第 8 章　四边形

本章导读

本章先探索并证明平行四边形的性质定理和判定定理，在此基础上探索并证明矩形、菱形、正方形的性质定理和判定定理，再利用图形的旋转，研究三角形中位线. 学好本章知识是学好平面图形的关键，也为研究"圆"的对称性打好基础，在整个初中数学教学中起到了承上启下的作用.

超能聚焦镜

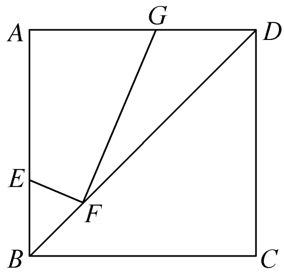
焦点1　平行四边形的性质与判定

【思维解读】平行四边形是中心对称图形，它具有对边平行且相等、对角相等、邻角互补、对角线互相平分等性质，性质定理的逆命题就是它的判定；当平行四边形有一角为直角或对角线相等时即为矩形，当平行四边形有一组邻边相等或对角线垂直时即为菱形，而当四边相等且对角线相等时就是正方形了，由这些定义、定理可解答相关四边形的问题.

【例题展示 1】(1)已知菱形的周长为 $4\sqrt{5}$，两条对角线的和为 6，则菱形的面积为（　　）

A. 2　　B. $\sqrt{5}$　　C. 3　　D. 4

(2)(2024 · 盐城市响水县期末)如图，在正方形 $ABCD$ 中，$AB=6$，E 是边 AB 上的点，且 $BE=\frac{1}{3}AB$，F 是对角线 BD 所在直线上一点且 $BF=BE$. 过点 F 作 $\angle EFG=90^\circ$，边 FG 交直线 AD 于点 G，则 AG 的长为____________.



分析：(1) 设该菱形对角线的长分别为 $2x$，$2y$. 根据条件，得 $\begin{cases}2x+2y=6,\\ \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{5},\end{cases}$ 所以 $xy=\frac{1}{2}[(x+y)^2-(x^2+y^2)]=2$，所以菱形的面积为 $2xy=4$.

(2)分两种情况讨论：如图 1，当点 F 在线段 BD 上时，过点 G 作 $GH\perp AD$ 交 BD 于点 H. 由正方形的性质，得 $AD=AB=6$，$\angle A=90°$，则 $\angle ADB=\angle ABD=45°$，$BD=\sqrt{AD^2+AB^2}=6\sqrt{2}$，所以 $\angle GHD=\angle GDH=45°$，则 $GD=GH$，可求得 $DH=\sqrt{2}GH$. 由 $BF=BE=\frac{1}{3}AB=2$，得 $\angle BFE=\angle BEF=67.5°$，则 $\angle HFG=22.5°$. 又因为 $\angle GHD=45°=\angle HFG+\angle HGF$，所以 $\angle HGF=\angle HFG=22.5°$. 所以 $FH=GH$. 因为 $GH+DH=FH+DH=DF=BD-BF$，即 $GH+\sqrt{2}GH=DF=6\sqrt{2}-2$，所以 $GD=GH=14-8\sqrt{2}$. 所以 $AG=AD-GD=8\sqrt{2}-8$. 如图 2，当点 F 在 DB 的延长线上时，过点 G 作 $GL\perp AD$ 交 DB 的延长线于点 L. 同理 $GL=GD$，则 $DL=\sqrt{2}GL$. 因为 $BF=BE$，$\angle EFG=90°$，所以 $\angle BFE=\angle BEF=22.5°$，所以 $\angle DFG=112.5°$. 易得 $\angle LFG=\angle LGF=67.5°$，则 $GL=FL$. 由 $DL-FL=BD+BF$，得 $\sqrt{2}GL-GL=6\sqrt{2}+2$，所以 $GD=GL=14+8\sqrt{2}$. 所以 $AG=GD-AD=8\sqrt{2}+8$.

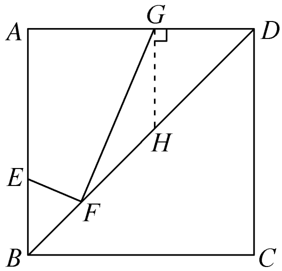


图 1

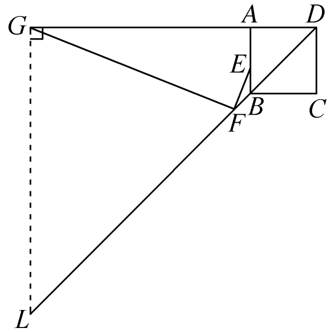


图 2

答案:(1)D　(2)$8\sqrt{2}-8$ 或 $8\sqrt{2}+8$

【超级链接】巅峰训练 7 第 1,2 题.

【例题展示 2】定义:连接四边形的一条对角线,若四边形被分成一个直角三角形和一个等腰三角形,则称这个四边形是奇特四边形,这条对角线叫作奇特线.

(1) 如图 1,矩形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 交于点 O,$BE/\!/AC$,$CE/\!/BD$,求证:四边形 $ABEC$ 是奇特四边形.

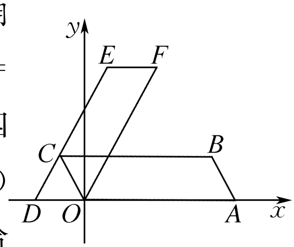
(2) 如图 2,四边形 $ABCD$ 为矩形,$AD>AB$,点 E 在边 BC 上,O 为对角线 BD 的中点,连接 EO 并延长,交 AD 于点 F,连接 BF. 若四边形 $ABED$ 是奇特四边形,且 BD 为奇特线,求证:四边形 $BEDF$ 为菱形.

(3) 如图 3,在菱形 $ABCD$ 中,$AB=10$,$AC=12$,O 是对角线的交点,在 AB 的左侧有一点 E,使得四边形 $OAEB$ 为奇特四边形,且 AB 为奇特线. 若四边形 $OAEB$ 的面积为 74,求 AE 的长.

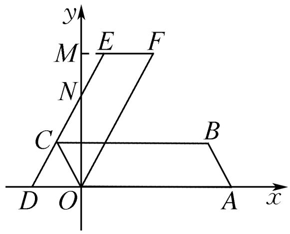
焦点2 旋转变换

【思维解读】旋转是几何图形运动变换的基本形式之一，它是指将一个图形绕某个定点按指定方向转动一个特定角度，从而得到另一个图形. 在解决几何问题时，当题目中的条件与结论之间的联系不够明显，尤其是图形条件分散在不同位置时，通过旋转一定的特殊角度(如 60°，90°，120°等)，可以将相关线段或三角形转移到新的位置，使原本分散的条件集中起来. 这种思路在平行四边形(包括矩形、菱形、正方形等特殊平行四边形)中尤为常用——因为平行四边形本身具有中心对称性，绕其对角线交点旋转 180°可实现重合，而绕某一顶点旋转 90°，则可能将某一边转到相邻边，从而构造全等三角形. 这样不仅使辅助线的添加自然流畅，也常让解题过程变得简洁清晰.

【例题展示 1】(2025·常州市溧阳市期中)如图，四边形 $OABC$ 是平行四边形，$OA=6$，$OC=2$，点 A 在 x 轴的正半轴上，将平行四边形 $OABC$ 绕点 O 逆时针旋转 $\alpha^\circ(0<\alpha<90)$得到平行四边形 $OFED$，点 C 的对应点 D 恰好落在 x 轴的负半轴上，且 DE 经过点 C，则点 E 的坐标为________.



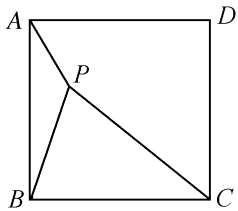
分析：如图，延长 FE 交 y 轴于点 M. 由平行四边形的性质，可得 $EF\parallel DO$，$ED\parallel FO$，$EF=DO$，所以 $EM\perp y$ 轴. 由旋转的性质，可得 $OD=OC=2$，$OF=OA=6$，$\angle OCB=\angle ODC$. 由等腰三角形的性质，平行线的性质，可得 $\angle COD=\angle ODC=\angle OCD$，于是$\triangle OCD$ 是等边三角形，得到$\angle CDO=60^\circ$，求出$\angle OND=30^\circ$. 由平行线的性质，可得$\angle MOF=\angle OND=30^\circ$. 由含 30°角的直角三角形的性质，可得 $MF=\frac{1}{2}OF=3$，所以 $OM=\sqrt{OF^2-MF^2}=3\sqrt{3}$，所以 $ME=MF-EF=3-2=1$，所以点 E 的坐标是$(1,3\sqrt{3})$.



答案：$(1,3\sqrt{3})$

【超级链接】第 8 章综合练(1)第 5 题.

【例题展示 2】如图，P 是正方形 $ABCD$ 内一点，若 $PA:PB:PC=1:2:3$，则$\angle APB=$________.

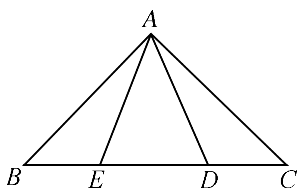


分析：将$\triangle APB$绕点 B 顺时针旋转 $90°$得到$\triangle CP'B$，连接 PP'，则$\triangle APB\cong\triangle CP'B$. 设 $PA=a(a>0)$，则 $PB=2a$，$PC=3a$. 由$PB=P'B$，$\angle PBP'=90°$，得$\angle BP'P=45°$. 由勾股定理，得 $PP'=2\sqrt{2}a$. 在$\triangle PP'C$ 中，因为 $P'C=PA=a$，$PC=3a$，所以$P'C^2+PP'^2=PC^2$，所以由勾股定理的逆定理，可知$\triangle PP'C$ 是直角三角形，且$\angle PP'C=90°$. 所以$\angle APB=\angle CP'B=\angle BP'P+\angle PP'C=135°$.

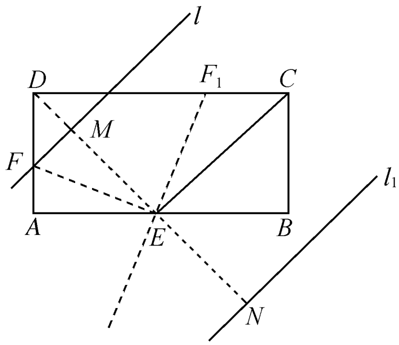
答案：$135°$

【超级链接】巅峰训练 7 第 2 题.

【例题展示 3】如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，点 D，E 在边 BC 上，且$\angle DAE=45°$，求证：$CD^2+BE^2=DE^2$.



边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $\angle A=\angle B=90^{\circ}$，$AD=BC=2$. 因为 $AB=4$，E 是 AB 的中点，所以 $AE=EB=2=BC=AD$，所以 $\triangle ADE$，$\triangle ECB$ 是等腰直角三角形，所以 $\angle AED=\angle BEC=45^{\circ}$，所以 $\angle DEC=90^{\circ}$. 因为直线 $l /\!/ EC$，所以 $ED\perp$ 直线 l，所以 $EM=2=AE$，所以点 A 与点 M 关于直线 EF 对称. 因为 $\angle MDF=\angle MFD=45^{\circ}$，$DM=DE-EM=2\sqrt{2}-2$，所以 $DF=\sqrt{2}DM=4-2\sqrt{2}$.



当直线 l 在直线 EC 下方，即图中直线 l_1 所在位置时，同理可知 $\angle DEF_1=\angle BEF_1=\angle DF_1E$，所以 $DF_1=DE=2\sqrt{2}$.

综上所述，DF 的长为 $2\sqrt{2}$ 或 $4-2\sqrt{2}$.

答案：$2\sqrt{2}$ 或 $4-2\sqrt{2}$

【超级链接】巅峰训练 6 第 5 题.

焦点5 中点的联想

【思维解读】因为“三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半”“直角三角形斜边上的中线等于斜边长的一半”，所以当题设条件中出现“中点”这一条件时，我们可通过构造“中位线”与“中线”，来证明欲证的结论.

【例题展示 1】【三角形中位线定理】

如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，D，E 分别是边 AB，AC 的中点. 请直接写出 DE 和 BC 的关系.

【应用】

如图 2，在四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别是边 AB，AD 的中点. 若

$BC=5$，$CD=3$，$EF=2$，$\angle AFE=45°$，求$\angle ADC$的度数.

【拓展】

如图 3，在四边形$ABCD$中，AC与BD相交于点E，M，N分别为边AD，BC的中点，连接MN分别交AC，BD于点F，G，$EF=EG$. 求证：$AC=BD$.

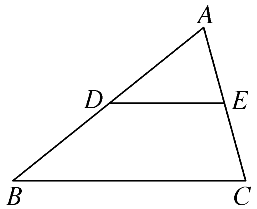


图 1

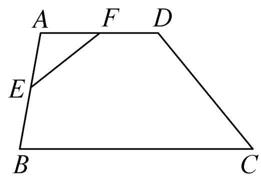


图 2

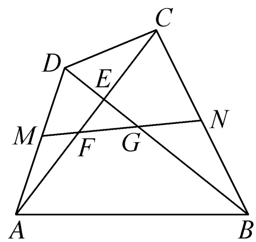


图 3

分析：【三角形中位线定理】根据三角形中位线定理即可得到结论.

【应用】连接BD. 根据三角形中位线定理，可得$EF\parallel BD$，$BD=2EF=4$，所以$\angle ADB=\angle AFE=45°$. 根据勾股定理的逆定理，可得$\angle BDC=90°$，所以$\angle ADC=\angle BDC+\angle ADB=135°$.

【拓展】取DC的中点H，连接MH，NH，则MH，NH分别是$\triangle ACD$，$\triangle BCD$的中位线. 由三角形中位线定理，可得$MH\parallel AC$且$MH=\frac{1}{2}AC$，$NH\parallel BD$且$NH=\frac{1}{2}BD$，再根据等腰三角形的性质即可得出结论.

答案：【三角形中位线定理】$DE\parallel BC$且$DE=\frac{1}{2}BC$.

【应用】如图 4，连接BD. 因为E，F分别是边AB，AD的中点，所以$EF\parallel BD$，$BD=2EF=4$，所以$\angle ADB=\angle AFE=45°$. 因为$BC=5$，$CD=3$，所以$BD^2+CD^2=BC^2$，所以$\angle BDC=90°$，所以$\angle ADC=\angle ADB+\angle BDC=135°$.

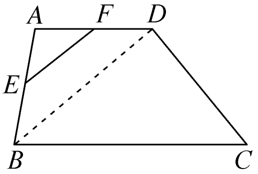


图 4

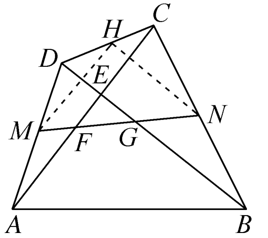
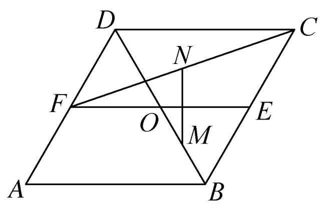


图 5

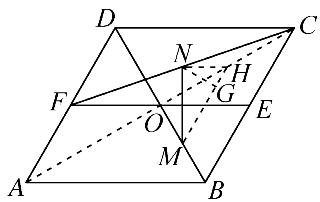
【拓展】如图 5，取 DC 的中点 H，连接 MH，NH. 因为 M，H 分别是 AD，DC 的中点，所以 MH 是 $\triangle ADC$ 的中位线，所以 $MH /\!/ AC$ 且 $MH=\frac{1}{2}AC$，同理可得 $NH /\!/ BD$ 且 $NH=\frac{1}{2}BD$. 因为 $EF=EG$，所以 $\angle EFG=\angle EGF$. 又因为 $MH /\!/ AC$，$NH /\!/ BD$，所以 $\angle HMN=\angle EFG$，$\angle HNM=\angle EGF$，所以 $\angle HMN=\angle HNM$，所以 $MH=NH$，所以 $AC=BD$.

【超级链接】巅峰训练 9 第 2 题.

【例题展示 2】(2025·扬州市期中)如图，在菱形 $ABCD$ 中，E 为 BC 的中点，F 是 AD 的中点，EF 交对角线 BD 于点 O，连接 CF，取 OB 的中点 M，取 CF 的中点 N，连接 MN. 若 $\angle A=60°$，$AB=2$，则 MN 的长度为________.



分析：如图，连接 AC. 因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $AD=BC=AB=2$，$AD /\!/ BC$，所以 $\angle OBE=\angle ODF$，$\angle DFO=\angle BEO$. 因为 E 为 BC 的中点，F 是 AD 的中点，所以 $DF=AF=\frac{1}{2}AD=$



$\frac{1}{2}BC=CE=BE=1$，所以$\triangle DFO\cong\triangle BEO$(ASA)，所以 $DO=BO$. 所以 AC 过点 O，$AC\perp BD$，$\angle DAO=\angle BCO=30°$，所以 $FO=AF=DF=1$，所以$\angle FOA=\angle FAO=30°$. 取 CO 的中点 H，连接 NH，HM，过点 N 作 $NG\perp MH$ 于点 G. 因为 M 是 OB 的中点，N 是 CF 的中点，H 是 CO 的中点，所以 $MH\parallel BC$，$MH=\frac{1}{2}BC=1$，$NH\parallel FO$，$NH=\frac{1}{2}FO=\frac{1}{2}$，所以$\angle NHA=\angle AOF=30°$，$\angle OHM=\angle ACB=30°$，所以$\angle NHM=60°$. 因为 $NG\perp MH$，所以$\angle GNH=30°$，所以 $HG=\frac{1}{2}NH=\frac{1}{4}$，$NG=\frac{\sqrt{3}}{4}$，所以 $GM=\frac{3}{4}$，所以 $MN=\sqrt{NG^2+GM^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

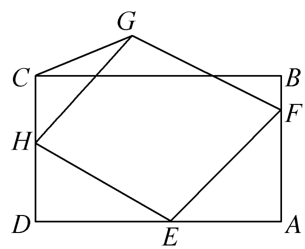
答案：$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【超级链接】巅峰训练 9 第 4 题.

焦点6　最值问题

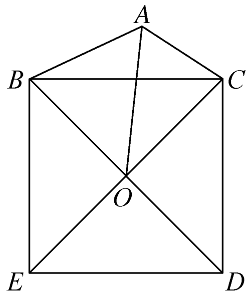
【思维解读】在平面几何的动态问题中，当某几何元素在给定条件下变动时，求某几何量(如线段的长度、图形的周长或面积、角的度数以及它们的和与差)的最大值或最小值问题，称为几何最值问题. 解题的理论依据主要是“两点之间线段最短”“垂线段最短”，其他情形通过平移、轴对称、旋转等几何变换转化为上述情形求之.

【例题展示】(1)(2024 · 无锡市锡山区期末)如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AD=7$，$CD=4$，E 是 AD 上一点，且 $AE=3$，F 是边 AB 上的动点，以 EF 为一边作菱形 $EFGH$，使顶点 H 落在 CD 上，连接 CG，则$\triangle HCG$ 面积的最小值为　(　　)



A. 1　　B. $\frac{3}{2}$　　C. 3　　D. $\frac{7}{2}$

(2)(2024·宿迁市泗洪县期末)在$\triangle ABC$中,$AB=4$,$AC=2$,以BC为边在$\triangle ABC$外作正方形$BCDE$,BD,CE交于点O,则线段AO长的最大值为________.



分析:(1)如图1,延长HG,AB相交于点M,延长DC,过点G作$GN\perp DC$于点N,则$\angle GNH=\angle A=90°$. 因为四边形$ABCD$为矩形,四边形$EFGH$为菱形,所以$AB=CD=4$,$DN\parallel AM$,$EF\parallel HM$,$GH=EF$,所以$\angle GHN=\angle M$,$\angle EFA=\angle M$,所以$\angle GHN=\angle EFA$,所以$\triangle GNH\cong\triangle EAF$(AAS),所以$NG=AE=3$. 当$EF$,$EH$取得最大值时,$DH$取得最大值,此时$CH$取得最小值,$\triangle HCG$的面积取得最小值. 当$EF$取得最大值时,点$F$与点$B$重合,此时$EF_{最大值}=\sqrt{AE^2+AB^2}=5$,所以$EH_{最大值}=5$,所以$DH=\sqrt{EH^2-DE^2}=3$,所以$CH_{最小值}=CD-DH=1$,所以$S_{\triangle HCG最小值}=\frac{1}{2}CH\cdot NG=\frac{1}{2}\times1\times3=\frac{3}{2}$.

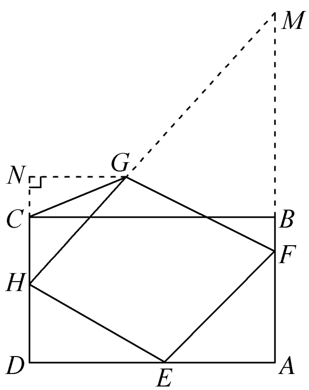


图 1

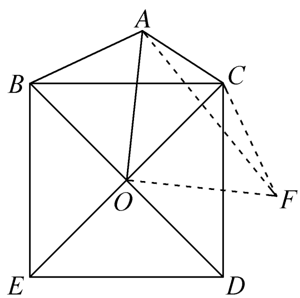


图 2

(2)如图 2,以 AO 为边作等腰直角三角形 AOF,且$\angle AOF=90^\circ$. 因为四边形 $BCDE$ 是正方形,所以 $BO=CO$,$\angle BOC=90^\circ$. 因为$\triangle AOF$ 是等腰直角三角形,所以 $AO=FO$,$AF=\sqrt{2}AO$. 因为$\angle BOC=\angle AOF=90^\circ$,所以$\angle BOA=\angle COF$. 又因为 $BO=CO$,$AO=FO$,所以$\triangle AOB\cong\triangle FOC$(SAS),所以 $FC=AB=4$. 当 A,C,F 三点不共线时,$AF<AC+CF$;当 A,C,F 三点共线时,$AF=AC+CF$. 所以 $AF\leqslant AC+CF=6$,所以 AF 长的最大值为 6. 因为 $AF=\sqrt{2}AO$,所以 AO 长的最大值为 $3\sqrt{2}$.

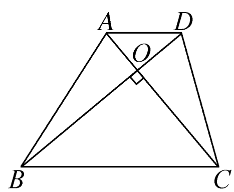
答案:(1)B　(2)$3\sqrt{2}$

【超级链接】巅峰训练 8 第 6 题,巅峰训练 9 第 5 题.

焦点7　梯形问题

【思维解读】梯形是四边形的一种特殊类型,与平行四边形、矩形、正方形等存在密切的联系,比如平行四边形是两组对边分别平行的四边形,而梯形只有一组对边平行. 学习梯形有助于学生构建完整的四边形知识体系. 梯形中的辅助线较多,其实质是采用割补法,将梯形化归为三角形、平行四边形问题,解题时,要根据题目的条件和结论来确定作哪一种辅助线.

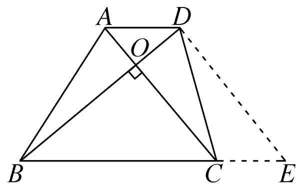
【例题展示】(1) 如图,已知梯形 $ABCD$,$AD/\!/BC$,$AC\perp BD$ 于点 O,$AD=2$,$BC=6$,$AC=5$,则 $BD=$________.



(2) 在梯形 $ABCD$ 中,$AD/\!/BC$,AH 是高,已知 $AB=\sqrt{17}$,$AD=3$,$CD=5$,$AH=4$,则梯形 $ABCD$ 的面积是__________.

分析:(1) 如图,过点 D 作 $DE/\!/AC$ 交 BC 的延长线于点 E,可得四边形

$ACED$ 是平行四边形，$\triangle BDE$ 是直角三角形，所以 $CE=AD=2$，$DE=AC=5$，所以 $BE=BC+CE=6+2=8$. 在 $Rt\triangle BDE$ 中，$BD=\sqrt{BE^2-DE^2}=\sqrt{8^2-5^2}=\sqrt{39}$.



(2) 过点 D 作 $DE\perp BC$ 于点 E. 因为 AH 是高，$AH=4$，所以 $DE=4$. 因为 $CD=5$，所以 $CE=\sqrt{5^2-4^2}=3$. 因为 $AB=\sqrt{17}$，所以 $BH=\sqrt{(\sqrt{17})^2-4^2}=1$. 因为 $AD/\!/BC$，所以 $HE=AD=3$. 分以下三种情况：①如图 1，梯形 $ABCD$ 的面积为 $(3+1+3+3)\times4\div2=20$；②如图 2，梯形 $ABCD$ 的面积为 $(3+1)\times4\div2=8$；③如图 3，梯形 $ABCD$ 的面积为 $(3+3+3-1)\times4\div2=16$. 综上所述，梯形 $ABCD$ 的面积是 20 或 8 或 16.

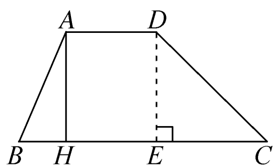


图 1

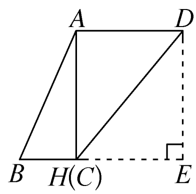


图 2

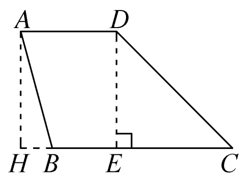


图 3

答案：(1) $\sqrt{39}$

(2) 20 或 8 或 16

【超级链接】巅峰训练 10 第 2 题.