

初中数学

小题才王做[®]

恩波教育研究中心 编

巅峰版

八年级下
· 苏科版 ·

本册主编 朱奎祥 刘 军 渠东剑
编 委 高俊元 吴小波 杨 平
姜素青 张 杰 朱奎祥

巅峰讲坛 索引

第 1 讲	通过构造平行四边形集中题目条件	P13T6
第 2 讲	利用平行四边形的中心对称性作图	P14T9
第 3 讲	正方形中十字架模型的应用	P16T10
第 4 讲	在正方形中构造弦图	P19T4
第 5 讲	折叠矩形纸片后重叠三角形的形状与面积	P20T8
第 6 讲	用中位线定理求中点连线的取值范围	P21T2
第 7 讲	通过关联迁移解决新定义四边形问题	P26T8
第 8 讲	菱形中的动态、多结论正误判定问题	P27T4
第 9 讲	平行四边形旋转过程中动静两点的距离最值	P28T8
第 10 讲	通过分解因式解决代数推理问题	P30T13
第 11 讲	类比带分数把分式转化为带分式解决问题	P35T13
第 12 讲	构图法解决代数中的根式问题	P54T18
第 13 讲	平行四边形中的双动点距离最值	P55T5
第 14 讲	正方形绕中心的旋转放缩	P60T11
第 15 讲	手拉手全等模型在正方形中的迁移构图	P62T9
第 16 讲	半角模型的阅读理解及迁移应用	P65T8
第 17 讲	含 60° 角的菱形中等边三角形的运动问题	P70T2
第 18 讲	探索梯形中位线和一般四边形中位线的最值	P74T2
第 19 讲	寻找动点轨迹求正方形中的最值	P80T2
第 20 讲	综合运用等长线段转化、瓜豆原理和将军饮马模型	P83T2

巅峰训练篇

第6章 数据的收集、整理与描述

巅峰训练 1 普查与抽样调查 统计图 统计案例:货比三家	1
巅峰训练 2 频数与频率 频数分布表和频数分布直方图 统计案例:初中生的视力 情况调查	3
第6章综合练	5

第7章 认识概率

巅峰训练 3 随机事件 概率	7
巅峰训练 4 频率与概率	9
第7章综合练	11

第8章 四边形

巅峰训练 5 平行四边形	13
巅峰训练 6 特殊的平行四边形(1)	15
巅峰训练 7 特殊的平行四边形(2)	17
巅峰训练 8 特殊的平行四边形(3)	19
巅峰训练 9 三角形的中位线	21
巅峰训练 10 梯形	23
第8章综合练(1)	25
第8章综合练(2)	27

第9章 因式分解

巅峰训练 11 因式分解的概念 提公因式法	29
巅峰训练 12 公式法	31
第9章综合练	33

第10章 分式

巅峰训练 13 分式的概念 分式的基本性质	35
巅峰训练 14 分式的加减 分式的乘除	37
巅峰训练 15 分式方程	39



第 10 章综合练(1)·····	41
第 10 章综合练(2)·····	43

第 11 章 二次根式

巅峰训练 16 二次根式的概念·····	45
巅峰训练 17 二次根式的乘除 二次根式的加减(1)·····	47
巅峰训练 18 二次根式的乘除 二次根式的加减(2)·····	49
第 11 章综合练(1)·····	51
第 11 章综合练(2)·····	53
期末综合练(1)·····	55
期末综合练(2)·····	57
期末综合练(3)·····	59

巅峰专题篇

巅峰专题 1 几何作图综合·····	61
巅峰专题 2 特殊的平行四边形中的常见模型·····	64
巅峰专题 3 因式分解在分式与根式中的应用·····	67

期末压轴篇

期末压轴 1 2025 年南京市玄武区期末压轴题·····	69
期末压轴 2 2025 年南京市秦淮区期末压轴题·····	70
期末压轴 3 2025 年南京市联合体期末压轴题·····	71
期末压轴 4 2025 年苏州市期末压轴题·····	72
期末压轴 5 2025 年无锡市期末压轴题·····	73
期末压轴 6 2025 年常州市期末压轴题·····	74
期末压轴 7 2025 年镇江市期末压轴题·····	75
期末压轴 8 2025 年南通市期末压轴题·····	76
期末压轴 9 2025 年盐城市期末压轴题·····	77
期末压轴 10 2025 年泰州市期末压轴题·····	78
期末压轴 11 2025 年扬州市邗江区、江都区期末压轴题·····	79
期末压轴 12 2025 年扬州市宝应县、高邮市期末压轴题·····	80
期末压轴 13 2025 年徐州市期末压轴题·····	81
期末压轴 14 2025 年宿迁市泗阳县期末压轴题·····	82
期末压轴 15 2025 年淮安市期末压轴题·····	83
期末压轴 16 2025 年连云港市期末压轴题·····	84

答案全解精析(另册)

附:做题小帮手·巅峰指南

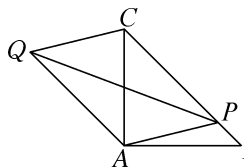


第8章 四 边 形

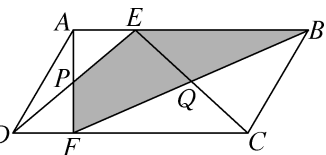
巅峰训练 5 平行四边形



1. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle ACB = 45^\circ$, $AB = 4\sqrt{2}$, P 为边 BC 上任意一点, 连接 PA , 以 PA, PC 为邻边作 $\square PAQC$, 连接 PQ , 则 PQ 长的最小值为 ()
- A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. $4\sqrt{2}$



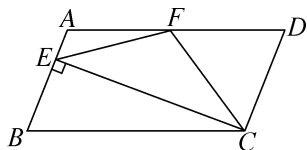
(第1题)



(第2题)

2. (2025·盐城市期中) 如图, F 是 $\square ABCD$ 的边 CD 上的点, Q 是 BF 的中点, 连接 CQ 并延长交 AB 于点 E , 连接 AF 与 DE 相交于点 P . 若 $S_{\triangle APD} = 4 \text{ cm}^2$, $S_{\square ABCD} = 64 \text{ cm}^2$, 则阴影部分的面积为 ()
- A. 28 cm^2 B. 26 cm^2
C. 24 cm^2 D. 20 cm^2
3. 在平面直角坐标系中, $\square OABC$ 的顶点 O 为坐标原点, 点 A, B 的坐标分别为 $(m, \frac{3}{4}m + \frac{8}{3}), (4, 3)$, 则 $\square OABC$ 的面积为 ()
- A. $\frac{16}{3}$ B. $\frac{32}{3}$
C. 10 D. 随 m 的变化而变化

4. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $AD = 2AB$, F 是 AD 的中点, 作 $CE \perp AB$, 垂足 E 在线段 AB 上, 连接 EF ,



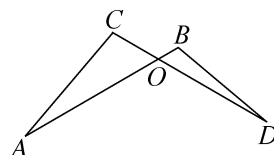
- CF . 现有下列结论: ① $\angle DCF = \frac{1}{2}\angle BCD$; ② $\angle DFE = 3\angle AEF$; ③ $EF = CF$; ④ $S_{\triangle BEC} = 2S_{\triangle CEF}$. 其中结论一定成立的是 ()
- A. ①②③④ B. ①②③
C. ①②④ D. ①③④

5. 在 $\square ABCD$ 中, $\angle ABC, \angle BCD$ 的平分线分别交 AD 于点 E, F . 若 $AB = a, AD = b$, 则 EF 的长为 _____ (用含 a, b 的代数式表示).

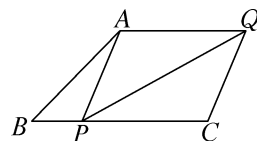
6. 如图, AB, CD 相交于点 $O, AB = CD, \angle AOC = 60^\circ, \angle ACD + \angle ABD = 210^\circ$, 则线段 AB, AC, BD 之间的等量关系为 _____.



巅峰讲坛



(第6题)

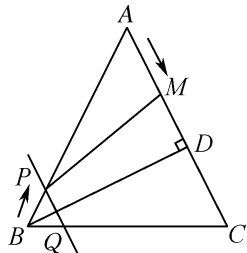


(第7题)

7. 如图, $\angle ABC = 45^\circ, AB = 2, BC = 2\sqrt{2}$, P 为边 BC 上一动点, $AQ \parallel BC, CQ \parallel AP$, AQ, CQ 交于点 Q , 则四边形 $APCQ$ 的形状是 _____; 连接 PQ , 当 PQ 取得最小值时, 四边形 $APCQ$ 的周长为 _____.
8. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 20 \text{ cm}$, $BD \perp AC$ 于点 D , 且 $BD = 16 \text{ cm}$. 点 M 从点 A 出发, 沿 AC 方向匀速运动, 速度为 4 cm/s ; 同时点 P 从点 B 出发, 沿 BA 方向匀速运动, 速度为 1 cm/s . 过点 P 的直线 $PQ \parallel AC$, 交 BC 于点 Q , 连接 PM , 设运动时间为 $t \text{ s}$ ($0 < t < 5$), 解答下列

问题:

- (1) $AD =$ _____ cm.
- (2) 求证: $PB = PQ$.
- (3) 当 t 为何值时, 以 P, Q, D, M 为顶点的四边形是平行四边形?



9. (2025 · 镇江市京口区校级期末) 小明在学习平行四边形时, 知道可以利用图形的中心对称性巧妙地解决图形分割问题. 已知 $\square ABCD$, 点 P 在边 BC 上.



巅峰讲坛

请仅用无刻度直尺完成下列作图, 并保留必要的作图痕迹.

- (1) 如图 1, 点 E, F 分别在边 AD, BC 上, $AE = \frac{1}{3}AD, BF = \frac{1}{3}BC$, 过点 P 作两条直线 l_1, l_2 分别交边 AD 于点 M, N , 使得 $S_{\triangle PMN} = \frac{1}{3}S_{\square ABCD}$. (要求: 用两种不同类型的方法作出 PM, PN)
- (2) 如图 2, 点 E, F 分别在边 AD, BC 上, $AE = \frac{1}{4}AD, BF = \frac{1}{4}BC$, 过点 P 作两条直线 l_1, l_2 分别交边 AD 于点 M, N , 使得 $S_{\triangle PMN} = \frac{1}{4}S_{\square ABCD}$. (要求: 用两种不同类型的方法作出 PM, PN)

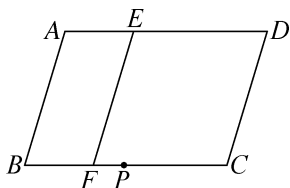


图 1

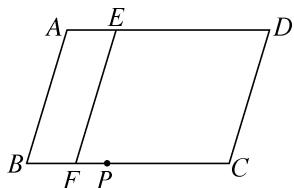
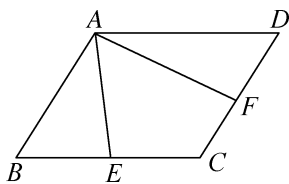


图 2



思维大爆炸

10. (2024 · 镇江市京口区期中) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, E, F 分别为边 BC, CD 的中点, $\angle EAF = 60^\circ$. 若 $AE = 3, AF = 4$, 则 AB 的长为 _____.



11. 如图 1, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ, AC = BC = 12, D$ 为 AC 上一动点, 连接 BD , 将 $\triangle BCD$ 绕点 C 顺时针旋转 90° , 得到 $\triangle ACE$, 将 AE 绕点 A 逆时针旋转 90° 到 AF .

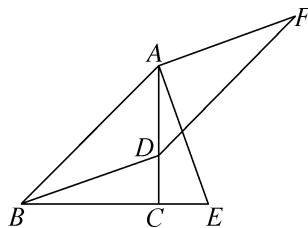


图 1

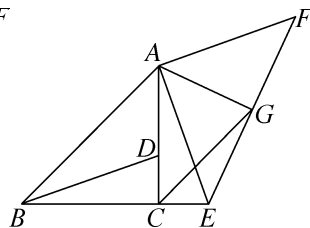


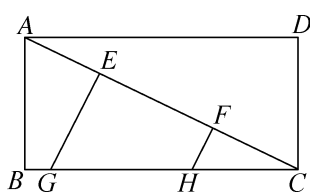
图 2

- (1) 线段 BD 和 AE 的数量关系是 _____, 位置关系是 _____.
- (2) 连接 DF , 证明: 四边形 $ABDF$ 是平行四边形.
- (3) 如图 2, 连接 EF, G 为 EF 的中点, 连接 AG, CG , 设 $CD = t$, 用含 t 的代数式表示 $\triangle ACG$ 的面积.

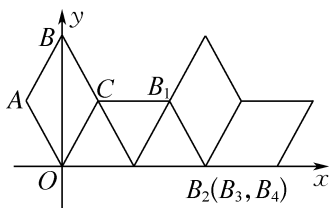
巅峰训练 6 特殊的平行四边形(1)



1. 如图,在矩形 $ABCD$ 中, $AB=5$, E,F 是对角线 AC 上的两点, $AE=CF$,分别过点 E,F 作 AC 的垂线,与边 BC 交于点 G,H .若 $BG=1,CH=4$,则 $EG+FH$ 的值为 ()
- A. $\sqrt{41}$ B. $\sqrt{34}$ C. $4\sqrt{2}$ D. 4

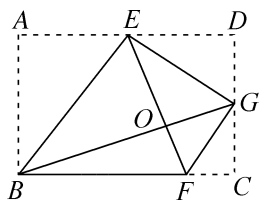


(第1题)

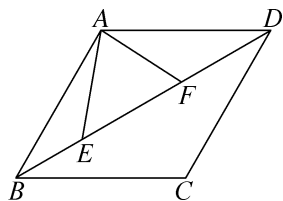


(第2题)

2. (2025·南京市玄武区校级期中)如图,在坐标系中放置一菱形 $OABC$,已知 $\angle ABC=60^\circ,OA=1$,将菱形 $OABC$ 沿 x 轴的正方向无滑动翻转,每次翻转 60° ,连续翻转 2 024 次,点 B 的落点依次为点 B_1, B_2, B_3, \dots ,则点 B_{2024} 的坐标为 ()
- A. $(1\ 348, 0)$ B. $(1\ 348, \sqrt{3})$
- C. $(1\ 350, 0)$ D. $(1\ 350, \frac{\sqrt{3}}{2})$
3. 将矩形 $ABCD$ 按如图所示的方式折叠, BE, EG, FG 为折痕.若顶点 A, D, C 都落在点 O 处,且点 B, O, G 在同一条直线上,同时点 E, O, F 在另一条直线上,则 $\frac{AD}{AB}$ 的值为 ()



(第3题)



(第4题)

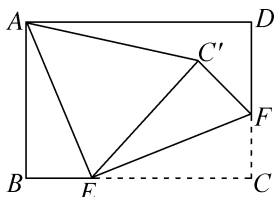
4. 如图,菱形 $ABCD$ 的边长为 3,且 $\angle ABC=$

60° ,点 E, F 在对角线 BD 上运动,且 $EF=2$,连接 AE, AF ,则 $AE+AF$ 的最小值是

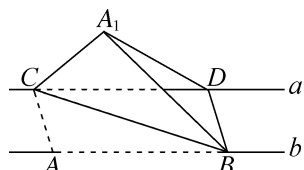
()

- A. $2\sqrt{3}$ B. $\sqrt{6}$ C. $3\sqrt{3}$ D. $\sqrt{13}$

5. 如图,在矩形 $ABCD$ 中, $AB=3,AD=4$, E, F 分别是边 BC, CD 上一点, $EF \perp AE$,将 $\triangle ECF$ 沿 EF 翻折得到 $\triangle EC'F$,连接 AC' .当 BE 的长为 _____ 时, $\triangle AEC'$ 是以 AE 为腰的等腰三角形.

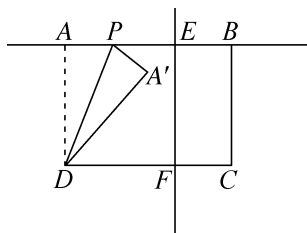


(第5题)

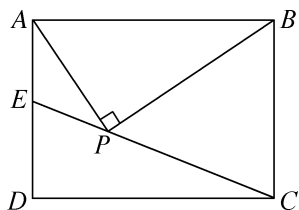


(第6题)

6. 如图, A, B 是直线 b 上的两个定点,点 C, D 在直线 a 上运动(点 C 在点 D 的左侧), $AB=CD=6$ cm. 已知 $a \parallel b$,连接 AC, BD, BC ,把 $\triangle ABC$ 沿 BC 翻折得 $\triangle A_1BC$.当 A_1, D 两点重合时, AC 的长为 _____ cm;当 A_1, D 两点不重合时,若直线 a 与 b 的距离为 $\sqrt{5}$ cm,且以 A_1, C, B, D 为顶点的四边形是矩形,则 AC 的长为 _____ cm.
7. (2025·盐城市阜宁县期中)如图,在矩形 $ABCD$ 中, $AB=12,BC=10$,点 E, F 分别在边 AB, DC 上,且 $AB=3BE, CD=3CF$, P 为直线 AB 上一动点,连接 DP ,将 $\triangle DAP$ 沿 DP 所在直线翻折得到 $\triangle DA'P$,当点 A' 恰好落在直线 EF 上时, AP 的长为 _____.

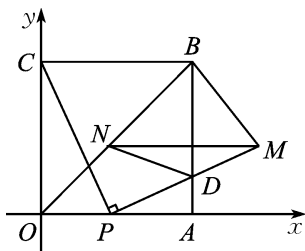


8. (2024 · 无锡市宜兴市期中) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=8, AD=6$, 矩形内有一点 P , 连接 AP, BP, CP , 已知 $\angle APB=90^\circ, CP=CB$, 延长 CP 交 AD 于点 E , 则 $AE=$ _____.



9. 如图, 四边形 $OABC$ 是边长为 4 的正方形, P 为边 OA 上任意一点 (不与点 O, A 重合), 连接 CP , 过点 P 作 $PM \perp CP$, 交 AB 于点 D , 且 $PM=CP$, 过点 M 作 $MN \parallel OA$, 交 OB 于点 N , 设 $OP=t$.

- (1) 求点 M 的坐标. (用含 t 的代数式表示)
 (2) 试判断线段 MN 的长度是否随点 P 位置的变化而改变, 并说明理由.



11. 【问题背景】如图 1, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=4\sqrt{3}, AB < AD$, M, N 分别是边 AB, CD 的中点, 折叠矩形 $ABCD$, 使点 A 落在 MN 上的点 K 处, 折痕为 BP .

【实践操作】(1) 用无刻度的直尺和圆规在图 1 中的边 AD 上作出点 P . (不写作法, 保留作图痕迹)

【基础应用】(2) 求 $\angle BKM$ 的度数和 MK 的长.

【思维探究】(3) 如图 2, 若 E 是直线 MN 上的一个动点, 连接 EB , 在 EB 左侧作等边三角形 BEF , 连接 MF , 则 MF 长的最小值为 _____.

【思维拓展】(4) 如图 3, 若 E 是射线 KM 上的一个动点, 将 $\triangle BEK$ 沿 BE 翻折得到 $\triangle BET$, 延长 CB 至点 Q , 使 $BQ=KE$, 连接 TQ , 则当 $\triangle BTQ$ 是直角三角形时, KE 的长为多少? 请直接写出答案.

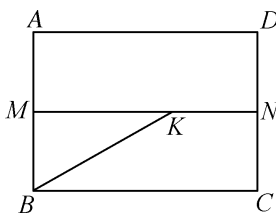


图 1

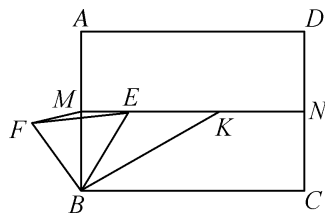


图 2

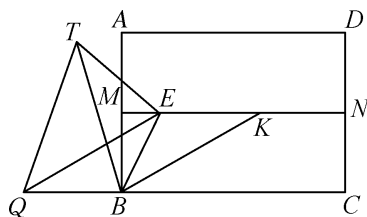
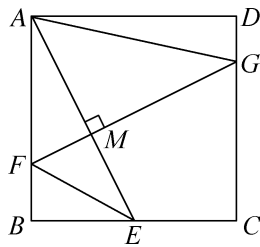


图 3



思维大爆炸

10. (2024 · 淮安市淮阴区期末) 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, E 是 BC 的中点, F, G 分别是边 AB, CD 上的动点, 且 $FG \perp AE$ 交 AE 于点 M , 连接 EF 和 AG , 当 $AB=2$ 时, $EF+AG$ 的最小值为 _____.

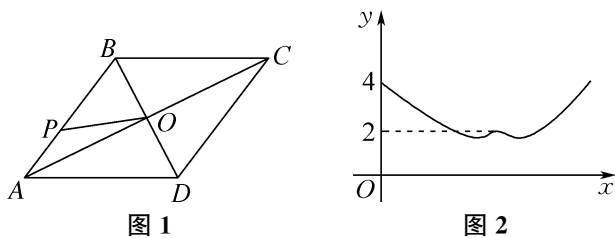


巅峰讲坛

巅峰训练 7 特殊的平行四边形(2)

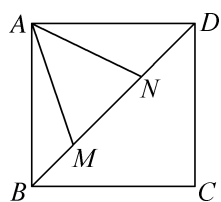


1. (2024·甘肃中考)如图1,动点 P 从菱形 $ABCD$ 的点 A 出发,沿边 $AB \rightarrow BC$ 匀速运动,运动到点 C 时停止. 设点 P 的运动路程为 x , PO 的长为 y , y 与 x 的函数图象如图2所示,当点 P 运动到 BC 的中点时, PO 的长为 ()

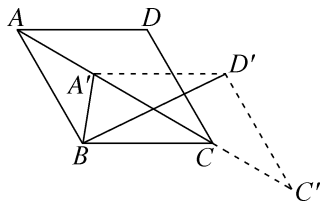


- A. 2 B. 3 C. $\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{2}$

2. (2024·徐州市贾汪区期中)如图,在正方形 $ABCD$ 中, M, N 是对角线 BD 上的两点,且 $\angle MAN = 45^\circ$. 若 $BM = 3, DN = 4$, 则 MN 的长为 ()
- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8



(第2题)



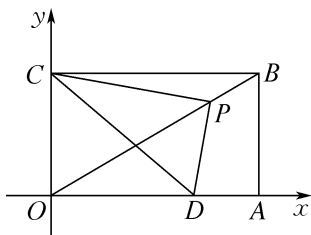
(第3题)

3. (2025·扬州市宝应县期中)如图,在边长为2的菱形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 120^\circ$, 将 $\triangle ADC$ 沿射线 AC 的方向平移得到 $\triangle A'D'C'$, 分别连接 $A'B, D'B$, 则 $A'B + D'B$ 的最小值为 ()
- A. $2\sqrt{6}$ B. $4\sqrt{6}$ C. $4\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

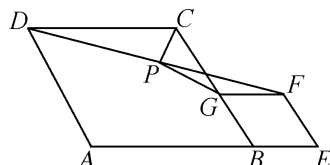
4. 矩形 $OABC$ 在平面直角坐标系 xOy 中的位置如图所示, 已知点 $B(2\sqrt{3}, 2)$, 点 A 在 x 轴上, 点 C 在 y 轴上, P 是对角线 OB 上

一动点(不与原点重合), 连接 PC , 过点 P 作 $PD \perp PC$, 交 x 轴于点 D . 现有下列结论: ① $OA = BC = 2\sqrt{3}$; ② 当点 D 运动到 OA 的中点处时, $PC^2 + PD^2 = 7$; ③ 当 $\triangle ODP$ 为等腰三角形时, 点 D 的坐标为 $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0)$. 其中正确结论的个数是 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3



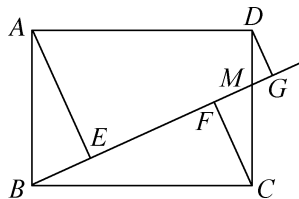
(第4题)



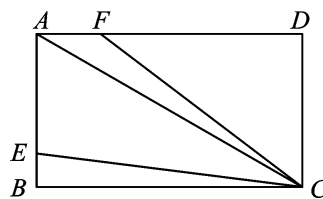
(第5题)

5. 如图, 在菱形 $ABCD$ 和菱形 $BEFG$ 中, 点 A, B, E 在同一直线上, P 是线段 DF 的中点, 连接 PG, PC . 若 $\angle ABC = \angle BEF = 60^\circ$, 则 $\frac{PG}{PC} =$ _____.

6. (2024·扬州市江都区期中)如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 3, BC = 4$, M 是边 CD 上任意一点, 过点 A, C, D 作射线 BM 的垂线, 垂足分别是 E, F, G . 若 $AE + CF + DG = m$, 则 m 的最小值是 _____.



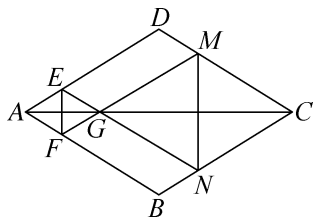
(第6题)



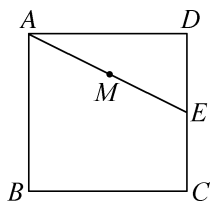
(第7题)

7. 如图, AC 是矩形 $ABCD$ 的对角线, $AB = 2, BC = 2\sqrt{3}$, E, F 分别是线段 AB, AD 上的点, 连接 CE, CF . 当 $\angle BCE = \angle ACF$, 且 $CE = CF$ 时, $AE + AF =$ _____.

8. 如图,菱形 $ABCD$ 的边长为 1, $\angle B = 120^\circ$,将菱形折叠使点 A, C 都落在对角线 AC 上点 G 处,折痕分别为 EF, MN ,则六边形 $DEFBNM$ 的周长为_____.



(第 8 题)



(第 9 题)

9. 如图,正方形 $ABCD$ 的边长为 3 cm, E 为边 CD 上的一点, $\angle DAE = 30^\circ$, M 为 AE 的中点,过点 M 作直线分别与 AD, BC 相交于点 P, Q . 若 $PQ = AE$,则 $AP =$ _____ cm.
10. 如图,四边形 $ABCD$ 是平行四边形, E 为 AB 上任意一点.

- (1) 如图 1,只用无刻度的直尺在边 CD 上作出点 F ,使得四边形 $AECF$ 为平行四边形.
- (2) 如图 2,用直尺和圆规作矩形 $EFGH$,使得点 F, G, H 分别在 BC, CD, DA 上.(保留作图痕迹,写出必要的文字说明)

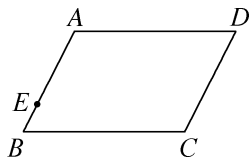


图 1

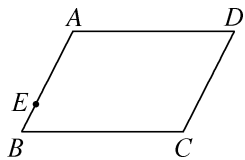
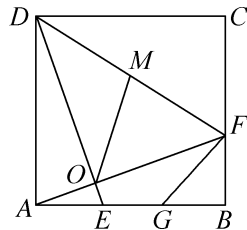


图 2

AB 上的点, $AG = 2GB$,则 $OM + \frac{1}{2}FG$ 的最小值是 ()



- A. 4 B. 5 C. 8 D. 10

12. 在平面直角坐标系 xOy 中,如果 P, Q 为某个菱形相邻的两个顶点,且该菱形的两条对角线分别与 x 轴、 y 轴平行,那么称该菱形为点 P, Q 的“相关菱形”.图 1 为点 P, Q 的“相关菱形”的一个示意图.已知点 $A(1, 4), B(b, 0)$.

- (1) 如果 $b = 3$,那么 $R(-1, 0), S(5, 4), T(6, 4)$ 中能够成为点 A, B 的“相关菱形”顶点的是_____;
- (2) 如果点 A, B 的“相关菱形”为正方形,求直线 AB 的函数表达式;
- (3) 如图 2,在矩形 $OEFG$ 中,点 $F(3, 2)$,点 M 的坐标为 $(m, 3)$,如果在矩形 $OEFG$ 上存在一点 N ,使得点 M, N 的“相关菱形”为正方形,直接写出 m 的取值范围.

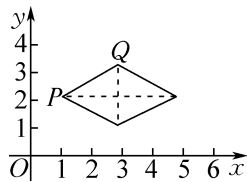


图 1

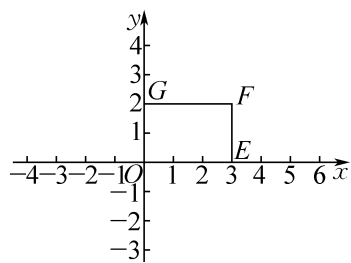


图 2



思维大爆炸

11. (2024 · 四川泸州市中考)如图,在边长为 6 的正方形 $ABCD$ 中, E, F 分别是边 AB, BC 上的动点,且满足 $AE = BF$, AF 与 DE 交于点 O, M 是 DF 的中点, G 是边

巅峰训练 8 特殊的平行四边形(3)



1. 如图 1, F 是菱形对角线 BD 上一动点, E 是线段 BC 上一点, 且 $CE = 4BE$, 连接 EF, CF . 设 BF 的长为 x , $EF + CF = y$, 点 F 从点 B 运动到点 D 的过程中, y 随 x 变化的关系图象如图 2 所示, 则图象最低点的纵坐标是 ()

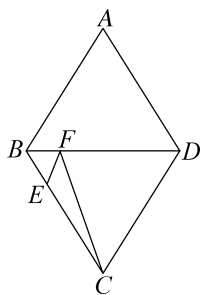


图 1

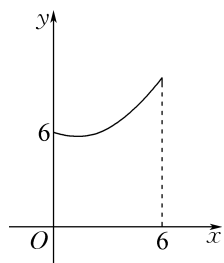
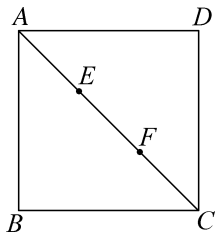
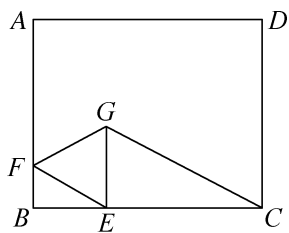


图 2

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{12\sqrt{5}}{5}$ C. $4\sqrt{2}$ D. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$
2. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E, F 将对角线 AC 三等分, 且 $AC = 12$, 点 P 在正方形 $ABCD$ 的边上, 则满足 $PE + PF = 9$ 的点 P 的个数是 ()
- A. 0 B. 4 C. 6 D. 8



(第 2 题)



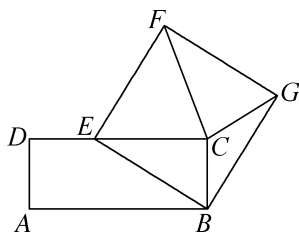
(第 3 题)

3. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 5, BC = 6$, 点 E 在边 BC 上, 且 $BE = 2$, F 为边 AB 上的一个动点, 连接 EF , 以 EF 为边作等边三角形 EFG , 且点 G 在矩形 $ABCD$ 内, 连接 CG , 则 CG 长的最小值为 ()
- A. 3 B. 2.5 C. 4 D. $2\sqrt{3}$
4. (2025 · 淮安市涟水县期中) 如图, 在矩形

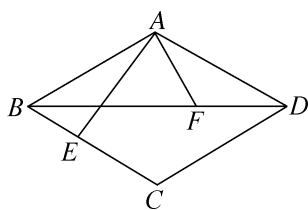
$ABCD$ 中, $AB = 10, AD = 4$, 点 E 以每秒 2 个单位长度的速度从点 D 出发向点 C 运动(不与点 C 重合), 连接 BE , 以 BE 为边向右侧作正方形 $BEFG$, 连接 CF, CG . 若 t s 后 $\triangle CFG$ 的面积恰好为 $2t^2$, 则 t 的值为_____.



巅峰讲坛

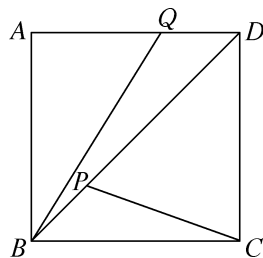


(第 4 题)

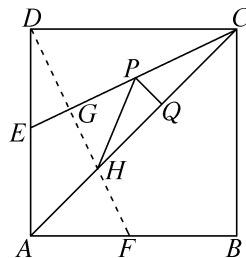


(第 5 题)

5. 如图, 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 1, $\angle ABC = 60^\circ$, E, F 分别是 BC, BD 上的动点, 且 $CE = DF$, 则 $AE + AF$ 的最小值为_____.
6. (2024 · 扬州市校级期末) 如图, 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 4, 动点 P 从点 B 出发, 沿 BD 方向匀速运动, 运动到点 D 时停止, 同时另一个动点 Q 从点 D 出发, 以与点 P 相同的速度沿 DA 方向匀速运动. 点 P 停止运动时点 Q 也停止运动, 连接 CP, BQ , 则 $CP + BQ$ 的最小值为_____.



(第 6 题)



(第 7 题)

7. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, 连接 AC , $\angle ACD$ 的平分线交 AD 于点 E . 在 AB 上截取 $AF = DE$, 连接 DF , 分别交 CE, AC 于点 G, H , P 是线段 GC 上的动点, $PQ \perp AC$ 于点 Q , 连接 PH , 则 $DE =$ _____; $PH + PQ$ 的最小值为_____.

8. 数学研究课上,老师带领大家探究《折纸中的数学问题》时,出示如图 1 所示的矩形纸条 $ABCD$,其中



巅峰讲坛

$AD=BC=2, AB=CD=10$. 然后在纸条上任意画一条线段 MN , 点 M 在边 AB 上, 点 N 在边 CD 上, 将纸片沿 MN 折叠, 使得线段 $B'M$ 与边 CD 交于点 K , 得到 $\triangle MNK$, 如图 2 所示.

【基础回顾】

- (1) 在图 2 中, 若 $\angle 1 = 51^\circ$, $\angle MKN =$ _____ $^\circ$;

【操作探究】

- (2) 改变折痕 MN 的位置, 请判断 $\triangle MNK$ 的形状, 并说明理由;
- (3) 爱动脑筋的小明在研究 $\triangle MNK$ 的面积时, 发现边 KN 上的高始终是个不变的值, 根据这一发现, 他很快研究出 $\triangle KMN$ 的面积最小值为 2, 此时 $\angle 1$ 的大小为 _____;

【拓展延伸】

- (4) 小明继续动手操作进行折纸, 发现了 $\triangle MNK$ 面积存在最大值, 请你求出这个最大值.

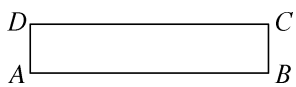


图 1

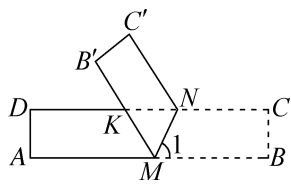
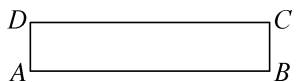
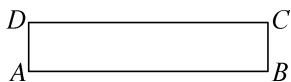


图 2



备用图 1



备用图 2



思维大爆炸

9. 如图 1, 在正方形 $ABCD$ 中, $AB = \sqrt{2}$, P 是边 AD 上一点, 连接 BP , 将 $\triangle ABP$ 绕着点 B 顺时针旋转, 得到 $\triangle A'BP'$.

- (1) 已知旋转角为 60° , 点 P 与点 D 重合 (如图 2). 求证:

- ① $\triangle BPA' \cong \triangle BP'C$;
② $\triangle A'P'C$ 是等腰三角形.

- (2) 已知旋转角为 45° .

- ① 请用无刻度的直尺和圆规, 在图 3 中的边 AD 上作出一点 P , 使 P, A', P' 三点在同一直线上; (不写作法, 保留作图痕迹)
- ② 当 $\triangle A'P'C$ 是直角三角形时, 求 AP 的长.

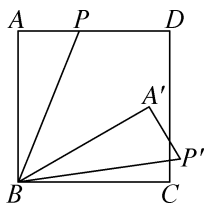


图 1

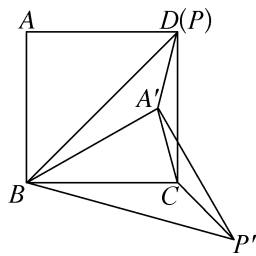


图 2

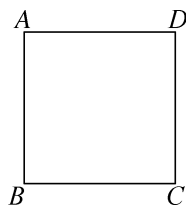


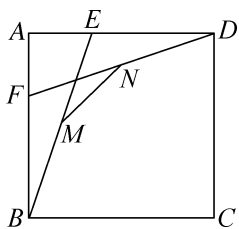
图 3

巅峰训练 9 三角形的中位线

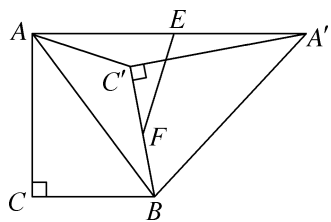


1. (2025·苏州市期中)如图,正方形 $ABCD$ 边长为 6,点 E 在边 AD 上,点 F 在边 AB 上,且 $AE=AF=2$, M,N 分别是 BE,DF 的中点,连接 MN ,则 MN 的长为 ()

- A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $3\sqrt{2}$



(第 1 题)



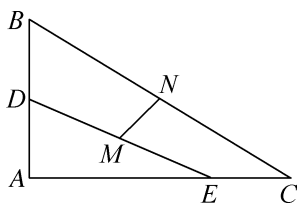
(第 2 题)

2. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=4$, $BC=3$. 将 $\triangle ABC$ 绕点 B 旋转得 $\triangle A'BC'$, 分别取 AA' , BC' 的中点 E,F , 则 EF 的取值范围是 ()

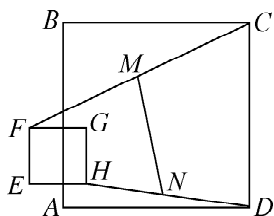
- A. $1 < EF < 4$ B. $1 \leq EF \leq 4$
 C. $\frac{1}{2} < EF < \frac{9}{2}$ D. $\frac{1}{2} \leq EF \leq \frac{9}{2}$

3. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=90^\circ$, $AC > AB > 4$,点 D,E 分别在边 AB,AC 上, $BD=4$, $CE=3$,分别取 DE,BC 的中点 M,N ,则线段 MN 的长为 ()

- A. $\frac{5}{2}$ B. 3 C. 4 D. 5



(第 3 题)



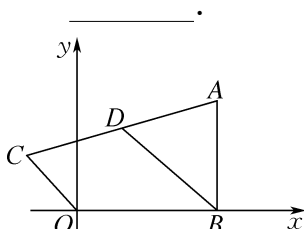
(第 4 题)

4. 如图,边长为 2 的正方形 $EFGH$ 在边长为 6 的正方形 $ABCD$ 所在的平面上移动,始

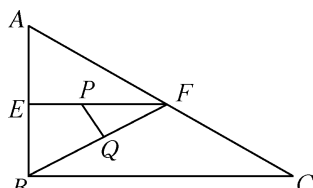
终保持 $EF \parallel AB$. 若 M 为 CF 的中点, N 为 DH 的中点,则线段 MN 的长为 ()

- A. $\sqrt{10}$ B. $\frac{\sqrt{17}}{2}$ C. $\sqrt{17}$ D. $\frac{4\sqrt{10}}{3}$

5. (2025·扬州市邗江区期末)如图,点 A 的坐标为 $(8,6)$, $AB \perp x$ 轴于点 B , C 为平面直角坐标系内一点, $OC=5$, D 为线段 AC 的中点,连接 BD ,则 BD 长的最大值为



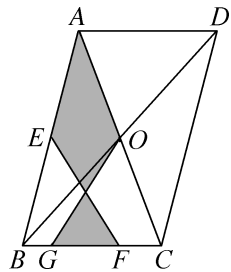
(第 5 题)



(第 6 题)

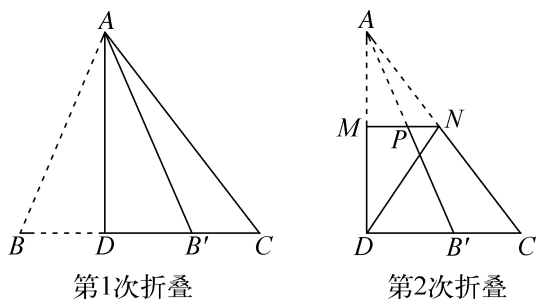
6. 如图,在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, $\angle ACB=30^\circ$, $AB=2$ cm, E,F 分别是 AB,AC 的中点,动点 P 从点 E 出发,沿 EF 方向匀速运动,速度为 1 cm/s,同时动点 Q 从点 B 出发,沿 BF 方向匀速运动,速度为 2 cm/s,连接 PQ . 设运动时间为 t s ($0 < t < 1$),则当 $t =$ _____ 时, $\triangle PQF$ 为等腰三角形.

7. 如图,在 $\square ABCD$ 中,对角线 AC,BD 相交于点 O , $AC=AB$, E 是边 AB 的中点, G,F 为边 BC 上的点,连接 OG 和 EF . 若 $AB=25,BC=14,GF=7$,



则图中阴影部分的面积为_____.

8. “做数学”可以帮助我们积累数学活动经验. 如图,已知三角形纸片 ABC ,第 1 次折叠使点 B 落在边 BC 上的点 B' 处,折痕 AD 交 BC 于点 D ;第 2 次折叠使点 A 落在点 D 处,折痕 MN 交 AB' 于点 P . 若 $BC=12$,则 $MP+MN=$ _____.



9. (2025·泰州市姜堰区期中) 我们都知道: 顺次连接对角线互相垂直且相等的四边形各边中点所得的四边形是正方形. “数学大王”小组的同学对“对角线互相垂直且相等的四边形”非常感兴趣, 想进一步去进行探索研究, 为了方便, 他们称对角线互相垂直且相等的四边形为“垂等四边形”.

(1) 下列四边形中一定是“垂等四边形”的是_____.

- A. 平行四边形 B. 矩形
C. 菱形 D. 正方形

(2) 如图 1, 四边形 $ABCD$ 是“垂等四边形”, $\angle BCD = 90^\circ$, $AB = AC$, E, F 分别是 BD, AD 的中点, 连接 CE, EF , 以 CE, EF 为邻边作 $\square CEF G$.

- ①求证: $\angle ABD = \angle ACE$;
②求证: 四边形 $CEFG$ 为正方形.

(3) 如图 2, 在矩形 $ABCD$ 中, $AD = 2AB$, 将 $\triangle ABD$ 沿对角线 BD 翻折至 $\triangle EBD$, 点 F 在线段 BD 上, 且满足 $BF = CE$, G 为 DE 的中点, 求证: 四边形 $CDFG$ 是“垂等四边形”.

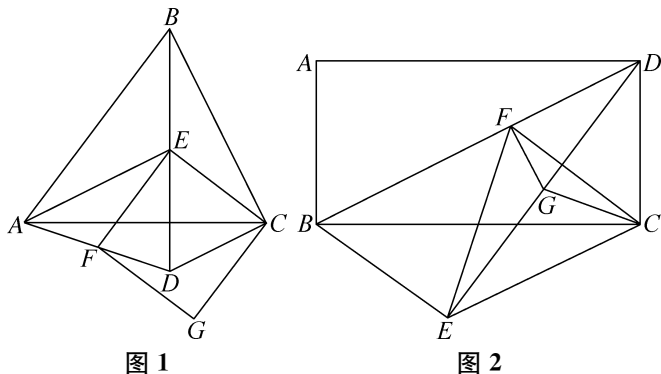


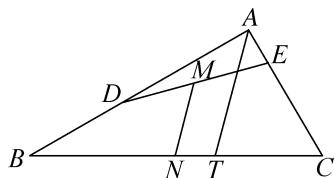
图 1

图 2



思维大爆炸

10. 如图, 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, 点 D, E 分别在边 AB, AC 上, 且 $BD = CE$, M, N 分别为线段 DE, BC 的中点, 过点 A 作 $AT \parallel MN$ 交 BC 于点 T , $AC = 1 + \sqrt{3}$, 则 $NT =$ _____.



11. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC > BC$, D 为 AB 的中点, E 为线段 AC 上的一点.

(1) 如图 1, 若 $AE = \frac{1}{4} AC$, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 2, AC = 4$, 求 DE 的长.

(2) 如图 2, 若 $AE = BC$ 且 F 为 EC 的中点, 求证: $\angle AFD = \frac{1}{2} \angle C$.

(3) 若 $2 \angle AED - \angle C = 180^\circ$, 试探究 AE, BC, AC 的数量关系, 并证明.

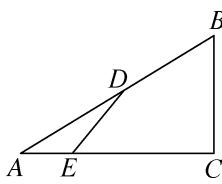


图 1

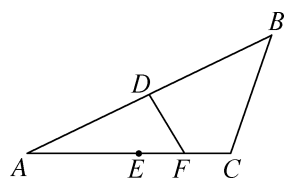


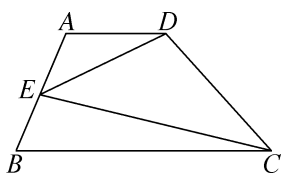
图 2

巅峰训练 10 梯 形

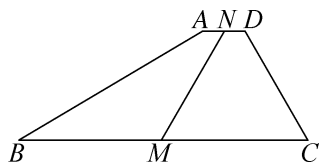


1. 如图,在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, E 是 AB 的中点,若 $\triangle DEC$ 的面积为 S ,则四边形 $ABCD$ 的面积为 ()

- A. $\frac{5}{2}S$ B. $2S$ C. $\frac{7}{4}S$ D. $\frac{9}{4}S$



(第1题)



(第2题)

2. 如图,在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, M,N 分别为 BC,DA 的中点.若 $BC = 7, MN = 3$,则 AD 的长为 ()

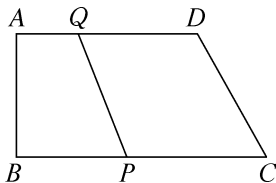
- A. 1 B. 4 C. 5 D. 6

3. 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$,对角线 AC, BD 相交于点 O , $\angle ABD = 30^\circ, AC \perp BC, AB = 24$ cm,则 $\triangle COD$ 的面积为 ()

- A. $12\sqrt{3}$ cm^2 B. $4\sqrt{3}$ cm^2
C. $9\sqrt{3}$ cm^2 D. $6\sqrt{3}$ cm^2

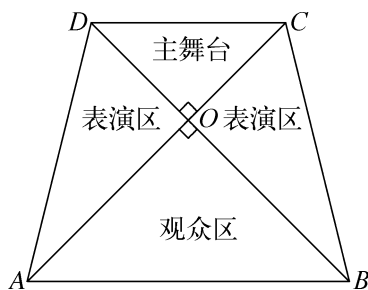
4. (2025·无锡市期中)

如图,在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC, \angle A = 90^\circ, AD = 16, BC = 21$,动点 P 从点 B 出发,沿射线 BC 以每秒 3 个单位长度的速度运动,同时动点 Q 从点 D 出发,在线段 DA 上以每秒 1 个单位长度的速度向终点 A 运动,当动点 Q 到达点 A 时,动点 P 也同时停止运动.设点 P 的运动时间为 t s.当以 P, C, D, Q 为顶点的四边形是平行四边形时, t 的值为 ()

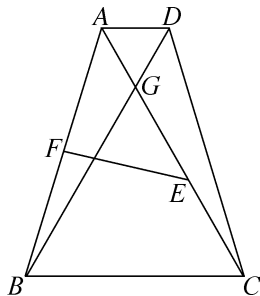


- A. $\frac{21}{4}$ B. $\frac{21}{4}$ 或 $\frac{21}{2}$
C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{37}{4}$

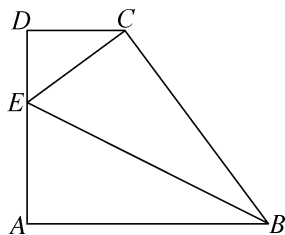
5. 如图,学校计划用一块梯形区域开展科技节活动,并利用护栏 AC, BD 将区域分隔成四个部分.已知 $AC \perp BD$ 于点 $O, AO = OB, DO = OC (OA > OC)$.计划在 $\triangle AOD$ 和 $\triangle BOC$ 区域内展示无人机和机器人表演,在 $\triangle DOC$ 和 $\triangle AOB$ 区域内分别是主舞台和观众区,经测主舞台和观众区的面积和为 $116 \text{ m}^2, AC = 20$ m,则表演区护栏 AO 比 DO 长 _____ m.



6. 如图,在梯形 $ABCD$ 中, $AB = DC = 10$ cm, AC 与 BD 相交于点 G ,且 $\angle AGD = 60^\circ$.设 E 为 CG 的中点, F 为 AB 的中点,则 EF 的长为 _____ cm.



(第6题)



(第7题)

7. 如图,在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD, \angle A = 90^\circ, AB = 5, AD = 4, BE$ 平分 $\angle ABC$,交边 AD 于点 E .如果 $\triangle BEC$ 是直角三角形,那么 DE 的长为 _____.

8. (2025·上海市期末) 如果一个函数图象上存在横、纵坐标相等的点, 那么称这个点为这个函数图象的“不动点”. 已知 A 是函数 $y=2x+3$ 图象上的“不动点”, 点 $B(-1, -1), C(-1, 0)$, 如果四边形 $ABCD$ 是等腰梯形, 那么点 D 的坐标是_____.

9. (2025·盐城市东台市期中) 【方法探索】

小明遇到了这样的问题:

- (1) 如图 1, 两条相等的线段 AB, CD 交于点 $O, \angle AOC = 60^\circ, \angle CDB > 60^\circ$, 连接 AC, BD , 求证: $AC + BD > CD$.

小明的想法如下: 通过构造平行四边形, 利用平行四边形的性质转移线段的位置. 以下是小明的部分证明过程: 证明: 过点 C 作 AB 的平行线, 过点 B 作 AC 的平行线, 两平行线交于点 E , 连接 DE . 请将解题过程补充完整.

【方法应用】

- (2) 如图 2, 在梯形 $BCED$ 中, $DE \parallel BC$, 延长 BD, CE 交于点 A , 在 BD 上截取 $BF = AD$, 过点 F 作 $FG \parallel BC$ 交 EC 于点 G , 则线段 DE, FG, BC 的数量关系是_____.

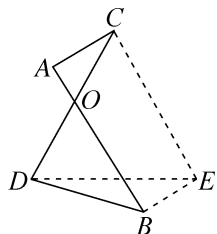


图 1

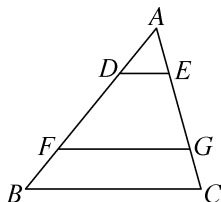


图 2



10. 如图 1, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, E 是 AB 的中点, 过点 E 作 $EF \parallel BC$ 交 CD 于点 F . $AB=4, BC=6, \angle B=60^\circ$.

(1) 求点 E 到 BC 的距离.

- (2) P 为线段 EF 上的一个动点, 过点 P 作 $PM \perp EF$ 交 BC 于点 M , 过点 M 作 $MN \parallel AB$ 交折线 $AD-DC$ 于点 N , 连接 PN , 设 $EP=x$.

① 当点 N 在线段 AD 上时(如图 2), $\triangle PMN$ 的形状是否发生改变? 若不变, 求出 $\triangle PMN$ 的周长; 若改变, 请说明理由.

② 当点 N 在线段 DC 上时(如图 3), 是否存在点 P , 使 $\triangle PMN$ 为等腰三角形? 若存在, 请求出所有满足要求的 x 的值; 若不存在, 请说明理由.

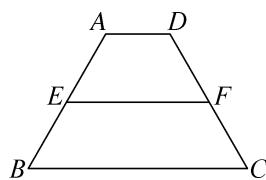


图 1

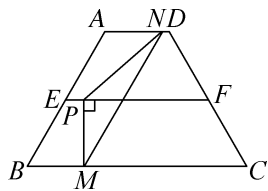


图 2

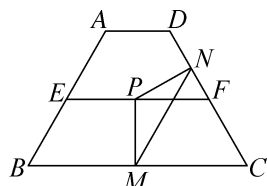
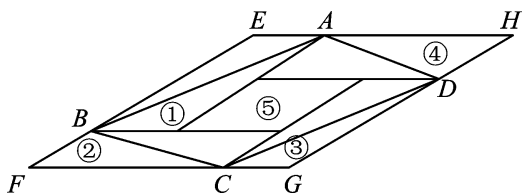


图 3

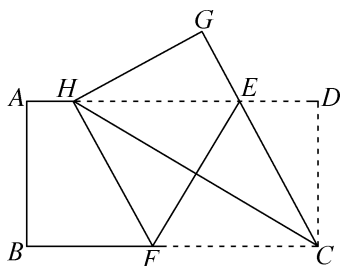
第8章综合练(1)

一、选择题

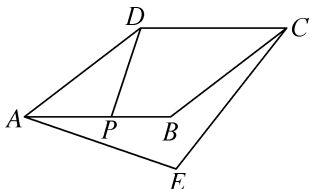
1. 如图,①②③④⑤五个平行四边形拼成一个含 30° 内角的菱形 $EFGH$ (不重叠、无缝隙). 若①②③④四个平行四边形面积的和为 14 cm^2 , 四边形 $ABCD$ 的面积为 11 cm^2 , 则①②③④四个平行四边形周长的总和为 ()



- A. 48 cm B. 36 cm C. 24 cm D. 18 cm
2. (2025·无锡市惠山区期中)如图,在一张矩形纸片 $ABCD$ 中, $AB=4$, $BC=8$, 点 E, F 分别在 AD, BC 上, 将纸片 $ABCD$ 沿直线 EF 折叠, 点 C 落在边 AD 上的点 H 处, 点 D 落在点 G 处, 连接 CE, CH . 现有以下四个结论: ①四边形 $CFHE$ 是菱形; ② CE 平分 $\angle DCH$; ③线段 BF 长的取值范围为 $3 \leq BF \leq 4$; ④当点 H 与点 A 重合时, $EF=5$. 其中正确结论的序号是 ()
- A. ①② B. ①③ C. ②③ D. ②④



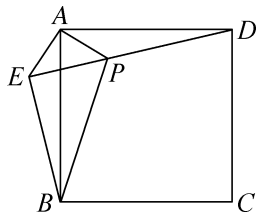
(第2题)



(第3题)

3. (2024·南通市二模)如图,在菱形 $ABCD$ 中, $\angle B=\alpha$, P 是线段 AB 上一点 (不与端点重合), 点 A 关于直线 DP 的对称点为 E , 连接 AE, CE , 则 $\angle AEC$ 的度数为 ()
- A. $60^\circ + \frac{1}{3}\alpha$ B. $165^\circ - \frac{1}{3}\alpha$
 C. $45^\circ + \frac{1}{2}\alpha$ D. $180^\circ - \frac{1}{2}\alpha$

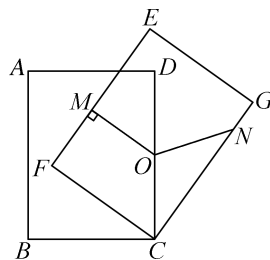
4. (2024·无锡市锡山区期中)如图,在正方形 $ABCD$ 外取一点 E , 连接 AE, BE, DE . 过点 A 作 AE 的垂线交 DE 于点 P . 若 $AE=AP=3\sqrt{2}$, $PB=10$, 给出下列结论:



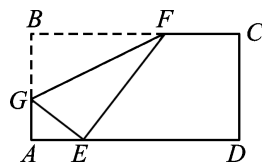
- ① $\triangle APD \cong \triangle AEB$; ② $\angle AEB = 135^\circ$;
 ③ $BE=5\sqrt{3}$; ④ $S_{\triangle APD} + S_{\triangle APB} = 33$; ⑤ $CD=11$. 其中正确结论的序号是 ()
- A. ①②③④ B. ①④⑤
 C. ①②④ D. ③④⑤

二、填空题

5. 如图,在矩形 $ABCD$ 中, $AB=5$, $BC=4$. 将矩形 $ABCD$ 绕点 C 旋转, 得到矩形 $EFCG$, 点 M, O, N 分别在边 EF, CD, CG 上, 且 $OC=OD=OM=ON$, $OM \perp EF$, 则 NG 的长为 _____.

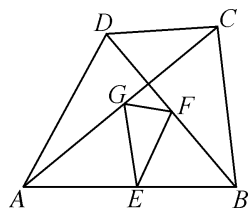


(第5题)



(第6题)

6. 如图,折叠矩形纸片 $ABCD$, 使点 B 落在 AD 上的点 E 处, 折痕的两端点分别在 AB, BC 上 (含端点), 且 $AB=6$, $BC=10$. 设 $AE=x$, 则 x 的取值范围是 _____.
7. 如图,在四边形 $ABCD$ 中, $AD=BC=6$, E, F, G 分别是 AB, BD, AC 的中点, 则 $\triangle EGF$ 面积的最大值为 _____.



三、解答题

8. (2025·连云港市东海县期中)【创设情境】定义:有一组邻角互余的四边形叫作“邻余四边形”,这组邻角的夹边称为“邻余线”.



巅峰讲坛

【概念理解】

- (1) “邻余四边形”可能是_____.(填序号)

①中心对称图形 ②轴对称图形

- (2) 如图 1,在“邻余四边形” $ABCD$ 中, AB 是“邻余线”, $AB \parallel CD$, $AB=7$, $AD=3$, $CD=2$,求 BC 的长.

【拓展应用】

- (3) 如图 2,在“邻余四边形” $ABCD$ 中, AB 是“邻余线”, $AD=a$, $BC=b$,其中 $a \geq b$.

①若 M, N 分别是 AB, CD 的中点,以 M, N 为顶点作正方形 $EMFN$,求正方形 $EMFN$ 的面积;(用含 a, b 的式子表示)

②若 $CD=c$,请直接写出边 AB 长的取值范围:_____.(用含 a, b, c 的式子表示)

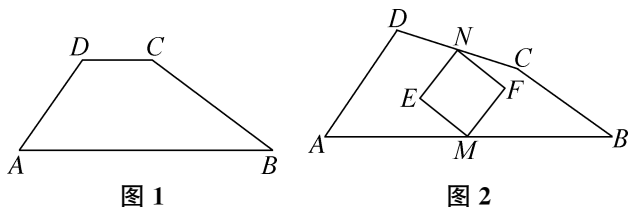


图 1

图 2

别在 l, m, n, k 这四条平行线上的四边形称为“格线四边形”.

【探究 1】(1) 如图 1,正方形 $ABCD$ 为“格线四边形”, $BE \perp l$ 于点 E , BE 的反向延长线交直线 k 于点 F . 求正方形 $ABCD$ 的边长.

【探究 2】(2) 如图 2,菱形 $ABCD$ 为“格线四边形”且 $\angle ADC = 60^\circ$, $\triangle AEF$ 是等边三角形,直线 DF 分别交直线 l, k 于点 G, M . 求证: $EC = DF$.

【拓展】(3) 如图 3, $l \parallel k$,等边三角形 ABC 的顶点 A, B 分别落在直线 l, k 上, $AB \perp k$ 于点 B ,过点 C 作 AC 的垂线分别交直线 l, k 于点 G, M , D 是线段 GM 上的动点(不与点 C 重合), E 是线段 BM 上的动点(不与点 B, D 重合),且始终保持 $AD = AE$, $DH \perp l$ 于点 H . 请根据 BC 与 DE 的不同位置关系直接写出 HG 相应的取值范围.

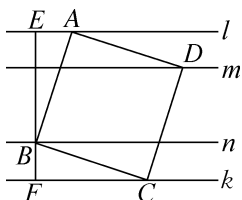


图 1

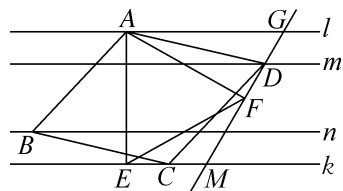


图 2

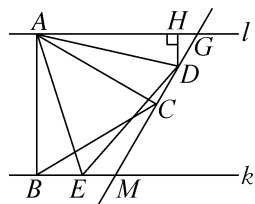


图 3

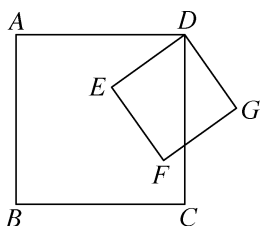
9. 【背景】已知: $l \parallel m \parallel n \parallel k$,平行线 l 与 m, m 与 n, n 与 k 之间的距离分别为 d_1, d_2, d_3 ,且 $d_1 = d_3 = 1, d_2 = 2$. 我们把四个顶点分

第8章综合练(2)

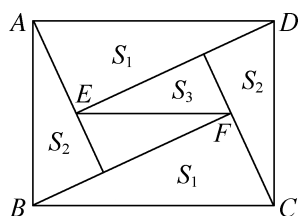
一、选择题

1. 如图,正方形 $ABCD$ 的边长为 2, E 为不与点 D 重合的动点,以 DE 为边作正方形 $DEFG$. 设 $DE=d_1$,点 F,G 与点 C 的距离分别为 d_2,d_3 ,则 $d_1+d_2+d_3$ 的最小值为 ()

A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. 4



(第1题)



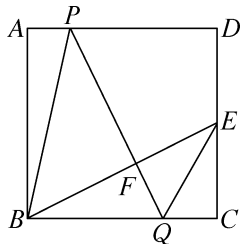
(第2题)

2. (2024·连云港市灌云县期中)如图,矩形 $ABCD$ 被分割成 4 个直角三角形和 1 个小矩形后仍是中心对称图形. 设上下两个直角三角形的面积都为 S_1 ,左右两个直角三角形的面积都为 S_2 ,中间小矩形的面积为 S_3 . 若小矩形的对角线 $EF \parallel BC$,则矩形 $ABCD$ 的面积一定可以表示为 ()

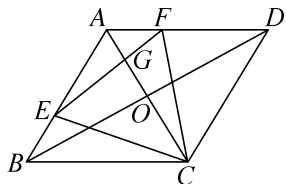
A. $4S_1$ B. $4S_2$
C. $2S_1+2S_3$ D. $2S_2+3S_3$

3. 如图,在边长为 6 的正方形 $ABCD$ 中, E 是 CD 的中点, P,Q 分别是边 AD,BC 上的动点,且 $PQ \perp BE$ 交 BE 于点 F ,连接 BP 和 QE ,则 $BP+QE$ 的最小值为 ()

A. $6\sqrt{2}$ B. 6 C. $3\sqrt{2}$ D. $3\sqrt{10}$



(第3题)



(第4题)

4. (2025·宿迁市泗阳县期中)如图,在菱形 $ABCD$ 中, $AC=2, \angle ABC=60^\circ$,对角线 AC, BD 相交于点 O ,点 E, F 分别在边

AB, AD 上,点 E, F 同时以相同的速度分别从点 B 向点 A 和从点 A 向点 D 运动, EF 与 AC 交于点



巅峰讲坛

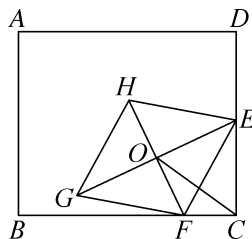
G ,则在这个运动过程中,下列说法正确的个数是 ()

- ①菱形的面积是 $2\sqrt{3}$; ② $\triangle CEF$ 始终为等边三角形; ③线段 EF 长的最小值为 $\sqrt{3}$; ④点 G 所走过的路径长为 1.

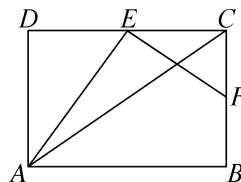
A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

二、填空题

5. 如图,在矩形 $ABCD$ 中, $AB=3, BC=4$, E, F 分别为边 CD, BC 上的两个动点,连接 EF ,以 EF 为边作菱形 $EFGH$,对角线 EG, HF 相交于点 O ,连接 OC . 若 $OC = \sqrt{2}$,则 EF 长的最小值为_____.



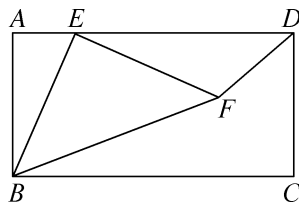
(第5题)



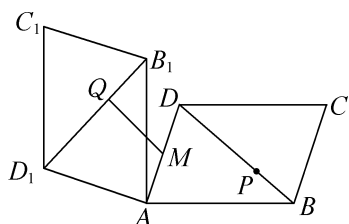
(第6题)

6. 如图, E, F 分别为矩形 $ABCD$ 的边 CD, BC 的中点,连接 AC, AE, EF . 已知 $AE \perp EF, AC=6$,则 AB 的长为_____.

7. (2024·泰州市泰兴市一模)如图,在矩形 $ABCD$ 中, $AB=6, AD=12$, E 是线段 AD 上一动点,以 E 为直角顶点在 EB 的右侧作等腰直角三角形 EBF ,连接 DF ,设 $DF=t$,当 t 为整数时,点 F 的位置有_____个.

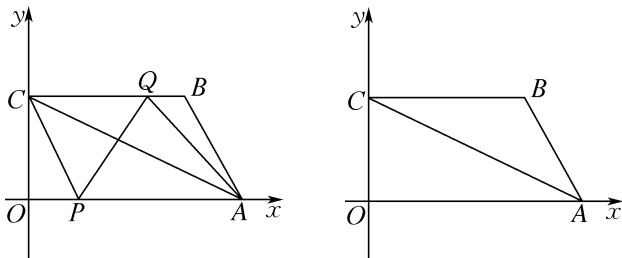


8. 如图, P 是 $\square ABCD$ 对角线 BD 上的动点, M 为 AD 的中点, 已知 $AD=8$, $AB=10$, $\angle ABD=45^\circ$. 把 $\square ABCD$ 绕着点 A 按逆时针方向旋转, 点 P 的对应点是 Q , 则线段 MQ 长的最大值与最小值之差为_____.



三、解答题

9. 如图, 点 A 的坐标为 $(8,0)$, 点 B 的坐标为 $(6,4)$, 点 C 的坐标为 $(0,4)$, 点 P 从原点 O 出发, 以每秒 3 个单位长度的速度沿 x 轴向右运动, 点 Q 从点 B 出发, 以每秒 1 个单位长度的速度沿线段 BC 向左运动, P, Q 两点同时出发, 当点 Q 运动到点 C 时, P, Q 两点均停止运动, 设运动时间为 t s.
- 当 $t=$ _____ 时, 四边形 $OPQC$ 为矩形.
 - 在整个运动过程中, 当 t 为何值时, PQ 垂直平分线段 AC ? 判断此时四边形 $AQCP$ 的形状, 并说明理由.
 - 在整个运动过程中, 当 t 为何值时, 以 A, B, P, Q 为顶点的四边形为平行四边形?



备用图

10. 对角线互相垂直的四边形叫作“垂美四边形”.

- 【概念理解】**如图 1, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB=AD, CB=CD$, 问: 四边形 $ABCD$ 是“垂美四边形”吗? 请说明理由.
- 【性质探究】**如图 2, 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 交于点 $E, AC \perp BD$. 求证: $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.
- 【解决问题】**如图 3, 分别以 $\text{Rt}\triangle ACB$ 的直角边 AC 和斜边 AB 为边向外作正方形 $ACFG$ 和正方形 $ABDE$, 连接 CE, BG, GE . 已知 $AC=4, AB=5$, 求 GE 的长.

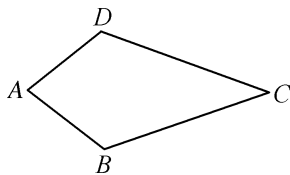


图 1

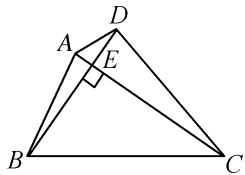


图 2

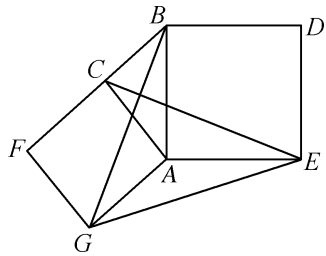
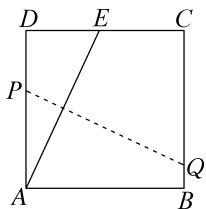


图 3

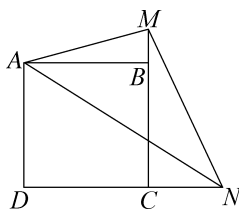
巅峰专题 2 特殊的平行四边形中的常见模型

1. (2025·南通市海安市月考)如图,将一边长为 12 的正方形纸片 $ABCD$ 的顶点 A 折叠至边 DC 上的点 E ,使 $DE=5$,若折痕为 PQ ,则 PQ 的长为 ()

A. 13 B. 14 C. 15 D. 16



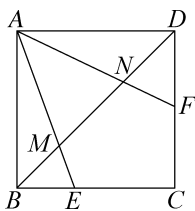
(第 1 题)



(第 2 题)

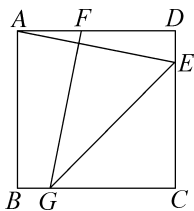
2. 如图,正方形 $ABCD$ 的边长为 3,点 M 在 CB 的延长线上, $BM=1$,作 $\angle MAN=45^\circ$ 交 DC 的延长线于点 N ,则 MN 的长为 ()
- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

3. (2025·南京市鼓楼区期中)如图,在正方形 $ABCD$ 中, E, F 分别在边 BC, CD 上,且 $\angle EAF=45^\circ$, M, N 是 AE, AF 与对角线 BD 的交点.若 $BM=3, DN=4$,则正方形 $ABCD$ 的面积为 ()

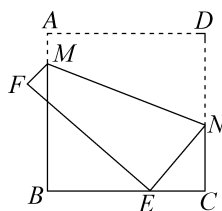


A. 64 B. 72 C. 98 D. 144

4. (2025·北京市模拟)如图,在正方形 $ABCD$ 中,点 E, F, G 分别在边 CD, AD, BC 上.若 $FG=AE, AF=2BG, \angle BAE=\alpha$,则 $\angle AEG$ 的度数为 _____ (用含 α 的式子表示).



5. 如图,将边长为 8 的正方形纸片 $ABCD$ 折叠,使点 D 落在边 BC 上的点 E 处,点 A 落在点 F 处,折痕为 MN ,若 $MN=4\sqrt{5}$,则线段 CN 的长是 _____.



6. (2025·盐城市东台市期中)问题:如图 1,在等边三角形 ABC 内有一点 P ,且 $PA=2, PB=\sqrt{3}, PC=1$,求 $\angle BPC$ 的度数和等边三角形 ABC 的边长.

李明同学的思路是:将 $\triangle BPC$ 绕点 B 逆时针旋转 60° ,画出旋转后的图形(如图 2),连接 PP' ,可得 $\triangle P'PB$ 是等边三角形,而 $\triangle PP'A$ 又是直角三角形(由勾股定理的逆定理可证),可得 $\angle AP'B=$ _____ $^\circ$,所以 $\angle BPC=\angle AP'B=$ _____ $^\circ$,还可证得 $\triangle ABP$ 是直角三角形,进而求出等边三角形 ABC 的边长为 _____,问题得到解决.

- (1) 根据李明同学的思路填空: $\angle AP'B=$ _____ $^\circ$, $\angle BPC = \angle AP'B =$ _____ $^\circ$,等边三角形 ABC 的边长为 _____.

- (2) 探究并解决下列问题:如图 3,在正方形 $ABCD$ 内有一点 P ,且 $PA=\sqrt{5}, PB=\sqrt{2}, PC=1$.求 $\angle BPC$ 的度数和正方形 $ABCD$ 的边长.

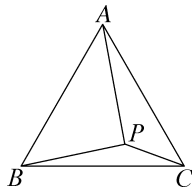


图 1

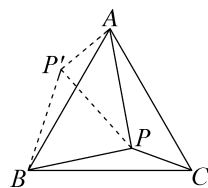


图 2

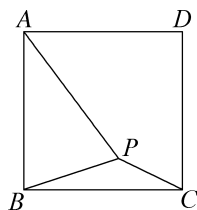


图 3

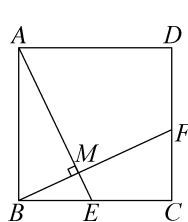


图 1

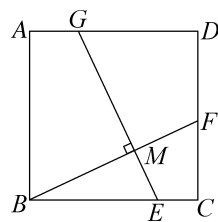


图 2

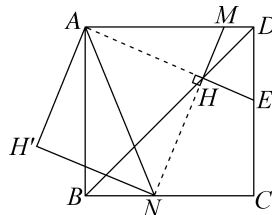
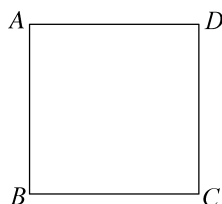


图 3



备用图

7. (2025·宿迁市宿城区期末)【问题情境】

如图 1,在正方形 $ABCD$ 中,点 E, F 分别在边 BC, CD 上,且 $AE \perp BF$,垂足为 M . 那么 AE 与 BF 相等吗?

(1) 直接判断: AE _____ BF (填“=”或“ \neq ”).

【问题探究】

(2) 如图 2,在正方形 $ABCD$ 中,点 E, F, G 分别在边 BC, CD, DA 上,且 $GE \perp BF$,垂足为 M . 那么 GE 与 BF 相等吗? 证明你的结论.

【问题拓展】

(3) 如图 3,点 E 在边 CD 上,且 $MN \perp AE$,垂足为 H ,当点 H 在正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 上时,连接 AN ,将 $\triangle AHN$ 沿着 AN 翻折,点 H 落在点 H' 处.

① 四边形 $AHNH'$ 是正方形吗? 请说明理由.

② 若 $AB = 6$,点 P 在 BD 上, $BD =$

$3BP$,则 $PH' + \frac{\sqrt{2}}{2}AN$ 的最小值为

_____.

8. 【问题背景】阅读以下材料,并按要求解决问题:



巅峰讲坛

从正方形的一个顶点引出夹角为 45° 的两条射线,与正方形两个边的交点构成的基本平面几何模型称为半角模型. 半角模型可以利用旋转得出多个几何结论,例如:

如图 1,在正方形 $ABCD$ 中,以 A 为顶点的 $\angle EAF = 45^\circ$, AE, AF 与边 BC, CD 分别交于 E, F 两点,若 $BE = a, DF = b, EF = c$ (a, b, c 为常数). 易证 $EF = BE + FD$,则可以得到 a, b, c 之间的数量关系是 $c = a + b$.

证明:如图 2,将 $\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转 90° ,得到 $\triangle ABG$,由 $\angle GBE = 180^\circ$,可得 G, B, E 三点共线, $\angle EAG = \angle EAF = 45^\circ$,可证明 $\triangle AEG \cong \triangle AEF$,故 $EF = EG = BE + DF$,进而得到 $c = a + b$.

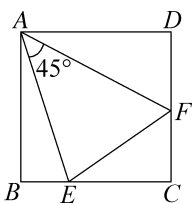


图 1

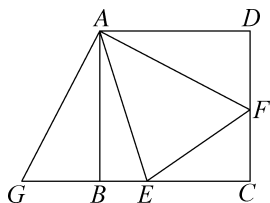


图 2

【方法转化】如果把背景中的正方形换成特殊顶角的等腰三角形,同学们可以利用上述问题背景得到多个结论.

【问题解决】在半角模型中可以利用旋转的方法解决问题.

- (1) 如图 3,在等腰直角三角形 ABC 中,以 A 为顶点的 $\angle DAE = 45^\circ$, AD, AE 与边 BC 分别交于 D, E 两点,将 $\triangle ADB$ 绕点 A 逆时针旋转 90° ,如图 4,得到 $\triangle AFC$,易证 $\angle ECF = 90^\circ$, $\triangle ADE \cong \triangle AFE$,则可以得到 BD, DE, CE 之间的数量关系.

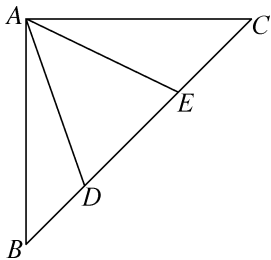


图 3

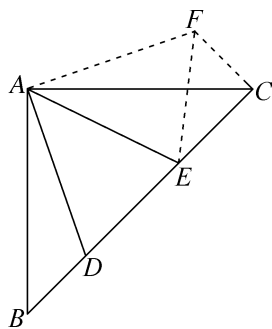


图 4

- ①若 $BD = 3, CE = 4$,则可得 $DE =$ _____.
- ②若 $BD = a, CE = b, DE = c$,则 a, b, c 之间的数量关系是 _____.
- (2) 如图 5,在等边三角形 ABC 中,以 A 为顶点的 $\angle DAE = 30^\circ$, AD, AE 与边 BC 分别交于 D, E 两点.若 $BD = a, CE = b, DE = c$,则 a, b, c 之间的数量关系是 _____.
- (3) 如图 6,在等腰三角形 ABC 中,顶角 $\angle BAC = 120^\circ$,以 A 为顶点的 $\angle DAE = 60^\circ$, AD, AE 与边 BC 分别交于 D, E

两点,则可以得到 BD, DE, CE 之间的数量关系.

- ①若 $BD = 3, CE = 4$,则可得 $DE =$ _____.

- ②若 $BD = a, CE = b, DE = c$,则 a, b, c 之间的数量关系是 _____.

【实践应用】

- (4) 在第(3)问第①小问基础上,把 $\triangle ABD$ 绕点 A 逆时针旋转 120° 得 $\triangle ACF$,如图 7,若线段 EF 与边 AC 交于点 G ,求 CG 的长.

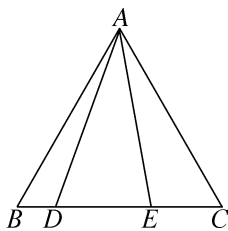


图 5

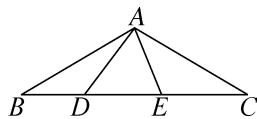


图 6

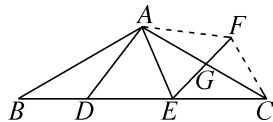
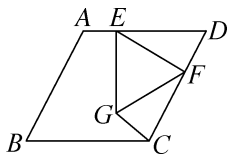


图 7

期末压轴 2 2025 年南京市秦淮区期末压轴题

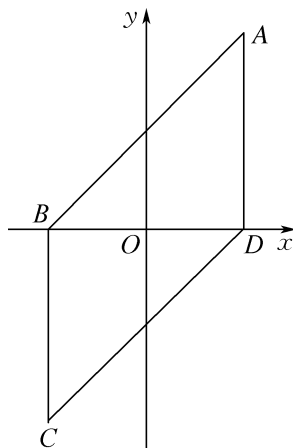
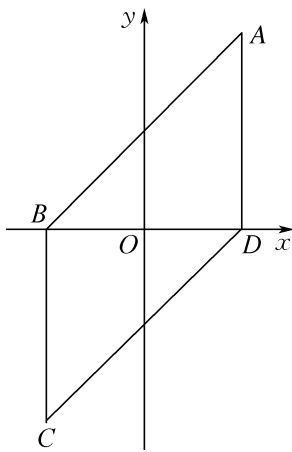
1. 已知四边形 $ABCD$, 对角线 AC 与 BD 交于点 O , 给出下列条件: ① $AB \parallel CD$; ② $BC \parallel AD$; ③ $AB = CD$; ④ $BC = AD$; ⑤ $OA = OC$; ⑥ $OB = OD$; ⑦ $\angle BAD = \angle BCD$; ⑧ $\angle ABC = \angle ADC$. 任取两个条件, 可以得出“四边形 $ABCD$ 是平行四边形”这一结论的情况有 ()
- A. 8 种 B. 10 种
C. 14 种 D. 16 种

2. 如图, 四边形 $ABCD$ 是菱形, $AB = 10$, $\angle B = 60^\circ$, E 是边 AD 上一点, 且 $AE = 2$, F 是边 CD 上一个动点, 以 EF 为边作等边 $\triangle EFG$, 连接 CG . 若 CG 的长度为 d , 则 d 的取值范围是_____.



3. 对于平面直角坐标系 xOy 中的图形 M , N , 给出如下定义: P 为图形 M 上任意一点, Q 为图形 N 上任意一点, 称 P, Q 两点间距离的最小值为图形 M, N 间的“最近距离”, 记作 $d(M, N)$. 在 $\square ABCD$ 中, 点 $A(6, 12), B(-6, 0), C(-6, -12), D(6, 0)$.
- (1) $d(\text{点 } O, \square ABCD) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (2) 若点 P 在 x 轴正半轴上, $d(\text{点 } P, \square ABCD) = 2$, 求点 P 的坐标.
- (3) 若已知点 $E(a, -a), F(a+2, -a), G(a+1, -a-1), H(a+3, -a-1)$, 顺次连接点 E, F, H, G, E , 将得到的四边形记为图形 W .
- ① 当 $a=0$ 时, 直接写出 $d(W, \square ABCD)$ 的值;

- ② 若 $d(W, \square ABCD) \geq 1$, 直接写出 a 的取值范围.



备用图