ACA'$的度数为 20°或 40°或 120°.

5. $\frac{1}{2}$

6. 3　**提示**:因为 $AD\parallel BC$,由平移易知,$BF=AE$,$CG=DE$,所以 $BF+CG=AE+DE=AD=4$,所以 $FG=BC-(BF+CG)=7-4=3$.

7. $ab-ac-2bc+2c^2$　**提示**:种草部分可平移组成一个长为$(a-2c)$,宽为$(b-c)$的长方形,则种植小草的面积为$(a-2c)(b-c)=ab-ac-2bc+2c^2$.

8. ①②④　**提示**:由平移的性质可知,$DE\parallel D'E'$,$DE=D'E'$,$EE'=DD'$.因为 $DE\parallel D'E'$,所以

$\angle CPD'=\angle CED=60^\circ$，故①正确；因为$\angle CD'E'=\angle D=30^\circ$，$\angle B=60^\circ$，所以$\angle D'E'B=180^\circ-30^\circ-60^\circ=90^\circ$，所以$D'E'\perp AB$，故②正确；因为$\triangle PEE'$和$\triangle PCD'$的周长之和为$PE+PE'+EE'+PC+PD'+CD'=CE+CD+DE$，即与$\triangle CDE$的周长相等，而$\triangle ABC$与$\triangle CDE$形状大小完全一样，所以$\triangle PEE'$和$\triangle PCD'$的周长之和等于$\triangle ABC$的周长，故③不正确；因为$S_{平行四边形DD'E'E}=S_{长方形CC'E'E}$，所以$S_{阴影部分}=S_{\triangle ABC}$，故④正确. 综上所述，正确的结论有①②④.

9. ①③⑤　**提示**：因为$\triangle ABC$沿直线BC向右平移 2 cm 得到$\triangle DEF$，所以$AB/\!/DE$，$BE=AD=2$ cm，$AD/\!/BC$，$\angle B=\angle DEF$，故①⑤正确；因为$AD/\!/BC$，所以$\angle ADE=\angle DEF$，所以$\angle B=\angle ADE$，故③正确；根据已知条件不能得出$EC=2$ cm，$AG=CG$，故②④不正确. 所以正确的结论有①③⑤.

10. 解：(1) 如图 1，$\triangle A'B'C'$即为所求.

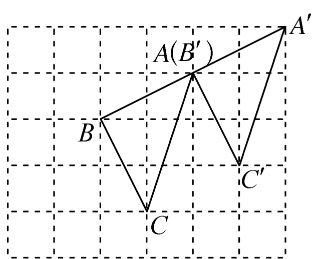


图 1

(2) 如图 2，把FG向右平移 2 格到DM，连接EM，$\triangle DEM$即为所求.

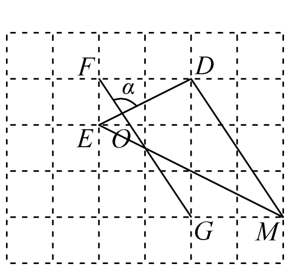


图 2

11. 解：(1) 因为$CB/\!/OA$，所以$\angle AOB=180^\circ-\angle B=180^\circ-108^\circ=72^\circ$. 因为$OE$平分$\angle BOF$，所以$\angle EOF=\frac{1}{2}\angle BOF$. 又因为$\angle FOC=\angle AOC=\frac{1}{2}\angle AOF$，所以$\angle EOC=\frac{1}{2}(\angle BOF+\angle AOF)=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times72^\circ=36^\circ$.

(2) 设$\angle COA=x$. 因为$CB/\!/AO$，所以$\angle OEB=\angle EOA=36^\circ+x$，$\angle BOF=\angle AOB-\angle AOF=72^\circ-2x$. 因为$\angle OEB=\angle BOF$，所以$36^\circ+x=72^\circ-2x$，所以$x=12^\circ$，所以$\angle COA=12^\circ$.

(3) $\angle OEB+\angle OCA$是定值. 设$\angle COA=x$，因为$CB/\!/AO$，所以$\angle OEB=\angle EOA=36^\circ+x$. 因为$\angle AOB=72^\circ$，$\angle A=108^\circ$，所以$OB/\!/AC$，所以$\angle OCA=\angle BOC=72^\circ-x$，所以$\angle OEB+\angle OCA=36^\circ+x+72^\circ-x=108^\circ$.

巅峰训练 6　轴对称

1. B　**2.** C

3. C　**提示**：根据题意，涂黑每一个空格都会出现一种可能情况，共出现 6 种可能情况，其中，涂左上角和右下角的方框所得到的黑色图案不是轴对称图形，故一共有 4 种情形.

4. C　**提示**：由轴对称的性质，可知$P_1D=ED-P_1E=ED-PE=5-3=2$，则$P_1P_2=P_1D+P_2D=P_1D+PD=2+4=6$.

5. 10∶51

6. 45°或135°　**提示**：如图 1，当点A'在AC上方时，因为$A'E/\!/BC$，所以$\angle A'EA=\angle C=90^\circ$. 由翻折的性质，可知$\angle A'ED=\angle AED=\frac{1}{2}\angle A'EA=45^\circ$.

如图 2，当点A'在AC下方时，因为$A'E/\!/BC$，所以$\angle A'EC=\angle C=90^\circ$. 由翻折的性质，可知$\angle A'ED=\angle AED=\frac{180^\circ+90^\circ}{2}=135^\circ$.

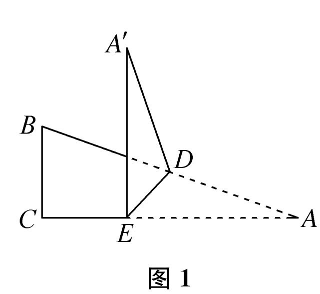


图 1

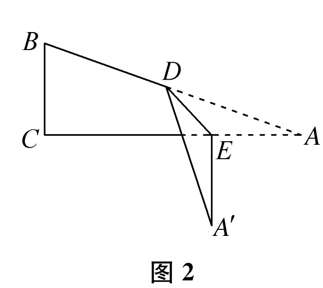
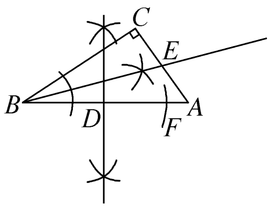


图 2

7. **解**:(1) 如图,点 D 即为所求.

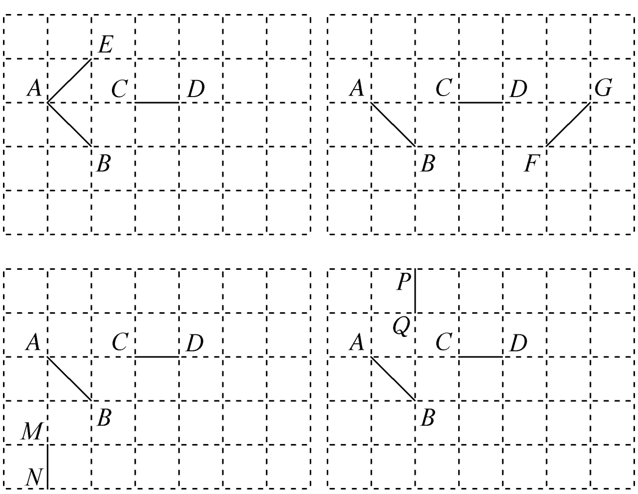


(2) 如图,射线 BE 即为所求.

(3) 如图,点 F 即为所求.

(4) 1.5　**提示**:因为 $BF=BC=4$,$BD=DA=\frac{1}{2}AB=2.5$,所以 $DF=BF-BD=1.5$.

8. **解**:如图,线段 AE,FG,MN,PQ 即为所求.



9. **解**:(1) 1

(2) ①对折点表示的数为 $1-4\div2=-1$,点 D 到对折点的距离为 $6-(-1)=7$,所以点 C 表示的数是 $(-1)-7=-8$.

②若点 M 在原点左侧,由折叠的性质,可得当 A,B 两点重合时,折叠后点 M' 到点 B 的距离等于折叠前点 M 到点 A 的距离 100,所以折叠后点 M' 表示的数为 $1+100=101$. 因为折叠后点 M' 分别到点 B,N 的距离相等,所以点 N 表示的数为 $101+100=201$. 若点 M 在原点右侧,同理可得,折叠后点 M' 表示的数为 $1-100=-99$. 所以点 N 表示的数为 $-99-(-3+99)=-195$. 综上所述,点 N 表示的数为 201 或 -195.

10. A

11. **解**:①如图 1,当 $BD/\!/EF$ 时,$\angle B+\angle BEF=180°$. 因为 $\angle B=30°$,所以 $\angle BEF=150°$.

②如图 2,当 $AC/\!/EF$ 且点 F 在 BC 上方时,$\angle BEF=\angle C=50°$.

③如图 3,当 $AC/\!/EF$ 且点 F 在 BC 下方时,$\angle CEF=\angle C=50°$,$\angle BEF=180°-\angle CEF=180°-50°=130°$.

综上所述,$\angle BEF$ 的度数为 150°或 50°或 130°.

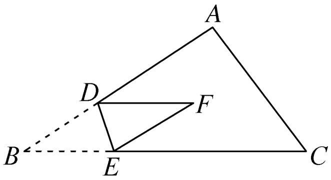


图 1

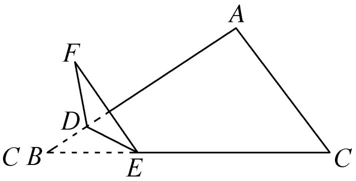


图 2

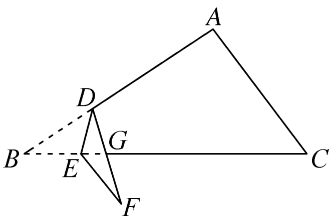
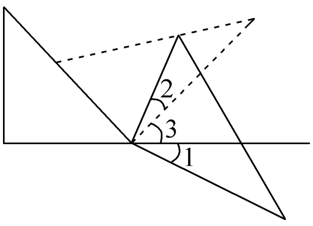


图 3

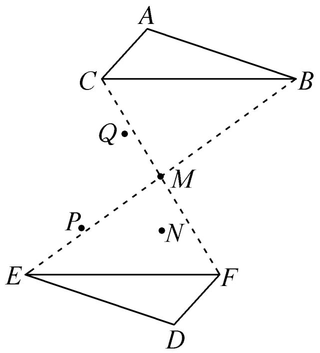
巅峰训练 7　旋转

1. C

2. B　**提示**:如图,易知 $\angle3=180°-45°-90°=45°$. 因为 $\angle2+\angle1+\angle3=90°$,即 $\angle2+20°+45°=90°$,所以 $\angle2=25°$.

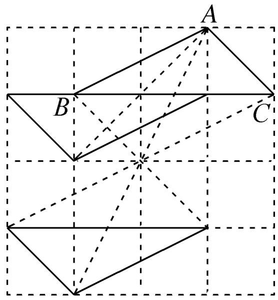


3. C　**提示**:如图,连接 BE,CF,发现其交于点 M,根据中心对称的性质,可知点 M 即为其对称中心.

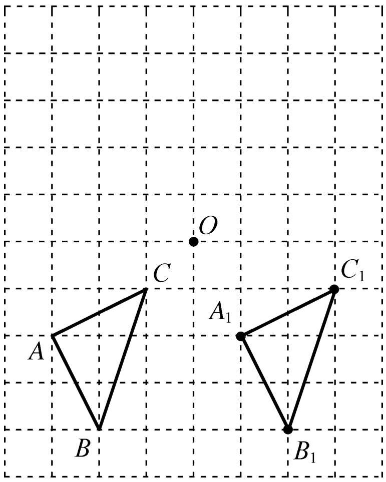


4. 118°　**提示**:因为 AB 与地面的夹角$\angle CAB$ 为 62°,所以$\angle BAB'=180^\circ-\angle CAB=180^\circ-62^\circ=118^\circ$,即旋转角为 118°.

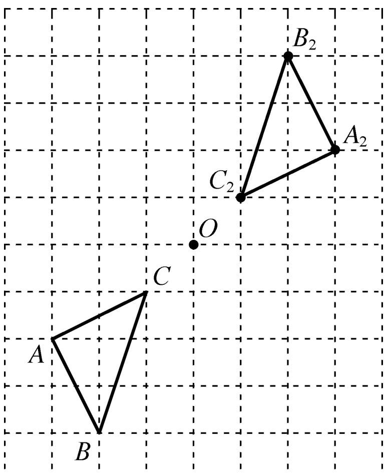
5. 2　**提示**:如图所示.



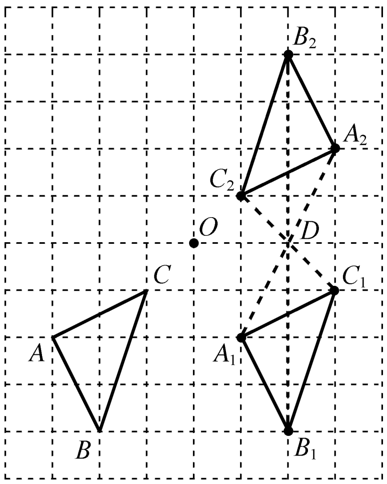
6. 解:(1) 如图,$\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求.



(2) 如图,$\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求.



(3) 如图,连接 A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2 交于一点 D,由图可知,$\triangle A_2B_2C_2$ 可以看作是$\triangle A_1B_1C_1$ 绕点 D 顺时针旋转 180°得到的.



7. 解:(1) 5

(2) 将数轴折叠,使-2 与 4 对应的点重合,所以对折点表示的数为 1. 又因为数轴上 M,N 两点之间的距离为 2 024,且按题中方法折叠后互相重合,所以点 M,N 到 1 对应的点的距离都为 1 012. 若点 M 在点 N 的左侧,则点 M 为 $1-1\ 012=-1\ 011$,点 N 为 $1+1\ 012=1\ 013$;若点 M 在点 N 的右侧,则点 M 为 $1+1\ 012=1\ 013$,点 N 为 $1-1\ 012=-1\ 011$. 所以 M,N 两点表示的数分别为$-1\ 011$,1 013 或 1 013,$-1\ 011$.

(3) -2　4　6

(4) ①当点 P 在点 A,B 之间时,因为点 A,B 之间的距离为 6,点 P 与点 A 的距离是点 P 与点 B 的距离的 2 倍,所以 $2t=2(6-2t)$,解得 $t=2$,此时点 P 表示的数为$-2+2t=-2+4=2$.

②当点 P 在点 B 的左侧时,因为点 A,B 之间的距离为 6,点 P 与点 A 的距离是点 P 与点 B 的距离的 2 倍,所以 $PA=2PB=2AB=2\times6=12$,所以 $t=12\div2=6$,此时点 P 表示的数为$-2+2t=10$.

综上所述，经过 2 s 或 6 s，点 P 与点 A 的距离是点 P 与点 B 的距离的 2 倍，此时，点 P 在“新数轴”上表示的数是 2 或 10.

8. 解：(1) 75°

(2) ①如图 1，$BD /\!/ PC$，所以 $\angle CPN = \angle DBP = 90°$，所以 $\angle APN = 30°$，因为转速为 10°/s，所以旋转时间为 3 s；如图 2，$PC /\!/ BD$，所以 $\angle CPB = \angle DBP = 90°$，所以 $\angle APM = 30°$，所以三角板 PAC 绕点 P 逆时针旋转的角度为 $180° + 30° = 210°$，因为转速为 10°/s，所以旋转时间为 21 s. 综上所述，当旋转时间为 3 s 或 21 s 时，$PC /\!/ DB$.

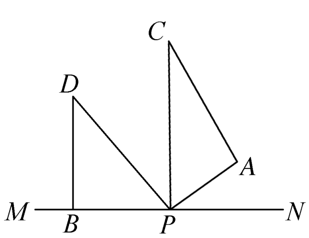


图 1

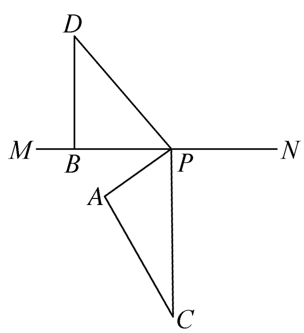


图 2

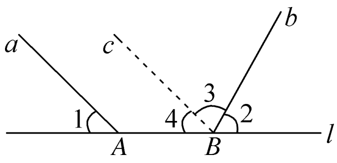
②设旋转的时间为 t s，由题可知 $0 < t \leqslant 100$. 当 $0 < t \leqslant 75$ 时，$\angle CPD = (75 - t)°$，$\angle BPM = 2t°$，所以 $75 - t = 2t$，解得 $t = 25$；当 $75 < t \leqslant 90$ 时，$\angle CPD = (t - 75)°$，$\angle BPM = 2t°$，所以 $t - 75 = 2t$，解得 $t = -75$(舍去)；当 $90 < t \leqslant 100$ 时，$\angle CPD = (t - 75)°$，$\angle BPM = (360 - 2t)°$，所以 $t - 75 = 360 - 2t$，解得 $t = 145$(舍去). 综上所述，当 $\angle CPD = \angle BPM$ 时，旋转的时间是 25 s.

第 9 章综合练

1. C

2. C　**提示**：设点 E 表示的数为 b，则 $\frac{1}{3}b + 1 = b$，解得 $b = 1.5$.

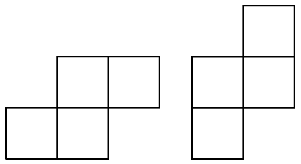
3. A　**提示**：如图，由平移的性质可得 $a /\!/ c$，所以 $\angle 4 = \angle 1 = 40°$. 因为 $\angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$，$\angle 2 = 70°$，所以 $\angle 3 = 70°$.



4. D　**提示**：因为点 A 与点 A_1 关于直线 MN 对称，P 为 MN 上任意一点(点 P 不在 AA_1 上)，所以 $AP = A_1P$，选项 A 正确. 因为 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 关于直线 MN 对称，所以这两个三角形的面积相等，选项 B 正确. 又因为点 A 与点 A_1 关于直线 MN 对称，所以 MN 垂直平分 AA_1，选项 C 正确. 直线 AB，A_1B_1 关于直线 MN 对称，因此交点一定在 MN 上，选项 D 错误.

5. 六角星

6. 2　**提示**：去掉一个正方形，得到中心对称图形，如图所示，共有 2 种方法.



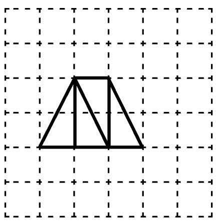
7. $1 - \frac{1}{2^{2\,025}}$　**提示：解法 1**　由题意，可得 $S_1 = \frac{1}{2}$，$S_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$，$S_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$，…，$S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$，所以 $S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$. 令 $M = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$，则 $2M = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，所以 $2M - M = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$，即 $M = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$，所以 $S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{2\,025} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2\,025} = 1 - \frac{1}{2^{2\,025}}$.

解法 2　因为大正方形面积为 1，将 2 025 次折叠后的图形依次放入题图最后一幅中，所缺的面积为 $S_{2\,025}$，所以 $S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{2\,025} = 1 - S_{2\,025} = 1 - \frac{1}{2^{2\,025}}$.

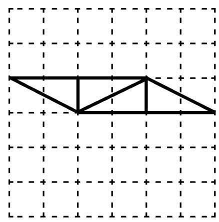
8. 0.5 s 或 2.5 s　**提示**：当 $S = 2$ 时，重叠部

分长方形的宽为 $2\div2=1(\text{cm})$，重叠部分在大正方形的左边时，$t=1\div2=0.5(\text{s})$，重叠部分在大正方形的右边时，$t=(4+2-1)\div2=2.5(\text{s})$。综上所述，平移的时间为 0.5 s 或 2.5 s.

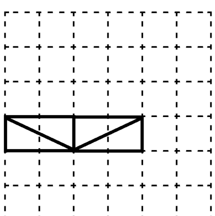
9. 解：如图所示.（答案不唯一）



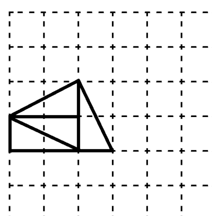
是轴对称图形
不是中心对称图形



是中心对称图形
不是轴对称图形



既是轴对称图形
又是中心对称图形



既不是轴对称图形
又不是中心对称图形

10. 解：(1) 因为 $\angle AOC=60^\circ$，所以 $\angle BOC=120^\circ$. 又因为 OM 平分 $\angle BOC$，所以 $\angle COM=\frac{1}{2}\angle BOC=60^\circ$，所以 $\angle CON=\angle COM+\angle MON=150^\circ$.

(2) 9 或 27　12 或 30　**提示**：因为 $\angle ONM=60^\circ$，$\angle AOC=60^\circ$，所以当 ON 在直线 AB 上时，$MN/\!/OC$，旋转角为 90° 或 270°，因为每秒顺时针旋转 10°，所以时间为 9 s 或 27 s；当直线 ON 恰好平分锐角 $\angle AOC$ 时，旋转角为 $90^\circ+30^\circ=120^\circ$ 或 $270^\circ+30^\circ=300^\circ$，因为每秒顺时针旋转 10°，所以时间为 12 s 或 30 s.

(3) $\angle AOM-\angle NOC=30^\circ$. 理由如下：

因为 $\angle MON=90^\circ$，$\angle AOC=60^\circ$，ON 在 $\angle AOC$ 的内部，所以 $\angle AON=90^\circ-\angle AOM$，$\angle AON=60^\circ-\angle NOC$，所以 $90^\circ-\angle AOM=60^\circ-\angle NOC$，所以 $\angle AOM-\angle NOC=30^\circ$.

11. 解：(1) 由折叠的性质，可知 $\angle AOA'=2\angle AOC$，$\angle BOB'=2\angle BOD$. 因为点 B' 落在 OA' 上，所以 $\angle AOA'+\angle BOB'=180^\circ$，所以 $2\angle AOC+2\angle BOD=180^\circ$，所以 $\angle AOC+\angle BOD=90^\circ$. 因为 $\angle AOC=32^\circ$，所以 $\angle BOD=90^\circ-32^\circ=58^\circ$.

(2) 由折叠的性质，可知 $\angle AOA'=2\angle AOC=2\times44^\circ=88^\circ$，$\angle BOB'=2\angle BOD=2\times61^\circ=122^\circ$，所以 $\angle A'OB'=\angle AOA'+\angle BOB'-180^\circ=88^\circ+122^\circ-180^\circ=30^\circ$，即 $\angle A'OB'$ 的度数为 30°.

第 10 章　二元一次方程组

巅峰训练 8　二元一次方程 二元一次方程组的概念　解二元一次方程组 三元一次方程组(1)

1. B　**提示**：解方程组 $\begin{cases}3x-y=7,\\2x+3y=1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2,\\y=-1.\end{cases}$ 把 $\begin{cases}x=2,\\y=-1\end{cases}$ 代入 $y=kx-9$，得 $-1=2k-9$，解得 $k=4$.

2. B　**提示**：解方程组 $\begin{cases}x+3y=4-a,\\x-y=3a,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2a+1,\\y=1-a.\end{cases}$ 所以 $x+y=2+a$. 当 $x+y=0$ 时，即 $2+a=0$，所以 $a=-2$，故①正确. 当 $a=1$ 时，$x+y=3$，而方程 $x+y=4+2a$ 的解满足 $x+y=6$，故②错误. 因为 $x+2y=2a+1+2-2a=3$，所以 $x+2y$ 的值始终不变，故③正确. 因为 $x=2a+1$，所以 $a=\frac{x-1}{2}$，所以 $y=1-a=1-\frac{x-1}{2}=-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$，故④正确.

3. D　**提示**：把 $\begin{cases}x=-2,\\y=1\end{cases}$ 代入 $\begin{cases}ax+by=1,\\bx+ay=7,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-2a+b=1①,\\-2b+a=7②,\end{cases}$ ②−①，得 $3a-3b=6$，即 $a-b=2$，②+①，得 $-a-b=8$，即 $a+b=-8$，所以 $(a+b)\cdot(a-b)=-16$.

4. A　**提示**：由 $x=\frac{x+y-z}{2}$，得 $y=x+z$. 由

$z=\frac{x-y+z}{2}$，得 $y=x-z$. 所以 $x+z=x-z$，所以 $z=0$. 把 $z=0$ 代入 $z=\frac{x-y+z}{2}$，得 $x=y$. 因为 $x+y+z\neq0$，所以 $x+y\neq0$，$x=y\neq0$. 所以 $xy\neq0$，$x^2+y^2\neq0$，$x^2-y^2=0$，所以 $x^2-y^2=z^2$.

5. $-\frac{3}{4}$

6. $\begin{cases}x=0,\\y=-1\end{cases}$ **提示**：化简 $(a-b)x-(a+b)\cdot y=a+b$，得 $a(x-y-1)-b(x+y+1)=0$. 根据题意，得 $\begin{cases}x-y-1=0,\\x+y+1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\y=-1.\end{cases}$

7. 解：(1) $\begin{cases}x+y+3=10①,\\4(x+y)-y=25②,\end{cases}$ 由①，得 $x+y=7③$，把③代入②，解得 $y=3$. 把 $y=3$ 代入③，解得 $x=4$，所以方程组的解为 $\begin{cases}x=4,\\y=3.\end{cases}$

(2) $\begin{cases}2\ 077x-2\ 078y=2\ 079①,\\2\ 078x-2\ 079y=2\ 080②,\end{cases}$ ②－①，得 $x-y=1③$，③×2 077，得 $2\ 077x-2\ 077y=2\ 077④$，④－①，得 $y=-2$，将 $y=-2$ 代入③，得 $x=-1$. 所以方程组的解为 $\begin{cases}x=-1,\\y=-2.\end{cases}$

8. 解：(1) $y=-x+4$

(2) 二元一次方程 $y=3x+5$ 的“反对称二元一次方程”是 $y=5x+3$，又因为二元一次方程 $y=3x+5$ 的解 $\begin{cases}x=m,\\y=n\end{cases}$ 也是它的“反对称二元一次方程”的解，所以 $\begin{cases}3m+5=n,\\5m+3=n,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=1,\\n=8.\end{cases}$

9. 解：(1) 具有“邻好关系”. 理由如下：

$\begin{cases}x+2y=7①,\\x=y+1②.\end{cases}$ 由②，得 $x-y=1$，即满足 $|x-y|=1$. 所以方程组的解 x 与 y 具有“邻好关系”.

(2) $\begin{cases}4x-y=6①,\\2x+y=4m②.\end{cases}$ ①－②，得 $2x-2y=6-4m$，即 $x-y=3-2m$. 因为方程组的解 x 与 y 具有“邻好关系”，所以 $|x-y|=1$，即 $3-2m=\pm1$，所以 $m=1$ 或 $m=2$.

(3) 具有“邻好关系”. 由加减消元法，得 $(2+a)y=12$. 因为 a，x，y 均为正整数，所以 $\begin{cases}a=1,\\x=3,\\y=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=2,\\x=1,\\y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=4,\\x=-1,\\y=2\end{cases}$（舍去）或 $\begin{cases}a=10,\\x=-3,\\y=1\end{cases}$（舍去）. 在上面符合题意的两组解中，只有当 $a=1$ 时，$|x-y|=1$. 所以 $a=1$，方程组的解为 $\begin{cases}x=3,\\y=4.\end{cases}$

巅峰训练 9　二元一次方程 二元一次方程组的概念　解二元一次方程组 三元一次方程组(2)

1. C

2. C　**提示：解法 1**　解方程组 $\begin{cases}3x-4y=k,\\x+8y=2k+3,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{4k+3}{7},\\y=\frac{5k+9}{28},\end{cases}$ 代入 $x+y=6$，得 $\frac{4k+3}{7}+\frac{5k+9}{28}=6$，解得 $k=7$.

解法 2　把原方程组上、下两式相加，得 $4(x+y)=3(k+1)$，所以 $x+y=\frac{3}{4}(k+1)$. 代入 $x+y=6$，得 $\frac{3}{4}(k+1)=6$，解得 $k=7$.

3. B　**提示**：联立方程 $\begin{cases}a+b=c,\\b+c=d,\\c+d=a,\end{cases}$ 解得

$\begin{cases}a=-3b,\\c=-2b,\\d=-b,\end{cases}$ 所以 $a+b+c+d=-5b$. 因为 b 是正整数，其最小值为 1，所以 $-5b$ 的最大值是 -5.

4. B　**提示**：由题意，得 $\begin{cases}-5m+2=-2n+1,\\-n-4=-m-5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=1,\\n=2,\end{cases}$ 所以二元一次方程组为 $\begin{cases}x-3y=-6,\\-3x+y=-6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\y=3.\end{cases}$

5. ±3　**提示**：由题意，得 $a^2+b^2=24$，$2ab=15$，因为 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2=24-15=9$，所以 $a-b=\pm3$.

6. -23　**提示**：由题意，得 $\begin{cases}3a+5b+1=15,\\4a+7b+1=28,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-37,\\b=25.\end{cases}$ 所以 $2\Delta2=2a+2b+1=2\times(-37)+2\times25+1=-23$.

7. $\frac{5}{2}$　1

8. -3　**提示**：根据题意，得 $\begin{cases}4a-2b+c=5①,\\a-b+c=0②,\\a+b+c=-4③,\end{cases}$ ②−③，得 $-2b=4$，解得 $b=-2$. 把 $b=-2$ 代入①，得 $4a+c=1$. 所以当 $x=2$ 时，$ax^2+bx+c=4a+2b+c=-3$.

9. 2 023　**提示**：因为 $x-y=(x-z)+(z-y)$，所以把它代入方程组并化简，得

$\begin{cases}2(x-z)+(z-y)=0①,\\2(2\,022+2\,024)(x-z)+(2\,022+2\,023)(z-y)=-2\,023②.\end{cases}$

②−①×(2 022+2 024)，得 $z-y=2\,023$.

10. **解**：$\begin{cases}2x+3y+z=6①,\\x-y+2z=-1②,\\x+2y-z=5③.\end{cases}$ 由②，得 $x=y-2z-1$ ④. 把④代入①和③，得 $\begin{cases}2(y-2z-1)+3y+z=6,\\y-2z-1+2y-z=5.\end{cases}$ 化简，得 $\begin{cases}5y-3z=8⑤,\\3y-3z=6⑥.\end{cases}$ ⑤−⑥，得 $2y=2$，所以 $y=1$. 把 $y=1$ 代入⑤，得 $z=-1$. 把 $y=1$，$z=-1$ 代入④，得 $x=2$.

所以原方程组的解为 $\begin{cases}x=2,\\y=1,\\z=-1.\end{cases}$

11. **解**：(1) 选择乙同学的思路：将原方程组中的两个方程相加，得 $13p+13q=13k+13$，整理，得 $p+q=k+1$，因为 $p+q=3$，所以 $k+1=3$，解得 $k=2$.

(2) $\begin{cases}x+2y=6-a①,\\x-y=2a②,\end{cases}$ ①×2+②，得 $3x+3y=12$. 整理，得 $x+y=4$. 故不论 a 取什么数，$x+y$ 的值始终不变.

12. (1) $(4,-3,5)$

(2) **解**：因为关于 x，y 的二元一次方程的"关联系数"为 $(2,-1,1)$，所以二元一次方程为 $2x-y=1$. 因为 $\begin{cases}x=m+n,\\y=m+5\end{cases}$ 为该方程的一组解，所以 $2(m+n)-m-5=1$，即 $m+2n=6$. 因为 m，n 均为正整数，所以 $\begin{cases}m=4,\\n=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=2,\\n=2.\end{cases}$

13. **解**：(1) $\begin{cases}3a-b=15,\\4a+2b=10\end{cases}$　$\begin{cases}x=\frac{1}{3},\\y=-\frac{10}{3}\end{cases}$

(2) 设 $3x-y=m$，$x+3y=n$，则原方程组可化为 $\begin{cases}\frac{m}{8}-\frac{n}{3}=-\frac{1}{2},\\\frac{m}{6}+\frac{n}{2}=5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=12,\\n=6,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}3x-y=12,\\x+3y=6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{21}{5},\\y=\frac{3}{5}.\end{cases}$

巅峰训练 10　用二元一次方程组解决问题(1)

1. A

2. C　**提示**:设第一小组有 x 人,第二小组有 y 人,则第三小组有 $(20-x-y)$ 人.根据题意,得 $8x+6y+5(20-x-y)=120$,即 $3x+y=20$.因为 x,y 均为大于等于 2 的整数,所以当 $x=2$ 时,$y=14$,$20-x-y=4$,符合题意;当 $x=3$ 时,$y=11$,$20-x-y=6$,符合题意;当 $x=4$ 时,$y=8$,$20-x-y=8$,符合题意;当 $x=5$ 时,$y=5$,$20-x-y=10$,符合题意;当 $x=6$ 时,$y=2$,$20-x-y=12$,符合题意.所以学生分组方案有 5 种.

3. 12　**提示**:设第一、二次购进杨梅的箱数分别为 a,b.根据题意,得 $\begin{cases}a+b=40,\\40b-50a=700,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=10,\\b=30,\end{cases}$ 所以利润为 $60x+35(40-x)-(10\times50+30\times40)=(25x-300)$ 元.当 $25x-300=0$,即 $x=12$ 时,商店才正好不亏本.

4. 2 010　**提示**:设这位参与者的出生年份是 x,从九个数字中任取一个数字为 a,$(10a+4.6)\times10+1\ 978-x=914$,所以 $x=100a+1\ 110$,所以 x 的值可能为 1 210,1 310,1 410,1 510,1 610,1 710,1 810,1 910,2 010,因为现场参与者均为在校中学生,所以 x 只能是 2 010.

5. 6　**提示**:每 12 分钟有一辆电车从后面赶上属于追及问题,等量关系为电车 12 min 走的路程=行人 12 min 走的路程+两辆电车间隔的路程;每 4 分钟有一辆电车迎面开来属于相遇问题,等量关系为电车 4 min 走的路程+行人 4 min 走的路程=两辆电车间隔的路程,两辆电车间隔的路程=两辆电车间隔的时间×电车的速度.设电车每分钟走的路程为 x,行人每分钟走的路程为 y,电车每隔 a min 从起点开出一辆,则由 $\begin{cases}12x=12y+ax,\\4x+4y=ax,\end{cases}$ 得 $x=2y$,把 $x=2y$ 代入 $4x+4y=ax$,得 $a=6$.

6. 解:任务 1　设甲种礼盒生产 x 万套,乙种礼盒生产 y 万套.根据题意,得 $\begin{cases}x+y=70,\\20x+25y=1\ 540,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=42,\\y=28.\end{cases}$

答:甲种礼盒生产 42 万套,乙种礼盒生产 28 万套.

任务 2　根据题意,得 $(24-20)(42+m)+(30-25)(28+n)=368$,所以 $n=12-\frac{4}{5}m$.又因为 m,n 均为正整数,所以 $\begin{cases}m=5,\\n=8\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=10,\\n=4.\end{cases}$ 所以该公司共有 2 种生产方案.方案 1:生产 47 万套甲种礼盒,36 万套乙种礼盒;方案 2:生产 52 万套甲种礼盒,32 万套乙种礼盒.

7. 解:(1) 设小长方形的长为 x,宽为 y.根据题意,得 $\begin{cases}3x=5y,\\x+2=2y,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=10,\\y=6.\end{cases}$ 所以 $xy=10\times6=60$.

答:每个小长方形的面积为 60.

(2) 20　**提示**:设每两个纸杯叠放在一起比单独的一个纸杯增高 x cm,单独一个纸杯的高度为 y cm.根据题意,得 $\begin{cases}2x+y=10,\\7x+y=15,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=8.\end{cases}$ 所以 $12x+y=12\times1+8=20$.故若小明把 13 个纸杯整齐地叠放在一起,则它的高度约是 20 cm.

(3) 设小长方形的长为 x cm,宽为 y cm.根据题意,得 $\begin{cases}x+3y=19,\\x+2y=3y+7,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=10,\\y=3.\end{cases}$ 所以 $S_{阴影}=19\times(7+3\times3)-8\times10\times3=64(cm^2)$.

8. 120　**提示**:设手办的单价为 x 元,盲盒的单价为 y 元,钥匙扣的单价为 z 元.根据题意,得 $\begin{cases}3x+2y+2z-(4x+y+z)=110,\\2(2x+4y+z)-(3x+2y+2z)=800,\end{cases}$ 化简,得 $\begin{cases}y+z-x=110,\\x+6y=800.\end{cases}$ 因为 $x\leqslant100$,x,y 均为 10 的正整数

倍，且 $x+6y=800$，所以 $\begin{cases}x=20,\\y=130\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=80,\\y=120.\end{cases}$ 所以 $z=0$（舍去）或 $z=70$. 所以盲盒的单价为 120 元.

9. 解：设两人的年龄分别是 x 岁、y 岁，则 $x^2-y^2=195$，即 $(x+y)(x-y)=195$.

①当 $1\times195=195$ 时，则 $\begin{cases}x+y=195,\\x-y=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=98,\\y=97.\end{cases}$ 所以两位老人的年龄是 98 岁和 97 岁.

②当 $5\times39=195$ 时，则 $\begin{cases}x+y=39,\\x-y=5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=22,\\y=17.\end{cases}$ 所以两位年轻人的年龄是 22 岁和 17 岁.

③当 $65\times3=195$ 时，则 $\begin{cases}x+y=65,\\x-y=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=34,\\y=31.\end{cases}$ 所以青年夫妇的年龄是 34 岁和 31 岁.

④当 $15\times13=195$ 时，则 $\begin{cases}x+y=15,\\x-y=13,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=14,\\y=1.\end{cases}$ 所以第 4 对人的年龄是 14 岁和 1 岁.

巅峰训练 11　用二元一次方程组解决问题（2）

1. B

2. B　**提示**：设每个新轮胎报废时的总磨损量为 k，则安装在前轮的轮胎每行驶 1 km 磨损量为 $\frac{k}{5\ 000}$，安装在后轮的轮胎每行驶 1 km 的磨损量为 $\frac{k}{3\ 000}$，又设一对新轮胎交换位置前走了 x km，交换位置后走了 y km，分别以一个轮胎的总磨损量为等量关系列方程，得 $\begin{cases}\frac{kx}{5\ 000}+\frac{ky}{3\ 000}=k,\\\frac{ky}{5\ 000}+\frac{kx}{3\ 000}=k,\end{cases}$ 两式相加，得 $\frac{k(x+y)}{5\ 000}+\frac{k(x+y)}{3\ 000}=2k$，则 $x+y=3\ 750$，所以这对轮胎最多可以行驶 3 750 km.

3. D　**提示**：设 A 地到 B 地的上坡路长为 x km，平路长为 y km. 根据题意，得 $\begin{cases}\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=\frac{35}{60},\\\frac{x}{6}+\frac{y}{5}=\frac{24}{60},\end{cases}$ 所以另一个方程为 $\frac{x}{6}+\frac{y}{5}=\frac{24}{60}$.

4. 100　**提示**：设购买甲商品每件 x 元，乙商品每件 y 元. 根据题意，得 $\begin{cases}2x+y=120①,\\x+2y=180②,\end{cases}$ ①＋②，得 $3x+3y=300$，所以 $x+y=100$. 故购买甲、乙两种商品各 1 件共需 100 元.

5. 5∶9　**提示**：设每颗草莓味糖果的成本为 m 元，每颗牛奶味糖果的成本为 n 元. 根据题意，得 $10(0.4+m+n)\times(1+30\%)=23.4$，解得 $m+n=1.4$，所以甲种袋装糖果的成本为 $10\times(0.4+1.4)=18$（元），乙种袋装糖果的成本为 $20\times0.4+5(m+n)=8+5\times1.4=15$（元）. 设销售甲种袋装糖果 x 袋，乙种袋装糖果 y 袋，则 $18x\times30\%+15y\times20\%=(18x+15y)\times24\%$，解得 $\frac{x}{y}=\frac{5}{9}$. 所以该公司销售甲、乙两种袋装糖果的数量之比是 5∶9.

6. $\frac{32}{15}$　**提示**：设 1 个进口 1 h 开进 x 辆车，1 个出口 1 h 开出 y 辆车，车位总数为 a. 根据题意，得 $\begin{cases}8(2x-3y)=75\%a,\\2(3x-2y)=75\%a,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{3}{16}a,\\y=\frac{3}{32}a.\end{cases}$ 因为早晨 6 点时的车位空置率变为 60%，所以从早晨 6 点开始，经过 $60\%a\div\left(2\times\frac{3}{16}a-\frac{3}{32}a\right)=\frac{32}{15}$(h) 车库恰好停满.

7. 解：**解法 1**　设去年第一块农田的花生产量为 x kg，第二块农田的花生产量为 y kg.

根据题意，得

$\begin{cases}x+y=470,\\(1-80\%)x+(1-90\%)y=57,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=100,\\y=370,\end{cases}$所以 $100\times(1-80\%)=20(\text{kg})$，$370\times(1-90\%)=37(\text{kg})$.

答：该农户今年第一块农田的花生产量是 20 kg，第二块农田的花生产量是 37 kg.

解法 2 设今年第一块农田的花生产量为 x kg，第二块农田的花生产量为 y kg. 根据题意，得$\begin{cases}x+y=57,\\\dfrac{x}{1-80\%}+\dfrac{y}{1-90\%}=470,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=20,\\y=37.\end{cases}$

答：该农户今年第一块农田的花生产量是 20 kg，第二块农田的花生产量是 37 kg.

8. 解：(1) 设 A 型汽车每辆的进价为 x 万元，B 型汽车每辆的进价为 y 万元. 根据题意，得$\begin{cases}2x+3y=80,\\3x+2y=95,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=25,\\y=10.\end{cases}$

答：A 型汽车每辆的进价为 25 万元，B 型汽车每辆的进价为 10 万元.

(2) 设购进 A 型汽车 m 辆，购进 B 型汽车 n 辆. 根据题意，得 $25m+10n=200$. 解得 $m=8-\dfrac{2}{5}n$. 因为 m,n 均为正整数，所以$\begin{cases}m_1=6,\\n_1=5,\end{cases}\begin{cases}m_2=4,\\n_2=10,\end{cases}\begin{cases}m_3=2,\\n_3=15.\end{cases}$所以共有 3 种购买方案.

方案一：购进 A 型车 6 辆，B 型车 5 辆；

方案二：购进 A 型车 4 辆，B 型车 10 辆；

方案三：购进 A 型车 2 辆，B 型车 15 辆.

(3) 方案一获得利润：$8\ 000\times6+5\ 000\times5=73\ 000$(元)；

方案二获得利润：$8\ 000\times4+5\ 000\times10=82\ 000$(元)；

方案三获得利润：$8\ 000\times2+5\ 000\times15=91\ 000$(元).

因为 $73\ 000<82\ 000<91\ 000$，所以购进 A 型车 2 辆，B 型车 15 辆获利最大，最大利润是 91 000 元.

9. 解：设调整后一等奖平均分数为 x 分，二等奖平均分数为 y 分，三等奖平均分数为 z 分. 根据题意，得

$$\begin{cases}10x+20y+30z=5(x+3)+15(y+2)+\\40(z+1),\\(y+2)-(z+1)=7,\end{cases}$$

化简，得$\begin{cases}x+y-2z=17①,\\y-z=6②,\end{cases}$ ①－②×2，得 $x-y=5$.

答：调整后一等奖比二等奖平均分数多 5 分.

10. 解：(1) 设小虎足球队胜了 x 场，平了 y 场，则负了 y 场. 根据题意，得$\begin{cases}x+2y=17,\\3x+y=16,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=3,\\y=7.\end{cases}$

答：该队胜了 3 场.

(2) 设小虎足球队胜了 x 场，平了 y 场，负了 z 场. 根据题意，得$\begin{cases}x+y+z=17,\\3x+y=16,\\y=kz(k\text{ 为正整数}),\end{cases}$解得 $z=\dfrac{35}{2k+3}$. 当 $k=1$ 时，$z=7$；当 $k=2$ 时，$z=5$；当 $k=16$ 时，$z=1$. 检验可知，x,y,z 均为非负整数.

答：小虎足球队踢负场数有 3 种情况.

第 10 章综合练(1)

1. B **提示**：原方程组上下两式相加，得 $x+y=3$，当 $m=1$ 时，$x+y=2m+1=3$，所以当 $m=1$ 时，方程

组的解也是$x+y=2m+1$的解,故选项A正确;因为$x+y=3$,所以原方程组的正整数解是$\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$共2对,故选项B错误;因为$x+y=3$,所以无论$m$取何值,$x$,$y$的值不可能互为相反数,故选项C正确;$\begin{cases}-x+2y=-2m①,\\2x-y=2m+3②,\end{cases}$②-①,得$3x-3y=4m+3$,所以$x-y=\frac{4m+3}{3}$,因为$x-y=1$,所以$\frac{4m+3}{3}=1$,解得$m=0$,故选项D正确.

2. C　**提示**:令$x+2=a$,$y-1=b$,则方程组$\begin{cases}2(x+2)-3(y-1)=13,\\3(x+2)+5(y-1)=30.9\end{cases}$可化为$\begin{cases}2a-3b=13,\\3a+5b=30.9,\end{cases}$由题知$\begin{cases}a=8.3,\\b=1.2,\end{cases}$所以$\begin{cases}x+2=8.3,\\y-1=1.2,\end{cases}$所以$\begin{cases}x=6.3,\\y=2.2.\end{cases}$

3. D　**提示**:设牙刷单价为x元,牙膏单价为y元.由第1天和第2天的收入,得$\begin{cases}13x+7y=144,\\14x+7y=147,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=3,\\y=15,\end{cases}$则第3天收入应为$20\times3+10\times15=60+150=210$(元),与记录一致,无误.第4天收入应为$23\times3+20\times15=69+300=369$(元),但记录为366元,相差3元,存在错误.

4. 11　**提示**:$\begin{cases}x+2y=k+3①,\\2x-3y=3k-2②,\end{cases}$①×3-②,得$3x+6y-(2x-3y)=3k+9-(3k-2)$,即$x+9y=11$,所以无论$k$取何值,$x+9y$的值都是一个定值,且这个定值为11.

5. $a=b+2$　**提示**:根据题意,得这个两位数是$10b+a$,将它个位和十位上的数字对调后,可以表示为$10a+b$.因为得到的两位数比原来的两位数大18,所以$10a+b-(10b+a)=18$,整理,得$a=b+2$.

6. $a=\frac{3}{2}$且$b\neq2$　**提示**:易得$x+ay=b$可转化为$2x+2ay=2b$.因为原方程组无解,所以$\begin{cases}2a=3,\\2b\neq4,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\frac{3}{2},\\b\neq2.\end{cases}$所以$a$,$b$需满足的条件是$a=\frac{3}{2}$且$b\neq2$.

7. 1 610　**提示**:设A奖品的售价为x元/件,B奖品的售价为y元/件,电子钱包内的钱为z元.根据题意,得$\begin{cases}9x+7y=z+230①,\\7x+9y=z-230②.\end{cases}$由①+②,得$16x+16y=2z$,即$8x+8y=z$.由①-②,得$2x-2y=460$,即$x-y=230$.所以$x+15y=8x+8y-7(x-y)=z-7\times230=z-1\ 610$,所以电子钱包内的钱会剩余1 610元.

8. 6　**提示**:根据题意,可知n轮之后,三人得分总和为$n(x+y)$,所以可得$n(x+y)=20+10+9=39$.因为$n\geqslant4$,$x+y\geqslant2$,且n,x,y为正整数,而$39=3\times13$,所以$n=13$,$x+y=3$.因为x,y均为正整数,且$x<y$,所以$x=1$,$y=2$.设甲a次得0分,b次得x分,c次得y分.因为甲的总得分为20,所以$a\times0+bx+cy=b+2c=20$,所以$b=20-2c$.因为$0\leqslant b+c\leqslant13$,且$b$,$c$为正整数,所以$0\leqslant b+c=20-c\leqslant13$,故$7\leqslant c\leqslant13$,$b$的最大值为6.

9. 解:整理,得$\begin{cases}5y-x=3①,\\5x-11y=-1②.\end{cases}$由①,得$x=5y-3$③.把③代入②,得$25y-15-11y=-1$,解得$y=1$.把$y=1$代入③,得$x=2$.所以原方程组的解为$\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$

10. 解:(1)由题意,得$\begin{cases}a+b=1,\\3a-2b=8,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\b=-1.\end{cases}$

(2)由题意,得$\begin{cases}2x-y=4-m,\\2x+y=5m,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=m+1,\\y=3m-2,\end{cases}$由条件可知$m+1+3m-2=3$,$4m=4$,解得$m=1$.

11. 解:解方程组$\begin{cases}x-y=a,\\3x+y=2b,\end{cases}$得$\begin{cases}x=\dfrac{a+2b}{4},\\y=\dfrac{2b-3a}{4}.\end{cases}$

因为方程组的解满足$\begin{cases}x=m-1,\\y=3n+2,\end{cases}$所以$m-1=\dfrac{a+2b}{4}$,$3n+2=\dfrac{2b-3a}{4}$,整理,得$m=\dfrac{a+2b+4}{4}$,$n=\dfrac{2b-3a-8}{12}$.因为$m-n=5$,所以$\dfrac{a+2b+4}{4}-\dfrac{2b-3a-8}{12}=5$,整理,得$3a+2b=20$.因为$a,b$均为正整数,所以当$a=2$时,$b=7$,此时$n=\dfrac{2b-3a-8}{12}=0$;当$a=4$时,$b=4$,此时$n=\dfrac{2b-3a-8}{12}=-1$;当$a=6$时,$b=1$,此时$n=\dfrac{2b-3a-8}{12}=-2$.综上所述,$n$的值为0,$-1$,$-2$.

12. 解:(1) 设1辆小客车坐满后一次可送x名学生,1辆大客车坐满后一次可送y名学生.根据题意,得$\begin{cases}3x+y=105,\\x+2y=110,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=20,\\y=45,\end{cases}$所以$x+y=65$.

答:1辆小客车和1辆大客车都坐满后一次可送65名学生.

(2) 根据题意,得$20a+45b=400$,即$a=\dfrac{80-9b}{4}$.因为a,b均为非负整数,所以$\begin{cases}a=20,\\b=0\end{cases}$或$\begin{cases}a=11,\\b=4\end{cases}$或$\begin{cases}a=2,\\b=8.\end{cases}$

答:租车方案有3种:①小客车20辆,大客车0辆;②小客车11辆,大客车4辆;③小客车2辆,大客车8辆.

(3) 由(2)知,租车方案有3种,所以租车费用为:

①$20\times200=4\ 000$(元);

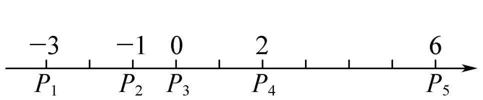
②$11\times200+4\times380=3\ 720$(元);

③$2\times200+8\times380=3\ 440$(元).

因为$3\ 440<3\ 720<4\ 000$,所以选择租小客车2辆,大客车8辆最省钱.

答:最省钱的方案为租2辆小客车,8辆大客车,最省租金为3 440元.

13. 解:由于共有小旗面数为$16+8+12+4+15=55$(面),要使每人手中的小旗面数相等,所以每人均有11面.根据题意,得$\begin{cases}8+x_1-x_2=11,\\12+x_2-x_3=11,\\4+x_3-x_4=11,\\15+x_4-x_5=11,\end{cases}$变形,得$\begin{cases}x_1=x_2+3,\\x_3=x_2+1,\\x_4=x_2-6,\\x_5=x_2-2,\end{cases}$所以$|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|+|x_5|=|x_2+3|+|x_2|+|x_2+1|+|x_2-6|+|x_2-2|$.如图,设$x_2$在数轴上的对应点为$P$,$-3$,$-1$,0,2,6在数轴上的对应点分别为$P_1,P_2,P_3,P_4,P_5$.所以$|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|+|x_5|=PP_1+PP_2+PP_3+PP_4+PP_5$.当且仅当点$P$在线段$P_1P_5$上时,$PP_1+PP_5$有最小值9;当且仅当点$P$在线段$P_2P_4$上时,$PP_2+PP_4$有最小值3;当且仅当点$P$与点$P_3$重合时,$PP_3$有最小值0.所以当且仅当点$P$与点$P_3$重合($x_2=0$)时,$|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|+|x_5|=PP_1+PP_2+PP_3+PP_4+PP_5$有最小值12,即当$x_1=3,x_2=0,x_3=1,x_4=-6,x_5=-2$时,$|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|+|x_5|$有最小值12.



第 10 章综合练(2)

1. B　**提示**:因为方程组$\begin{cases}a(x-1)+3by=2C_1,\\m(x-1)+3ny=2C_2\end{cases}$可化为$\begin{cases}a\left(\dfrac{x-1}{2}\right)+\dfrac{3}{2}by=C_1,\\m\left(\dfrac{x-1}{2}\right)+\dfrac{3}{2}ny=C_2,\end{cases}$且方程组$\begin{cases}ax+by=C_1,\\mx+ny=C_2\end{cases}$的解是$\begin{cases}x=2,\\y=3,\end{cases}$所以$\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}=2,\\\dfrac{3y}{2}=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=5,\\y=2.\end{cases}$

2. B　**提示**:设甲种奖品购买 x 件,乙种奖品购买 y 件.根据题意,得 $4x+3y=48$,将方程变形为 $y=\dfrac{48-4x}{3}=16-\dfrac{4}{3}x$,要求 y 为正整数,则 x 必须为 3 的倍数.依次代入 x 的值验证:当 $x=3$ 时,$y=16-\dfrac{4}{3}x=12$,符合条件;当 $x=6$ 时,$y=16-\dfrac{4}{3}x=8$,符合条件;当 $x=9$ 时,$y=16-\dfrac{4}{3}x=4$,符合条件;其他 x 值代入后 y 均不为正整数.综上所述,共有 3 种购买方案.

3. C　**提示**:设该船在静水中的速度是 x km/h,水流速度是 y km/h.根据题意,得$\begin{cases}x+y=18,\\x-y=14,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=16,\\y=2,\end{cases}$即水流速度是 2 km/h.

4. B　**提示**:设购买 A 包装面包 x 盒,B 包装面包 y 盒.根据题意,得 $3x+8y=50$.因为 x,y 均为非负整数,所以$\begin{cases}x=6,\\y=4\end{cases}$或$\begin{cases}x=14,\\y=1.\end{cases}$当 $x=6,y=4$ 时,费用为 $5\times6+11\times4=74$(元);当 $x=14,y=1$ 时,费用为 $5\times14+11\times1=81$(元).因为 $74<81$,所以若某同学正好买了 50 个面包,则他最少需要花 74 元.

5. 4　**提示**:由题意可知,甲得出的解满足方程 $bx-2y=12$,把 $x=6,y=3$ 代入,得 $6b-2\times3=12$,解得 $b=3$.乙得出的解满足方程 $x+ay=5$,把 $x=3,y=2$ 代入,得 $3+2a=5$,解得 $a=1$.所以 $a+b=1+3=4$.

6. -7　**提示**:根据题意,得$\begin{cases}k+b=2,\\3k+b=-4,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-3,\\b=5,\end{cases}$故 $y=-3x+5$.将 $x=4$ 代入 $y=-3x+5$,得 $y=-3\times4+5=-7$.

7. 10　**提示**:根据题中的定义化简已知等式,得$\begin{cases}a+2b=5,\\4a+b=6,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\b=2,\end{cases}$所以 $2*3=4a+3b=4+6=10$.

8. $\begin{cases}x=-1,\\y=1\end{cases}$　**提示**:由题意,得 $(2a+1)x+(a-1)y+2+a=2ax+x+ay-y+2+a=a(2x+y+1)+(x-y+2)=0$.因为无论 a 取何值,方程都有一个相同的解,所以$\begin{cases}2x+y+1=0,\\x-y+2=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-1,\\y=1.\end{cases}$

9. **解**:(1) 由题意,得$\begin{cases}2x-y=7,\\x+2y=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=3,\\y=-1.\end{cases}$

(2) 把 $x=3,y=-1$ 分别代入 $2ax-by=4$ 和 $ax+2by=7$,得$\begin{cases}6a+b=4,\\3a-2b=7,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\b=-2,\end{cases}$所以 $(a+b)^{2\,025}=[1+(-2)]^{2\,025}=(-1)^{2\,025}=-1$.

10. **解**:(1) ①根据题意,得$\begin{cases}-2m+7n=8,\\6m-5n=8,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=3,\\n=2.\end{cases}$

②由①,得方程 $3x+2y=8$,所以 $x=\dfrac{8-2y}{3}$.因为 x,y 为非负整数,所以 $8-2y$ 是 3 的倍数.当 $8-2y=0$ 时,$y=4$,则 $x=0$;当 $8-2y=3$ 时,$y=\dfrac{5}{2}$(不合题意,舍去);当 $8-$

$2y=6$ 时，$y=1$，则 $x=2$；当 $8-2y=9$ 时，$y=-\frac{1}{2}$（不合题意，舍去）. 所以 $3x+2y=8$ 的非负整数解为 $\begin{cases}x=0,\\y=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$

（2）2　**提示**：设摸到 x 个红球，y 个白球. 根据题意，得 $3x+5y=20$，所以 $x=\frac{20-5y}{3}$. 因为 x,y 为非负整数，所以 $20-5y$ 是 3 的倍数. 当 $20-5y=0$ 时，$y=4$，则 $x=0$；当 $20-5y=3$ 时，$y=\frac{17}{5}$（不合题意，舍去）；当 $20-5y=6$ 时，$y=\frac{14}{5}$（不合题意，舍去）；当 $20-5y=9$ 时，$y=\frac{11}{5}$（不合题意，舍去）；当 $20-5y=12$ 时，$y=\frac{8}{5}$（不合题意，舍去）；当 $20-5y=15$ 时，$y=1$，则 $x=5$；当 $20-5y=18$ 时，$y=\frac{2}{5}$（不合题意，舍去）. 所以 $3x+5y=20$ 的非负整数解为 $\begin{cases}x=0,\\y=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=5,\\y=1.\end{cases}$ 所以摸到红球和白球的组合方式有 2 种，即摸到 4 个白球和 0 个红球或摸到 1 个白球和 5 个红球.

11. 解：（1）设 A 场馆门票的价格为 x 元，B 场馆门票的价格为 y 元. 根据题意，得 $\begin{cases}3x+2y=280,\\5x+3y=450,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=60,\\y=50.\end{cases}$

答：A 场馆门票的价格为 60 元，B 场馆门票的价格为 50 元.

（2）根据题意，得 $\begin{cases}2p+t+p=40,\\60\times 2p+50t=1\ 670,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}p=11,\\t=7.\end{cases}$

答：p 的值为 11，t 的值为 7.

（3）设有 a 名同学参观 A 场馆，b 名同学参观 B 场馆，则有 $(40-a-b)$ 名同学参观 C 场馆，实际需要购买 a 张 A 场馆门票，b 张 B 场馆门票，$(40-2a-b)$ 张 C 场馆门票. 根据题意，得 $60a+50b+25(40-2a-b)=1\ 150$，所以 $b=6-\frac{2}{5}a$. 又因为 $a,b,(40-2a-b)$ 均为正整数，所以 $\begin{cases}a=5,\\b=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=10,\\b=2,\end{cases}$ 所以共有 2 种可能的参观情况.

情况 1：5 名同学参观 A 场馆，4 名同学参观 B 场馆，31 名同学参观 C 场馆；

情况 2：10 名同学参观 A 场馆，2 名同学参观 B 场馆，28 名同学参观 C 场馆.

12. 解：（1）此钟表一共有 60 条刻度线，两条相邻刻度线间叫 1 格. 时针每分钟走 $\frac{5}{60}=\frac{1}{12}$（格）. 以分针、时针均在刻度 12 处为起点，则时针走了 $\left(2\times 5+\frac{t}{12}\right)$ 格，分针走了 t 格. 分类讨论：①当分针在前时，因为时针和分针恰好分别指向两条相邻的刻度线，所以 $2\times 5+\frac{t}{12}+1=t$，解得 $t=12$；②当时针在前时，同理，$2\times 5+\frac{t}{12}=t+1$，解得 $t=\frac{108}{11}$（不合题意，舍去）. 综上所述，$t=12$.

（2）设这块残片所表示的时间是 x 时 y 分，其中 x,y 都为正整数. 以分针、时针均在刻度 12 处为起点，则时针走了 $\left(5x+\frac{y}{12}\right)$ 格，分针走了 y 格. 因为 $5x+\frac{y}{12}$ 为整数，所以 $y=0$，12，24，36，48. 分类讨论如下：

①当分针在前时，$y=5x+\frac{y}{12}+1$. 可知当 $y=12$ 时，$x=2$，即为(1)中的答案.

②当时针在前时，$5x+\frac{y}{12}=y+1$，可知当 $y=48$ 时，$x=9$，符合题意，即这块残片所表示

的时间是9时48分.

答:这块残片所表示的时间还可以是9时48分.

第11章　一元一次不等式

巅峰训练12　不等式
一元一次不等式的概念

1. C　**2.** D

3. B　**提示**:①当 $x\geqslant0$ 时,$x-2=-3$,则 $x=-1$,不符合题意,舍去;当 $x<0$ 时,$x+2=-3$,则 $x=-5$,符合题意.综上所述,若 $x@2=-3$,则 $x=-5$,故①错误.②因为 $|x-2|@2\geqslant0$,且 $|x-2|\geqslant0$,所以 $|x-2|-2\geqslant0$.所以 $|x-2|\geqslant2$.所以 $x\leqslant0$ 或 $x\geqslant4$,故②正确.③ $|[(-2)@x]-1|+|[(-1)@(-x)]-2|=|(-2)+x-1|+|(-1)+(-x)-2|=|x-3|+|x-(-3)|$,又因为在数轴上代数式 $|x-3|+|x-(-3)|$ 的意义为表示数 x 的点到表示数3的点和表示数-3的点的距离之和,所以当 $-3\leqslant x\leqslant3$ 时,$|x-3|+|x-(-3)|$ 的最小值为6,所以 $|[(-2)@x]-1|+|[(-1)@(-x)]-2|$ 有最小值6,故③正确.

4. B　**提示**:由题意,得 $M=\frac{a+b+c}{3}$,$N=\frac{a+b}{2}$,$P=\frac{N+c}{2}$.因为 $a>b>c$,所以 $a+b>2c$,所以 $M-P=\frac{a+b+c}{3}-\frac{N+c}{2}=\frac{a+b+c}{3}-\frac{\frac{a+b}{2}+c}{2}=\frac{a+b-2c}{12}>0$,所以 $M>P$.

5. C　**提示**:对于选项C,若取 $x=2.6$,$y=3.8$,则 $[x+y]=[6.4]=6$,而 $[x]+[y]=2+3=5$,故选项C错误.

6. $m\leqslant-2$　**提示**:因为 $\begin{cases}x=m,\\y=2m\end{cases}$ 是不等式 $3x+y\leqslant-10$ 的一个解,所以 $3m+2m\leqslant-10$,所以 $m\leqslant-2$.

7. $-12\leqslant3a-b\leqslant4$　**提示**:因为 $-3\leqslant a\leqslant1$,$-1\leqslant b\leqslant3$,所以 $-9\leqslant3a\leqslant3$,$-3\leqslant-b\leqslant1$,所以 $-12\leqslant3a-b\leqslant4$,则 $3a-b$ 的取值范围是 $-12\leqslant3a-b\leqslant4$.

8. $<$　**提示**:设每块A型钢板的面积为 x,每块B型钢板的面积为 y.方案一:用4块A型钢板,8块B型钢板,用式子表示为 $S_1=4x+8y$;方案二:用3块A型钢板,9块B型钢板,用式子表示为 $S_2=3x+9y$.因为 $S_1-S_2=4x+8y-3x-9y=x-y$,$x<y$,所以 $x-y<0$,所以 $S_1<S_2$.

9. 8　**提示**:设 $a-2b=m(a+b)+n(a-b)$,所以 $a-2b=(m+n)a+(m-n)b$,所以 $\begin{cases}m+n=1,\\m-n=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-\frac{1}{2},\\n=\frac{3}{2}.\end{cases}$ 所以 $a-2b=-\frac{1}{2}(a+b)+\frac{3}{2}(a-b)$.因为 $1\leqslant a+b\leqslant4$,$0\leqslant a-b\leqslant1$,所以 $-2\leqslant-\frac{1}{2}(a+b)\leqslant-\frac{1}{2}$,$0\leqslant\frac{3}{2}(a-b)\leqslant\frac{3}{2}$,所以 $-2\leqslant a-2b\leqslant1$,所以 $a-2b$ 的最大值为1,此时 $-\frac{1}{2}(a+b)=-\frac{1}{2}$,$\frac{3}{2}(a-b)=\frac{3}{2}$,解得 $a=1$,$b=0$,所以 $8a+2\,025b=8$.

10. 解:因为 $c>0$,$a<b$,所以 $ac<bc$.因为 $c<d$,$b>0$,所以 $bc<bd$.所以 $ac<bd$.

11. 解:由 $ax+3\geqslant0$,得 $ax\geqslant-3$,所以 $a\neq0$.分类讨论如下:

若 $a>0$,则 $x\geqslant-\frac{3}{a}$,因为正整数解为1,2,3,而 $x\geqslant-\frac{3}{a}$ 有无数个正整数解,所以 $a>0$ 不符合题意.

若 $a<0$,则 $x\leqslant-\frac{3}{a}$,因为正整数解为1,2,3,所以 $3\leqslant-\frac{3}{a}<4$,解得 $-1\leqslant a<-\frac{3}{4}$.

综上所述,a 的取值范围是 $-1\leqslant a<-\frac{3}{4}$.

12. 解:【启发应用】$1<x+y<5$　**提示**:因

为 $x-y=3$，所以 $x=y+3$. 又因为 $x>2$，所以 $y+3>2$，所以 $y>-1$. 又因为 $y<1$，所以 $-1<y<1$①. 同理可得 $2<x<4$②. 由①+②，得 $-1+2<x+y<1+4$，所以 $x+y$ 的取值范围是 $1<x+y<5$.

【拓展推广】因为 $x+y=2$，所以 $x=2-y$. 又因为 $x>1$，所以 $2-y>1$，所以 $y<1$. 又因为 $y>-4$，所以 $-4<y<1$，所以 $-1<-y<4$①. 同理可得 $1<x<6$②. 由①+②，得 $-1+1<x-y<4+6$，所以 $x-y$ 的取值范围是 $0<x-y<10$.

13. 解：联立方程 $\begin{cases}a+b=c+5,\\ b+c=d+6,\\ c+d=a+7,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=3d-13,\\ b=12-d,\\ c=2d-6,\end{cases}$ 所以 $a+b+c+d=3d-13+12-d+2d-6+d=5d-7$. 因为 $a<b$，所以 $3d-13<12-d$，所以 $d<6\frac{1}{4}$. 因为 d 为整数，所以 d 的最大值为 6，所以 $a+b+c+d$ 的最大值为 $5\times6-7=23$.

14. -2 **提示**：因为 $x\Delta k=3x-2k\geqslant1$，所以 $x\geqslant\frac{2k+1}{3}$，所以 $\frac{2k+1}{3}=-1$. 解得 $k=-2$.

15. 解：(1) 因为 $1\leqslant a<b<c$，所以 $ab+bc+ac<bc+bc+bc=3bc$.

(2) 因为 $abc=ab+bc+ac<3bc$，所以 $a<3$，所以 $a=1$ 或 $a=2$. 当 $a=1$ 时，$b+bc+c=bc$，所以 $b+c=0$，这与 b,c 为正整数矛盾. 当 $a=2$ 时，$2b+bc+2c=2bc$，所以 $bc-2b-2c=0$，所以 $(b-2)(c-2)=bc-2b-2c+4=4$. 因为 $2<b<c$，所以 $0<b-2<c-2$，所以只能取 $b-2=1$，$c-2=4$，解得 $b=3$，$c=6$，所以符合条件的 a,b,c 只有一组：$a=2$，$b=3$，$c=6$.

巅峰训练 13　解一元一次不等式

1. A　**提示**：$\begin{cases}2x+y=k+2①,\\ x+5y=2k-1②,\end{cases}$ ①+②，得 $3x+6y=3k+1$，所以 $x+2y=\frac{3k+1}{3}$. 因为 $x+2y>-1$，所以 $\frac{3k+1}{3}>-1$，解得 $k>-\frac{4}{3}$.

2. C　**提示**：解不等式 $2x-5\leqslant2a+1$，得 $x\leqslant a+3$. 因为不等式 $2x-5\leqslant2a+1$ 只有 4 个正整数解，所以 $4\leqslant a+3<5$. 解得 $1\leqslant a<2$.

3. C　**提示**：当 $x<0$ 时，$2\,000-2x\leqslant9\,999$，解得 $x\geqslant-\frac{7\,999}{2}$，即 $-3\,999.5\leqslant x<0$，其整数解有 3 999 个；当 $0\leqslant x\leqslant2\,000$ 时，$2\,000\leqslant9\,999$ 恒成立，整数解有 2 001 个；当 $x>2\,000$ 时，$2x-2\,000\leqslant9\,999$，解得 $x\leqslant\frac{11\,999}{2}$，即 $2\,000<x<5\,999.5$，整数解有 3 999 个. 综上所述，使不等式 $|x-2\,000|+|x|\leqslant9\,999$ 成立的整数 x 共有 $3\,999+2\,001+3\,999=9\,999$(个).

4. $0<a\leqslant\frac{1}{3}$　**提示**：由 $\frac{2x+2}{3}<x+a$，得 $x>2-3a$. 因为不等式 $\frac{2x+2}{3}<x+a$ 的最小整数解为 2，所以 $1\leqslant2-3a<2$，解得 $0<a\leqslant\frac{1}{3}$.

5. $a>\frac{7}{3}$　**提示**：因为 $3a+2x>1$，所以 $x>\frac{1-3a}{2}$. 因为关于 x 的不等式 $3a+2x>1$ 至少有 3 个负整数解，所以该不等式至少有的三个负整数解是 $-3,-2,-1$，所以 $\frac{1-3a}{2}<-3$，解得 $a>\frac{7}{3}$.

6. 19　**提示**：设 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6<a_7$，则 $a_1+1\leqslant a_2$，$a_1+2\leqslant a_3$，$a_1+3\leqslant a_4$，$a_1+4\leqslant a_5$，$a_1+5\leqslant a_6$，$a_1+6\leqslant a_7$. 将上述各式相加，得 $6a_1+21\leqslant159-a_1$，解得 $a_1\leqslant19\frac{5}{7}$，所以 a_1 的最大值为 19.

7. 2 或 -0.9　**提示**：当 $6x-3\geqslant2x+1$，即 $x\geqslant1$ 时，$(6x-3)\leftrightarrow(2x+1)=\frac{6x-3}{3}+2x+1=8$，解得

$x=2$，$2\geqslant1$，成立；当 $6x-3<2x+1$，即 $x<1$ 时，$(6x-3)\leftrightarrow(2x+1)=\frac{2x+1}{2}-(6x-3)=8$，解得 $x=-0.9$，$-0.9<1$，成立. 故 x 的值为 2 或 -0.9.

8. 解：原不等式可化为 $(a-1)x>2$. 当 $a-1=0$，即 $a=1$ 时，不等式无解；当 $a-1>0$，即 $a>1$ 时，$x>\frac{2}{a-1}$；当 $a-1<0$，即 $a<1$ 时，$x<\frac{2}{a-1}$.

9. 解：由题意，得 $\begin{cases}x-2y+a=0,\\x-y-2a+1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=5a-2,\\y=3a-1,\end{cases}$ 代入不等式，得 $5a-2-3(3a-1)<-1$，解得 $a>\frac{1}{2}$.

10. 解：(1) 由题意，得方程组的解为 $\begin{cases}x=\frac{2k-1}{4},\\y=\frac{-4k+3}{2}.\end{cases}$ 因为 $2x>y$，所以 $2\times\frac{2k-1}{4}>\frac{-4k+3}{2}$，解得 $k>\frac{2}{3}$.

(2) $4x+y=4\times\frac{2k-1}{4}+\frac{-4k+3}{2}=\frac{1}{2}$.

(3) 存在. 由 $4x\leqslant1$，得 $4\times\frac{2k-1}{4}\leqslant1$，解得 $k\leqslant1$. 因为 $m=2x-3y=2\times\frac{2k-1}{4}-3\times\frac{-4k+3}{2}=7k-5$，所以 $k=\frac{m+5}{7}$，所以 $\frac{m+5}{7}\leqslant1$，所以 $m\leqslant2$. 又因为 m 为正整数，所以 m 的值为 1 或 2.

11. 解：(1) 解不等式 $6x-1>2(x+m)-3$，得 $x>\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}$. 解不等式 $\frac{x-5}{2}+1<x+3$，得 $x>-9$. 由题意，得 $\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}=-9$，解得 $m=-17$.

(2) 因为不等式 $6x-1>2(x+m)-3$ 的解都是不等式 $\frac{x-5}{2}+1<x+3$ 的解，所以 $\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}\geqslant-9$，解得 $m\geqslant-17$.

12. 解：(1) ①

(2) 解不等式 $x+m>0$，得 $x>-m$，解不等式 $3x-1<2x+5$，得 $x<6$. 因为关于 x 的不等式 $x+m>0$ 是 $3x-1<2x+5$ 的“和谐不等式”，所以 $-m<5$，所以 $m>-5$.

(3) 解不等式 $x+3>n$，得 $x>n-3$，整理不等式 $2nx-1\leqslant2n-x$，得 $(2n+1)x\leqslant2n+1$. ①当 $2n+1>0$，即 $n>-\frac{1}{2}$ 时，$x\leqslant1$. 因为关于 x 的不等式 $x+3>n$ 与不等式 $2nx-1\leqslant2n-x$ 互为“和谐不等式”，所以 $n-3<1$，所以 $-\frac{1}{2}<n<4$. ②当 $2n+1<0$，即 $n<-\frac{1}{2}$ 时，$x\geqslant1$. 因为 $x>n-3$，所以两个一元一次不等式必有公共整数解，此时关于 x 的不等式 $x+3>n$ 与不等式 $2nx-1\leqslant2n-x$ 互为“和谐不等式”. 综上所述，n 的取值范围为 $n<-\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}<n<4$.

13. 解：(1) ②③

(2) ① 解 $3x-a=2$，得 $x=\frac{2+a}{3}$，解 $3(a+x)\geqslant4a+x$，得 $x\geqslant\frac{a}{2}$. 因为方程 $3x-a=2$ 是关于 x 的一元一次不等式 $3(a+x)\geqslant4a+x$ 的“伴随方程”，所以 $\frac{2+a}{3}\geqslant\frac{a}{2}$，解得 $a\leqslant4$. 解 $\frac{x-1}{2}+1=x$，得 $x=1$. 解 $\frac{a}{2}<\frac{a-x}{3}$，得 $x<-\frac{a}{2}$. 因为方程 $\frac{x-1}{2}+1=x$ 不是关于 x

的一元一次不等式$\frac{a}{2}<\frac{a-x}{3}$的“伴随方程”,所以$-\frac{a}{2}\leqslant 1$,解得 $a\geqslant -2$. 综上所述,$-2\leqslant a\leqslant 4$.

②7　**提示:** 因为$-2\leqslant a\leqslant 4$,所以当 $a=-2$ 时,$|a|+|a-3|$的值最大,最大值$=|-2|+|-2-3|=2+5=7$.

巅峰训练 14　一元一次不等式组

1. D　**提示:** 解关于 x 的不等式组$\begin{cases}\frac{x-2}{4}<\frac{x-1}{3},\\2x-m\leqslant 2-x,\end{cases}$得$-2<x\leqslant\frac{m+2}{3}$,再根据原不等式组有且只有三个整数解,得$1\leqslant\frac{m+2}{3}<2$,解得$1\leqslant m<4$.

2. A　**3.** B　**4.** C

5. B　**提示:** ①若 $0<x<1$,由$\begin{cases}G(x,1)>4,\\G(-1,x)\leqslant m,\end{cases}$得$\begin{cases}1-x>4,\\x+1\leqslant m,\end{cases}$解$1-x>4$,得$x<-3$,与 $0<x<1$ 不符,舍去;②若 $x\geqslant 1$,由$\begin{cases}G(x,1)>4,\\G(-1,x)\leqslant m,\end{cases}$得$\begin{cases}x-1>4,\\x+1\leqslant m,\end{cases}$解得$\begin{cases}x>5,\\x\leqslant m-1,\end{cases}$因为不等式组恰好有 4 个整数解,所以$9\leqslant m-1<10$,解得$10\leqslant m<11$.

6. 6 或 11 或 16　**提示:** 根据题意,得$5a-4\geqslant 9-2a$,解得$a\geqslant\frac{13}{7}$. 又因为$\begin{cases}5a-4\geqslant 0,\\9-2a\geqslant 0,\end{cases}$即$\begin{cases}a\geqslant\frac{4}{5},\\a\leqslant\frac{9}{2},\end{cases}$所以$\frac{13}{7}\leqslant a\leqslant\frac{9}{2}$. 因为$5a-4$与$9-2a$均为整数,所以 a 为整数,所以 a 的值可取 2 或 3 或 4,所以$5a-4$分别为 6,11,16,即公共汽车上原有 6 名或 11 名或 16 名乘客.

7. -2　**提示:** 解方程组$\begin{cases}a-b=1+3m,\\a+3b=-15-5m,\end{cases}$得$\begin{cases}a=m-3,\\b=-2m-4.\end{cases}$因为 a 为负数,b 为非正数,所以$\begin{cases}m-3<0,\\-2m-4\leqslant 0,\end{cases}$解得$-2\leqslant m<3$. 因为$2mx-3>2m-3x$,所以$(2m+3)\cdot x>2m+3$. 要使不等式$2mx-3>2m-3x$的解集为 $x<1$,必须$2m+3<0$,解得$m<-\frac{3}{2}$. 又因为$-2\leqslant m<3$,且 m 为整数,所以$m=-2$.

8. $18\leqslant m<19$　**提示:** 根据题意,得不等式组的解集为$m<x\leqslant m+2$. 因为方程$19+x=2x$,$21+x=2x+1$的解分别为$x=19$,$x=20$,所以$\begin{cases}m+2\geqslant 20,\\m<19,\end{cases}$解得$18\leqslant m<19$.

9. $-2\leqslant P<-\frac{1}{3}$　**提示:** 因为$T(1,-1)=-2$,$T(4,2)=1$,所以$\frac{a-b}{2\times 1+(-1)}=-2$,$\frac{4a+2b}{2\times 4+2}=1$,解得 $a=1$,$b=3$. 由题意,得$T(2m,5-4m)=\frac{2m+3(5-4m)}{4m+5-4m}\leqslant 4$,解得$m\geqslant-\frac{1}{2}$,$T(m,3-2m)=\frac{m+3(3-2m)}{2m+3-2m}>P$,解得$m<\frac{9-3P}{5}$. 因为关于 m 的不等式组$\begin{cases}T(2m,5-4m)\leqslant 4,\\T(m,3-2m)>P\end{cases}$恰好有 3 个整数解,所以$2<\frac{9-3P}{5}\leqslant 3$,所以$-2\leqslant P<-\frac{1}{3}$.

10. $x>\frac{3}{5}$或$x<\frac{1}{6}$或$-1<x<\frac{5}{6}$

提示: ①若$-2nx+n>mx+m$,即$(m+2n)x<n-m$的解集为$x>1$,则$m+2n<0$,且$\frac{n-m}{m+2n}=1$,化简,得$n=-2m$,代入$m+2n<0$,得$-3m<0$,解得$m>0$. 由$2nx-n<mx-m$,得$(m-2n)x>m-n$,即$5mx>3m$,解得$x>\frac{3}{5}$;由$2mx>m+n$,得$2mx>-m$,解得$x>-\frac{1}{2}$. 所以此时不等式组的解集为$x>\frac{3}{5}$.

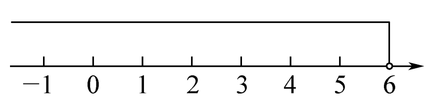
②若$mx+m+n>-2nx$,即$(m+2n)x>-(m+n)$的解集为$x>1$,则$m+2n>0$,且$-\frac{m+n}{m+2n}=1$,化简,得$n=-\frac{2}{3}m$,代入$m+2n>0$,得$-\frac{1}{3}m>0$,解得$m<0$. 由$2nx-n<mx-m$,得$(m-2n)x>m-n$,即$\frac{7}{3}mx>\frac{5}{3}m$,解得$x<\frac{5}{7}$;由$2mx>m+n$,得$2mx>$

$\frac{1}{3}m$，解得 $x<\frac{1}{6}$. 所以此时不等式组的解集为 $x<\frac{1}{6}$.

③若 $mx+m-2nx>n$，即 $(m-2n)x>-(m-n)$ 的解集为 $x>1$，则 $m-2n>0$，且 $-\frac{m-n}{m-2n}=1$，化简，得 $n=\frac{2}{3}m$，代入 $m-2n>0$，得 $m-\frac{4}{3}m>0$，解得 $m<0$. 由 $2nx-n<mx-m$，得 $(m-2n)x>m-n$，即 $-\frac{1}{3}mx>\frac{1}{3}m$，解得 $x>-1$；由 $2mx>m+n$，得 $2mx>\frac{5}{3}m$，解得 $x<\frac{5}{6}$. 所以此时不等式组的解集为 $-1<x<\frac{5}{6}$.

综上所述，所给不等式组的解集为 $x>\frac{3}{5}$ 或 $x<\frac{1}{6}$ 或 $-1<x<\frac{5}{6}$.

11. 解：(1) $2(x-1)<4+x$，所以 $2x-2<4+x$，所以 $2x-x<4+2$，所以 $x<6$.



(2) 甲的说法不正确，理由如下：

设“□”中的数字为 m，得 $\begin{cases}2(x-m)<4+x①,\\ x+9<4x②,\end{cases}$

解不等式①，得 $x<2m+4$，解不等式②，得 $x>3$，若原不等式组无解，则 $2m+4\leqslant3$，解得 $m\leqslant-\frac{1}{2}$，所以当在“□”中填入的数字小于等于 $-\frac{1}{2}$ 时，该不等式组无解，所以甲的说法不正确.

12. 解：(1) $\begin{cases}3x+y=3a①,\\ x+3y=-7a②,\end{cases}$ ①+②，得 $4x+4y=-4a$，所以 $x+y=-a$，因为 $x+y=3$，所以 $-a=3$，解得 $a=-3$.

(2) 小颖的说法不正确. 理由如下：

$\begin{cases}3x+y=3a①,\\ x+3y=-7a②,\end{cases}$ ①−②，得 $2x-2y=10a$，所以 $x-y=5a$. 因为 $0<x-y\leqslant4a+3$，所以 $0<5a\leqslant4a+3$，所以 $\begin{cases}5a>0③,\\ 5a\leqslant4a+3④.\end{cases}$ 由③，得 $a>0$，由④，得 $a\leqslant3$，所以 $0<a\leqslant3$. 因为符合此不等式的任意 a 的值都落在 $2m-3\leqslant a<3m+5$ 内，所以 $3m+5>3$，且 $2m-3\leqslant0$，解得 $-\frac{2}{3}<m\leqslant\frac{3}{2}$，所以小颖的说法不正确.

13. 解：因为 n,k 是正整数，所以 $\frac{15}{8}>\frac{n+k}{n}>\frac{13}{7}$，即 $\frac{15}{8}>1+\frac{k}{n}>\frac{13}{7}$，所以 $\frac{6}{7}<\frac{k}{n}<\frac{7}{8}$，所以 $\frac{7}{6}>\frac{n}{k}>\frac{8}{7}$，所以 $\frac{1}{7}<\frac{n}{k}-1<\frac{1}{6}$. 因为要使 n 最小，所以就尽量使左、右两式分子、分母所扩大的倍数最小. 又因为 n,k 是正整数，所以最小扩大 2 倍有正整数解. 因为 $\frac{1}{7}=\frac{2}{14}$，$\frac{1}{6}=\frac{2}{12}$，所以 $\frac{n}{k}-1=\frac{2}{13}$. 所以 $n=15,k=13$.

14. (1) ① $\frac{5}{2}\leqslant x<\frac{7}{2}$　② $\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{5}{6}$

(2) **解**：设 $\frac{5}{3}x-1=m$，m 为非负整数，则 $x=\frac{3m+3}{5}$，所以 $\langle x\rangle=\langle\frac{3m+3}{5}\rangle=m$，所以 $m-\frac{1}{2}\leqslant\frac{3m+3}{5}<m+\frac{1}{2}$，所以 $\frac{1}{4}<m\leqslant\frac{11}{4}$. 因为 m 为整数，所以 $m=1$ 或 $m=2$，所以 $x=\frac{6}{5}$ 或 $x=\frac{9}{5}$.

巅峰训练 15　用一元一次不等式解决问题

1. D

2. 240　**提示**：根据题意，可得公交车的速度是 $6\,400\div20=320$(m/min). 设小明骑车速度是 x m/min.

根据题意,可得 $320\times14+8x\geqslant6\ 400$,解得 $x\geqslant240$.

3. 14 **提示**:设每列运输 n 辆购物车,车身总长为 L,因为一辆购物车车身长 1 m,每增加一辆购物车,车身增加 0.2 m,所以 $L=0.8+0.2n$,根据题意,得 $2.2\geqslant0.8+0.2n$,解得 $n\leqslant7$.因为一次可以运输两列购物车,所以一次性最多可以运输 14 辆购物车.

4. $300\leqslant a<400$ 或 $600\leqslant a<800$ **提示**:这种健身器材的原价为 a 元,则活动一需付款 $0.8a$ 元.活动二:当 $0<a<300$ 时,需付款 a 元;当 $300\leqslant a<600$ 时,需付款$(a-80)$元;当 $600\leqslant a<900$ 时,需付款$(a-160)$元.①当 $0<a<300$ 时,$a>0.8a$,此时无论 a 为何值,都是活动一更合算,不符合题意.②当 $300\leqslant a<600$ 时,$a-80<0.8a$,解得 $a<400$,即当 $300\leqslant a<400$ 时,活动二更合算.③当 $600\leqslant a<900$ 时,$a-160<0.8a$,解得 $a<800$,即当 $600\leqslant a<800$ 时,活动二更合算.综上所述,当 $300\leqslant a<400$ 或 $600\leqslant a<800$ 时,活动二更合算.

5. 解:(1) $500\times5\%=25(\text{g})$.

答:这份快餐中所含的脂肪质量为 25 g.

(2) 设这份快餐所含矿物质的质量为 x g.根据题意,得 $x+4x+25+500\times40\%=500$,所以 $x=55$,所以 $4x=220$.

答:这份快餐所含蛋白质的质量为 220 g.

(3) 设所含矿物质的质量为 y g,则所含蛋白质的质量为 $4y$ g,所含碳水化合物的质量为$(475-5y)$g.根据题意,得 $4y+(475-5y)\leqslant500\times86\%$,所以 $y\geqslant45$,所以 $475-5y\leqslant250$.

答:所含碳水化合物质量的最大值为 250 g.

6. 解:(1) 图 1 中的阴影部分面积为 $90\times40=3\ 600(\text{m}^2)$,图 2 中的阴影部分面积为 $40\times60=2\ 400(\text{m}^2)$.

(2) 总运费为 $3\ 500\times20\times0.15+100\times15\times0.2+2\ 400\times20\times0.2=20\ 400$(元).

(3) 设甲地草皮运送 x m^2 去 A 校,则$(3\ 500-x)\text{m}^2$ 运往 B 校,乙地草皮$(3\ 600-x)\text{m}^2$ 运往 A 校,$(x-1\ 100)\text{m}^2$ 草皮运往 B 校.根据题意,得 $20\times0.15x+(3\ 500-x)\times10\times0.15+(3\ 600-x)\times15\times0.20+(x-1\ 100)\times20\times0.20\leqslant15\ 000$,$x-1\ 100\geqslant0$,$x\leqslant3\ 500$,解得 $1\ 100\leqslant x\leqslant1\ 340$.只要所设计的方案中甲地运往 A 校的草皮在 1 100 ~ 1 340 m^2 范围内均可.如甲地的草皮运往 A 校 1 100 m^2,运往B校 2 400 m^2,乙地草皮运往 A 校 2 500 m^2,总运费为 14 400 元.

7. 解:(1) 设 A 种礼盒的单价为 $2x$ 元,则B种礼盒的单价为 $3x$ 元.根据题意,得 $2x+3x=200$,解得 $x=40$,所以 $2x=80$,$3x=120$.

答:A种礼盒的单价为 80 元,B种礼盒的单价为 120 元.

(2) 设购进 A 种礼盒 a 个,B种礼盒 b 个.

根据题意,得 $\begin{cases}80a+120b=9\ 600,\\a\leqslant36,\\b\leqslant2a,\end{cases}$ 解得 $30\leqslant a\leqslant36$.因为 a,b 的值均为正整数,且 $b=80-\frac{2}{3}a$,所以 a 的值可以为 30,33,36,此时 b 的值分别为 60,58,56.

答:共有三种进货方案.方案一:购进 A 种礼盒 30 个,B种礼盒 60 个;方案二:购进 A 种礼盒 33 个,B种礼盒 58 个;方案三:购进 A 种礼盒 36 个,B种礼盒 56 个.

(3) 根据题意,得该网店获利$[10a+(18-m)b]$元.由 $80a+120b=9\ 600$,得 $a=120-\frac{3}{2}b$,则该网店获利 $10\times\left(120-\frac{3}{2}b\right)+(18-m)\times b=[(3-m)b+1\ 200]$元.因为要使(2)中所有方案获利都相同,所以 $3-m=0$,

即 $m=3$.

答:m 的值是 3,此时该网店获利 1 200 元.

8. 解:(1) 设爆米花的售价为 x 元,则蛋挞的售价为 $(x+1)$ 元. 根据题意,得 $20x+50(x+1)-1.5\times20-50\times2=200$,解得 $x=4$,所以 $x+1=5$.

答:爆米花的售价为 4 元,蛋挞的售价为 5 元.

(2) 设上午售出蛋挞 b 份. 根据题意,得 $2.5a+3b>800$. 又因为 $100\leqslant a\leqslant120$,所以 $b>\frac{500}{3}$. 又因为 b 是正整数,所以 b 的最小值为 167. 故上午至少售出蛋挞的份数为 167 份.

(3) 设制作的爆米花为 $2y$ 份,蛋挞为 $5y$ 份,则冰淇淋为 $(n-7y)$ 份,根据题意,得 $3(n-7y)-100>0$,且 $2.5\cdot2y+3\cdot5y+3(n-7y)-100=2\ 019$,解得 $n=\frac{2\ 119+y}{3}$,且 $0<y<\frac{2\ 019}{20}$. 因为 n,y 均为正整数,所以当 $y=98$ 时,n 取得最大值,$n_{最大}=739$. 所以 n 的最大值为 739.

第 11 章综合练(1)

1. D **2.** B

3. D **提示**:因为 $2m-n-3=0$,所以 $2m=n+3$,$n=2m-3$,所以 $2n=4m-6$,$m=\frac{n}{2}+\frac{3}{2}$. 因为 $1<m+2n-1<3$,所以 $1<m+4m-6-1<3$,即 $8<5m<10$,所以 $\frac{8}{5}<m<2$,故选项 A 错误. 同理可得 $1<\frac{n}{2}+\frac{3}{2}+2n-1<3$,即 $\frac{1}{2}<\frac{5}{2}n<\frac{5}{2}$,所以 $\frac{1}{5}<n<1$,故选项 B 错误. 由上可得 $\frac{24}{5}<3m<6$,$\frac{3}{5}<3n<3$,$\frac{32}{5}<4m<8$,所以 $\frac{27}{5}<3m+3n<9$,$\frac{33}{5}<4m+n<9$,故选项 C 错误,选项 D 正确.

4. B **提示**:$ax-3y=4$ 可转化为 $y=\frac{a}{3}x-\frac{4}{3}$,所以 $m=-\frac{4}{3}$,故①错误;将 $\begin{cases}x=-2,\\y=4\end{cases}$ 代入方程 $ax-3y=4$ 中,得 $a=-8$,故②正确;当 $a=5$ 时,原方程为 $5x-3y=4$,则 $y=\frac{5x-4}{3}$,当 x,y 都为整数时,x 可取 -10,-7,-4,-1,2,5,8,一共有 7 组,故③正确;当 $a=-2$ 时,原方程为 $-2x-3y=4$,当 $-2<x\leqslant1$ 时,y 的取值范围为 $-2\leqslant y<0$,故④错误.

5. $x<7$ **提示**:将 $x=3$ 代入方程 $kx+b=0$ 中,得 $k=-\frac{b}{3}$. 将 $k=-\frac{b}{3}$ 代入不等式 $k(x-4)+b>0$ 中,得 $-\frac{b}{3}(x-4)+b>0$,解得 $x<7$.

6. $4\leqslant a<5$ **提示**:解不等式 $x-a>-1$,得 $x>a-1$. 解不等式 $x-a\leqslant2$,得 $x\leqslant a+2$. 由任意一个 x 的值均在 $3\leqslant x<7$ 的范围内,得 $\begin{cases}a+2<7,\\a-1\geqslant3,\end{cases}$ 解得 $4\leqslant a<5$.

7. 177 **提示**:因为 $0.9<\frac{a}{b}<0.91$,且 a,b 为正整数,所以 $0.9b<a<0.91b$,即 $0.9b+b<a+b<0.91b+b$. 又因为 $56\leqslant a+b\leqslant59$,所以 $0.9b+b<59$,即 $b<31\frac{1}{19}$,$0.91b+b>56$,即 $b>29\frac{61}{191}$,所以 $29\frac{61}{191}<b<31\frac{1}{19}$. 由题设 a,b 是正整数,得 $b=30$ 或 $b=31$. 当 $b=30$ 时,由 $0.9b<a<0.91b$,得 $27<a<27.3$,这样的正整数 a 不存在;当 $b=31$ 时,由 $0.9b<a<0.91b$,得 $27.9<a<28.21$,所以 $a=28$,所以 $b^2-a^2=31^2-28^2=177$.

8. $1<m\leqslant5$ **提示**:解不等式组,得 $-2<x\leqslant\frac{3-m}{2}$. 因为当 $x>-2$ 时,能取到的负整数为 -1,且不等组的所有整数解的和是 -1,所以不等式组的整数解为 -1 或 -1 和 0,所以 $-1\leqslant\frac{3-m}{2}<1$,解得 $1<m\leqslant5$.

9. 解:(1) $\begin{cases}3x+2y=m+1①,\\2x+y=m-1②,\end{cases}$ ①+②,得

$5x+3y=2m$. 因为 $5x+3y=-6$，所以 $2m=-6$. 解得 $m=-3$.

（2）解方程组 $\begin{cases}3x+2y=m+1,\\2x+y=m-1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=m-3,\\y=-m+5,\end{cases}$ 因为 x,y 均为非负数，所以 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，即 $\begin{cases}m-3\geqslant 0,\\-m+5\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $3\leqslant m\leqslant 5$.

（3）因为 $\begin{cases}x=m-3,\\y=-m+5,\end{cases}$ 所以 $S=2x-3y+m=2(m-3)-3(-m+5)+m=2m-6+3m-15+m=6m-21$. 因为 $3\leqslant m\leqslant 5$，所以 $18\leqslant 6m\leqslant 30$，所以 $-3\leqslant 6m-21\leqslant 9$，即 $-3\leqslant S\leqslant 9$，所以 $S=2x-3y+m$ 的最大值为 9，最小值为 -3.

10.【回顾】$0<y<3$

【探究】$\begin{cases}x<3,\\2+x\geqslant 0\end{cases}$　$-2\leqslant x<3$　$-4\leqslant w<6$

【应用】（1）**解**：由 $a-b=4$，得 $a=4+b$. 所以 $t=a+b=4+b+b=4+2b$. 因为 $a>1$，$b<2$，所以 $\begin{cases}4+b>1,\\b<2,\end{cases}$ 解得 $-3<b<2$，所以 $-2<4+2b<8$，即 $-2<t<8$.

（2）$2n+3$

【拓展】6　**提示**：因为 $3x=6y+12$，所以 $x=2y+4$. 因为 $6y+12=2z$，所以 $z=3y+6$. 因为 $x>0$，$y\geqslant -4$，$z\leqslant 9$，所以 $\begin{cases}2y+4>0,\\y\geqslant -4,\\3y+6\leqslant 9,\end{cases}$ 解得 $-2<y\leqslant 1$. 因为 $m=2x-2y-z=2(2y+4)-2y-(3y+6)=-y+2$，所以 $1\leqslant m<4$. 因为 m 为整数，所以 $m=1,2,3$，所以 m 所有可能的值的和为 6.

11. 解：(1) 设购买一株甲树苗需要 x 元，购买一株乙树苗需要 y 元. 根据题意，得 $\begin{cases}10x+20y=1\ 350,\\15x+40y=2\ 525,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=35,\\y=50.\end{cases}$

答：购买一株甲树苗需要 35 元，购买一株乙树苗需要 50 元.

(2) 设购买甲种树苗 a 株，则购买乙种树苗 $(2\ 000-a)$ 株. 根据题意，得 $75\%a+80\%\cdot(2\ 000-a)\geqslant 2\ 000\times 78\%$，解得 $a\leqslant 800$.

答：最多可购买甲树苗 800 株.

12. (1) $0\leqslant x\leqslant 1$　**提示**：由题意，可得 $\begin{cases}2x+2\geqslant 2,\\4-2x\geqslant 2,\end{cases}$ 解得 $0\leqslant x\leqslant 1$.

(2) ① **解**：因为 $M\{2,x+1,2x\}=\dfrac{2+x+1+2x}{3}=x+1$，所以 $\min\{2,x+1,2x\}=x+1$，所以 $2\geqslant x+1$，$2x\geqslant x+1$，解得 $x=1$.

② $a=b=c$

③ -4　**提示**：由(2)②，可知 $2x+y+2=2x-y$，则 $y=-1$；$x+2y=2x-y$，则 $x=-3$. 所以 $x+y=-4$.

第 11 章综合练(2)

1. A　**提示**：解①，得 $x>1$. 解 $-2x<4$，得 $x>-2$，则不等式组的解集为 $x>1$，故选项 A 符合题意. 解 $-2x>4$，得 $x<-2$，则不等式组无解，故选项 B 不符合题意. 解 $-2x\geqslant 4$，得 $x\leqslant -2$，则不等式组无解，故选项 C 不符合题意. 解 $-2x\leqslant -4$，得 $x\geqslant 2$，则不等式组的解集为 $x\geqslant 2$，故选项 D 不符合题意.

2. D　**提示**：根据题意，得 $2\leqslant 1-x<3$，解得 $-2<x\leqslant -1$.

3. D　**提示**：解 $x-2<\dfrac{2x-1}{3}<x-\dfrac{a}{6}$，得 $\dfrac{a-2}{2}<x<5$. 因为不等式组的所有整数解的和为 9，且 $4+3+2=9$，所以不等式组的整数解为 $-1,0,1,2,3,4$

或 2,3,4,所以 $-2\leqslant\frac{a-2}{2}<-1$ 或 $1\leqslant\frac{a-2}{2}<2$,解得 $-2\leqslant a<0$ 或 $4\leqslant a<6$,所以整数 a 的值有 $-2,-1,4,5$,共 4 个.

4. C　**提示**:解不等式组,得 $\begin{cases}x>a,\\x<1.\end{cases}$ 因为不等式组无解,所以 $a\geqslant1$.解方程 $2(x-a)+1=x-3(2-x)$,得 $x=\frac{7-2a}{2}$.因为方程的解为非负数,所以 $\frac{7-2a}{2}\geqslant0$,解得 $a\leqslant\frac{7}{2}$,所以 a 的取值范围是 $1\leqslant a\leqslant\frac{7}{2}$,则整数 $a=1,2,3$,共 3 个.

5. 8　**提示**:设 $\frac{2x-1}{y}\cdot\frac{2y-1}{x}=m$,则 $4xy-(2x+2y)+1=mxy$,即 $xy(4-m)=2x+2y-1>0$,所以 $4-m>0$,且 m 为正整数,所以 $0<m<4$,即 m 可取 1,2,3.若 $m=1$,则 $\frac{2x-1}{y}=1$,$\frac{2y-1}{x}=1$,解得 $x=y=1$,不符合题意.

若 $m=2$,则 $2xy=2x+2y-1$,显然 $2xy$ 为偶数,$2x+2y-1$ 为奇数,不符合题意.

若 $m=3$,则 $\begin{cases}\frac{2x-1}{y}=1,\\\frac{2y-1}{x}=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\frac{2x-1}{y}=3,\\\frac{2y-1}{x}=1.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\y=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=5,\\y=3.\end{cases}$ 所以 $x+y=8$.

6. 5　**提示**:解不等式 $2x+1>x+a$,得 $x>a-1$.解不等式 $x-1\leqslant\frac{2x+a+2}{3}$,得 $x\leqslant a+5$.所以不等式组的解集为 $a-1<x\leqslant a+5$.因为 a 为整数,所以所有整数解为 $a+5,a+4,a+3,a+2,a+1,a$.根据题意,得 $21.6\leqslant6a+15<33.6$,解得 $1.1\leqslant a<3.1$.因为 a 为整数,所以 $a=2$ 或 $a=3$.所以所有满足条件的 a 的和为 5.

7. $2\leqslant c<9$　**提示**:解关于 x,y 的方程组,得 $\begin{cases}x=a-1,\\y=a+3.\end{cases}$ 因为该方程组的解为非负数,所以 $\begin{cases}a-1\geqslant0,\\a+3\geqslant0,\end{cases}$ 解得 $a\geqslant1$.由 $a+2b=3$,$c=3a-b$,得 $b=\frac{3-a}{2}$,$a=\frac{2c+3}{7}$.因为 $b>0$,所以 $\frac{3-a}{2}>0$,解得 $a<3$.所以 $1\leqslant a<3$,所以 $1\leqslant\frac{2c+3}{7}<3$,解得 $2\leqslant c<9$.

8. 7.5　**提示**:设该服装店购进 A 种服装 x 件,购进 B 种服装 y 件.根据题意,得 $\begin{cases}80x+100y=10\ 000,\\(120-80)x+(160-100)y=5\ 400,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=75,\\y=40.\end{cases}$ 设 B 种服装打 m 折出售.根据题意,得 $(120\times0.8-80)\times75+\left(160\times\frac{m}{10}-100\right)\times40\geqslant2\ 000$,解得 $m\geqslant7.5$.所以 B 种服装至少要按标价的 7.5 折出售.

9. 解:(1) 解方程组 $\begin{cases}x-y=1+3a,\\x+y=-7-a,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-3+a,\\y=-4-2a.\end{cases}$ 因为方程组 $\begin{cases}x-y=1+3a,\\x+y=-7-a\end{cases}$ 中 x 为非正数,y 为负数,所以 $\begin{cases}-3+a\leqslant0,\\-4-2a<0.\end{cases}$ 解得 $-2<a\leqslant3$,即 a 的取值范围是 $-2<a\leqslant3$.

(2) $2ax+x>2a+1$,$(2a+1)x>2a+1$.要使不等式 $2ax+x>2a+1$ 的解集为 $x<1$,必须 $2a+1<0$,解得 $a<-0.5$.因为 $-2<a\leqslant3$,a 为整数,所以 $a=-1$,所以当 a 为 -1 时,不等式 $2ax+x>2a+1$ 的解集为 $x<1$.

10. (1) $0.5\times(13-x)$　$1\times(13-x)$　小明有 1 元硬币的枚数　小明有 5 角硬币的枚数

(2) **解**:设小明有 x 枚 5 角硬币.根据题意,得 $0.5x+1\times(13-x)<8.5$,解得 $x>9$.因为 x 是自然数,且 $13-x>0$,所以 x 可取 10,11,12.

答:小明可能有 10 枚或 11 枚或 12 枚 5 角硬币.

11. 解:(1) 设该水果种植户此次购买 x 株“纽荷尔脐橙”树苗,y 株“血橙”树苗.根据

题意，得$\begin{cases}x+y=1\ 000,\\30x+25y=27\ 000,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=400,\\y=600.\end{cases}$

答：该水果种植户此次购买了 400 株“纽荷尔脐橙”树苗，600 株“血橙”树苗.

(2) 根据题意，得 $30\times400\times(1-a\%)+25\times600\times\left(1+\frac{2}{5}a\%\right)\leqslant26\ 400$，解得 $a\geqslant10$.

答：a 的最小值为 10.

12. 解：(1) 设 A，B 两种型号电风扇的销售单价分别为 x 元、y 元. 根据题意，得$\begin{cases}3x+4y=1\ 200,\\5x+6y=1\ 900,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=200,\\y=150.\end{cases}$

答：A，B 两种型号电风扇的销售单价分别为 200 元、150 元.

(2) 设采购 A 种型号电风扇 a 台，则采购 B 种型号电风扇 $(50-a)$ 台. 根据题意，得 $160a+120(50-a)\leqslant7\ 500$，解得 $a\leqslant37\frac{1}{2}$. 因为 a 是整数，所以 a 最大是 37.

答：A 种型号的电风扇最多能采购 37 台.

(3) 设采购 A 种型号的电风扇 x 台，则采购 B 种型号电风扇 $(50-x)$ 台. 根据题意，得 $(200-160)x+(150-120)(50-x)>1\ 850$，解得 $x>35$. 因为 $x\leqslant37\frac{1}{2}$，且 x 应为整数，所以在(2) 的条件下超市能实现利润超过 1 850 元的目标. 相应方案有两种：当 $x=36$ 时，采购 A 种型号的电风扇 36 台，B 种型号的电风扇 14 台；当 $x=37$ 时，采购 A 种型号的电风扇 37 台，B 种型号的电风扇 13 台.

第 12 章　定义　命题　证明

巅峰训练 16　定义与命题

1. A　**提示**：①正确；互补的两个角可以均为直角，故②错误；同旁内角互补，两直线平行，故③错误；互补的同旁内角的平分线互相垂直，故④错误.

2. C

3. B　**提示**：两直线平行，同旁内角互补，故①错误. 若 $n<1$，则当 $n=-2$ 时，$n^2-1>0$，故②错误. 如果一个角的两边分别与另一个角的两边平行，那么这两个角相等或互补，故③错误. 同一平面内，如果直线 $l_1\perp l_2$，直线 $l_2\perp l_3$，那么 $l_1/\!/l_3$，故④正确.

4. 两个角是同一个角的余角

5. 在数轴上，到原点的距离相等的两个点表示的数互为相反数

6. ①②④　**提示**：①根据定义，2 222 正读倒读都一样，所以 2 222 是“回文数”，故①是真命题；②两位数的“回文数”为 11，22，33，44，55，66，77，88，99，合计 9 个，故②是真命题；③三位数的“回文数”中，百位和个位是 1 的为 101，111，121，131，141，151，161，171，181，191，合计 10 个，同理百位和个位是 2 的有 10 个，依次类推，则三位数的“回文数”合计 $10\times9=90$(个)，故③是假命题；④设任意四位数 p 的“回文数”千位、百位、十位、个位上的数字分别为 a，b，c，d，则 $p=1\ 000a+100b+10c+d$. 根据定义，$a=d$，$b=c$，所以 $p=1\ 001a+110b=11\times91a+11\times10b=11\times(91a+10b)$，所以 p 是 11 的倍数，故④是真命题.

7. 解：(1) 原命题“如果 $x>y>0$，那么 $x^2>y^2$”为真命题，其逆命题为“如果 $x^2>y^2$，那么 $x>y>0$”，为假命题；

(2) 原命题“如果两个有理数的绝对值相等，那么这两个有理数的平方也相等”为真命题，其逆命题为“如果两个有理数的平方相等，那么这两个数的绝对值也相等”，为真命题.

8. 解：(1) D　D

(2) 上述推理过程中，用了“两直线平行，同旁内角互补”“同旁内角互补，两直线平行”这两个互逆的真命题.

9. 解：(1) C

(2) 由条件可知 $x^2+(m-2)x+9=(x\pm3)^2$，所以 $(m-2)x=2\times x\times(\pm3)$，所以 $m-2=2\times(\pm3)$，解得 $m=8$ 或 $m=-4$.

10. 解：(1) 因为 $a\odot b=a(a+b)-1$，所以 $(-2)\odot3=(-2)\times[(-2)+3]-1=(-2)\times1-1=(-2)-1=-3$.

(2) $3m+2+n$（答案不唯一）

11. 解：(1) $EM/\!/FN$. 理由如下：

因为 $\angle1+\angle2=180°$，$\angle EFD+\angle2=180°$，所以 $\angle1=\angle EFD$，所以 $AB/\!/CD$，所以 $\angle BEF=\angle CFE$. 因为 EM，FN 分别平分 $\angle BEF$ 和 $\angle CFE$，所以 $\angle3=\angle4$，所以 $EM/\!/FN$.

(2) 平行　平行

(3) 平行　垂直

12. 解：(1) 如果①，②，那么③；如果②，③，那么①；如果①，③，那么②.

(2) 命题一：如果①，②，那么③. 说明如下：

因为 $AB/\!/CD$，所以 $\angle A=\angle DCE$，$\angle B=\angle BCD$. 因为 $\angle A=\angle B$，所以 $\angle BCD=\angle DCE$.

命题二：如果②，③，那么①. 说明如下：

因为 $AB/\!/CD$，所以 $\angle A=\angle DCE$，$\angle B=\angle BCD$. 因为 $\angle BCD=\angle DCE$，所以 $\angle A=\angle B$.

命题三：如果①，③，那么②. 说明如下：

因为 $\angle A+\angle B=180°-\angle BCA$，$\angle BCE=180°-\angle BCA$，所以 $\angle BCE=\angle A+\angle B$，即 $\angle BCD+\angle DCE=\angle A+\angle B$. 因为 $\angle BCD=\angle DCE$，$\angle A=\angle B$，所以 $\angle A=\angle DCE$，$\angle B=\angle BCD$，所以 $AB/\!/CD$.

以上 3 个命题，任写一个即可.

巅峰训练 17　证明

1. B　**提示**：第 1 天：初始感染人数 1 人，累计人数为 1 人；第 2 天：1 人传染给 2 人，新增 2 人，累计人数为 $1+2=3$(人)；第 3 天：第 2 天新增的 2 人，加上第一天的 1 人共 3 人，再各传染给 2 人，新增 $2\times3=6$(人)，累计人数为 $3+6=9$(人)；第 4 天：第 3 天新增的 6 人，加上第 2 天新增的 2 人共 8 人，再各传染给 2 人，新增 $2\times8=16$(人)，累计人数为 $9+16=25$(人)，第 5 天：第 4 天新增的 16 人，加上第 3 天新增 6 人共 22 人，再各传染 2 人，最多新增 $2\times22=44$(人)，累计人数为 $25+44=69$(人)，超过全班总人数 50 人，即第 5 天全班同学全被感染过.

2. D　**提示**：假设 12 个 A 球中每两个 A 球进行碰撞，则可以得到 6 个 C 球，9 个 B 球中让其中 8 个 B 球每两个进行碰撞，则可以得到 4 个 C 球，加上原来的 C 球，共 20 个 C 球，让这 20 个 C 球互相碰撞，重复进行直至剩下一个 C 球，再和剩下的 B 球碰撞，可以得到一个 A 球，故①正确，②错误. 事实上，无论怎么碰撞，A 球数量与 B 球数量奇偶性总是不一样（一奇一偶）. (AA)→C，A 与 B 一奇一偶；(BB)→C，A 与 B 一奇一偶；(CC)→C，A 与 B 一奇一偶；(AB)→C，A 与 B 一奇一偶；(AC)→B，A 与 B 一奇一偶；(BC)→A，A 与 B 一奇一偶. 由此可知，A 与 B 的数量不可能同时为 0，所以最后剩下的小球一定不是 C 型小球，故③正确.

3. 984　**提示**：根据题意可知，965 与 285 的个位数字相同，285 与 214 的百位数字相同，又因为每人都只猜对了一个数字，但猜对的数字位置都不相同，所以小明猜对了十位上的数字 8，所以小光猜对了百位上的数字 9，小亮猜对了个位上的数字 4，所以皮箱的密码是 984.

4. 乙　**提示**：因为甲首次取走写有 b，c，d 的三个球，所以还剩下 a，e，f，g，h. 又因为乙首次也取走三个球，且必须相邻，所以乙可以取 e，f，g 或 f，g，h. 若乙取 e，f，g，只剩下 a，h，因为它们不相邻，所以甲只能拿走其中一个，故乙取走最后一个，故乙胜；同理若乙取 f，g，h，只剩下 a，e，因为它们不相邻，所以甲只能取走一个，故乙取走最后一个，故乙胜.

5. 解：(1) 因为 $(-1)^2+0^2+1^2+2^2+3^2=1+0+1+4+9=15=5\times3$，所以结果是 5 的 3 倍.

(2) $(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5n^2+10=5(n^2+2)$. 因为 n 为整数,所以 n^2+2 为整数,所以它们的平方和是 5 的倍数.

(3) 余数是 2. 理由如下:

设中间的整数为 m,则 $(m-1)^2+m^2+(m+1)^2=3m^2+2$,被 3 除余 2,所以余数是 2.

6. 证明:因为 $AD // BC$,所以 $\angle A+\angle ABC=180°$,$\angle C+\angle ADC=180°$. 因为 $\angle A=\angle C$,所以 $\angle ABC=\angle ADC$. 因为 BE,DF 分别平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$,所以 $\angle EBC=\frac{1}{2}\angle ABC$,$\angle EDF=\frac{1}{2}\angle ADC$. 所以 $\angle EBC=\angle EDF$. 因为 $AD//BC$,所以 $\angle DFC=\angle EDF$. 所以 $\angle EBC=\angle DFC$,所以 $BE//DF$.

7. 证明:因为 $\angle 1+\angle 2=180°$,$\angle 1+\angle EFD=180°$,所以 $\angle 2=\angle EFD$,所以 $AB//EF$,所以 $\angle 3=\angle ADE$. 又因为 $\angle 3=\angle B$,所以 $\angle B=\angle ADE$,所以 $DE // BC$,所以 $\angle C=\angle AED$.

8. (1) xy　y^2

(2) **证明**:因为 $a<b$,所以 $a+b<b+b$(不等式的两边都加上同一个数,不等号的方向不变),所以 $\frac{a+b}{2}<b$(不等式的两边都除以同一个正数,不等号的方向不变).

9. 证明:利用抽屉原理,按每人植树的多少,从 50 至 100 棵可以构造 51 种抽屉,则问题转化为至少有 5 人植树的棵数在同一个抽屉里. 假设最多有 4 人植树的棵数在同一个抽屉里,则 204 人植树的总棵数最多有 $4\times(50+51+52+\cdots+100)=4\times\frac{(50+100)\times 51}{2}=15\ 300$. 因为 $15\ 300<15\ 301$,所以得出矛盾. 因此,至少有 5 人植树的棵数相同.

10. (1) **解**:$AB//CD$. 理由如下:

因为 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 互补,所以 $\angle 1+\angle 2=180°$. 因为 $\angle 1=\angle BEF$,$\angle 2=\angle DFE$,所以 $\angle BEF+\angle DFE=180°$,所以 $AB//CD$.

(2) **证明**:由(1)知,$AB//CD$,所以 $\angle AEF+\angle EFC=180°$. 因为 $\angle AEF$ 与 $\angle EFC$ 的平分线相交于点 P,所以 $\angle FEP+\angle EFP=\frac{1}{2}(\angle AEF+\angle EFC)=90°$,所以 $\angle EPF=90°$. 因为 $PF//GH$,所以 $\angle EGH=\angle EPF=90°$,所以 $GH\perp EG$.

(3) **解**:设 $\angle PHK=\angle HPK=\alpha$. 因为 $\angle PKH+\angle PKG=180°$,$\angle PKH+\angle PHK+\angle HPK=180°$,所以 $\angle PKG=\angle PHK+\angle HPK=2\alpha$. 由(2)知,$GH\perp EG$,所以 $\angle PGK=90°$,所以 $\angle EPK=180°-\angle GPK=\angle PGK+\angle PKG=90°+2\alpha$. 因为 PQ 平分 $\angle EPK$,所以 $\angle KPQ=\frac{1}{2}\angle EPK=45°+\alpha$,所以 $\angle HPQ=\angle KPQ-\angle HPK=45°$.

巅峰训练 18　定理(1)

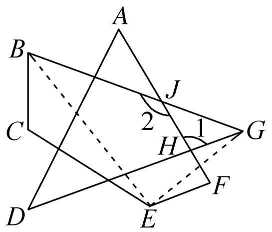
1. C

2. C　**提示**:用反证法证明命题"在三角形中,至少有一个内角大于或等于 60°"时,第一步应先假设在三角形中,没有一个内角大于或等于 60°,即三角形的三个内角都小于 60°.

3. C　**提示**:根据正多边形内角和定理可知正五边形的每个内角为 $\frac{180°\times(5-2)}{5}=108°$,所以 $\angle AFG=180°-30°-108°=42°$. 所以 $\angle AGF=180°-108°-42°=30°$. 所以 $\angle 2=180°-\angle AGF-\angle FGH=180°-30°-108°=42°$.

4. 3　**提示**:如图,连接 BE,GE,设 AF 分别交 BG,DG 于点 J,H. 因为 $\angle 2$ 是 $\triangle JHG$ 的外角,所以 $\angle 2=\angle 1+\angle JGH$. 因为 $\angle 1$ 是 $\triangle ADH$ 的外角,所以

$\angle 1=\angle A+\angle D$，所以$\angle 2=\angle A+\angle D+\angle BGD$. 在五边形 $BJFEC$ 中，$\angle CBJ+\angle 2+\angle F+\angle CEF+\angle C=\angle CBE+\angle EBJ+\angle 2+\angle F+\angle BEF+\angle BEC+\angle C=540^\circ$，所以$\angle A+\angle CBG+\angle C+\angle D+\angle CEF+\angle F+\angle BGD=540^\circ$，所以 $n=\frac{540^\circ}{180^\circ}=3$.



5. -2(答案不唯一)

6. $\angle B\geqslant 90^\circ$

7. 65°或25°　**提示**：如图 1，当点 E 在线段 CB 上时，因为 $DF\parallel AB$，所以$\angle CDF=\angle BAC=50^\circ$，所以$\angle CDE=\angle FDE=25^\circ$. 可得$\angle C=40^\circ$，所以$\angle DEB=\angle C+\angle CDE=65^\circ$. 如图 2，当点 E 在线段 CB 的延长线上时，因为 $DF\parallel AB$，所以$\angle ADF=\angle BAC=50^\circ$，所以$\angle CDF=130^\circ$，所以$\angle CDE=\angle FDE=115^\circ$. 因为$\angle C=40^\circ$，所以$\angle DEB=180^\circ-\angle C-\angle CDE=25^\circ$. 综上所述，$\angle DEB$ 的度数为 65°或 25°.

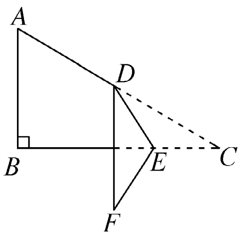


图 1

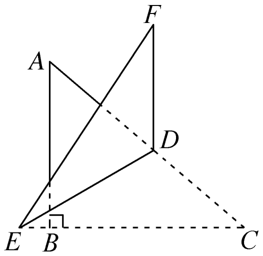


图 2

8. 解：(1) 甲的说法对，乙的说法不对. 理由如下：

因为 $360^\circ\div 180^\circ=2$，$630^\circ\div 180^\circ=3\cdots\cdots 90^\circ$，所以甲的说法对，乙的说法不对. 由$(n-2)\times 180^\circ=360^\circ$，解得 $n=4$，所以甲同学说的边数 n 是 4.

(2) 根据题意，得$(n+x-2)\cdot 180^\circ-(n-2)\cdot 180^\circ=360^\circ$，解得 $x=2$.

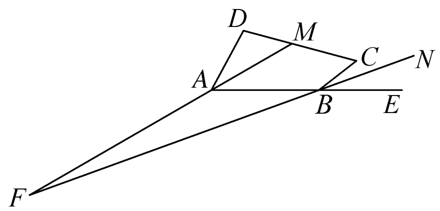
9. 解：【探究】(1) 35°　**提示**：因为$\angle DAB$ 和$\angle CBE$ 的平分线交于点 F，所以$\angle FAB=\frac{1}{2}\angle DAB$，$\angle FBE=\frac{1}{2}\angle CBE$. 在四边形 $ABCD$ 中，因为$\angle ADC=120^\circ$，$\angle BCD=130^\circ$，所以$\angle DAB+\angle ABC=360^\circ-120^\circ-130^\circ=110^\circ$，所以$\angle AFB=\angle FBE-\angle FAB=\frac{1}{2}\angle CBE-\frac{1}{2}\angle DAB=\frac{1}{2}(\angle CBE-\angle DAB)=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ABC-\angle DAB)=\frac{1}{2}\times(180^\circ-110^\circ)=35^\circ$.

(2) $\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta-90^\circ$　**提示**：由(1)，得$\angle AFB=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ABC-\angle DAB)$，$\angle DAB+\angle ABC=360^\circ-\angle ADC-\angle BCD$，所以$\angle AFB=\frac{1}{2}(180^\circ-360^\circ+\angle ADC+\angle BCD)=\frac{1}{2}\angle ADC+\frac{1}{2}\angle BCD-90^\circ=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta-90^\circ$.

(3) $\alpha+\beta=180^\circ$. 证明如下：

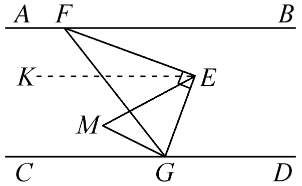
当 $AG\parallel BH$ 时，$\angle GAB=\angle HBE$. 因为 AG 平分$\angle DAB$，BH 平分$\angle CBE$，所以$\angle DAB=2\angle GAB$，$\angle CBE=2\angle HBE$，所以$\angle DAB=\angle CBE$，所以 $AD\parallel BC$，所以$\angle ADC+\angle BCD=\alpha+\beta=180^\circ$.

【挑战】如图即为所求，此时$\angle F=90^\circ-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta$.　**提示**：根据题意，得$\angle BAM=\frac{1}{2}\angle DAB$，$\angle NBE=\frac{1}{2}\angle CBE$，$\angle DAB+\angle ABC=360^\circ-\angle ADC-\angle BCD=360^\circ-\alpha-\beta$，所以$\angle DAB+180^\circ-\angle CBE=360^\circ-\alpha-\beta$，所以$\angle DAB-\angle CBE=180^\circ-\alpha-\beta$. 因为$\angle ABF=\angle NBE$，所以$\angle F=\angle BAM-\angle ABF=\frac{1}{2}\angle DAB-\angle NBE=\frac{1}{2}\angle DAB-\frac{1}{2}\angle CBE=\frac{1}{2}(\angle DAB-\angle CBE)=\frac{1}{2}(180^\circ-\alpha-\beta)=90^\circ-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta$.



10. 解：(1) 40　**提示**：因为 $\angle FHA=80^\circ$，$AB/\!/CD$，所以 $\angle CGH=\angle FHA=80^\circ$. 因为 $\angle EGF=60^\circ$，所以 $\angle EGD=180^\circ-\angle CGH-\angle EGF=40^\circ$.

(2) 如图，过点 E 作 $EK/\!/AB$，而 $AB/\!/CD$，所以 $AB/\!/EK/\!/CD$，所以 $\angle BFE=\angle KEF$，$\angle KEG=\angle EGD$. 因为 $\angle KEF+\angle KEG=\angle FEG=90^\circ$，所以 $\angle BFE+\angle EGD=90^\circ$. 因为 $\angle EGD=4\angle BFE$，所以 $\angle KEF=\angle BFE=18^\circ$，$\angle EGD=72^\circ$. 因为 $\angle EGF=60^\circ$，所以 $\angle FGC=180^\circ-\angle EGF-\angle EGD=48^\circ$. 因为 ME 平分 $\angle FEG$，MG 平分 $\angle FGC$，所以 $\angle FEM=45^\circ$，$\angle MGC=24^\circ$，所以 $\angle KEM=\angle FEM-\angle KEF=27^\circ$，同理可得 $\angle M=\angle KEM+\angle MGC=51^\circ$.



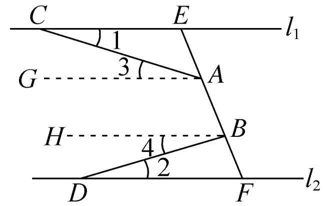
(3) ②是正确的. 理由如下：

设 $\angle DGE=x^\circ$，则 $\angle NGE=x^\circ$，所以 $\angle CGN=180^\circ-2x^\circ$. 同(2)可得 $\angle BFE+\angle DGE=\angle FEG=90^\circ$，所以 $\angle BFE=90^\circ-x^\circ$. 所以 $\dfrac{\angle CGN}{\angle BFE}=\dfrac{180^\circ-2x^\circ}{90^\circ-x^\circ}=2$，$\angle CGN+\angle BFE=270^\circ-3x^\circ$. 所以 $\angle CGN+\angle BFE$ 的值会随 $\angle DGE$ 值的变化而变化，而 $\dfrac{\angle CGN}{\angle BFE}$ 的值不变.

巅峰训练 19　定理(2)

1. D　**提示**：当 $0<|x+1|<\frac{1}{2}$ 时，$0<x+1<\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}<x+1<0$，则 $-1<x<-\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{3}{2}<x<-1$，所以①的逆命题不是真命题. 当 $1\leqslant|x|\leqslant2$ 时，$1\leqslant x\leqslant2$ 或 $-2\leqslant x\leqslant-1$，所以②的逆命题不是真命题. 因为所有多边形的外角和均等于 360°，所以③的逆命题不是真命题. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle C=90^\circ$，则 $\angle A+\angle B=90^\circ$，所以④的逆命题是真命题.

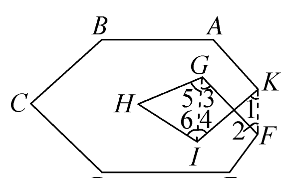
2. A　**提示**：如图，过点 A 作 $AG/\!/EC$，过点 B 作 $BH/\!/DF$，则 $\angle3=\angle1$，$\angle4=\angle2$. 因为 $l_1/\!/l_2$，所以 $AG/\!/BH$，所以 $\angle GAB+\angle ABH=180^\circ$，所以 $\angle3+\angle4=125^\circ+85^\circ-180^\circ=30^\circ$，所以 $\angle1+\angle2=30^\circ$.



3. A　**提示**：根据题意，得题图中九边形的每个内角都等于 $\dfrac{(9-2)\times180^\circ}{9}=140^\circ$，所以 $\angle\alpha=360^\circ-140^\circ-140^\circ=80^\circ$.

4. 70°　**5.** 同位角不相等时，两直线平行

6. 1 080°　**提示**：如图，连接 KF，GI，因为七边形 $ABCDEFK$ 的内角和为 $(7-2)\times180^\circ=900^\circ$，所以 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle EFG+\angle AKI=900^\circ-(\angle1+\angle2)$，即 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle EFG+\angle AKI+(\angle1+\angle2)=900^\circ$. 易知 $\angle1+\angle2=\angle3+\angle4$，$\angle5+\angle6+\angle H=180^\circ$，所以 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle EFG+\angle AKI+(\angle3+\angle4)=900^\circ$，$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle EFG+\angle AKI+(\angle3+\angle4)+\angle5+\angle6+\angle H=900^\circ+180^\circ$，所以 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle EFG+\angle FGH+\angle H+\angle HIK+\angle AKI=1\,080^\circ$.



7. 解：(1) 此命题是真命题.

说明：如图 1，直线 AB，CD 相交于点 O. 因为$\angle AOC+\angle AOD=180°$，$\angle BOD+\angle AOD=180°$，所以$\angle AOC=\angle BOD$.

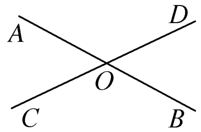


图 1

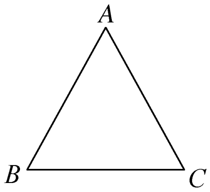


图 2

(2)“对顶角相等”的逆命题是“相等的角是对顶角”，逆命题是假命题.

反例：如图 2，在$\triangle ABC$ 中，$\angle B=\angle C$，但$\angle B$ 与$\angle C$ 不是对顶角.

8. 解：(1) 因为$\angle B_1+\angle C_1=180°-\angle B_1A_1C_1$，$\angle B_2+\angle C_2=180°-\angle B_2A_2C_2$，$\angle B_3+\angle C_3=180°-\angle B_3A_3C_3$，所以$\angle B_1+\angle C_1+\angle B_2+\angle C_2+\angle B_3+\angle C_3=540°-(\angle B_1A_1C_1+\angle B_2A_2C_2+\angle B_3A_3C_3)$. 因为$\angle B_1A_1C_1+\angle B_2A_2C_2+\angle B_3A_3C_3=\angle A_3A_1A_2+\angle A_1A_2A_3+\angle A_1A_3A_2=180°$，所以$\angle B_1+\angle C_1+\angle B_2+\angle C_2+\angle B_3+\angle C_3=360°$.

(2) 同(1)可得$\angle B_1+\angle C_1+\angle B_2+\angle C_2+\angle B_3+\angle C_3+\angle B_4+\angle C_4=720°-(\angle B_1A_1C_1+\angle B_2A_2C_2+\angle B_3A_3C_3+\angle B_4A_4C_4)$. 因为$\angle B_1A_1C_1+\angle B_2A_2C_2+\angle B_3A_3C_3+\angle B_4A_4C_4=\angle A_4A_1A_2+\angle A_1A_2A_3+\angle A_2A_3A_4+\angle A_3A_4A_1=360°$，所以$\angle B_1+\angle C_1+\angle B_2+\angle C_2+\angle B_3+\angle C_3+\angle B_4+\angle C_4=360°$.

(3) $360°$ **提示：**由(1)可知，$\angle B_1+\angle C_1+\angle B_2+\angle C_2+\angle B_3+\angle C_3=3\times180°-1\times180°=360°$；由(2)可知，$\angle B_1+\angle C_1+\angle B_2+\angle C_2+\angle B_3+\angle C_3+\angle B_4+\angle C_4=4\times180°-2\times180°=360°$……以此类推$\angle B_1+\angle C_1+\angle B_2+\angle C_2+\cdots+\angle B_n+\angle C_n=n\cdot180°-(n-2)\cdot180°=360°$.

9. 解：(1) 如图 1，当 BD 是$\angle ABC$ 的“邻 AB 三分线”时，$\angle BD'C=\angle A+\frac{1}{3}\angle ABC=95°$；当 BD 是$\angle ABC$ 的“邻 BC 三分线”时，$\angle BD''C=\angle A+\frac{2}{3}\angle ABC=110°$. 综上所述，$\angle BDC$ 的度数为 $95°$或 $110°$.

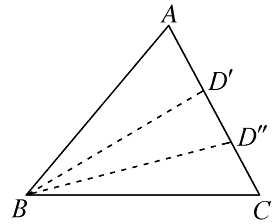


图 1

(2) 在$\triangle BPC$ 中，因为$\angle BPC=140°$，所以$\angle PBC+\angle PCB=40°$. 又因为 BP，CP 分别是$\angle ABC$ 的“邻 BC 三分线”和$\angle ACB$ 的“邻 BC 三分线”，所以$\angle PBC=\frac{1}{3}\angle ABC$，$\angle PCB=\frac{1}{3}\angle ACB$，所以$\frac{1}{3}\angle ABC+\frac{1}{3}\angle ACB=40°$，所以$\angle ABC+\angle ACB=120°$. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle A+\angle ABC+\angle ACB=180°$，所以$\angle A=180°-(\angle ABC+\angle ACB)=60°$.

(3) $\frac{2}{3}m°$或$\frac{1}{3}m°$或$\frac{2}{3}m°+18°$或$\frac{1}{3}m°-18°$. **提示：**分 4 种情况进行画图计算：

如图 2，当 BP 和 CP 分别是$\angle ABC$ 的“邻 AB 三分线”和$\angle ACD$ 的“邻 AC 三分线”时，$\angle A+\angle ABP=\angle BPC+\angle ACP$，即 $m°+\frac{1}{3}\times54°=\angle BPC+\frac{1}{3}\angle ACD$. 因为$\angle ACD=\angle A+\angle ABC$，所以$\angle BPC=\frac{2}{3}m°$.

如图 3，当 BP 和 CP 分别是$\angle ABC$ 的“邻 BC 三分线”和$\angle ACD$ 的“邻 CD 三分线”时，$\angle A+\angle ABP=\angle BPC+\angle ACP$，即 $m°+\frac{2}{3}\times54°=\angle BPC+\frac{2}{3}\angle ACD$. 因为$\angle ACD=\angle A+\angle ABC$，所以$\angle BPC=\frac{1}{3}m°$.

如图 4，当 BP 和 CP 分别是$\angle ABC$ 的“邻 BC 三分线”和$\angle ACD$ 的“邻 AC 三分线”时，$\angle A+\angle ABP=$

$\angle BPC+\angle ACP$，即 $m^\circ+\frac{2}{3}\times54^\circ=\angle BPC+\frac{1}{3}\angle ACD$. 因为$\angle ACD=\angle A+\angle ABC$，所以$\angle BPC=\frac{2}{3}m^\circ+18^\circ$.

如图 5，当 BP 和 CP 分别是$\angle ABC$ 的“邻 AB 三分线”和$\angle ACD$ 的“邻 CD 三分线”时，$\angle A+\angle ABP=\angle BPC+\angle ACP$，即 $m^\circ+\frac{1}{3}\times54^\circ=\angle BPC+\frac{2}{3}\angle ACD$. 因为$\angle ACD=\angle A+\angle ABC$，所以$\angle BPC=\frac{1}{3}m^\circ-18^\circ$.

综上所述，$\angle BPC$ 的度数为$\frac{2}{3}m^\circ$或$\frac{1}{3}m^\circ$或$\frac{2}{3}m^\circ+18^\circ$或$\frac{1}{3}m^\circ-18^\circ$.

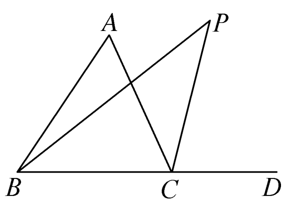


图 2

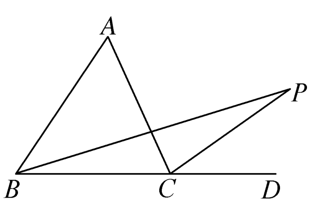


图 3

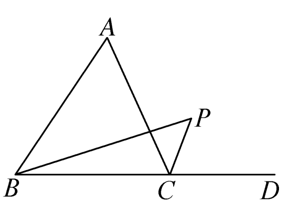


图 4

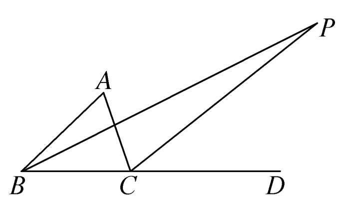


图 5

10. 证明：假设$\angle A>45^\circ$，$\angle B>45^\circ$，所以$\angle A+\angle B>90^\circ$. 因为$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$，所以$\angle C<90^\circ$，与$\angle C=90^\circ$矛盾，所以假设不成立. 所以如果在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，那么$\angle A$，$\angle B$ 中至少有一个角不大于 45°.

11. 解：(1) ①110

②x,y,m,n 之间的数量关系为 $m=n+x+y$. 证明如下：

因为在$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC+\angle ABC+\angle ACB=180^\circ$，所以$\angle BAC+\angle PBA+\angle PCA=180^\circ-\angle PBC-\angle PCB$. 因为在$\triangle PBC$ 中，$\angle BPC+\angle PCB+\angle PBC=180^\circ$，所以$\angle BPC=180^\circ-\angle PCB-\angle PBC$. 所以$\angle BPC=\angle BAC+\angle PBA+\angle PCA$，即 $m=n+x+y$.

(2) x,y,m,n 之间所有可能的数量关系：①$m+x=n+y$，如图 1 所示；②$n=m+x+y$，如图 2 所示；③$n+x=m+y$，如图 3 所示；④$x=m+n+y$，如图 4 所示；⑤$y=m+n+x$，如图 5 所示；⑥$m+n+x+y=360$，如图 6 所示.

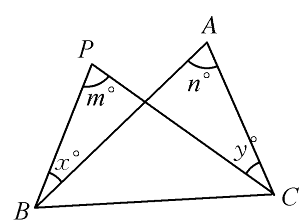


图 1

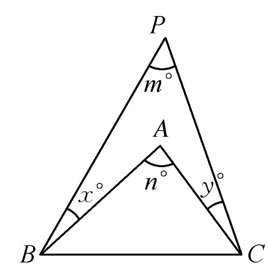


图 2

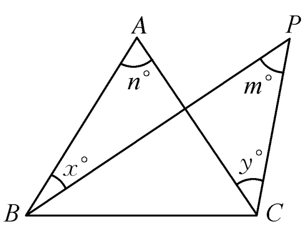


图 3

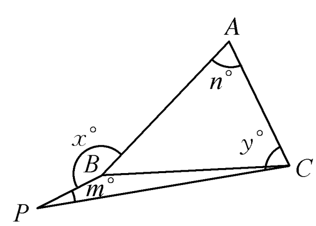


图 4

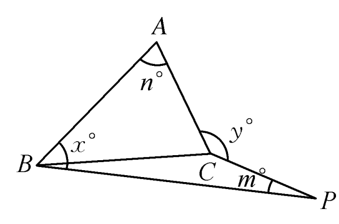


图 5

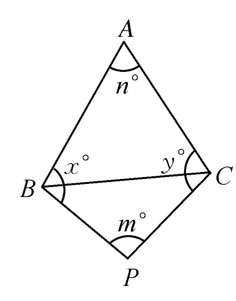


图 6

第 12 章综合练(1)

1. C　**2.** D　**3.** C

4. A　提示：因为$-2\,025\times\left(-\frac{1}{2\,025}\right)=1$，所以$-2\,025$ 的倒数是$-\frac{1}{2\,025}$，故①是假命题. 设这款服

装的原售价为 x 元，则 $(x-a)(1-20\%)=b$，解得 $x=a+\frac{5}{4}b$，故②是假命题. 解不等式 $x-b>0$，得 $x>b$. 当 $-3\leqslant b<-2$ 时，$x-b>0$ 的负整数解有两个；当 $b=-2$ 时，不等式 $x-b>0$ 的负整数解只有一个，故③是假命题. $180^\circ\times\frac{5}{3+4+5}=75^\circ$，即 $\angle C=75^\circ$，则 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，故④是真命题.

5. a，b 都不能被 5 整除

6. 9 **提示**：设这个多边形的边数为 n. 根据题意，得 $(n-2)\cdot180^\circ=\frac{7}{2}\times360^\circ$，解得 $n=9$，所以这个多边形的边数为 9.

7. ①③④ **提示**：①若 $|x|+2x=6$，则当 $x\geqslant0$ 时，有 $x+2x=6$，解得 $x=2$，当 $x<0$ 时，有 $-x+2x=6$，解得 $x=6$（舍去），所以是真命题；②若方程 $(m-1)x^{|m|}-2=0$ 是关于 x 的一元一次方程，则 $|m|=1$ 且 $m-1\neq0$，解得 $m=-1$，所以是假命题；③因为 $ax-b-2x=3$，所以 $(a-2)x-b=3$，根据题意，得 $a-2=0$，即 $a=2$，所以 $b=-3$，所以 $ab=-6$，所以是真命题；④当 $1\leqslant x\leqslant3$ 时，$|x-1|+|x-3|=2$，当 $x<1$ 时，$|x-1|+|x-3|=1-x+3-x$，若此时 $|x-1|+|x-3|=4$，则 $x=0$，当 $x>3$ 时，$|x-1|+|x-3|=x-1+x-3$，若此时 $|x-1|+|x-3|=4$，则 $x=4$，所以使得 $|x-1|+|x-3|=4$ 成立的 x 的值有且仅有两个，是真命题.

8. 1 **提示**：因为每人每次取的火柴不能超过 10 根，所以先取者只要到最后一次给后取者剩下 11 根，不管后取者取多少根，最后的赢家定是先取者. 为此，先取者取后留下的根数应为 11 的倍数，即 99，88，77，66，55，44，33，22，11. 所以先取者为战胜对手，第一次应取 1 根火柴.

9. (1) **证明**：$\overline{abc}=100a+10b+c=99a+9b+(a+b+c)$，由题目条件知，$a+b+c$ 可以被 3 整除，而且 $99a$，$9b$ 也能被 3 整除，所以 $99a+9b+(a+b+c)$ 可以被 3 整除. 故 $\overline{abc}$ 可以被 3 整除.

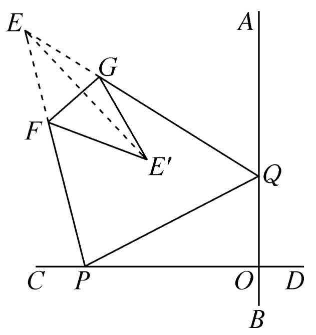
(2) **解**：因为 $\overline{abc}+\overline{bcd}=100a+10b+c+100b+10c+d=100a+110b+11c+d=99a+110b+11c+(a+d)$，且 $99a$，$110b$，$11c$ 能被 11 整除，所以若 $\overline{abc}$ 与 $\overline{bcd}$ 的和能被 11 整除，则 $a+d$ 能被 11 整除，因为 a 为不超过 9 的正整数，d 为不超过 9 的自然数，所以 $a+d$ 为不超过 18 的正整数，所以 $a+d=11$.

10. **解**：(1) ①45

②$\angle PHE$ 是一个定值，$\angle PHE=45^\circ$. 因为 $AB\perp CD$，所以 $\angle POQ=90^\circ$，所以 $\angle PQO+\angle QPO=90^\circ$，所以 $\angle QPO=90^\circ-\angle PQO$，$\angle AQP=180^\circ-\angle PQO$. 因为 EQ 平分 $\angle AQP$，PH 平分 $\angle QPO$，所以 $\angle EQP=\frac{1}{2}\angle AQP=90^\circ-\frac{1}{2}\angle PQO$，$\angle HPQ=\frac{1}{2}\angle QPO=45^\circ-\frac{1}{2}\angle PQO$，所以 $\angle H=\angle EQP-\angle HPQ=45^\circ$.

(2) $\angle PFE'+\angle QGE'=90^\circ$. 理由如下：如图，连接 EE'，因为 $AB\perp CD$，所以 $\angle POQ=90^\circ$，所以 $\angle PQO+\angle QPO=90^\circ$. 因为 $\angle CPQ+\angle QPO=180^\circ$，$\angle PQA+\angle PQO=180^\circ$，所以 $180^\circ-\angle CPQ+180^\circ-\angle PQA=90^\circ$，所以 $\angle CPQ+\angle PQA=270^\circ$. 因为 QE，PE 分别平分 $\angle PQA$，$\angle CPQ$，所以 $\angle EPQ=\frac{1}{2}\angle CPQ$，$\angle EQP=\frac{1}{2}\angle PQA$，所以 $\angle EPQ+\angle EQP=\frac{1}{2}\angle CPQ+\frac{1}{2}\angle PQA=135^\circ$，所以 $\angle PEQ=180^\circ-\angle EPQ-\angle EQP=45^\circ$. 由折叠的性质可知 $\angle FE'G=\angle PEQ=45^\circ$. 因为 $\angle FEG+\angle FE'G+\angle EFE'+\angle EGE'=360^\circ$，所以 $\angle EFE'+\angle EGE'=270^\circ$. 因为 $\angle EFE'+\angle PFE'=180^\circ=\angle EGE'+\angle QGE'$，所以

$\angle PFE' + \angle QGE' = 360^\circ - \angle EFE' - \angle EGE' = 90^\circ$.



11. (1) 平行　垂直　垂直

(2) **解**:选图 1,$BD // MF$. 证明如下:

因为$\angle A = 90^\circ$,$ME \perp BC$,所以$\angle ABC + \angle AME = 360^\circ - 90^\circ \times 2 = 180^\circ$. 因为 BD 平分$\angle ABC$,MF 平分$\angle AME$,所以$\angle ABD = \frac{1}{2}\angle ABC$,$\angle AMF = \frac{1}{2}\angle AME$,所以$\angle ABD + \angle AMF = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle AME) = 90^\circ$. 又因为$\angle A = 90^\circ$,所以$\angle AFM + \angle AMF = 90^\circ$,所以$\angle ABD = \angle AFM$,所以 $BD // MF$.

12. (1) **证明**:由折叠的性质,得$\angle DFE = \angle A$. 因为$\angle A = \angle C$,所以$\angle DFE = \angle C$,所以 $BC // DF$.

(2) **解**:$2\angle C = \angle 1 + \angle 2$. 理由如下:

因为四边形的内角和等于 360°,所以$\angle A + \angle A' + \angle ADA' + \angle AEA' = 360^\circ$. 因为$\angle 1 + \angle ADA' + \angle 2 + \angle AEA' = 360^\circ$,所以$\angle A + \angle A' = \angle 1 + \angle 2$. 因为$\angle A = \angle A'$,所以 $2\angle A = \angle 1 + \angle 2$. 因为$\angle A = \angle C$,所以 $2\angle C = \angle 1 + \angle 2$.

(3) $2\angle C = \angle 2 - \angle 1$　**提示**:设$\angle AED = \alpha$,$\angle ADE = \beta$. 由折叠的性质,得$\angle A'ED = \angle AED = \alpha$,$\angle A'DE = \angle ADE = \beta$. 因为$\angle 2 + 2\alpha = 180^\circ$,$\angle 1 = \beta - \angle BDE = \beta - (\angle A + \alpha)$,所以$\angle 2 - \angle 1 = 180^\circ - (\alpha + \beta) + \angle A$. 因为$\angle A = 180^\circ - (\alpha + \beta)$,所以$\angle 2 - \angle 1 = 2\angle A$. 因为$\angle A = \angle C$,所以 $2\angle C = \angle 2 - \angle 1$.

第 12 章综合练(2)

1. D

2. C　**提示**:设$\angle BCP = \angle PCO = \alpha$,$\angle BOP = \angle COP = \beta$,因为$\angle P = 100^\circ$,所以$\angle PCO + \angle COP = \alpha + \beta = 80^\circ$. 所以 $2\alpha + 2\beta = 160^\circ$,所以$\angle OBC = 180^\circ - (\angle BCO + \angle BOC) = 180^\circ - (2\alpha + 2\beta) = 20^\circ$. 因为 BO 平分$\angle ABC$,所以$\angle ABC = 40^\circ$. 因为$\angle A = 84^\circ$,所以$\angle ACB = 180^\circ - \angle A - \angle ABC = 56^\circ$.

3. A　**提示**:由第一名是 B 队,可知甲猜错了第一名和第四名,乙猜错了第一名和第三名. 又因为甲、乙两人都只猜对了一个队的名次,所以可推知甲猜对了第三名,乙猜对了第四名. 结合两人的猜测结果,可得正确的名次顺序是 B,A,C,D.

4. 假　**5.** $a \geqslant 0$

6. 28°或62°或118°或152°　**提示**:如图 1,因为 AC 平分$\angle OAB$,所以可设$\angle OAC = \angle BAC = x$. 因为$\angle ABY$ 是$\triangle AOB$ 的外角,所以$\angle ABY = \angle AOB + \angle OAB = 56^\circ + 2x$. 因为 BD 平分$\angle ABY$,所以$\angle DBY = \angle DBA = \frac{1}{2}\angle ABY = 28^\circ + x$. 因为$\angle DBA$ 是$\triangle ABC$ 的外角,所以$\angle DBA = \angle C + \angle BAC = \angle C + x = 28^\circ + x$,所以$\angle C = 28^\circ$.

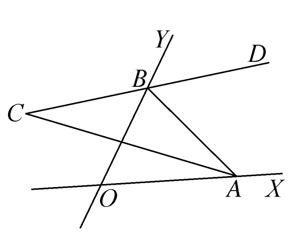


图 1

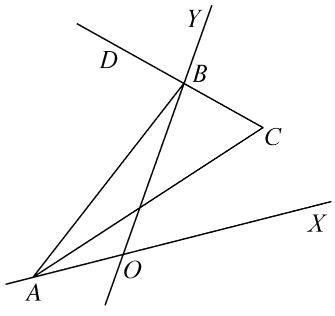


图 2

如图 2,因为$\angle XOY = 56^\circ$,所以$\angle AOB = 180^\circ - 56^\circ = 124^\circ$. 同理,$\angle ABY = \angle AOB + \angle BAO = 124^\circ + 2x$,所以$\angle ABD = \frac{1}{2}\angle ABY = 62^\circ + x = \angle C + \angle CAB = \angle C + x$,所以$\angle C = 62^\circ$.

如图 3,$\angle AOB = \angle XOY = 56^\circ$,所以在$\triangle AOB$ 中,$\angle OAB + \angle OBA = 180^\circ - \angle AOB = 180^\circ - 56^\circ = 124^\circ$.

因为 AC，BD 是角平分线，所以 $\angle CAB+\angle CBA=\frac{1}{2}(\angle OAB+\angle OBA)=\frac{1}{2}\times 124^\circ=62^\circ$. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=180^\circ-(\angle CAB+\angle CBA)=180^\circ-62^\circ=118^\circ$.

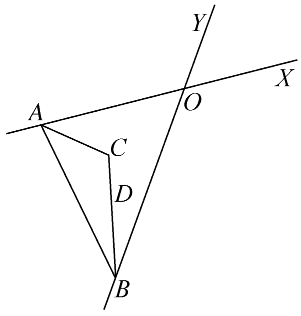


图 3

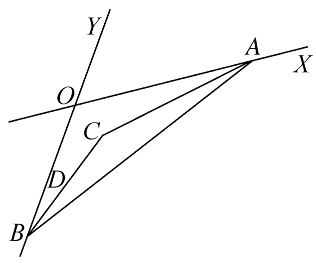


图 4

如图 4，因为 $\angle XOY$ 是 $\triangle AOB$ 的外角，所以 $\angle OAB+\angle OBA=\angle XOY=56^\circ$. 因为 AC，BD 是角平分线，所以 $\angle CAB+\angle CBA=\frac{1}{2}(\angle OAB+\angle OBA)=\frac{1}{2}\times 56^\circ=28^\circ$. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=180^\circ-(\angle CAB+\angle CBA)=180^\circ-28^\circ=152^\circ$.

综上所述，$\angle ACB$ 的度数为 28° 或 62° 或 118° 或 152°.

7. BABBA　**提示：**根据得分，可知小聪和小玲都只有 1 题错误，小红有 2 题错误. 第 5 题，三人选项相同，若不是选 A，则小聪和小玲的其他题目的答案一定相同，这与已知矛盾，故第 5 题的答案是 A；小聪和小玲第 3 题和第 4 题的答案不同，则一定在这两题上其中一人有错误，所以第 1，2 题两人答案正确，故第 1 题的答案是 B，第 2 题的答案是 A；可知小红的错题是第 1 题和第 2 题，所以第 3 题和第 4 题正确，故第 3 题的答案是 B，第 4 题的答案是 B. 所以正确答案（按 1～5 题的顺序排列）是 BABBA.

8. 解：假命题. 理由如下：

当 $n=10$ 时，$n^2-10n=10^2-10\times 10=0$，不是负数，所以小明的猜想是假命题.

9. 解：因为 $\angle A=90^\circ$，$\angle D=130^\circ$，所以 $\angle ABC+\angle BCD=360^\circ-\angle A-\angle D=140^\circ$. 因为 BP，CP 分别平分 $\angle ABC$ 和 $\angle BCD$，所以 $\angle PBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle PCB=\frac{1}{2}\angle BCD$，所以 $\angle PBC+\angle PCB=\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle BCD=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle BCD)=70^\circ$，所以 $\angle P=180^\circ-(\angle PBC+\angle PCB)=180^\circ-70^\circ=110^\circ$.

10. (1) **解：**$EF\neq GH$　“在同一平面内，过一点有且仅有一条直线与已知直线垂直”

(2) **证明：**过点 E 作 $EP\perp AB$ 于点 P，过点 G 作 $GQ\perp AB$ 于点 Q. 由(1)可知，$EP=GQ$. 因为 $S_{\triangle EFH}=\frac{1}{2}FH\cdot EP$，$S_{\triangle GFH}=\frac{1}{2}FH\cdot GQ$，所以 $S_{\triangle EFH}=S_{\triangle GFH}$. 因为 $S_1=S_{\triangle EFH}-S_{\triangle OFH}$，$S_2=S_{\triangle GFH}-S_{\triangle OFH}$，所以 $S_1=S_2$.

(3) **解：**①如图 1，取 BC 的中点 D，连接 AD，则直线 AD 即为所求.

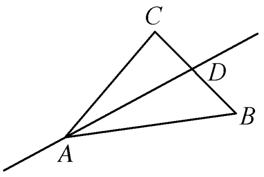


图 1

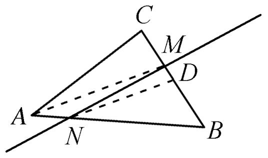


图 2

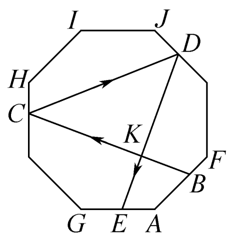
②如图 2，取 BC 的中点 D，连接 ND，过点 A 作 $AM/\!/ND$，交 BC 于点 M，连接 MN，则直线 MN 即为所求.

期末综合练(1)

1. B　**2.** D

3. A　**提示：**如图，设 CD 上方的正八边形的顶点依次为 H，I，J，BC 与 DE 的交点为 K. 由正八边形的性质，得 $\angle CHI=\angle HIJ=\angle IJD=\angle BAE=180^\circ-45^\circ=135^\circ$. 设 $\angle BCD=x$，$\angle CDE=y$. 由光的反射定律，可知 $\angle DCH=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle BCD)=90^\circ-\frac{1}{2}x$，$\angle CDJ=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle CDE)=90^\circ-\frac{1}{2}y$. 因为多边形 $CHIJD$ 是五边形，所以 $\angle CHI+\angle HIJ+\angle IJD+$

$\angle DCH+\angle CDJ=540°$，即 $3\times135°+90°-\frac{1}{2}x+90°-\frac{1}{2}y=540°$，解得 $x+y=90°$，所以 $\angle CKD=180°-(x+y)=90°$，所以 $\angle BKE=90°$. 因为多边形 $AEKB$ 是四边形，所以 $\angle AED=360°-(\angle BKE+\angle BAE+\angle ABC)=360°-(90°+135°+65°)=70°$.



4. D　**提示：**根据题意，得三次输出的结果依次为 $2x-5$，$2(2x-5)-5=4x-15$，$2(4x-15)-5=8x-35$. 因为必须操作三次才能得到输出值，所以 $\begin{cases}2x-5\leqslant365,\\4x-15\leqslant365,\\8x-35>365,\end{cases}$ 解得 $50<x\leqslant95$.

5. $30°$　**提示：**设 $\angle FBE=x°$，$\angle FAB=y°$. 则 $\angle CBF=2x°$，$\angle CAF=2y°$，所以 $\angle CBE=3x°$，$\angle CAB=3y°$. 因为 $\angle FBE=\angle F+\angle FAB$，$\angle CBE=\angle C+\angle CAB$，$\angle C=90°$，所以 $x°=\angle F+y°$①，$3x°=90°+3y°$②，①×3−②，得 $0°=3\angle F-90°$，解得 $\angle F=30°$.

6. $4°$或$12°$　**提示：**当 $132°$ 的角是另一个内角的 3 倍时，最小内角为 $180°-132°-132°\div3=4°$；当除 $132°$ 的角之外的一个内角是另一个内角的 3 倍时，最小内角为 $\frac{180°-132°}{1+3}=12°$. 故这个"梦想三角形"的最小内角的度数为 $4°$ 或 $12°$.

7. 10　**提示：**由条件，得 $(3^3)^a\cdot(3^2)^b=3^4$，所以 $3a+2b=4$，即 $2b=4-3a$. 因为 $a\geqslant2b$，所以 $a-2b=a-(4-3a)=4a-4\geqslant0$，所以 $a\geqslant1$. 所以 $8a+4b=8a+2(4-3a)=8+2a\geqslant10$，所以 $8a+4b$ 的最小值为 10.

8. $125°$　**提示：**因为 $\angle ACB=90°$，$\angle A'CA=20°$，所以 $\angle A'CB=110°$. 由折叠的性质，得 $\angle A'CD=\angle DCB=55°$，$\angle EDC=90°$，$\angle EA'D=\angle A$，$\angle DA'C=\angle B$. 因为 $\angle A+\angle B=90°$，所以 $\angle EA'D+\angle DA'C=90°$. 所以 $\angle A'ED=360°-\angle EDC-\angle A'CD-(\angle EA'D+\angle DA'C)=125°$.

9. ①③④　**提示：**$\langle1.493\rangle=1$，故①正确. 当 $x=0.3$ 时，$\langle2x\rangle=1$，$2\langle x\rangle=0$，所以 $\langle2x\rangle$ 不一定等于 $2\langle x\rangle$，故②错误. 若 $\left\langle\frac{1}{2}x-1\right\rangle=4$，则 $4-\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}x-1<4+\frac{1}{2}$，解得 $9\leqslant x<11$，故③正确. 因为 m 为非负整数，不影响"四舍五入"，所以 $\langle m+2\ 023x\rangle=m+\langle2\ 023x\rangle$，故④正确. 当 $x=0.3$，$y=0.4$ 时，$\langle x+y\rangle=1$，$\langle x\rangle+\langle y\rangle=0$，所以 $\langle x+y\rangle$ 不一定等于 $\langle x\rangle+\langle y\rangle$，故⑤错误.

10. 解：(1) $\frac{11}{4}$　**提示：**$\begin{cases}-x+2\geqslant x-5①,\\3x-1\geqslant-x+2②,\end{cases}$ 解不等式①，得 $x\leqslant\frac{7}{2}$. 解不等式②，得 $x\geqslant\frac{3}{4}$. 所以原不等式组的解集为 $\frac{3}{4}\leqslant x\leqslant\frac{7}{2}$，所以原不等式组的"解集长度"是 $\frac{7}{2}-\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$.

(2) $\begin{cases}3x-m\leqslant2x+3①,\\3x+3m\geqslant5(m+2)②,\end{cases}$ 解不等式①，得 $x\leqslant m+3$. 解不等式②，得 $x\geqslant\frac{2m+10}{3}$. 所以原不等式组的解集为 $\frac{2m+10}{3}\leqslant x\leqslant m+3$. 因为关于 x 的不等式组的"解集长度"为 0，所以 $m+3-\frac{2m+10}{3}=0$，解得 $m=1$，所以原不等式组的解集为 $4\leqslant x\leqslant4$，即原不等式组的解集为 $x=4$.

(3) $\begin{cases}x\geqslant\frac{x-m}{3}①,\\3(x-1)\leqslant2x+m②,\end{cases}$ 解不等式①，得 $x\geqslant-\frac{m}{2}$，解不等式②，得 $x\leqslant m+3$，所以原不等式组的解集为 $-\frac{m}{2}\leqslant x\leqslant m+3$. 因为关于

x 的不等式组的“解集长度”小于 9，所以 $0\leqslant m+3-\left(-\frac{m}{2}\right)<9$，解得 $-2\leqslant m<4$.

11. 解：(1) 设该商场购进 A 种商品 x 件，B 种商品 y 件. 根据题意，得

$$\begin{cases}1\,200x+1\,000y=180\,000,\\(1\,380-1\,200)x+(1\,200-1\,000)y=30\,000.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=100,\\y=60.\end{cases}$

答：该商场购进 A 种商品 100 件，B 种商品 60 件.

(2) ①设该商场购进 A 种商品 m 件，B 种商品 n 件. 根据题意，得 $\begin{cases}1\,200m+1\,000n=180\,000,\\n\geqslant 6m,\\m>0,\\n>0.\end{cases}$

因为 m，n 均为正整数，所以解得 $\begin{cases}m_1=5,\\n_1=174;\end{cases}$ $\begin{cases}m_2=10,\\n_2=168;\end{cases}$ $\begin{cases}m_3=15,\\n_3=162;\end{cases}$ $\begin{cases}m_4=20,\\n_4=156;\end{cases}$ $\begin{cases}m_5=25,\\n_5=150.\end{cases}$

答：共有 5 种进货方案：购进 A 种商品 5 件，B 种商品 174 件；购进 A 种商品 10 件，B 种商品 168 件；购进 A 种商品 15 件，B 种商品 162 件；购进 A 种商品 20 件，B 种商品 156 件；购进 A 种商品 25 件，B 种商品 150 件.

②因为每件 B 种商品的利润比每件 A 种商品的利润大，所以若要保证利润最高，可以选择尽可能多地购进 B 种商品，即购进 A 种商品 5 件，B 种商品 174 件.

12. 解：(1) $\angle AFD=2\angle CEB$. 证明如下：

因为 EC 平分 $\angle ACD$，EB 平分 $\angle ABD$，所以 $\angle ACF=2\angle ACE$，$\angle DBF=2\angle DBE$. 因为 $\angle CEB=\angle ACE+\angle DBE$，$\angle AFD=\angle CFB=\angle ACF+\angle DBF$，所以 $\angle AFD=2\angle CEB$.

(2) 当点 E 在 MG 上时，$\angle EPG=2\angle MHP-60^\circ$；当点 E 在 NG 上时，$\angle EPG=60^\circ-2\angle MHP$.

提示：如图 1，设 $\angle AMH=\angle HMN=x$，$\angle EPH=\angle NPH=y$，则 $\angle MHP=x+y$，$\angle MGP=2x+\angle GPN$，所以 $\angle GPN=60^\circ-2x$. 当点 E 在 MG 上时，$\angle EPG=\angle EPN-\angle GPN=2y-(60^\circ-2x)=2(x+y)-60^\circ$，所以 $\angle EPG=2\angle MHP-60^\circ$. 当点 E 在 NG 上时，同理可得 $\angle EPG=60^\circ-2\angle MHP$.

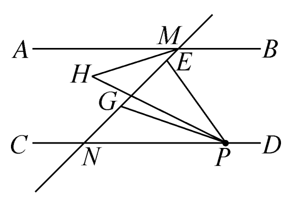


图 1

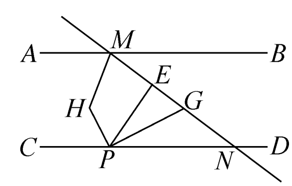


图 2

(3) 当点 E 在 MG 上时，$\angle EPG=300^\circ-2\angle MHP$；当点 E 在 NG 上时，$\angle EPG=2\angle MHP-300^\circ$.

提示：如图 2，设 $\angle AMH=\angle HMN=x$，$\angle EPH=\angle CPH=y$，则 $\angle MHP=x+y$，$\angle MGP=180^\circ-2x+\angle GPN$，所以 $\angle GPN=2x-120^\circ$. 当点 E 在 MG 上时，$\angle EPG=\angle EPN-\angle GPN=180^\circ-2y-(2x-120^\circ)=300^\circ-2(x+y)$，所以 $\angle EPG=300^\circ-2\angle MHP$；当点 E 在 NG 上时，同理可得 $\angle EPG=2\angle MHP-300^\circ$.

期末综合练(2)

1. C

2. A 提示：$\begin{cases}x=7^m+1①,\\y=3-49^m②,\end{cases}$ 由①，得 $7^m=x-1③$，由②，得 $y=3-49^m=3-(7^2)^m=3-(7^m)^2④$，把③代入④，得 $y=3-(x-1)^2=3-(x^2-2x+1)=3-x^2+2x-1=-x^2+2x+2$.

3. D 提示：根据题意，得 $S_2=4\times\frac{1}{2}b(a+b)=2b(a+b)$，$S_1=(a+b)^2-S_2=(a+b)^2-2b(a+b)=a^2+2ab+b^2-2ab-2b^2=a^2-b^2$. 因为 $S_1=S_2$，所以

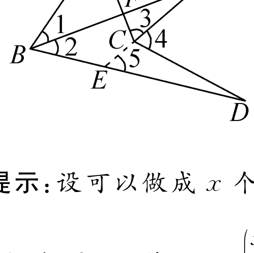
$2b(a+b)=a^2-b^2$,所以 $2b(a+b)=(a-b)(a+b)$. 因为 $a+b>0$,所以 $2b=a-b$,所以 $a=3b$.

4. D **提示**:由折叠的性质,可得$\angle GEF=\angle 1=20°$. 因为 $AD\parallel BC$,所以 $FH\parallel EG$. 所以$\angle GEF+\angle EFH=180°$,所以$\angle EFH=160°$,所以$\angle EFS=\frac{1}{2}\angle EFH=80°$. 因为 $AD\parallel BC$,所以$\angle EFB=\angle 1=20°$,所以$\angle 2=\angle EFS-\angle EFB=60°$.

5. 17 **提示**:设第一次看到的两位数十位上的数字为 x,个位上的数字为 y,则第一个里程碑上的数为$(10x+y)$,第二个里程碑上的数为$(10y+x)$,第三个里程碑上的数为$(100x+y)$. 因为小亮是匀速行驶,所以$\frac{(10y+x)-(10x+y)}{30}=\frac{(100x+y)-(10y+x)}{20}$,解得 $y=7x$. 因为 x,y 都为整数,且 $1\leqslant x\leqslant 9$,$1\leqslant y\leqslant 9$,所以 $x=1$,$y=7$. 所以第一次看到的里程碑上的数字为 17.

6. 2 **提示**:因为 $3^{2n}-9^{n-1}=3^{2n}-(3^2)^{n-1}=3^{2n}-3^{2n-2}=3^{2n-2}(3^2-1)=3^{2n-2}\times 8=72$,所以 $3^{2n-2}=3^2$,即 $2n-2=2$,解得 $n=2$.

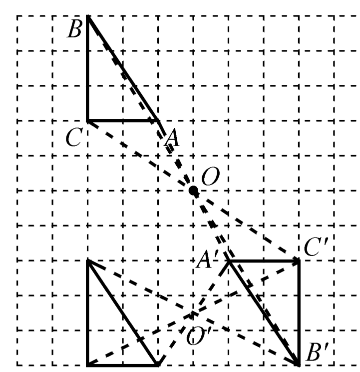
7. $19°$ **提示**:如图,延长 PC 交 BD 于点 E,设 AC 与 BP 交于点 F. 因为$\angle ABD$,$\angle ACD$ 的平分线交于点 P,所以$\angle 1=\angle 2$,$\angle 3=\angle 4$. 因为$\angle A+\angle 1+\angle AFB=\angle P+\angle 3+\angle PFC$,$\angle AFB=\angle PFC$,所以$\angle A+\angle 1=\angle P+\angle 3$①. 因为$\angle 5=\angle 2+\angle P$,$\angle 5=\angle 4-\angle D$,所以$\angle 2+\angle P=\angle 4-\angle D$②. ①-②,得$\angle A-\angle P=\angle P+\angle D$,所以$\angle P=\frac{1}{2}(\angle A-\angle D)$. 因为$\angle A=48°$,$\angle D=10°$,所以$\angle P=\frac{1}{2}\times(48°-10°)=19°$.



8. 二 **提示**:设可以做成 x 个竖式无盖纸盒,y 个横式无盖纸盒. **解法 1** 第一次:$\begin{cases}x+2y=356,\\4x+3y=544,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=4,\\y=176,\end{cases}$数据无误;第二次:$\begin{cases}x+2y=422,\\4x+3y=860,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=90.8,\\y=165.6,\end{cases}$因为 x,y 应为正整数,所以不符合题意,即数据错误;第三次:$\begin{cases}x+2y=500,\\4x+3y=1\,000,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=100,\\y=200,\end{cases}$数据无误;第四次:$\begin{cases}x+2y=988,\\4x+3y=2\,022,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=216,\\y=386,\end{cases}$数据无误.

解法 2 易知需要正方形纸板$(x+2y)$张,需要长方形纸板$(4x+3y)$张. 因为$(x+2y)+(4x+3y)=5(x+y)$,所以二者之和应该是 5 的倍数. 第二次领取记录显然不符合题意.

9. 解:(1) 如图,$\triangle A'B'C'$即为所求.



(2) 如图,先将$\triangle ABC$ 向下平移 7 个单位长度,再绕点 O'旋转 $180°$即可得到$\triangle A'B'C'$.

10. 解:(1) 回字形福建土楼的占地面积为$(3a+2b)(2a+b)-(a+2b)(a+b)=5a^2+4ab$;山西大院的占地面积为$(a+a+b)(2a+b+a+a)-(2a+b)(a+b)=(2a+b)(4a+b)-(2a+b)(a+b)=(2a+b)\cdot 3a=6a^2+3ab$.

(2) ① **提示**:这两个建筑物的占地面积之差为 $5a^2+4ab-6a^2-3ab=-a^2+ab=a(b-a)$,因为 $0<a<b$,所以 $a(b-a)>0$,所以回字形福建土楼的占地面积更大,即①组同学的想法正确.

11. (1) **证明**:因为$\angle BAC=90°$,$AE\perp BC$,所以$\angle CAF+\angle BAF=90°$,$\angle B+\angle BAF=90°$,所以$\angle CAF=\angle B$. 由翻折的性

质,可知$\angle E=\angle B$,所以$\angle CAF=\angle E$,所以$DE/\!/AC$.

(2) **解**:①因为$\angle C=2\angle B$,易知$\angle C+\angle B=90^\circ$,所以$\angle C=60^\circ$,$\angle B=30^\circ$. 因为$DE\perp BC$,$\angle E=\angle B=30^\circ$,所以$\angle BFE=60^\circ$. 因为$\angle BFE=\angle B+\angle BAF$,所以$\angle BAF=30^\circ$. 由翻折的性质,可知$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAF=15^\circ$,即$x=15$.

②存在. 因为$\angle FDA=\angle B+\angle BAD=(30+x)^\circ$,$\angle ADE=\angle ADB=180^\circ-\angle B-\angle BAD=(150-x)^\circ$,所以$\angle FDE=\angle ADE-\angle FDA=(120-2x)^\circ$,所以$\angle DFE=180^\circ-\angle E-\angle FDE=(2x+30)^\circ$. 当$\angle FDE=\angle DFE$时,$120-2x=2x+30$,解得$x=22.5$;当$\angle DFE=\angle E=30^\circ$时,$2x+30=30$,解得$x=0$,因为$0<x<60$,所以不合题意,故舍去;当$\angle FDE=\angle E=30^\circ$时,$120-2x=30$,解得$x=45$. 综上所述,$x$的值为22.5或45.

期末综合练(3)

1. A　**提示**:由题意,得$\begin{cases}2m-n-2=1,\\m+n+1=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=1,\\n=-1.\end{cases}$

2. A

3. C　**提示**:因为a,b,c为非负数,所以$S=a+b+c\geqslant 0$. 又因为$c-a=5$,所以$c=a+5$. 所以$c\geqslant 5$. 因为$a+b=7$,所以$S=a+b+c=7+c$. 又因为$c\geqslant 5$,所以当$c=5$时,S最小,$S_{最小}=12$,即$n=12$. 因为$c=a+5$,所以$S=a+b+c=7+c=7+a+5=12+a$. 因为$a+b=7$,所以$a\leqslant 7$. 所以当$a=7$时,S最大,$S_{最大}=19$,即$m=19$. 所以$m-n=19-12=7$.

4. D　**提示**:因为$\angle C=\angle EFB=90^\circ$,所以$AC/\!/FG$,所以$\angle AGE=\angle FGB=\angle A=60^\circ$,所以$\angle AGF=\angle EGB=180^\circ-60^\circ=120^\circ$. 分以下几种情况讨论:①如图1,当$DE/\!/A'C'$时,设$A'B'$交$ED$于点$H$. 因为$DE/\!/A'C'$,所以$\angle EHG=\angle A'=60^\circ$,所以$\angle A'GF=\angle EGH=180^\circ-\angle E-\angle EHG=180^\circ-45^\circ-60^\circ=75^\circ$,所以$\angle AGA'=\angle AGF-\angle A'GF=120^\circ-75^\circ=45^\circ$,所以旋转时间为$\frac{45^\circ}{15^\circ}=3$(s).

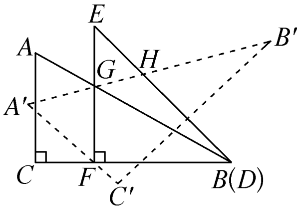


图 1

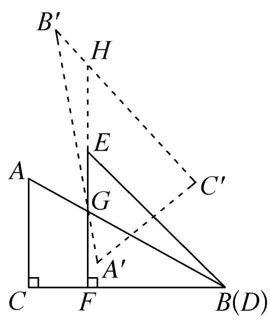


图 2

②如图2,当$DE/\!/B'C'$时,FE的延长线交$B'C'$于点H. 因为$DE/\!/B'C'$,所以$\angle C'HE=\angle DEF=45^\circ$,所以$\angle A'GF=\angle B'GH=\angle C'HE-\angle B'=45^\circ-30^\circ=15^\circ$,所以$\angle AGA'=\angle AGF+\angle A'GF=120^\circ+15^\circ=135^\circ$,所以旋转时间为$\frac{135^\circ}{15^\circ}=9$(s).

③如图3,当$DE/\!/A'B'$时,因为$DE/\!/A'B'$,所以$\angle A'GF=\angle E=45^\circ$,所以$\angle AGA'=\angle AGF+\angle A'GF=120^\circ+45^\circ=165^\circ$,所以旋转时间为$\frac{165^\circ}{15^\circ}=11$(s).

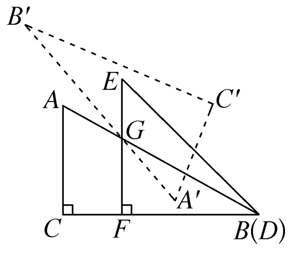


图 3

综上所述,当$\triangle ABC$恰有一边与DE平行时,旋转时间为3 s或9 s或11 s.

5. 1　**提示**:因为$a>b$,所以$a-b>0$. 因为$ab=2$,$a^2+b^2=5$,所以$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=1$,所以$a-b=1$.

6. 900°　**提示**:分以下几种情况讨论:如图1,$x+y=180^\circ+720^\circ=900^\circ$;如图2,$x+y=180^\circ+360^\circ=540^\circ$;如图3,$x+y=180^\circ+540^\circ=720^\circ$;如图4,$x+y=360^\circ+540^\circ=900^\circ$;如图5,$x+y=360^\circ+360^\circ=720^\circ$. 综上所述,$x+y$的最大值为900°.

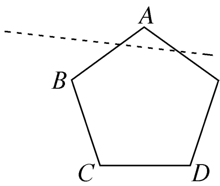


图 1

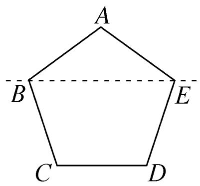


图 2

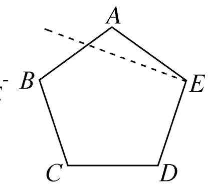


图 3

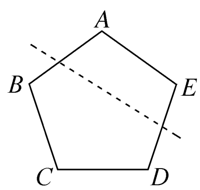


图 4

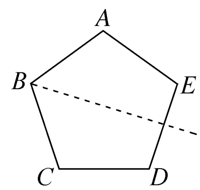


图 5

7. ab　**提示**:设大正方形的边长为 x_1,小正方形的边长为 x_2.根据题意,得$\begin{cases}x_1+2x_2=a,\\x_1-2x_2=b,\end{cases}$解得$\begin{cases}x_1=\dfrac{a+b}{2},\\x_2=\dfrac{a-b}{4}.\end{cases}$所以题图 2 的大正方形中未被小正方形覆盖的部分的面积是 $x_1^2-4x_2^2=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2-4\times\left(\dfrac{a-b}{4}\right)^2=ab$.

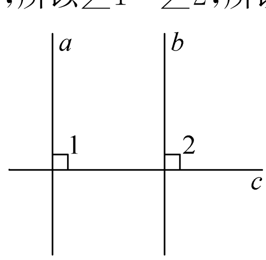
8. (1) $\dfrac{4}{3}$　**提示**:(1) 由条件,可得 $2^{3x+1}=2^5$,所以 $3x+1=5$,所以 $x=\dfrac{4}{3}$.

(2) 1　**提示**:由条件,可得 $27^{xy}=2\ 025^y$,$75^{xy}=2\ 025^x$,所以 $27^{xy}\times75^{xy}=2\ 025^y\times2\ 025^x$,所以 $(27\times75)^{xy}=2\ 025^{x+y}$,所以 $2\ 025^{xy}=2\ 025^{x+y}$,所以 $xy=x+y$,所以 $2\ 025^{xy-x-y}=2\ 025^0=1$.

9. 解:原式 $=4x^2+12xy+9y^2-(4x^2-y^2)=12xy+10y^2$. 当 $x=\dfrac{1}{3}$,$y=-\dfrac{1}{2}$ 时,原式 $=12\times\dfrac{1}{3}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+10\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$.

10. 解:(1) 如果 $a\perp c$,$b\perp c$,那么 $a/\!/b$.

说明:如图,因为 $a\perp c$,$b\perp c$,所以 $\angle1=90°$,$\angle2=90°$,所以 $\angle1=\angle2$,所以 $a/\!/b$.



(2) 如果 $a\perp c$,$b\perp c$,那么 $a\perp b$.

反例:如(1),$a\perp c$,$b\perp c$,但 $a/\!/b$.(答案不唯一)

11. 解:(1) 设年降水量为 x 万立方米,每人年平均用水量为 $y\ \mathrm{m}^3$. 根据题意,得 $\begin{cases}12\ 000+20x=16\times20y,\\12\ 000+15x=(16+4)\times15y,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=200,\\y=50.\end{cases}$

答:年降水量为 200 万立方米,每人年平均用水量为 $50\ \mathrm{m}^3$.

(2) 设节约用水后,该镇居民人均每年用水量为 $z\ \mathrm{m}^3$. 根据题意,得 $12\ 000+25\times200=(16+4)\times25z$,解得 $z=34$,$50-34=16(\mathrm{m}^3)$.

答:该镇居民人均每年需节约 $16\ \mathrm{m}^3$ 水才能实现目标.

(3) 设该企业 n 年后才能收回成本. 根据题意,得 $[3.2\times5\ 000\times70\%-(1.5-0.3)\times5\ 000]\times\dfrac{300n}{10\ 000}-40n\geqslant1\ 000$,解得 $n\geqslant8\dfrac{18}{29}$. 所以 n 的最小整数值为 9.

答:该企业至少 9 年后才能收回成本.

12. (1) $130°$　**提示**:连接 CP. 因为 $\angle1=\angle DCP+\angle DPC$,$\angle2=\angle ECP+\angle EPC$,所以 $\angle1+\angle2=\angle ACB+\angle DPE=90°+\alpha=130°$.

(2) **解**:$\angle1-\angle2=90°+\alpha$. 理由如下:

设 DP 交 BC 于点 F. 因为 $\angle1=\angle C+\angle CFD$,$\angle CFD=\angle2+\alpha$,所以 $\angle1=\angle C+\angle2+\alpha$,所以 $\angle1-\angle2=\angle C+\alpha=90°+\alpha$.

(3) $\angle2-\angle1=90°-\alpha$　**提示**:设 PE 交 AC 于点 G. 因为 $\angle2=\angle C+\angle CGE$,$\angle1=\alpha+\angle PGD$,$\angle CGE=\angle PGD$,所以 $\angle2-\angle1=\angle C-\alpha=90°-\alpha$.

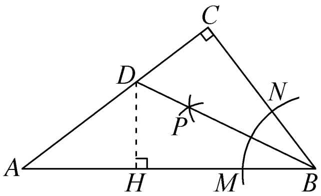
巅峰专题 1　几何作图综合

1. A　**2.** B

3. $\dfrac{2S}{m}$　**提示**:由作图过程可知,$CF\perp AB$,因为 $\triangle ABC$ 的面积为 S,所以 $\dfrac{1}{2}AB\cdot CE=\dfrac{1}{2}m\cdot CE=S$,所以 $CE=\dfrac{2S}{m}$.

4. 4　**提示**:如图,过点 D 作 $DH\perp AB$ 于点 H. 由作法,可得 BD 平分 $\angle ABC$,所以 $DH=CD$. 因

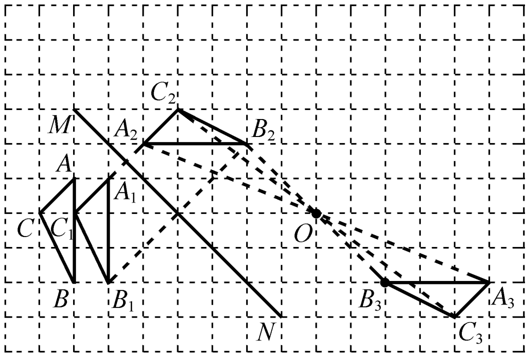
为 $S_{\triangle ABD}=16$，所以 $\frac{1}{2}AB\cdot DH=16$，所以 $DH=\frac{2\times16}{8}=4$，所以 $CD=4$.



5. 解：(1) 如图，$\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求.

(2) 如图，$\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求.

(3) 如图，点 O 和 $\triangle A_3B_3C_3$ 即为所求.



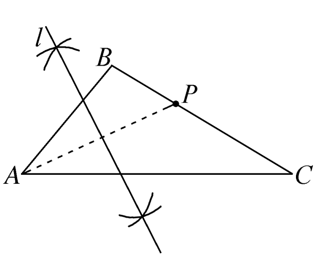
6. (1) MM''　MM''

(2) **证明**：因为箭头 T_1、箭头 T_2 关于直线 a 对称，箭头 T_2、箭头 T_3 关于直线 b 对称，所以直线 a 垂直平分 MM'，直线 b 垂直平分 $M'M''$，所以 $MM'=2PM'$，$M'M''=2QM'$. 又因为 $MM''=MM'+M'M''$，$PQ=PM'+QM'$，所以 $MM''=2PQ$.

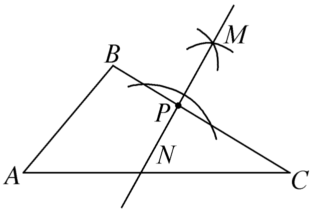
(3) O　$\angle MOM''$　$\angle MOM''=2\angle POQ$

(4) 关于点 O 成中心对称

7. 解：(1) 如图 1，直线 l 即为所求.



(2) 如图 2，直线 MN 即为所求.



8. 解：(1) 如图 1，四边形 $OMPN$ 即为所求.

(2) 如图 2、图 3，四边形 $OMPN$ 即为所求.

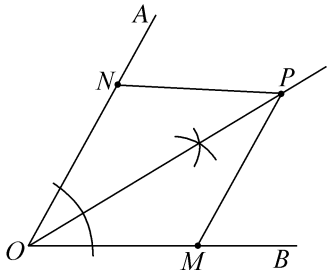


图 1

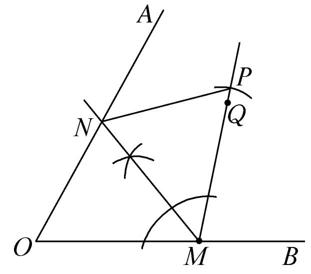


图 2

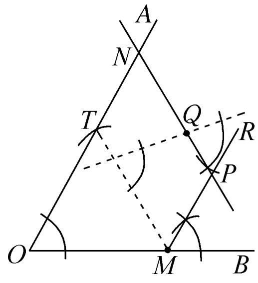


图 3

巅峰专题 2　新情境下的应用

1. 解：(1) $\begin{cases}x+y=5①,\\2x-y=4②,\end{cases}$ ①+②，得 $3x=9$，所以 $x=3$，将 $x=3$ 代入①，得 $3+y=5$，所以 $y=2$，所以原方程组的解为 $\begin{cases}x=3,\\y=2.\end{cases}$

(2) $x+2y=32$

两个方程联立，得 $\begin{cases}x+4y=23①,\\x+2y=32②,\end{cases}$ ①－②，得 $2y=-9$，所以 $y=-\frac{9}{2}$. 将 $y=-\frac{9}{2}$ 代入①，得 $x+4\times\left(-\frac{9}{2}\right)=23$，解得 $x=41$，所以这个方程组的解为 $\begin{cases}x=41,\\y=-\frac{9}{2}.\end{cases}$

2. 解：设个位数字为 x，十位数字为 y. 根

据题意，得$\begin{cases}x=2y,\\10x+y-(10y+x)=36,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=8,\\y=4,\end{cases}$由题意可知，百位数字为6，所以这个三位数为648.

3. 解：(1) 由题意可知，$b+7+2=2+a+8$，即a和b之间的数量关系为$b=a+1$.

(2) 如图，令第一行第二列为a，第三行第三列为b，则根据题意列二元一次方程组，得$\begin{cases}x+a+2=a+y+13,\\x+y+b=2+19+b,\end{cases}$即$\begin{cases}x-y=11,\\x+y=21,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=16,\\y=5,\end{cases}$所以$x$的值为16，$y$的值为5.

x	a	2
	y	19
	13	b

4. 解：$(1.674\times10^{-27}\times2)+2.657\times10^{-26}=2.9918\times10^{-26}$(kg).

答：一个水分子的质量大约是2.9918×10^{-26} kg.

5. 解：(1) 设小丽喝了牛奶x盒，豆浆y盒. 根据题意，得$\begin{cases}280x+210y=770,\\3x+3y=9,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$所以小丽喝了牛奶2盒，豆浆1盒.

(2) 脂肪摄入量不超标. 理由如下：

在她喝完牛奶和豆浆后，脂肪摄入量为$63+2\times3.6+1\times2.5=72.7$(g)，因为初中生每日脂肪摄入量标准约为40～80 g，所以脂肪摄入量不超标.

6. 解：(1) $20x$　$(700-20x)$

(2) 由上可得温水的体积是$20x$ mL，开水的体积为$(700-20x)$mL，当所接的温水的体积不少于开水体积的2倍时，可得$20x\geqslant(700-20x)\times2$，解得$x\geqslant\frac{70}{3}$，所以至少应接温水$\frac{70}{3}$ s.

(3) 由题意可得，当水杯中水的温度是50 ℃时，温水的体积是$20x$ mL，开水的体积为$(700-20x)$mL，开水降低的温度为100 ℃－50 ℃＝50 ℃，温水升高的温度为50 ℃－30 ℃＝20 ℃，所以$(700-20x)\times50=20\times20x$，解得$x=25$.

(4) $y=-2x+100$　$31\leqslant x\leqslant32.5$

提示：由题意可得，当水杯中水的温度是y ℃时，温水的体积是$20x$ mL，开水的体积为$(700-20x)$mL，开水降低的温度为100 ℃－y ℃，温水升高的温度为y ℃－30 ℃，所以$(700-20x)\times(100-y)=(y-30)\times20x$，解得$y=-2x+100$. 若要使杯中水的温度达到最佳水温35～38 ℃时，则有$35\leqslant y\leqslant38$，将$y=-2x+100$代入，可得$31\leqslant x\leqslant32.5$.

7. 解：(1) 平行. 理由如下：

因为镜子m和镜子n平行，所以$\angle2=\angle3$. 由光的反射定理，得$\angle1=\angle2$，$\angle3=\angle4$，所以$\angle1=\angle2=\angle3=\angle4$. 因为$\angle1+\angle2+\angle5=\angle3+\angle4+\angle6$，所以$\angle5=\angle6$，所以$a/\!/c$.

(2) 当光线y垂直照射古井时，$\angle2=90^\circ$，因为$\angle1=30^\circ$，所以$\angle3=\angle4=\frac{180^\circ-30^\circ-90^\circ}{2}=30^\circ$，所以$\angle EOP=\angle1+\angle3=60^\circ$，即把镜子$EF$摆放的角度与水平线$OP$成$60^\circ$.

(3) 存在.

①当光线c转动到如图1所示的位置时，$c/\!/b$，此时$\angle3=\angle2=\angle1=60^\circ$，所以转动角度为$180^\circ-60^\circ-\angle3=60^\circ$，所以$t=60\div$

$10=6$.

②当光线 c 转动到如图 2 所示的位置时，$d\parallel b$，此时$\angle4=\angle2=\angle1=60°$，所以$\angle6=\angle4=60°$，所以转动角度为 $180°-60°+\angle6=180°$，所以 $t=180\div10=18$.

③当光线 c 转动到如图 3 所示的位置时，$c\parallel b$，此时$\angle5=\angle2=\angle1=60°$，所以转动角度为 $360°-60°-\angle5=240°$，所以 $t=240\div10=24$.

综上所述，当 t 的值为 6 或 18 或 24 时，入射光线 c 或其反射光线 d 与反射光线 b 平行.

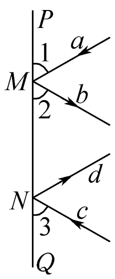


图 1

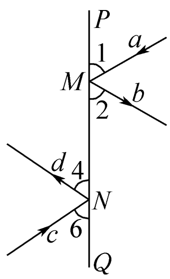


图 2

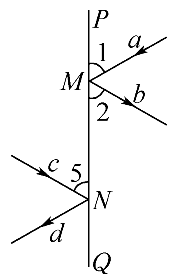


图 3

8. 解：(1) 设这份早餐中含 x 份蛋清，y 份燕麦. 根据题意，得 $\begin{cases}12x+15y=42,\\3x+65y=133,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}$

答：这份早餐中含 1 份蛋清，2 份燕麦.

(2) 设他摄入肉类 m 份，则摄入蔬菜 $(8-m)$ 份. 根据题意，得 $1\ 200+300m+70(8-m)\geqslant2\ 400$，解得 $m\geqslant\frac{64}{23}$. 又因为 m 为正整数，所以 m 的最小值为 3.

答：他至少应摄入肉类 3 份.

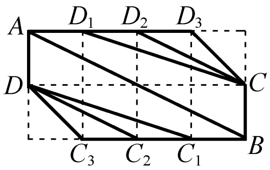
(3) 设进行 a 组开合跳，b 组深蹲. 根据题意，得 $30a+40b=400$，所以 $b=10-\frac{3}{4}a$. 又因为 a，b 均为正整数，所以 $\begin{cases}a=4,\\b=7\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=8,\\b=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=12,\\b=1.\end{cases}$

答：共有 3 种运动方案.

巅峰专题 3　新定义下的探究

1. D　**提示**：a，b，c，d 依次取 4，3，2，1，则 $x=3$，$y=2$，$x>y$；a，b，c，d 依次取 4，2，3，1，则 $x=2$，$y=3$，$x<y$. 所以 $x>y$ 和 $y>x$ 都有可能.

2. 6　**提示**：如图，该方格纸中符合条件的"邻余四边形"$ABCD$ 的个数是 6.



3. 解：(1) 1　4

(2) ①因为 $D(a)=1$，所以 $D(a^3)=D(a\cdot a\cdot a)=D(a)+D(a)+D(a)=3$.

②$D(15)=D(3\times5)=D(3)+D(5)=(2a-b)+(a+c)=3a-b+c$，$D\left(\frac{5}{3}\right)=D(5)-D(3)=(a+c)-(2a-b)=-a+b+c$. $D(108)=D(3\times3\times3\times2\times2)=D(3)+D(3)+D(3)+D(2)+D(2)=3\times D(3)+2\times D(2)=3\times(2a-b)+2\times1=6a-3b+2$. $D\left(\frac{27}{20}\right)=D(27)-D(20)=D(3\times3\times3)-D(5\times2\times2)=D(3)+D(3)+D(3)-[D(5)+D(2)+D(2)]=3\times D(3)-[D(5)+2D(2)]=3\times(2a-b)-(a+c+2\times1)=6a-3b-a-c-2=5a-3b-c-2$.

4. 解：(1) ②

(2) 将两个方程相加，得 $7x+7y=3k+8$，解得 $x+y=\frac{3k+8}{7}$. 因为 $\begin{cases}2x+5y=4k+3,\\5x+2y=5-k\end{cases}$ 是"开心"方程组，所以 $|x+y|=1$，所以

$\left|\frac{3k+8}{7}\right|=1$，解得 $k=-\frac{1}{3}$ 或 $k=-5$.

(3) 将 $x+2y=4$ 与 $|x+y|=1$ 联立，得 $\begin{cases}|x+y|=1,\\x+2y=4,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y=1,\\x+2y=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+y=-1,\\x+2y=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-2,\\y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-6,\\y=5.\end{cases}$ ① 把 $\begin{cases}x=-2,\\y=3\end{cases}$ 代入 $2amx+(b-1)y=m$，得 $-4am+3(b-1)=m$. 整理，得 $(-4a-1)m+3b-3=0$. 因为 m 为任意有理数，所以 $-4a-1=0$，$3b-3=0$，解得 $a=-\frac{1}{4}$，$b=1$，所以 $ab=-\frac{1}{4}$. ②把 $\begin{cases}x=-6,\\y=5\end{cases}$ 代入 $2amx+(b-1)y=m$，得 $-12am+5(b-1)=m$. 整理，得 $(-12a-1)m+5b-5=0$. 因为 m 为任意有理数，所以 $-12a-1=0$，$5b-5=0$. 解得 $a=-\frac{1}{12}$，$b=1$，所以 $ab=-\frac{1}{12}$. 综上所述，ab 的值为 $-\frac{1}{4}$ 或 $-\frac{1}{12}$.

5. 解：(1) 无缘解

(2) 解方程 $3x-6=0$，得 $x=2$，解不等式 $\frac{x-a}{2}>a$，得 $x>3a$. 根据题意，得 $3a<2$，解得 $a<\frac{2}{3}$，即 a 的取值范围为 $a<\frac{2}{3}$.

(3) $m\leqslant\frac{1}{6}$ **提示**：解方程 $2-x=x-2m$，得 $x=m+1$，解不等式 $\frac{x-m}{3}+1<x+m$，得 $x>\frac{3-4m}{2}$. 根据题意，得 $\frac{3-4m}{2}\geqslant m+1$，解得 $m\leqslant\frac{1}{6}$.

6. 解：(1) 79 是"发财数"，246 不是"发财数"，理由如下：

因为 $7+9=16$，16 是 8 的倍数，所以 79 是"发财数"；因为 $2+4+6=12$，12 不是 8 的倍数，所以 246 不是"发财数".

(2) 根据题意，可得大于 800 小于 900 的三位数表示为 $\overline{8ab}$，且 a，b 为满足 $0\leqslant a<9$，$0\leqslant b<9$ 的整数，所以各数位上的数字之和为 $8+a+b$.

(3) 因为正整数 P 为大于 800 小于 900 的"发财数"，所以 $8+a+b$ 是 8 的倍数，即 $a+b$ 为 8 的倍数，所以 $a+b$ 可以为 8 或 16，当 $a+b=8$ 时，有 $\begin{cases}a=0,\\b=8,\end{cases}\begin{cases}a=1,\\b=7,\end{cases}\begin{cases}a=2,\\b=6,\end{cases}\begin{cases}a=3,\\b=5,\end{cases}\begin{cases}a=4,\\b=4,\end{cases}\begin{cases}a=5,\\b=3,\end{cases}\begin{cases}a=6,\\b=2,\end{cases}\begin{cases}a=7,\\b=1,\end{cases}\begin{cases}a=8,\\b=0,\end{cases}$ 共 9 个；当 $a+b=16$ 时，有 $\begin{cases}a=7,\\b=9,\end{cases}\begin{cases}a=8,\\b=8,\end{cases}\begin{cases}a=9,\\b=7,\end{cases}$ 共 3 个. 所以共有 12 个. 综上所述，大于 800 小于 900 的"发财数"的个数为 12.

7. 解：(1) 因为 $A=x+1$，$B=x+4$，$C=x+8$，$D=x+5$，所以 $A\times C-B\times D=(x+1)(x+8)-(x+4)(x+5)=x^2+9x+8-(x^2+9x+20)=x^2+9x+8-x^2-9x-20=-12$，所以 $A\times C-B\times D$ 是消元组合，消元余量是 -12.

(2) -6 或 8 或 2 **提示**：分三种情况讨论：

①若 $A\times B-C\times D$ 是消元组合，因为 $A\times B-C\times D=(x+1)(x-2)-(x+5)(x+p)=x^2-x-2-(x^2+px+5x+5p)=x^2-x-2-x^2-5x-px-5p=-6x-px-2-5p=(-6-p)x-2-5p$，所以 $-6-p=0$，解得 $p=-6$；

②若 $A\times C-B\times D$ 是消元组合，因为 $A\times C-B\times D=(x+1)(x+5)-(x-2)(x+p)=x^2+6x+5-(x^2+px-2x-2p)=x^2+6x+5-x^2-px+2x+2p=(8-p)x+5+2p$，所以 $8-p=0$，解得 $p=8$；

③若 $A\times D-B\times C$ 是消元组合，因为 $A\times D-B\times C=(x+1)(x+p)-(x-2)(x+5)=x^2+px+$

$x+p-(x^2+5x-2x-10)=x^2+px+x+p-x^2-3x+10=(p-2)x+10+p$，所以 $p-2=0$，解得 $p=2$.

(3) 分三种情况讨论：

①若 $A\times B-C\times D$ 是消元组合，因为 $A\times B-C\times D=(2x+1)(x+4)-(2x+a)(x+b)=2x^2+8x+x+4-(2x^2+2bx+ax+ab)=2x^2+9x+4-2x^2-2bx-ax-ab=(9-a-2b)x+4-ab$，所以 $9-a-2b=0$，所以 $a=9-2b$；

②因为 $A\times C-B\times D=(2x+1)(2x+a)-(x+4)(x+b)=4x^2+2ax+2x+a-(x^2+bx+4x+4b)=4x^2+2ax+2x+a-x^2-bx-4x-4b=3x^2+(2a-2-b)x+a-4b$，所以 $A\times C-B\times D$ 不是消元组合；

③若 $A\times D-B\times C$ 是消元组合，因为 $A\times D-B\times C=(2x+1)(x+b)-(x+4)(2x+a)=2x^2+2bx+x+b-(2x^2+ax+8x+4a)=2x^2+2bx+x+b-2x^2-ax-8x-4a=(2b-a-7)x+b-4a$，所以 $2b-a-7=0$，所以 $a=2b-7$.

综上所述，a 与 b 的关系式为 $a=9-2b$ 或 $a=2b-7$.

8. 解：**【验证】**$100^2-96^2=(100-96)\times(100+96)=4\times196$，所以 100^2-96^2 是“4 倍数”，故嘉嘉的说法正确；$12\times11+9\times11-19\times11=11\times(12+9-19)=11\times2$，所以 $12\times11+9\times11-19\times11$ 不是“4 倍数”，故淇淇的说法错误.

【证明】由题意得，这三个连续的偶数为 $2n-2, 2n, 2n+2$，所以 $(2n-2)^2+(2n)^2+(2n+2)^2=4n^2-8n+4+4n^2+4n^2+8n+4=4n^2+4n^2+4n^2-8n+8n+4+4=12n^2+8=4(3n^2+2)$，因为 n 是整数，所以 $3n^2+2$ 是整数，所以这三个连续偶数的平方和是“4 倍数”.

9. 解：(1) 方程组 $\begin{cases}3x+2y=28,\\2x+y=17\end{cases}$ 的解具有“单位差”，理由如下：

$\begin{cases}3x+2y=28①,\\2x+y=17②,\end{cases}$ ②×2−①，得 $4x+2y-3x-2y=34-28$，即 $x=6$. 将 $x=6$ 代入②，得 $2\times6+y=17$，解得 $y=5$. 因为 $|x-y|=|6-5|=1$，所以方程组 $\begin{cases}3x+2y=28,\\2x+y=17\end{cases}$ 的解具有“单位差”.

(2) $\begin{cases}2x-y=5①,\\ax+y=7②,\end{cases}$ ①+②，得 $2x+ax-y+y=5+7$，即 $(2+a)x=12$，所以 $x=\frac{12}{2+a}$，将 $x=\frac{12}{2+a}$ 代入①，得 $x-y=5-x=5-\frac{12}{2+a}$. 因为关于 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases}2x-y=5,\\ax+y=7\end{cases}$ 的解具有“单位差”，所以 $|x-y|=\left|5-\frac{12}{2+a}\right|=1$，解得 $a=1$ 或 $a=0$.

(3) $\begin{cases}kx+2y=3①,\\2x-y=k②,\end{cases}$ ①+②×2，得 $kx+2y+4x-2y=3+2k$，即 $(k+4)x=3+2k$，解得 $x=\frac{3+2k}{k+4}$. 将 $x=\frac{3+2k}{k+4}$ 代入②，得 $2\times\frac{3+2k}{k+4}-y=k$，解得 $y=\frac{4k+6}{k+4}-k=\frac{4(k+4)-10}{k+4}-k=4-k-\frac{10}{k+4}$，所以 $x-y=\frac{3+2k}{k+4}-\left(4-k-\frac{10}{k+4}\right)=\frac{13+2k}{k+4}-4+k=\frac{5+2(k+4)}{k+4}-4+k=\frac{5}{k+4}-2+k$，所以解距 $|x-y|=\left|\frac{5}{k+4}-2+k\right|$. 因为方程组

$\begin{cases}kx+2y=3,\\2x-y=k\end{cases}$ 的解距是整数,所以 $k+4=\pm1$ 或 $k+4=\pm5$,所以 $k=-3$ 或 $k=-5$ 或 $k=1$ 或 $k=-9$.

10. 解:(1) $3=\log_5 125$

(2) 5

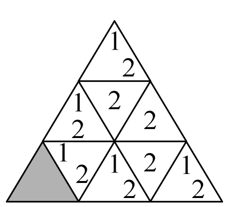
(3) **证明:**设 $\log_a M=m$,$\log_a N=n$,则 $M=a^m$,$N=a^n$,所以 $\frac{M}{N}=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$,由对数的定义,得 $m-n=\log_a\frac{M}{N}$,又因为 $m-n=\log_a M-\log_a N$,所以 $\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$.

(4) 原式$=\log_3\left(\frac{2\times6}{4}\right)=\log_3 3=1$.

期末压轴 1

2025 年南京市玄武区期末压轴题

1. B **提示:**如图,标 1 的三角形可以通过一次轴对称变换得到,标 2 的三角形可以通过一次旋转变换得到,故 $x=5$,$y=8$.



2. -3 **提示:**已知乘法分配律 $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$,根据题意,逆用乘法分配律,可得 $\left[\left(-\frac{13}{4}\right)+0.3+\frac{1}{2}+2.25+\left(-\frac{3}{10}\right)\right]\times\left[\frac{4}{5}+\left(-\frac{1}{6}\right)+3.2+\frac{13}{6}\right]=-\frac{1}{2}\times6=-3$,所以将第一组中的每一个数与第二组中的每一个数相乘,所有乘积的和是-3.

3. 解:【基础作图】如图 1,点 B'即为所求.

作法:分别以点 A,A'为圆心,以大于$\frac{1}{2}AA'$的长为半径作弧,圆弧的两交点连线记为直线 h,则 h 为线段 AA'的垂直平分线;在点 B 的下方取直线 h 上的一点 C,以点 B 为圆心,BC 的长为半径作弧,交 h 于点 D,则 $BC=BD$;分别以点 C,D 为圆心,BC 的长为半径作弧,两圆弧交于两点,其中异于点 B 的另一点即为 B'.

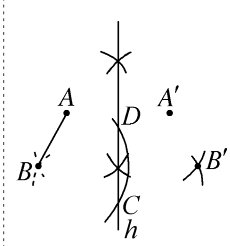


图 1

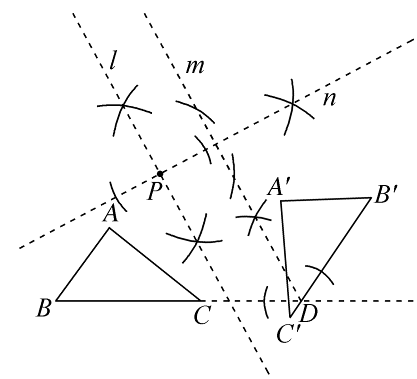


图 2

【变化探究】

(1) ④ **提示:**题图 2 的左图中,点 A,B,C 的三点顺序按逆时针排列,右图中点 A',B',C'的顺序是顺时针的,由于旋转不会改变点的时针排列方向,故①错误. 由于每经过一次轴对称,都必然改变左图中的三点时针排列方向,所以经过 2 次轴对称,必然和左图中的三点时针排列方向一致,故②错误. 平移和旋转都不改变左图中三点的时针排列方向,故③错误. 左图经过 1 次轴对称变换后将改变三点的时针排列方向,设此时的对应三点分别为 A'',B'',C'',它们将会按顺时针方向排列,然后分别作 $A'A''$,$B'B''$,$C'C''$的垂直平分线,只要它们相交于同一点(设交点为 O),则以点 O 为旋转中心,就能经过 1 次旋转变换到右图,故④正确.

(2) 如图 2,延长 BC 交 $B'C'$于点 D,作$\angle CDB'$的平分线 m,过点 P 作射线 m 的垂线 n,过点 P 作直线 n 的垂线 l,直线 l 即为所求.

理由:设$\triangle ABC$ 经过轴对称变换后,线段 BC 的对应线段是 $B''C''$. 易知 $B''C''/\!/B'C'$,所以 $m/\!/l$.

(3) $1\leqslant d\leqslant5$ **提示:**设点 A 经过轴对称变换之后的对称点为点 A_1,则 $AA_1=2d$. 因为 $AA'=6$,且平

移的距离为4,所以可分三种情况讨论.①当 A,A',A_1 三点共线,且点 A_1 在 AA' 的延长线上时,则 $2d-4=6$,此时 $d=5$;②当 A,A_1,A' 三点共线,且点 A_1 在线段 AA' 上时,则 $2d+4=6$,此时 $d=1$;③当 A,A',A_1 三点不共线时,由三角形三边关系,可得 $|2d-4|<6<2d+4$,解得 $1<d<5$.综上所述,d 的取值范围为 $1\leqslant d\leqslant 5$.

期末压轴 2

2025 年南京市秦淮区期末压轴题

1. D　**提示:**由题意,易得题图中6个钝角三角形都全等,且均为顶角为 $120°$ 的等腰三角形.因为 $\triangle ABF$ 绕点 B 顺时针旋转 $60°$ 可得 $\triangle OBD$,$\triangle ABF$ 绕点 F 逆时针旋转 $60°$ 可得 $\triangle ODF$,$\triangle ABF$ 绕 BF 的中点旋转 $180°$ 可得 $\triangle OFB$,$\triangle ABF$ 绕点 O 顺时针旋转 $120°$ 可得 $\triangle EFD$,$\triangle ABF$ 绕点 O 逆时针旋转 $120°$ 可得 $\triangle CDB$,所以题图中通过一次旋转,可与 $\triangle ABF$ 重合的三角形($\triangle ABF$ 自身除外)有5个.

2. $x\geqslant 1$　**提示:**由表可知,$x=1,y=2$ 是两个方程的公共解.因为要求的是不等式的解,而所给不等式与两个二元一次方程形式上很接近,所以分别把两个方程变形为 $y_1=b-ax,y_2=d-cx$,则不等式的解等价于 $y_1\geqslant y_2$ 时 x 的取值范围.由表可知,y_1 随 x 的增大而增大,y_2 随 x 的增大而减小.而当 $x=1$ 时,$y_1=y_2=2$,故当 $x\geqslant 1$ 时,$y_1\geqslant y_2$,符合要求.

3. 解:(1) ①点 M　点 N　② $\frac{43}{24}$

提示:$t_{乙}=t_{甲}-\frac{1}{3}=2+\frac{5}{40}-\frac{1}{3}=\frac{43}{24}$(h).

(2) ①根据题意,得 $\left(\frac{200}{100}+\frac{10}{40}-\frac{20}{60}\right)\cdot V=360-200-10$,解得 $V=\frac{1\,800}{23}$.

② $60\leqslant V<\frac{1\,800}{23}$ 或 $\frac{1\,800}{17}<V\leqslant 120$.

提示:易知当 V 越大时,点 P 越靠近点 A,当 V 越小时,点 P 越靠近点 B.当点 P 与点 N 重合时,由①得,$V=\frac{1\,800}{23}$.又由限速可得 $V\geqslant 60$,所以当点 P 在 BN 段时,$60\leqslant V<\frac{1\,800}{23}$.当点 P 与点 M 重合时,根据运动时间可列方程 $\frac{200}{100}-\frac{20}{60}=\frac{360-200-10}{V}+\frac{10}{40}$,解得 $V=\frac{1\,800}{17}$.又由限速可得 $V\leqslant 120$,所以当点 P 在 AM 段时,$\frac{1\,800}{17}<V\leqslant 120$.

期末压轴 3

2025 年南京市联合体期末压轴题

1. A　**提示:**设A商品的单价为 a 元,B商品的单价为 b 元.由题意,得 $200\leqslant 2a<300,300\leqslant 2a+b<400$,所以当 $2a=299$ 时,b 取最小值1.

2. ①③　**提示:**因为 $2^a=3,2^c=12$,所以 $2^a\times 4=3\times 4$,即 $2^a\times 2^2=12$,所以 $2^{a+2}=12=2^c$,所以 $c=a+2$,所以①正确.因为 $2^a=3,2^b=6$,所以 $2^a\times 2^b=18$,即 $2^{a+b}=18$.因为 $2^c=12$,所以 $2^{c+1}=2^c\times 2=12\times 2=24\neq 18$,所以②不正确.因为 $2^b=6,2^2=4,2^3=8$,而 $4<6<8$,所以 $2<b<3$,所以③正确.

3. (1) 60　**提示:**延长 AE 交 CD 于点 G.因为 $AB/\!/CD$,所以 $\angle AGC=\angle A=60°$.因为 $\angle AEF=\angle F$,所以 $AG/\!/DF$,所以 $\angle D=\angle AGC=60°$.

(2) **证明:**连接 AD 交 EF 于点 H,根据三角形内角和定理,可得 $\angle HAE+\angle E=\angle F+\angle FDA$.又因为 $AB/\!/CD$,所以 $\angle BAD=\angle ADC$,所以 $\angle E+\angle EAB=\angle HAE+\angle E+\angle BAD=\angle F+\angle FDA+\angle ADC=\angle F+\angle FDC$.

(3) **解:**① $\angle A+\angle E+30°=\angle FDC+\angle F$.　**提示:**延长 AE 交 CD 于点 M,则 $\angle AMO=180°-\angle O-\angle A=180°-30°-\angle A=150°-\angle A$.又因为 $\angle F+\angle FEM+\angle EMD+\angle FDC=360°$,所以 $\angle F+180°-\angle AEF+150°-\angle A+\angle FDC=360°$,所以 $\angle A+\angle AEF+30°=\angle FDC+\angle F$.

② $\frac{2}{3}\alpha+10°$ 或 $\frac{4}{3}\alpha-10°$ 或 $\frac{2}{3}\alpha+\frac{2}{3}\beta+10°$ 或 $\frac{4}{3}\alpha-\frac{2}{3}\beta-10°$.　**提示:**由①,得 $\angle A+\angle E+30°=$

$\angle FDC+\angle F$，因为$\angle FDC=60°$，$\angle E=\alpha$，$\angle F=\beta$，所以$\angle A=60°+\beta-30°-\alpha=30°+\beta-\alpha$. 因为$\angle PAE=\frac{1}{3}\angle EAB$，$\angle PFE=\frac{1}{3}\angle EFD$，所以$\angle PAE=\frac{1}{3}(30°+\beta-\alpha)$，$\angle PFE=\frac{1}{3}\beta$.

如图 1，当 AP，FP 均在$\angle EAO$ 和$\angle EFD$ 的内部时，根据三角形内角和定理，得$\angle EAP+\angle E=\angle P+\angle PFE$，即$\frac{1}{3}(30°+\beta-\alpha)+\alpha=\angle P+\frac{1}{3}\beta$，解得$\angle P=\frac{2}{3}\alpha+10°$.

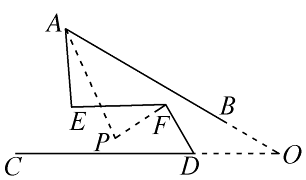


图 1

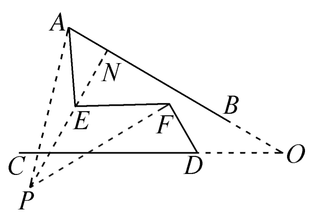


图 2

如图 2，当 AP 在$\angle EAO$ 的外部，FP 在$\angle EFD$ 的内部时，连接 PE 并延长至点 N，则$\angle AEF=\angle AEN+\angle FEN=\angle PAE+\angle APE+\angle FPE+\angle EFP=\angle PAE+\angle APF+\angle PFE$，即 $\alpha=\frac{1}{3}(30°+\beta-\alpha)+\frac{1}{3}\beta+\angle APF$，解得$\angle APF=\frac{4}{3}\alpha-\frac{2}{3}\beta-10°$.

如图 3，当 AP 在$\angle EAO$ 的内部，FP 在$\angle EFD$ 的外部时，同理可得$\angle APF=\angle PAE+\angle AEF+\angle PFE=\frac{1}{3}(30°+\beta-\alpha)+\frac{1}{3}\beta+\alpha=\frac{2}{3}\alpha+\frac{2}{3}\beta+10°$.

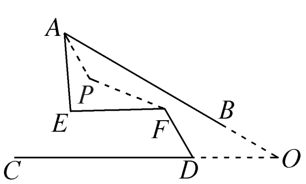


图 3

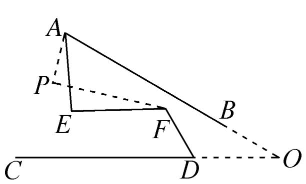


图 4

如图 4，当 AP，FP 均在$\angle EAO$ 和$\angle EFD$ 的外部时，$\angle EAP+\angle P=\angle E+\angle PFE$，即 $\frac{1}{3}(30°+\beta-\alpha)+\angle P=\alpha+\frac{1}{3}\beta$，解得$\angle P=\frac{4}{3}\alpha-10°$.

期末压轴 4

2025 年苏州市吴江区、吴中区、相城区期末压轴题

1. C　**提示**：连接 CD 交 AB 于点 G，则 $CD\perp AB$，$CG=DG=\frac{1}{2}CD$. 因为 $AB\parallel EF$，所以 $CD\perp EF$. 可得$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}EF\cdot CD}{\frac{1}{2}AB\cdot CG}=6$. 因为$\triangle ABC$ 的面积为 2，所以$\triangle DEF$ 的面积为 12.

2. $-\frac{11}{14}<k<-\frac{3}{5}$且 $k\neq-\frac{25}{36}$　**提示**：由移变方程的定义，得$\begin{cases}m-n+3=-(7m-k),\\2n+6k+3=3m+2n.\end{cases}$因为要求 k 的取值范围，所以考虑把 k 作为参数，把 m，n 用含 k 的代数式表示，可解得$\begin{cases}m=2k+1,\\n=15k+11.\end{cases}$根据题目条件 $3m<k<n$，可得 $3(2k+1)<k<15k+11$，解得$-\frac{11}{14}<k<-\frac{3}{5}$. 又因为$(7m-k)x+(3m+2n)y=3$ 是关于 x，y 的二元一次方程，所以$\begin{cases}7m-k\neq0,\\3m+2n\neq0,\end{cases}$解得$\begin{cases}k\neq-\frac{7}{13},\\k\neq-\frac{25}{36}.\end{cases}$所以 k 的取值范围为$-\frac{11}{14}<k<-\frac{3}{5}$且 $k\neq-\frac{25}{36}$.

3. 解：(1) 7

(2) 设 $a=2\ 026-c$，$b=c-2\ 025$，则 $a+b=1$. 由题意，得 $a^2+b^2=2\ 024$，所以 $2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)=-2\ 023$，所以$(2\ 026-c)(c-2\ 025)=ab=-\frac{2\ 023}{2}$.

(3) 设 $CE=a$，$CK=b$，则$\frac{1}{2}ab=50$，$b-a=(CK+DK)-(CE+EB)=CD-CB=AB-$

$AD=5$.所以 $S_1+S_2=a^2+b^2=(b-a)^2+2ab=225$.

期末压轴 5

2025 年苏州市昆山市、常熟市、太仓市、张家港市期末压轴题

1. B　**提示**:设一个球体的质量为 x,一个正方体的质量为 y,一个圆锥体的质量为 z.根据题图 1、图 2,得 $\begin{cases}5x+2y=x+3z,\\3x+3y=2y+2z,\end{cases}$ 整理,得 $\begin{cases}4x+2y=3z①,\\3x+y=2z②.\end{cases}$ ①−②,得 $x+y=z$.将 $x+y=z$ 代入②,得 $x=y$,$z=2x$.易得图 3 中,$x+3y+2z=8x$.

2. 45°或 135°　**提示**:设$\angle AEP=\alpha$,$\angle CFP=\beta$,由对称可知,$\angle A'EP=\angle AEP=\alpha$,$\angle C'FP=\angle CFP=\beta$.因为 EA',FC'的位置不固定,所以可能有以下多种情形.

①如图 1,当 EA',FC'均在 EF 的左侧时,过点 P 作 $PM/\!/AB$,则 $\angle MPE=\angle AEP=\alpha$,$PM/\!/CD$,故$\angle MPF=\angle CFP=\beta$,所以$\angle EPF=\angle EPM+\angle FPM=\alpha+\beta$.设 $EA'\perp FC'$于点 G,则$\angle EGF=90^\circ$,所以$\angle FEG+\angle EFG=90^\circ$.因为 $AB/\!/CD$,所以$\angle AEF+\angle CFE=180^\circ$,$\angle AEP+\angle A'EP+\angle FEG+\angle CFP+\angle C'FP+\angle C'FE=180^\circ$,即 $\alpha+\alpha+\angle FEG+\angle EFG+\beta+\beta=180^\circ$,所以 $2\alpha+2\beta=90^\circ$,所以 $\alpha+\beta=45^\circ$,即$\angle EPF=45^\circ$.当 EA'在 EF 的右侧,FC'在 EF 的左侧时,同理可得$\angle EPF=45^\circ$.

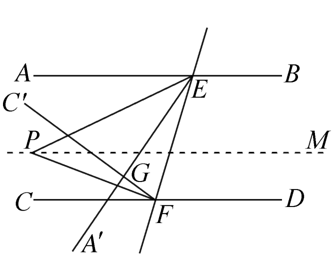


图 1

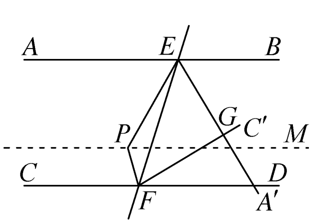


图 2

②如图 2,当 EA',FC'均在 EF 的右侧时,过点 P 作 $PM/\!/AB$,同理可得$\angle MPE=\angle AEP=\alpha$,$\angle MPF=\angle CFP=\beta$,$\angle EPF=\angle EPM+\angle FPM=\alpha+\beta$.设 $EA'\perp FC'$于点 G,则$\angle EGF=90^\circ$.因为$\angle A'EP+\angle EPM+\angle FPM+\angle C'FP+\angle EGF=360^\circ$,即 $\alpha+\alpha+\beta+\beta+90^\circ=360^\circ$,所以 $2\alpha+2\beta=270^\circ$,所以 $\alpha+\beta=135^\circ$,即$\angle EPF=135^\circ$.当 EA'在 EF 的左侧,FC'在 EF 的右侧时,同理可得$\angle EPF=135^\circ$.

综上所述,若 $EA'\perp FC'$,则$\angle EPF$ 的度数为 45°或 135°.

3. 解:(1) $x>-\dfrac{1}{2}$

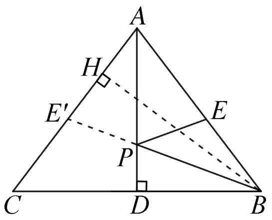
(2) 因为 $3x-y=4$,所以 $y=3x-4$,所以 $x+\dfrac{1}{2}y=x+\dfrac{1}{2}(3x-4)=\dfrac{5}{2}x-2$.因为 $y<5$,即 $3x-4<5$,所以 $x<3$.又因为 $x>-2$,所以 $-2<x<3$,所以 $-5<\dfrac{5}{2}x<\dfrac{15}{2}$,所以 $-7<\dfrac{5}{2}x-2<\dfrac{11}{2}$,即 $x+\dfrac{1}{2}y$ 的取值范围为 $-7<x+\dfrac{1}{2}y<\dfrac{11}{2}$.

(3) 因为 $x+2y=a$,所以 $y=\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2}x$,所以 $2x-y=2x-\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2}x\right)=\dfrac{5}{2}x-\dfrac{a}{2}$.因为 $y>3$,即$\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2}x>3$,所以 $x<a-6$.又因为 $x<-2$,所以分类讨论如下:①当 $a-6<-2$,即 $a<4$ 时,$x<a-6$,此时$\dfrac{5}{2}x<\dfrac{5}{2}a-15$,所以$\dfrac{5}{2}x-\dfrac{a}{2}<2a-15$,即 $2x-y$ 的取值范围为 $2x-y<2a-15$;②当 $a-6\geqslant-2$,即 $a\geqslant4$ 时,$x<-2$,此时$\dfrac{5}{2}x<-5$,所以$\dfrac{5}{2}x-\dfrac{a}{2}<-5-\dfrac{a}{2}$,即 $2x-y$ 的取值范围为 $2x-y<-5-\dfrac{a}{2}$.综上所述,当 $a<4$ 时,$2x-y$ 的取值范围为 $2x-y<2a-15$;当 $a\geqslant4$ 时,$2x-y$ 的取值范围为 $2x-y<-5-\dfrac{a}{2}$.

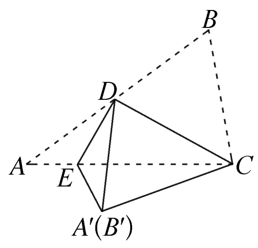
期末压轴 6

2025 年无锡市滨湖区期末压轴题

1. D　**提示**：设在△ABC 中，边 AB 上的高是 h. 由折叠的性质，得 $S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}BD\cdot AD=24$，所以 $S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle ABD}=48$. 因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot h=48$，所以 $h=9.6$，故①正确. 如图，过点 B 作 $BH\perp AC$ 于点 H，作点 E 关于 AD 的对称点 E'，连接 PE'，则 $PE'=PE$，所以 $PE+PB=PE'+PB$. 当 B，P，E' 三点共线，且 $BE'\perp AC$ 时，$PE+PB$ 有最小值，最小值为 BH 的长. 因为 $AC=AB=10$，由①，得 $BH=9.6$，所以 $PE+PB$ 的最小值是 9.6，故②错误. 因为 $AE=3BE$，$AE+BE=AB=10$，所以 $BE=\frac{1}{4}AB=2.5$. 因为 $PB-PE\leqslant BE$，所以当点 P 与点 A 重合时，$PB-PE$ 有最大值，此时 $PB-PE=BE=2.5$，故③正确.



2. 100　$\left(130-\frac{1}{2}x\right)$　**提示**：当点 A' 与点 B' 重合时，如图所示. 因为 $\angle ACB=80°$，所以 $\angle A+\angle B=180°-\angle ACB=100°$. 由折叠，可得 $\angle EA'D=\angle A$，$\angle CB'D=\angle B$，所以 $\angle EA'C=\angle EA'D+\angle CB'D=\angle A+\angle B=100°$. 因为 $\angle ACB'=x°$，所以 $\angle AEA'=\angle ACB'+\angle EA'C=(x+100)°$，所以 $\angle AED+\angle A'ED=360°-\angle AEA'=360°-(x+100)°=(260-x)°$. 由折叠，得 $\angle AED=\angle A'ED$，所以 $\angle AED=\left(130-\frac{1}{2}x\right)°$.



3. **解**：(1) 因为 AE 平分 $\angle CAD$，$\angle CAD=20°$，所以 $\angle CAE=\angle DAE=\frac{1}{2}\angle CAD=\frac{1}{2}\times20°=10°$. 因为 $\angle BAC=\angle B=30°$，所以 $\angle BAD=\angle BAC-\angle CAD=30°-20°=10°$，$\angle BAE=\angle BAC-\angle CAE=30°-10°=20°$. 因为 $EH\perp AB$，即 $\angle AHE=90°$，所以 $\angle AEH=90°-\angle BAE=90°-20°=70°$，即 $\alpha=70°$. 因为 $\angle B=30°$，$\angle BAD=10°$，所以 $\angle ADC=\angle B+\angle BAD=30°+10°=40°$，即 $\beta=40°$.

(2) $2\alpha+\beta=180°$. 理由如下：

设 $\angle BAC=\angle B=x$，$\angle DAC=2y$. 因为 AE 平分 $\angle DAC$，所以 $\angle DAE=\angle CAE=\frac{1}{2}\angle DAC=y$，所以 $\angle BAE=\angle BAC-\angle CAE=x-y$，$\angle BAD=\angle BAC-\angle DAC=x-2y$. 因为 $EH\perp AB$，即 $\angle AHE=90°$，所以 $\angle AEH=90°-\angle BAE=90°-(x-y)$，即 $\alpha=90°-(x-y)$. 因为 $\angle B=x$，$\angle BAD=x-2y$，所以 $\angle ADC=\angle B+\angle BAD=2x-2y$，即 $\beta=2x-2y$，所以 $\alpha=90°-\frac{1}{2}\beta$，所以 $2\alpha+\beta=180°$.

(3) $\beta=2\alpha$，$m°<\angle BAE<90°$.　**提示**：设 $\angle CAD=2n°$，易得 $\angle CAE=\angle DAE=\frac{1}{2}\angle CAD=n°$. 因为 $\angle BAC=\angle B=m°$，所以 $\angle BAE=\angle BAC+\angle CAE=(m+n)°$，$\angle BAD=\angle BAC+\angle CAD=(m+2n)°$，因为 $\angle B+\angle BAD+\angle D=180°$，$\angle D>0°$，所以 $\angle BAD<180°-\angle B$，即 $m+2n<180-m$，所以 $m+n<90°$，即 $\angle BAE<90°$. 因为 $\angle AEH=90°-\angle BAE=90°-(m+n)°$，即 $\alpha=90°-(m+n)°$，$\angle ADB=180°-\angle B-\angle BAD=180°-m°-(m+2n)°=180°-2(m+n)°$，即 $\beta=180°-2(m+n)°$，所以 $\beta=2\alpha$. 易知 $n>0$，所以 $m<m+n$，所以 $m°<\angle BAE<90°$.

期末压轴 7

2025 年常州市期末压轴题

1. B　**提示**：因为 $N^2=3^m\times(3^2)^n\times(3^3)^k=3^{m+2n+3k}$，且左边为完全平方数，所以 $m+2n+3k$ 必为偶数. 因为 $m+2n+3k=m+k+2(n+k)$，且 $2(n+k)$ 为偶数，所以 $m+k$ 必为偶数.

2. 10 或 15　**提示**：因为“亏数”n 的所有因数为 $1,a,5,n$(按从小到大排列)，所以 $1<a<5$，即 a 可取 2，3，4，且 $1\times n=5\times a$. 当 $a=2$ 时，$n=2\times5=10$；当 $a=3$ 时，$n=3\times5=15$；当 $a=4$ 时，$n=4\times5=20$，此时 n 的所有因数为 1，2，4，5，10，20，不符合题意，舍去.

3. 解：(1) 28　$\angle FGB+\angle EFC=90°$

提示：根据平移的性质，可得 $BC/\!/AD/\!/GF$，$EF/\!/CD$，$CF/\!/BG$，$GF=BC=AD=7$. 连接 BF，过点 F 作 $FK\perp BC$ 于点 K. 易知 $FK=2AB=4$，$S_{\triangle BGF}=S_{\triangle BFC}$. 所以四边形 $BCFG$ 的面积为 $2S_{\triangle BFC}=2\times\frac{1}{2}BC\cdot FK=28$. 因为 $BC/\!/GF$，所以 $\angle FGB+\angle GBC=180°$. 因为 $CF/\!/BG$，所以 $\angle GBC+\angle BCF=180°$，所以 $\angle BCF=\angle FGB$. 因为 $EF/\!/CD$，所以 $\angle FCD=\angle EFC$. 因为 $\angle BCF+\angle FCD=90°$，所以 $\angle FGB+\angle EFC=90°$.

(2) ①点 C' 的位置如图 1、图 2 所示(答案不唯一). 图 1 的旋转角为 90°，图 2 的旋转角为 135°.

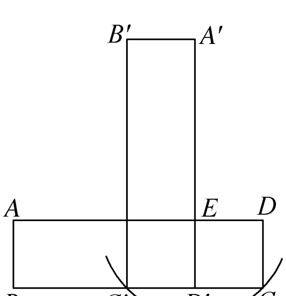


图 1

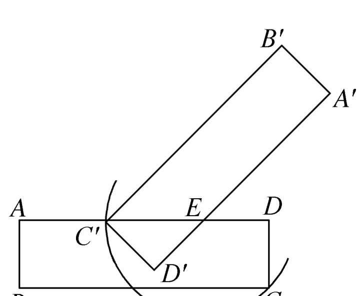


图 2

②如图 3，因为四边形 $ABCD$ 是长方形，所以 $AD/\!/BC$，所以 $\angle1+\angle B'PC=180°$. 所以 $\angle1=180°-\angle B'PC=50°$. 因为四边形 $A'B'C'D'$ 是长方形，所以 $A'D'/\!/B'C'$，所以 $\angle DED'=\angle1=50°$，即 $\alpha=50$.

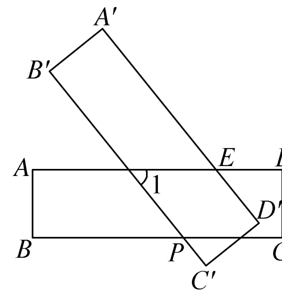


图 3

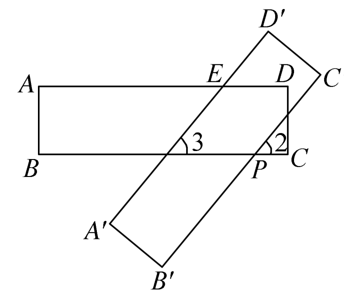


图 4

如图 4，因为 $\angle2+\angle B'PC=180°$，所以 $\angle2=180°-\angle B'PC=50°$. 因为 $A'D'/\!/B'C'$，所以 $\angle3=\angle2=50°$. 因为 $AD/\!/BC$，所以 $\angle AEA'=\angle3=50°$，所以 $\alpha=360-50=310$. 综上所述，$\alpha=50$ 或 $\alpha=310$.

期末压轴 8

2025 年镇江市期末压轴题

1. D　**提示**：依题意，得 $\begin{cases}3x-4<20,\\3(3x-4)-4\geqslant20,\end{cases}$ 由 $3x-4<20$，得 $x<8$；由 $3(3x-4)-4\geqslant20$，得 $9x-16\geqslant20$，解得 $x\geqslant4$. 所以不等式组的解集为 $4\leqslant x<8$.

2. 32　**提示**：由折叠的性质，可得 $\angle EMN=\angle AMN$，$\angle MND=\angle MNF$. 因为 $\angle EMN+\angle AMN=180°$，所以 $\angle EMN=\angle AMN=90°$，所以 $\angle AMN=\angle B$，所以 $MN/\!/BC$. 因为 $\angle C=106°$，所以 $\angle MNC=180°-\angle C=74°$，$\angle MNF=\angle MND=\angle C=106°$，所以 $\angle CNF=\angle MNF-\angle MNC=32°$.

3. 解：(1) 1 980　1 489

(2) 设爸爸、妈妈每日热量摄入分别为 x 千卡、y 千卡.

由题意，得 $\begin{cases}x+y=3\ 122.8,\\1\ 980\times1.2-x=1\ 489\times1.2-y,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=1\ 856,\\y=1\ 266.8.\end{cases}$ 所以爸爸、妈妈每日热量摄入分别为 1 856 千卡、1 266.8 千卡.

(3) 设他至少应该达到活动系数为 m.

根据题意，得 $1\ 980m-1\ 800\geqslant4\times260$，解

得 $m \geqslant \frac{142}{99}$. 因为 $1.375 < \frac{142}{99} < 1.55$,所以他至少应该达到中强度运动.

答:他至少应该达到中强度运动.

期末压轴 9

2025 年镇江市丹徒区期末压轴题

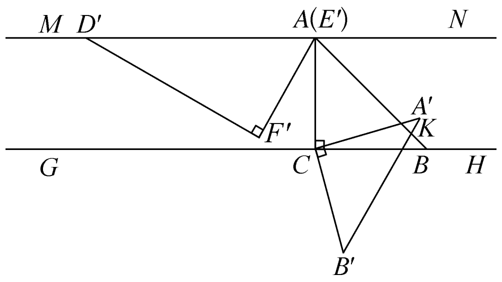
1. B　**提示**:由平移易知,图中阴影部分的面积等于梯形 $DGBA$ 的面积,其中 $DG = DE - GE = AB - EG = 4$ cm. 易得梯形 $DGBA$ 的面积为 $(4+6) \times 3 \div 2 = 15(\text{cm}^2)$.

2. 6　**提示**:设 $BC = CE = a$, $AC = CD = b$. 由题意可知, $S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 = 11$, $S_{\triangle CDB} = \frac{1}{2}ab = 3.5$,则 $a^2 + b^2 = 2 \times 11 = 22$, $ab = 2 \times 3.5 = 7$,所以 $AB^2 = (a+b)^2 = (a^2+b^2) + 2ab = 22 + 14 = 36$,所以 $AB = a + b = 6$.

3. 解:(1) ①$15^\circ$

②当点 E 在线段 BA 上时, $\angle AFD = \angle AFE + \angle EFD > 90^\circ$,所以$\triangle ADF$ 不可能为直角三角形;当点 A 与点 E 重合时, $\angle AFD = \angle EFD = 90^\circ$,此时 $\angle DAF = 60^\circ$, $\angle DAN = \angle CAN - \angle CAB = 45^\circ$,所以 $\angle FAN = \angle DAF - \angle DAN = 15^\circ$;当点 E 在线段 BA 的延长线上,且$\angle FAD = 90^\circ$时,此时$\angle DAN = 45^\circ$,所以$\angle FAN = \angle FAD - \angle DAN = 45^\circ$. 综上所述, $\angle FAN$ 的度数为 15°或 45°.

(2) $\frac{75}{4}$或$\frac{255}{4}$　**提示**:如图,平移$\triangle DEF$,使得点 E 的对应点E'与点A 重合,得到$\triangle D'E'F'$. 当 AB 与 EF 第一次平行时, $\triangle ABC$ 旋转至$\triangle A'B'C$,设 $A'B'$ 交 AB 于点 K. 因为 $A'B' \mathbin{/\mkern-6mu/} E'F'$,所以 $\angle B'KB = \angle F'AB = \angle CAB + \angle CAF' = 45^\circ + (90^\circ - 60^\circ) = 75^\circ$. 因为 $\angle ACA' + \angle CAB = \angle A' + \angle AKA' = \angle A' + \angle B'KB$,所以 $\angle ACA' = B'KB = 75^\circ$,所以 $t = \frac{75}{4}$;当 AB 与 EF 第二次平行时,易知 AB 转动了 $75^\circ + 180^\circ = 255^\circ$,所以 $t = \frac{255}{4}$.



期末压轴 10

2025 年南通市期末压轴题

1. D　**提示**:因为 $\angle BAC = 90^\circ$,所以 $\angle ABC + \angle ACB = 90^\circ$. 因为 CE 平分$\angle ACB$, BD 平分$\angle ABC$,所以$\angle ACE = \angle BCE = \frac{1}{2}\angle ACB$, $\angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{2}\angle ABC$. 又因为 $AE \mathbin{/\mkern-6mu/} CB$,所以$\angle AEC = \angle BCE$,所以$\angle AEC = \angle ACE$,故选项 A 正确. 设$\angle ACE = \angle BCE = \alpha$,则$\angle BCA = 2\alpha$, $\angle ABC = 90^\circ - 2\alpha$. 因为 $AE \mathbin{/\mkern-6mu/} CB$,所以$\angle EAC = 180^\circ - \angle BCA = 180^\circ - 2\alpha$. 因为 $\angle ABD = \frac{1}{2}\angle ABC = 45^\circ - \alpha$,所以$\angle ADB = 180^\circ - \angle BAD - \angle ABD = 45^\circ + \alpha$,所以$\angle EAC - \angle ADB = 180^\circ - 2\alpha - (45^\circ + \alpha) = 135^\circ - 3\alpha = \frac{3}{2}(90^\circ - 2\alpha) = \frac{3}{2}\angle ABC$,故选项 B 正确. 因为$\angle BFC = 180^\circ - \angle FBC - \angle FCB = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = 135^\circ$, $\angle ABD = 45^\circ - \alpha$,所以$\angle EAC + \angle ECB = 180^\circ - 2\alpha + \alpha = 180^\circ - \alpha = \angle BFC + \angle ABD$,故选项 C 正确. 因为$\angle EAC = 180^\circ - 2\alpha$, $\angle BFC = 135^\circ$, α 的值不确定,所以无法证明"$\angle EAC = \angle BFC$",所以选项 D 不正确.

2. $1 \leqslant m < \frac{3}{2}$　**提示**:$mx - m - 1 = m(x-1) - 1$,因为 $m > 0$, $1 < x \leqslant 3$,所以$-1 < m(x-1) - 1 \leqslant 2m - 1$. 因为该多项式有 2 个整数值,所以这 2 个整数值必然为 0,1,则 $1 \leqslant 2m - 1 < 2$,解得 $1 \leqslant m < \frac{3}{2}$.

3. 解:【任务一】设小健接温水、开水分别用时 a s,b s,则接的温水、开水的体积分别为 $20a$ mL,$15b$ mL. 由素材 3 中的公式,得 $20a\times30+15b\times100=280\times35$. 又因为 $20a+15b=280$,联立解得 $a=13$,$b=\frac{4}{3}$.

答:小健接温水和开水的时间分别为 13 s 和 $\frac{4}{3}$ s.

【任务二】设小康接温水 x s. 根据题意,得 $20x\times30+45\times100\leqslant40(20x+45)$,解得 $x\geqslant13.5$.

答:小康接温水的时长至少为 13.5 s 才能达到饮用的适宜温度.

期末压轴 11

2025 年盐城市盐都区期末压轴题

1. A　提示:$S_1-S_2=(2m+5)(2m+3)-(2m+4)^2=-1<0$,所以 $S_1<S_2$.

2. $m\leqslant6$　提示:根据题意,得 $m-2\leqslant4$,解得 $m\leqslant6$.

3. 解:(1) ①$\angle ACD+\angle CAE=\angle B+180^\circ$

②作图如图 1 所示,$\angle AOC=90^\circ-\frac{1}{2}\angle B$. 证明如下:

因为 CN,AM 分别平分 $\angle ACD$,$\angle CAE$,所以 $\angle ACO=\frac{1}{2}\angle ACD$,$\angle CAO=\frac{1}{2}\angle CAE$,所以 $\angle ACO+\angle CAO=\frac{1}{2}(\angle ACD+\angle CAE)$. 因为 $\angle ACD+\angle CAE=\angle B+180^\circ$,所以 $\angle ACO+\angle CAO=\frac{1}{2}(\angle B+180^\circ)$. 因为在 $\triangle AOC$ 中,$\angle AOC+\angle CAO+\angle ACO=180^\circ$,所以 $\angle AOC=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle B+180^\circ)=90^\circ-\frac{1}{2}\angle B$.

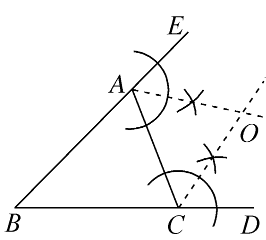


图 1

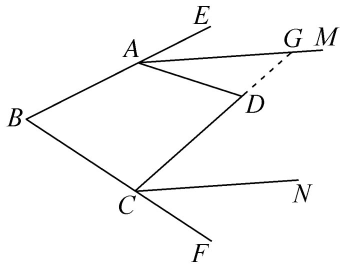


图 2

(2) ①$\angle DAE+\angle DCF=\angle B+\angle D$

②37

(3) 当 $\angle B=\angle D$ 时,$AM\parallel CN$. 理由如下:如图 2,延长 CD 交 AM 于点 G. 因为 CN,AM 分别平分 $\angle DCF$,$\angle DAE$,所以 $\angle DCN=\frac{1}{2}\angle DCF$,$\angle DAM=\frac{1}{2}\angle DAE$,所以 $\angle DCN+\angle DAM=\frac{1}{2}(\angle DCF+\angle DAE)$. 因为 $\angle DCF+\angle DAE=\angle B+\angle ADC$,所以 $\angle DCN+\angle DAM=\frac{1}{2}(\angle B+\angle ADC)$. 若 $AM\parallel CN$,则 $\angle DCN=\angle AGC$,又因为 $\angle AGC+\angle DAM=\angle ADC$,所以 $\angle DCN+\angle DAM=\angle ADC=\frac{1}{2}(\angle ADC+\angle ADC)$,所以 $\angle B=\angle ADC$.

期末压轴 12

2025 年泰州市姜堰区、海陵区期末压轴题

1. C　提示:因为 AD 为 $\triangle ABC$ 的中线,所以 $S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ABD}$. 由翻折,得 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADE}$,所以 $S_{\triangle ADE}=S_{\triangle ACD}=S_1$,所以 $S_1-S_2=S_{\triangle ADF}$.

2. 24 或 36　提示:因为 $\angle BAC=\angle ABC=36^\circ$,所以由三角形内角和可知,$\angle ACB=180^\circ-\angle BAC-\angle ABC=108^\circ$. 已知直线 EF 交边 AB 于点 D,故分两种情况讨论:①如图 1,当 $\triangle EFC$ 是钝角三角形时,易知 $\angle ECF=\angle ACB=108^\circ$,所以 $\angle EFC+\angle FEC=180^\circ-$

$\angle ECF=72°$. 又因为 $\angle EFC=(x+2y)°$，$\angle FEC=(2x+y)°$，所以 $\angle EFC+\angle FEC=3(x+y)°=72°$，所以 $x+y=24$. ②如图 2，当 $\triangle EFC$ 是锐角三角形时，易知 $\angle ECF=180°-\angle ACB=72°$，所以 $\angle EFC+\angle FEC=180°-\angle ECF=108°$，即 $\angle EFC+\angle FEC=3(x+y)°=108°$，所以 $x+y=36$.

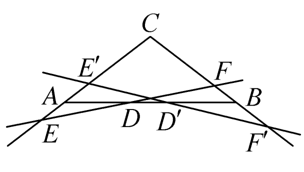


图 1

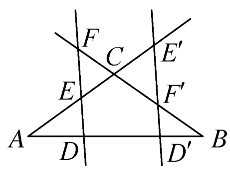


图 2

3. 解：在 $\triangle ACB$ 中，$\angle BAC=100°$，由三角形内角和定理，得 $\angle B+\angle C=180°-100°=80°$. 由 $\angle B:\angle C=3:5$，可得 $\angle B=30°$，$\angle C=50°$.

(1) 因为 $\angle ADB$ 是 $\triangle ADC$ 的一个外角，所以 $\angle CAD=\angle ADB-\angle C=40°$.

(2) ①$40°<\angle CAD<50°$. **提示**：由(1)可知，当点 M 落在边 BC 上时，即 $AD\perp BC$ 时，$\angle CAD=40°$. 当点 M 落在边 AB 上时，$\angle CAD=\angle MAD=\frac{1}{2}\angle BAC=50°$. 因为点 M 在 $\triangle ABC$ 的内部(不包含 $\triangle ABC$ 的边)，所以 $40°<\angle CAD<50°$.

② $\angle BDM+\angle BAM=20°$，证明如下：由翻折可知，$\angle AMD=\angle C=50°$. 连接 BM 并延长交 AD 于点 N，则 BM 将四边形 $ABDM$ 分割成两个三角形，$\angle AMN$ 和 $\angle DMN$ 分别是这两个三角形的外角，故 $\angle AMN=\angle ABM+\angle BAM$，$\angle DMN=\angle BDM+\angle DBM$，所以 $\angle AMD=\angle AMN+\angle DMN=\angle ABM+\angle BAM+\angle BDM+\angle DBM=\angle BDM+\angle BAM+\angle ABD$，所以 $\angle BDM+\angle BAM=\angle AMD-\angle ABD=20°$.

(3) ①如题图 3 所示，点 P 在 BC 的下方. 当 $\angle BPD<120°$ 时，在 $\triangle ABP$ 中，由内角和定理，得 $\angle BAP+\angle ABP>60°$. 因为 $\angle ABC=30°$，所以 $\angle BAP+\angle CBC'>30°$. 因为 $\angle CBC'=\beta°=\frac{3}{2}\alpha°$，$\angle BAP=\alpha°$，所以 $\alpha>12$. ②当点 D 继续右移，$AD/\!/BC'$ 时，点 P 不存在，不合题意. 如图 1，此时有 $\angle BAD+\angle ABC'=180°$，可得 $\alpha+30+\beta=180$. 因为 $\beta=\frac{3}{2}\alpha$，所以 $\alpha=60$. ③当点 D 继续右移，点 P 位于 BC 的上方时，如图 2，易得 $\angle BAC=100°>\angle BAD>\angle BPD$，所以 $\angle BPD<120°$ 始终成立. ④当点 D 和点 C 重合时，$\angle BAD=100°$，$\angle C'BC=150°$，所以 $\angle C'BC+\angle ABC=180°$，此时 C'，B，A 三点共线，故点 P 与点 A 重合，也符合题意.

综上所述，$12<\alpha<60$ 或 $60<\alpha\leqslant 100$.

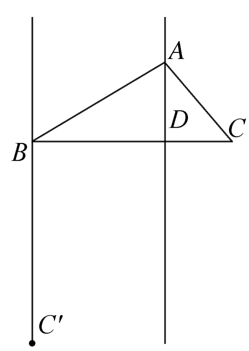


图 1

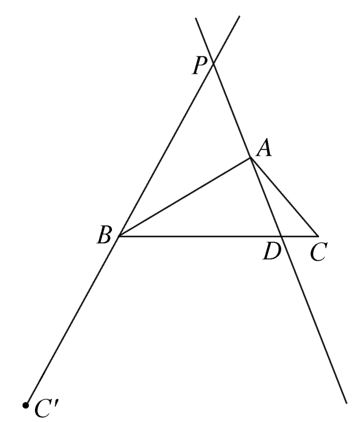


图 2

期末压轴 13

2025 年泰州市泰兴市、兴化市期末压轴题

1. B **提示**：将原方程整理，得 $m(2x+y-6)=-(x-y+3)$. 令 $2x+y-6=0$，$x-y+3=0$，联立，解得 $x=1$，$y=4$. 此时无论 m 取何值，原方程总成立.

2. 10 **提示**：设 $BE=AE=a$，则 $AB=2a$，$AD=\frac{12}{a}$，$BF=\frac{2S_{\triangle BEF}}{BE}=\frac{8}{a}$，所以 $FC=\frac{4}{a}$，可得 $S_{\triangle DFC}=\frac{1}{2}CD\cdot FC=4$，$S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}AD\cdot AE=6$，故 $S_{阴影}=24-4-4-6=10$.

3. 解：(1) 当 $\angle BAC=40°$ 时，因为 $AB=$

AC，所以$\angle B=\angle C=\frac{1}{2}(180°-\angle BAC)=70°$. 由 $DP\perp BC$，得$\angle BPD=90°$，$\angle BDP=90°-\angle B=20°$. 由三角形外角的性质，得$\angle BDP=\angle DAP+\angle DPA$. 由翻折，得 $DA=DP$，所以$\angle DAP=\angle DPA=10°$，所以$\angle PAE=\angle BAC-\angle DAP=30°$.

(2) $2\angle BDP+\angle CPE$ 的值不变. 同理(1)，得$\angle B=\angle C=\frac{180°-\alpha}{2}=90°-\frac{\alpha}{2}$，$\angle BDP=90°-\angle B=\frac{\alpha}{2}$. 由翻折，得$\angle DPE=\angle DAE=\alpha$. 由 $DP\perp BC$，得$\angle CPE=90°-\angle DPE=90°-\alpha$，所以 $2\angle BDP+\angle CPE=90°$，所以 $2\angle BDP+\angle CPE$ 的值不变，值为 90°.

(3) 如图 1，当 PE 绕点 E 逆时针旋转 90°落在直线 AC 上时，$\angle PEC=90°$，此时$\angle CPE+\angle PCE=90°$. 由(2)，得$\angle CPE+\angle PCE=90°-\alpha+90°-\frac{\alpha}{2}=90°$，解得 $\alpha=60°$. 如图 2，当 DP 绕点 E 逆时针旋转 90°落在直线 BC 上的 $D'P'$ 位置时，$\angle PEP'=90°$，$PE=P'E$，所以$\angle CPE=45°$. 由(2)，得$\angle CPE=90°-\alpha$，所以 $\alpha=45°$. 综上所述，α 的值为 60°或 45°.

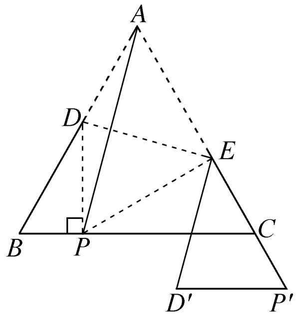


图 1

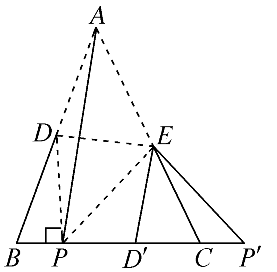


图 2

期末压轴 14

2025 年扬州市江都区期末压轴题

1. C **提示**：记所有直角三角形的长直角边为 x，则图 1、图 2 中的大正方形的边长为 $3+x$，所以两个大正方形的面积相等. 可知题图 2 中右上角的正方形的边长为 3，面积为 9. 又因为两图都包括四个相同直角三角形，则 $S_1=S_2+9$，即 $S_1-S_2=9$.

2. 240 **提示**：由折叠，可知$\angle B=\angle B'$，$\angle BDE=\angle B'DE$，$\angle BED=\angle B'ED$. 设$\angle B'=\angle B=x$，则$\angle C'=\angle C=180°-\angle A-\angle B=105°-x$. 因为$\angle BDE+\angle B'DE=\angle ADB'+180°=210°$，所以$\angle BDE=\angle B'DE=105°$，所以$\angle B'ED=\angle BED=180°-\angle B-\angle BDE=75°-x$，所以$\angle 3=180°-2\angle BED=30°+2x$. 在四边形 $C'GCF$ 中，$\angle C+\angle C'=360°-(\angle C'GC+\angle C'FC)$. 由平角的性质，得$\angle 1+\angle 2=180°-\angle CFC'+(180°-\angle CGC')=360°-(\angle C'GC+\angle C'FC)$. 所以$\angle 1+\angle 2=\angle C+\angle C'=2\angle C=210°-2x$. 所以$\angle 1+\angle 2+\angle 3=240°$.

3. 解：(1) 折痕 PM 如图 1 所示.

提示：过点 P 作 AD 的垂线，与 BC 相交于点 M 即可. 作法：以点 P 为圆心，以 AP 的长为半径，作圆弧交 AD 于点 A，A'，则 $AP=A'P$. 再分别以点 A，A' 为圆心，以大于$\frac{1}{2}AA'$的长为半径，作两圆弧交于点 Q，连接 PQ，直线 PQ 交 BC 于点 M，PM 即为所求.

(2) 折痕 EF 如图 2 所示. **提示**：由题可知，作出线段 PQ 的垂直平分线即可. 作法：分别以点 P，Q 为圆心，以大于$\frac{1}{2}PQ$ 的长为半径，在 PQ 的左下、右上方各作两条圆弧，分别相交于点 R，S，连接 RS 分别交 AD，BC 于点 E，F，则 EF 即为所求.

(3) 折痕 BG，DH 如图 3 所示，其中 BG，DH 分别是$\angle ABC$，$\angle ADC$ 的平分线；$BG/\!/DH$. 理由如下：

因为四边形 $ABCD$ 是长方形，所以$\angle ABC=\angle ADC=90°$. 因为 BG，DH 分别平分$\angle ABC$，$\angle ADC$，所以$\angle GBC=\angle GDH=45°$. 因为 $AD/\!/BC$，所以$\angle BGA=\angle GBC$. 所以$\angle BGA=\angle GDH$，所以 $BG/\!/DH$.

(4) 折痕 MN 如图 4 所示. **提示**：延长 PQ，BC 交于点 O，作$\angle POB$ 的平分线，分别交 AB，CD 于点 M，N，则 MN 即为所求.

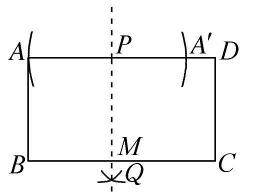


图 1

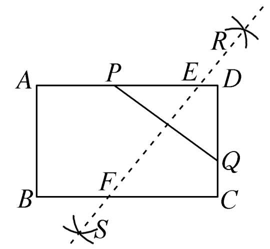


图 2

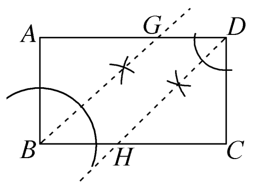


图 3

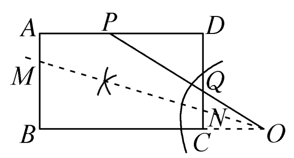


图 4

期末压轴 15

2025 年扬州市宝应县、高邮市期末压轴题

1. B　**提示**：由图可知，小正方形的边长为 $m-n$，面积为 $(m-n)^2=5$，大正方形的面积为 $S_{小正方形}+4S_{阴影三角形}=(m-n)^2+4\times\frac{1}{2}mn=m^2+n^2=\frac{[(m+n)^2+(m-n)^2]}{2}=13.$

2. 8　**提示**：两个连续正奇数可表示为 $2n-1$，$2n+1$，其中 n 是正整数."美好数" $m=(2n+1)^2-(2n-1)^2=8n$，所以"美好数"必为 8 的倍数. 因为 $2\ 025\div8=253\cdots\cdots1$，所以共有 253 个"美好数"，它们的和为 $(3^2-1^2)+(5^2-3^2)+\cdots+[(2\times253+1)^2-(2\times253-1)^2]=3^2-1^2+5^2-3^2+\cdots+507^2-505^2=507^2-1^2=257\ 048$. 所以所有的"美好数"之和的末尾数字为 8.

3. 解：(1) -7

(2) $x\geqslant7$ 或 $x=-\frac{3}{2}$　**提示**：当 $3x-4\geqslant2x+3$ 时，由新运算的定义，可知满足题意，此时 $x\geqslant7$；当 $3x-4<2x+3$，即 $x<7$ 时，由新运算的定义，可知 $2(3x-4)-(2x+3)=2(3x-4)+(2x+3)$，所以 $2x+3=0$，解得 $x=-\frac{3}{2}$，也符合题意.

(3) 当 $2x-6\geqslant9-3x$，即 $x\geqslant3$ 时，$2(2x-6)+9-3x<7$，解得 $x<10$，此时 $3\leqslant x<10$；当 $2x-6<9-3x$，即 $x<3$ 时，$2(2x-6)-(9-3x)<7$，解得 $x<4$，此时 $x<3$. 综上所述，x 的取值范围为 $x<10$.

(4) 因为 $2x^2-2x+4-(x^2+4x-6)=x^2-6x+10>x^2-6x+9=(x-3)^2\geqslant0$，所以 $2x^2-2x+4>x^2+4x-6$，所以 $(2x^2-2x+4)\&(x^2+4x-6)=2(2x^2-2x+4)+(x^2+4x-6)=5x^2+2\geqslant2$. 所以无论 x 取什么值，原式的最小值为 2，不可能为 0. 所以小明计算错了.

期末压轴 16

2025 年徐州市期末压轴题

1. C　**提示**：设 4 人组有 x 个，6 人组有 y 个，其中 x，y 均为非负的整数，则 $4x+6y=50$，整理，得 $2x+3y=25$. 易知 $2x$ 一定是非负的偶数，则 $3y$ 必须为不大于 25 的奇数，y 必须为不大于 8 的奇数，即 y 的值可能为 1，3，5，7，对应的 x 的值分别为 11，8，5，2.

2. 440

3. 解：(1) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(2) ① 1 015　**提示**：设 $a=x-2\ 025$，$b=2\ 026-x$，则题目条件原式转化为 $a^2+b^2=2\ 031$，题目要求的式子转化为 $-ab$. 因为 $a+b=1$，所以 $(a+b)^2=1=a^2+b^2+2ab$，所以 $2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)=-2\ 030$，所以 $-ab=1\ 015$.

② 设 $CD=AD=a$，$DE=GD=b$，则 $AG=a-b$. 由题图 3 易得，阴影部分的面积为 $6=\frac{1}{2}[a(a-b)+b^2]=\frac{1}{2}(a^2+b^2-ab)$，$\triangle CDG$ 的面积为 $\frac{1}{2}ab=4$. 所以 $a^2+b^2-ab=12$，$ab=8$，所以 $(a+b)^2=(a^2+b^2-ab)+3ab=12+24=36$，所以 $CE=a+b=6$.

期末压轴 17

2025 年宿迁市宿城区期末压轴题

1. A　**提示**：在 $\triangle ABC$ 中，由三角形的内角和定理，得 $\angle ABC+\angle ACB=180^\circ-\angle A=140^\circ$. 因为 BD，CD 分别平分 $\angle ABC$，$\angle ACB$，所以 $\angle CBD+\angle BCD=$

$\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=70°$. 所以 $\angle MBC+\angle BCN=360°-(\angle CBD+\angle BCD)=290°$. 因为 BE,CE 分别平分 $\angle MBC,\angle BCN$，所以 $\angle CBE+\angle BCE=\frac{1}{2}(\angle MBC+\angle BCN)=145°$，所以 $\angle E=35°$. 因为 BF,CF 分别平分 $\angle EBC,\angle ECQ$，所以 $\angle F=\angle FCQ-\angle FBQ=\frac{1}{2}(\angle ECQ-\angle EBC)=\frac{1}{2}\angle E=17.5°$.

2. ①②③④　**提示**：①②容易判断都正确. 对于③，“回文数”必然是首尾两位数字相同，有 9 种可能；中间一位数字可取 0～9，有 10 种可能. 共有 $9\times10=90$ 个，故③正确. 对于④，“回文数”有 $\overline{abccba}$ 的形式，其中 a,b,c 都为 0～9 之间的整数，且 $a\neq0$，而该数可用代数式表示为 $100\,000a+10\,000b+1\,000c+100c+10b+a=100\,001a+10\,010b+1\,100c=11(9\,091a+910b+100c)$ 必为 11 的倍数，故④正确.

3. 解：(1) 解方程 $x-3=0$，得 $x=3$. 解不等式组 $\begin{cases}x-5\leqslant0,\\-2x<-4,\end{cases}$ 得 $2<x\leqslant5$，所以方程 $x-3=0$ 是该不等式组的“相依方程”.

(2) 解不等式组 $\begin{cases}2x-1>x-2,\\3(x+1)\leqslant6,\end{cases}$ 得 $-1<x\leqslant1$. 解方程 $3x-k=6$，得 $x=\frac{6+k}{3}$. 因为关于 x 的方程 $3x-k=6$ 不是不等式组 $\begin{cases}2x-1>x-2,\\3(x+1)\leqslant6\end{cases}$ 的“相依方程”，所以 $\frac{6+k}{3}\leqslant-1$ 或 $\frac{6+k}{3}>1$，所以 $k\leqslant-9$ 或 $k>-3$.

(3) 方程 $2x+3=4m$ 的解为 $x=\frac{1}{2}(4m-3)$，不等式组 $\begin{cases}x-m>-1,\\\frac{x-1}{3}\leqslant m\end{cases}$ 的解为 $m-1<x\leqslant3m+1$. 由“相依方程”的定义，$m-1<\frac{1}{2}(4m-3)\leqslant3m+1$，解得 $m>\frac{1}{2}$. 因为 $m>\frac{1}{2}$，所以 $3m+1-(m-1)=2m+2>3$，所以在 $m-1<x\leqslant3m+1$ 的范围内，必然包含 3 个整数. 由题意，$m-1<x\leqslant3m+1$ 内只包含 3 个整数，所以 $2m+2<4$，所以 $m<1$. 可知 $m-1<x\leqslant3m+1$ 包含的 3 个整数分别为 0，1，2，所以 $2\leqslant3m+1<3$，解得 $\frac{1}{3}\leqslant m<\frac{2}{3}$. 综上所述，$\frac{1}{2}<m<\frac{2}{3}$.

期末压轴 18

2025 年宿迁市沭阳县期末压轴题

1. D　**提示**：解该不等式组，得 $\begin{cases}x\leqslant k,\\x\leqslant7.\end{cases}$ 因为该不等式组的解集为 $x\leqslant k$，所以 $k\leqslant7$. 故 $2y=3+k\leqslant10$，所以 $y\leqslant5$. 又因为方程 $2y=3+k$ 有正整数解，所以可能的解为 $y=1,2,3,4,5$，相应的 k 分别为 $-1,1,3,5,7$.

2. 105°或 135°或 60°　**提示**：如图 1，当 AB 与 ED 平行时，$\angle DEA+\angle BAE=180°$，可得 $\angle BAE=135°$. 因为 $\angle BAC=30°$，所以 $\angle CAE=105°$，此时 $\angle CAD=60°=\angle ACB$，所以 BC 与 AD 也平行. 如图 2，当 AC 与 ED 平行时，$\angle DAC=\angle ADE=90°$，所以 $\angle CAE=\angle DAC+\angle DAE=135°$. 如图 3，当 BC 与 AE 平行时，$\angle BAE=180°-\angle CBA=90°$，此时 $\angle CAE=\angle BAE-\angle BAC=60°$.

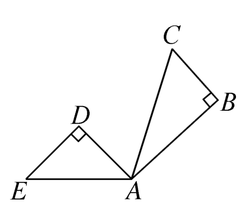


图 1

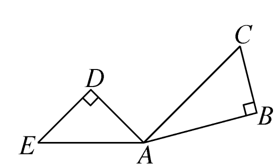


图 2

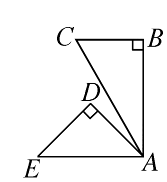


图 3

3. 解：(1) 110

(2) ① $\angle APC=\alpha+\beta$，理由如下：

过点 P 作 $PE /\!/ AB$ 交 ON 于点 E，则 $\angle APE=\angle PAB=\alpha$. 因为 $AB /\!/ CD$，所以 $PE /\!/ CD$，所以 $\angle CPE=\angle PCD=\beta$，所以 $\angle APC=\angle APE+\angle CPE=\alpha+\beta$.

②$\angle APC=|\alpha-\beta|$. **提示**：与①同法作平行线. 当点 P 在线段 OB 上时，$\angle APC=\beta-\alpha$；当点 P 在射线 DM 上时，$\angle APC=\alpha-\beta$.

(3) $\angle B=\angle CGF+100^\circ$，理由如下：

过点 C 在 $\angle DCG$ 内部作 $CH /\!/ DE$，与(2)同理可证 $\angle DCG=\angle CGF+\angle D$. 所以 $\angle B=\angle BCD+5^\circ=\angle CGF+\angle D+5^\circ=\angle CGF+100^\circ$.

期末压轴 19

2025 年淮安市涟水县期末压轴题

1. D **提示**：因为 $m^2=2^{10}\times(1+2^3)=2^{10}\times3^2=(2^5\times3)^2=96^2$，所以 $m=96$.

2. $\begin{cases}x=4,\\y=2\end{cases}$ **提示**：由表可知，$\begin{cases}x=2,\\y=1\end{cases}$ 满足最初的两个方程，所以 $2a+b=p$，$2m+n=q$. 因此，$4a+2b=2p$，$4m+2n=2q$，故 $\begin{cases}x=4,\\y=2\end{cases}$ 即为所求的方程组的公共解.

3. 解：**【综合实践】**平移　旋转

【理解运用】2

【拓展迁移】作点 P 关于 BC 的对称点 P'，连接 $P'B$，$P'C$，则 $\angle P'BC=\angle P'CB=\angle PBC=\angle PCB=20^\circ$，所以 $\angle BP'C=\angle BPC=140^\circ$，所以 $\angle PBP'=\angle PCP'=40^\circ=\angle EBA=\angle DCA$. 由对称易得，$BP=BP'$，$CP=CP'$. 连接 AP'. 又因为 $BE=BA$，$DC=AC$，所以易证 $\triangle BEP\cong\triangle BAP'$(SAS)，$\triangle DCP\cong\triangle ACP'$(SAS)，所以 $\angle BPE+\angle CPD=\angle BP'A+\angle CP'A=\angle BP'C=140^\circ$，所以 $\angle DPE=360^\circ-\angle BPC-\angle BPE-\angle CPD=80^\circ$.

期末压轴 20

2025 年连云港市期末压轴题

1. D **提示**：设这列数中，取 -1 的有 x 个数，取 3 的有 y 个数，取 0 的有 $(2\ 025-x-y)$ 个数，则 $\begin{cases}-x+3y=13,\\x+9y=59,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=5,\\y=6.\end{cases}$ 所以要求的代数式的值为 $5\times(-1)^3+6\times3^3=157$.

2. 112 **提示**：由四边形内角和和平角的性质，易知 $\angle A+\angle DA'E=360^\circ-(\angle ADA'+\angle AEA')=\angle1+\angle2=88^\circ$. 由折叠，知 $\angle A=\angle DA'E=44^\circ$. 所以 $\angle ABC+\angle ACB=180^\circ-\angle A=136^\circ$. 由 BA'，CA' 分别平分 $\angle ABC$，$\angle ACB$，可得 $\angle A'BC+\angle A'CB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=68^\circ$. 再由三角形内角和定理，得 $\angle BA'C=112^\circ$.

3. (1) **证明**：由 $AB /\!/ DE$，得 $\angle1+\angle CAD+\angle ADE=180^\circ$. 由 $AC /\!/ DF$，得 $\angle2+\angle ADE+\angle CAD=180^\circ$，所以 $\angle1=\angle2$.

(2) **解**：$\angle3+\angle4-\angle2=180^\circ$，证明如下：

由四边形内角和的性质，及(1)中证明过程，可得 $\angle3+\angle4=360^\circ-(\angle CAD+\angle ADE)=360^\circ-(180^\circ-\angle2)=180^\circ+\angle2$，所以 $\angle3+\angle4-\angle2=180^\circ$.

(3) **解**：因为 $\angle AQD=125^\circ$，所以 $\angle DAQ+\angle ADQ=180^\circ-\angle AQD=55^\circ$. 又因为 $\angle DAQ=\frac{1}{4}\angle BAD$，$\angle ADQ=\frac{1}{4}\angle ADF$，所以 $\angle BAD+\angle ADF=220^\circ$. 由题图及(1)中所证，可得 $\angle BAD+\angle ADF=\angle1+\angle CAD+\angle ADE+\angle2=\angle1+180^\circ$，所以 $\angle1=220^\circ-180^\circ=40^\circ$.

(4) $(180n-mn-180)$ **提示**：与(3)同理，$\angle DAQ+\angle ADQ=180^\circ-\angle AQD=(180-m)^\circ$，所以 $\angle BAD+\angle ADF=n(180-m)^\circ$. 由题图及(1)中所证，得 $\angle BAD+\angle ADF=\angle1+180^\circ$，所以 $\angle1=n(180-m)^\circ-180^\circ=(180n-mn-180)^\circ$. 由 $AB /\!/ DE$，得 $\angle G=\angle1=(180n-mn-180)^\circ$.