

第6章 数据的收集、整理与描述

巅峰训练1 普查与抽样调查

统计图 统计案例:货比三家

1. B 2. D 3. B 4. 36° 5. 520

6. 解:(1) A品牌面巾纸的主要竞争优势是质量,理由:对A品牌面巾纸的质量满意的人数最多,而对A品牌面巾纸的价格和宣传满意的人数不是最多.所以A品牌面巾纸靠的是质量优势.

(2) 宣传对用户选择品牌有影响.由图表可知,虽然A的质量和价格都比B的有优势,但由于B品牌面巾纸的宣传做得好,所以销量比A品牌大.

(3) 首先要提高面巾纸的质量,其次加大宣传力度,最后注意合理的价格.

7. D

8. 解:(1) ①抽样调查

②根据统计图可以看到,从七年级到高二年级,近视率随年级升高呈整体上升趋势,高二年级到高三年级有所下降.

(2) ①B

②观察条形统计图可以看到,影响视力的主要因素有:不认真做眼保健操,长时间连续用眼,课间只在教室休息,饮食不均衡,睡眠时间不足,所以预防近视要从以下几方面入手:认真做眼保健操,避免长时间连续用眼,用眼一段时间要适当休息,课间到室外活动或者适当远眺,保持饮食均衡,保证充足的睡眠时间.

巅峰训练2 频数与频率 频数分布

表和频数分布直方图 统计案例:

初中生的视力情况调查

1. C 2. C 3. A 4. D

5. 250 提示:利用小长方形的高之比等于频数之比解答. $50 \div \frac{2}{2+3+4+1} = 250$ (名),所以此次共抽查了250名学生.

6. 6.6 提示:该日这餐晚饭将被浪费的米饭有 $2\ 200 \times (0.1+0.2) \times 10 = 6\ 600$ (g) = 6.6 kg.

7. (1) 123 0.404 (2) 0.4

(3) 0.6 (4) 15

8. (1) 20 2

(2) 72

(3) 解: $1\ 200 \times \frac{8+2}{40} = 300$ (名).

答:估计体重在59.5 kg及以上的学生有300名.

9. 解:(1) 因为30天中有24天能满足顾客需求,所以估计100天中能满足顾客需求的天数为

$$100 \times \frac{24}{30} = 80.$$

(2) ①8

②由数据可知,第一、二组有6天,第三、四组有11天,第五、六组有9天.设第一、二组的日平均销售量增加 m kg.

根据题意,得 $5(6m + 11 \times 7 + 9 \times 3) \geq 850$,解得 $m \geq 11$.

答:第一、二组的日平均销售量应至少增加11 kg.

第6章综合练

1. D 2. B 3. D 4. C 5. 108

6. 0.3 7. C

8. 解:(1) 抽样调查 40 44.1

(2) 脂肪平均供能比为 $36.6\% \times \frac{35}{100} + 40.4\% \times \frac{25}{100} + 39.2\% \times \frac{40}{100} \approx 38.6\%$,碳水化合物平均供能比为 $48.0\% \times \frac{35}{100} + 44.1\% \times$

$$\frac{25}{100} + 47.5\% \times \frac{40}{100} \approx 46.8\%$$

(3) 减少脂肪类食物,增加碳水化合物类食物.

第7章 认识概率

巅峰训练3 随机事件 概率

1. A 2. B 3. B 4. D 5. B 6. A

7. 等于 8. $19 \leq a \leq 33$ (a 为整数)

9. 解:(1) 选甲袋成功的可能性较大. 理由如下:

从甲袋中取出 1 个黑球的可能性为 $\frac{12}{8+5+12} = \frac{12}{25}$, 从乙袋中取出 1 个黑球的可能性为 $\frac{16}{27+35+16} = \frac{8}{39}$. 因为 $\frac{12}{25} > \frac{8}{39}$, 所以选甲袋成功的可能性较大.

(2) 选乙袋成功的可能性较大. 理由如下:

从甲袋中取出 1 个红球的可能性为 $\frac{8}{8+5+12} = \frac{8}{25}$, 从乙袋中取出 1 个红球的可能性为 $\frac{27}{27+35+16} = \frac{9}{26}$. 因为 $\frac{9}{26} > \frac{8}{25}$, 所以选乙袋成功的可能性较大.

(3) 此说法不正确. 理由如下:

因为从乙袋中取出 10 个红球后, 从乙袋中取出 1 个红球的可能性为 $\frac{17}{17+35+16} = \frac{1}{4}$, 而 $\frac{8}{25} > \frac{1}{4}$, 所以此时若想取出 1 个红球, 选甲袋成功的可能性较大.

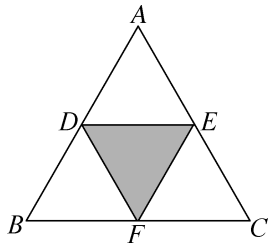
10. (1) $0 < x < \frac{1}{2}$ $0 < y < \frac{1}{2}$

(2) 证明: 因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 所以 $AB = BC = AC$. 因为 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle COB} + S_{\triangle AOC}$, 所以 $\frac{1}{2}BC \cdot h = \frac{1}{2}AB \cdot h_1 +$

$$\frac{1}{2}BC \cdot h_2 + \frac{1}{2}AC \cdot h_3, \text{ 所以 } h = h_1 + h_2 + h_3.$$

(3) 解: 设 $x = h_1, y = h_2, z = h_3$. 因为 $0 < x < \frac{1}{2}, 0 < y < \frac{1}{2}, 0 < z < \frac{1}{2}$, 所以 $0 < h_1 < \frac{1}{2},$

$0 < h_2 < \frac{1}{2}, 0 < h_3 < \frac{1}{2}$, 所以如图所示, 作 $\triangle ABC$ 三边的中点 D, E, F , 连接 DF, DE, EF , 所以 $\triangle DEF$ 内部即为所求范围.



(4) $\frac{1}{4}$ 提示: 因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形, D, E, F 分别是 AB, AC, BC 的中点, 所以 $\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{4}$, 所以一根绳子, 随机分成三段, 能构成三角形的概率是 $\frac{1}{4}$.

巅峰训练4 频率与概率

1. B 2. B 3. A 4. C 5. 45 6. 8
7. 8

8. 解:(1) 一枚质地均匀的硬币抛起后落地时“正面朝上”的概率为 $\frac{1}{2}$.

(2) 不对. 因为试验次数较少, 事件出现的频率与事件发生的概率有较大差距, 所以不能据此估计事件发生的概率.

(3) 不科学. 因为试验条件不同, 硬币质地均匀, 出现正面与反面的机会是均等的, 而可乐瓶盖质地不均匀, 试验条件不一样.

9. (1) 0.6 (2) 0.6

(3) 解: 盒子里白球的个数为 $40 \times 0.6 = 24$, 黑球的个数为 $40 - 24 = 16$.

10. 解: 【试验推算】盒子中球的个数为 $10 \div \frac{5}{50} = 100$.

【活动思考】(1) 摸到白球的概率大. 理由如下:

因为摸到白球的概率为 $\frac{28+2}{50} = \frac{3}{5}$, 摸到红球的概率为 $\frac{17+3}{50} = \frac{2}{5}$, 所以摸到白球的概率大.

(2) 放入 10 个红球, 拿走 10 个白球, 可以使摸到这两种颜色的球的概率相等(答案不唯一).

第 7 章综合练

1. C 2. A 3. D 4. B 5. B

6. $3\pi m^2$ 提示: 根据题表格提供的数据, 得

$\frac{S_{\text{圆}O}}{S_{\text{封闭图形}ABC}} \approx \frac{1}{3}$, 而 $S_{\text{圆}O} = \pi \times 1^2 = \pi(\text{m}^2)$, 所以 $S_{\text{封闭图形}ABC} \approx 3\pi \text{m}^2$.

7. 9 提示: 设取出 x 个黑球, 则放入 x 个黄球. 由题意, 得 $\frac{5+x}{5+13+22} \geq \frac{1}{3}$, 解得 $x \geq \frac{25}{3}$, 所以至少取出 9 个黑球.

8. $\frac{2}{5}$ 提示: 因为不等式组 $\begin{cases} 2x+3 < 4, \\ 3x-1 > -11 \end{cases}$ 的解

集是 $-\frac{10}{3} < x < \frac{1}{2}$, 函数 $y = \frac{1}{2x^2+2x}$ 的自变量取值范围为 $2x^2+2x \neq 0$, 解得 $x \neq 0, x \neq -1$, 所以 a 的值可为 $-3, -2$. 综上所述, 所求概率是 $\frac{2}{5}$.

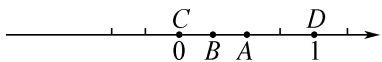
9. $4m+n=10$ 提示: 根据题意, 得 $\frac{6+n}{10+n-m} =$

0.8. 整理, 得 $4m+n=10$.

10. $\frac{1}{6}$ 11. $\frac{5}{8}$

12. (1) D C

(2) 解: 标注, 如图所示.



13. 解: 选择规则②, 猜“不是 3 的倍数”.

理由如下:

规则①共有 10 种等可能出现的结果, 其

中“是奇数”的结果有 5 种, “是偶数”的结果也有 5 种, 因此“是奇数”“是偶数”的可能性都是 50%. 规则②共有 10 种等可能出现的结果, 其中“是 3 的倍数”的结果有 3 种, “不是 3 的倍数”的结果有 7 种, 因此“是 3 的倍数”的可能性是 30%, “不是 3 的倍数”的可能性是 70%. 规则③共有 10 种等可能出现的结果, 其中“是大于 6 的数”的结果有 4 种, “不是大于 6 的数”的结果有 6 种, 因此“是大于 6 的数”的可能性是 40%, “不是大于 6 的数”的可能性是 60%. 因此选择规则②猜数, 且猜转出的数“不是 3 的倍数”, 这样获胜的可能性最大.

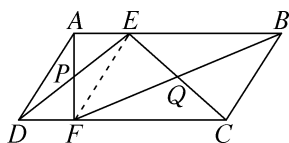
第 8 章 四边形

巅峰训练 5 平行四边形

1. C 提示: 设 PQ, AC 相交于点 O , 过点 O 作 $OP' \perp BC$ 于点 P' . 因为四边形 $PAQC$ 是平行四边形, 所以 $OC=OA, PQ=2OP$. 因为 $AC=AB=4\sqrt{2}$, 所以 $OC=OA=2\sqrt{2}$. 因为 $\angle ACB=45^\circ, \angle OP'C=90^\circ$, 所以 $OP'=CP'$, 所以 $2OP'^2=OP'^2+CP'^2=OC^2=8$, 所以 $OP'=2$. 当点 P 与点 P' 重合时, OP 的长最小, 此时 PQ 的长最小, 最小值为 $2OP'=4$.

2. A 提示: 如图, 连接 EF . 因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 所以 $AB=CD, AB \parallel CD$, 所以 $\angle BEC = \angle FCE$. 因为 Q 是 BF 的中点, 所以 $BQ=FQ$. 因为 $\angle BEQ = \angle FCQ, \angle BQE = \angle FQC, BQ=FQ$, 所以 $\triangle BEQ \cong \triangle FCQ$ (AAS), 所以 $EB=CF$. 因为 $EB \parallel CF$, 所以四边形 $BCFE$ 是平行四边形, 所以 $S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} S_{\square BCFE}$. 因为 $AB-EB=CD-CF$, 所以 $AE=FD$. 又因为 $AE \parallel FD$, 所以四边形 $ADFE$ 是平行四边形, 所以 $S_{\triangle PEF} = S_{\triangle APD} = 4 \text{ cm}^2, S_{\square ADFE} = 4S_{\triangle APD} = 16 \text{ cm}^2$, 所以 $S_{\square BCFE} = S_{\square ABCD} - S_{\square ADFE} = 64 - 16 = 48(\text{cm}^2)$, 所以 $S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} S_{\square BCFE} = \frac{1}{2} \times 48 = 24(\text{cm}^2)$, 所以阴影部分的

面积为 $S_{\triangle BEF} + S_{\triangle PEF} = 28 \text{ cm}^2$.



3. B 提示: 因为点 $A(m, \frac{3}{4}m + \frac{8}{3})$, 所以点 A

在直线 $y = \frac{3}{4}x + \frac{8}{3}$ 上. 由条件, 可知直线 OB 的函数表

达式为 $y = \frac{3}{4}x$. 如图, 设直线 $y = \frac{3}{4}x + \frac{8}{3}$ 交 x 轴于

点 D, 交 y 轴于点 E, 则直线 OB 平行直线 AE. 因为平

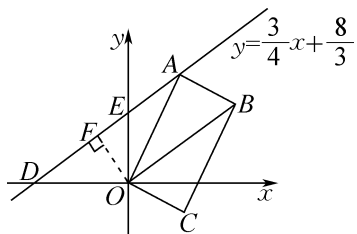
行线之间的距离处处相等, 所以 $\triangle ABO$ 的面积不会改

变. 由条件, 可知 $OB = 5$, 点 $D(-\frac{32}{9}, 0)$, $E(0, \frac{8}{3})$, 所

以 $DE = \frac{40}{9}$. 过点 O 作 $OF \perp DE$ 于点 F. 因为 $S_{\triangle DOE} =$

$\frac{1}{2}OD \cdot OE = \frac{1}{2}DE \cdot OF$, 所以 $OF = \frac{32}{15}$. 所以

$S_{\square OAEC} = 2S_{\triangle ABO} = 2 \times \frac{1}{2}OB \cdot OF = \frac{32}{3}$.



4. B 提示: 由题意, 得 $AF = FD = CD$, 所以

$\angle DFC = \angle DCF$, 因为 $AD \parallel BC$, 所以 $\angle DFC = \angle FCB$,

所以 $\angle DCF = \angle FCB$, 所以 $\angle DCF = \frac{1}{2}\angle BCD$, 故①正

确; 延长 EF, 交 CD 的延长线于点 M, 因为四边形 ABCD

是平行四边形, 所以 $AB \parallel CD$, 所以 $\angle A = \angle MDF$, 易证

$\triangle AEF \cong \triangle DMF$, 所以 $FE = FM$, 因为 $CE \perp AB$, 所以

$\angle AEC = 90^\circ$, 所以 $\angle ECD = 90^\circ$, 因为 $FE = FM$, 所以

$EF = CF$, 故③正确; 设 $\angle FEC = x$, 则 $\angle FCE = x$,

$\angle EFC = 180^\circ - 2x$, 所以 $\angle DFC = \angle DCF = 90^\circ - x$, 所

以 $\angle DFE = 90^\circ - x + 180^\circ - 2x = 270^\circ - 3x$, 因为

$\angle AEF = 90^\circ - x$, 所以 $\angle DFE = 3\angle AEF$, 故②正确; 因

为 $FE = FM$, 所以 $S_{\triangle CEF} = S_{\triangle CFM}$, 因为 $MC > CD > BE$,

所以 $S_{\triangle BEC} < 2S_{\triangle CEF}$, 故④错误.

5. $b - 2a$ 或 $2a - b$ 提示: 因为四边形 ABCD

为平行四边形, 所以 $AD \parallel BC$, 所以 $\angle AEB = \angle CBE$. 因

为 BE 平分 $\angle ABC$, 所以 $\angle ABE = \angle CBE$, 所以 $\angle ABE =$

$\angle AEB$, 所以 $AE = AB = a$, 同理, $DF = CD = a$. 分情况

讨论: ①如图 1, 当点 E 在点 F 的左侧时, $EF = b - 2a$;

②如图 2, 当点 E 不在点 F 的左侧时, $EF = 2a - b$.

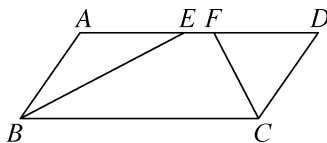


图 1

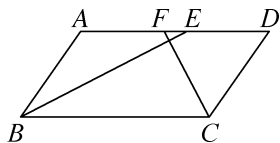


图 2

6. $AB^2 = AC^2 + BD^2$ 提示: 如图, 过点 A 作

$AE \parallel CD$, 截取 $AE = CD$, 连接 BE, DE. 易证四边形

ACDE 是平行四边形, 所以 $DE = AC$, $\angle ACD =$

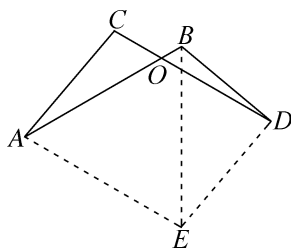
$\angle AED$. 因为 $\angle AOC = 60^\circ$, $AB = CD$, 所以 $\angle EAB =$

60° , $AE = AB$, 所以 $\triangle ABE$ 为等边三角形, 所以 $BE =$

AB . 因为 $\angle ACD + \angle ABD = 210^\circ$, 所以 $\angle AED + \angle ABD =$

210° , 所以 $\angle BDE = 360^\circ - (\angle AED + \angle ABD) - \angle EAB =$

90° , 所以 $BE^2 = DE^2 + BD^2$, 即 $AB^2 = AC^2 + BD^2$.



7. 平行四边形 $\sqrt{2} + \sqrt{10}$ 提示: 因为 $AQ \parallel$

PC , $CQ \parallel AP$, 所以四边形 APCQ 是平行四边形. 如图, 当

$PQ \perp BC$ 时, PQ 取得最小值. 连接 AC, 交 PQ 于点 H.

因为四边形 APCQ 是平行四边形, 所以 $AH = HC =$

$\frac{1}{2}AC$, $QH = PH = \frac{1}{2}PQ$. 过点 A 作 $AM \perp BC$, 垂足为

M, 则 $\triangle ABM$ 是等腰直角三角形, 所以 $MB = \sqrt{2}$. 因为

$BC = 2\sqrt{2}$, 所以 $BM = CM$. 所以 AM 垂直平分 BC, 所

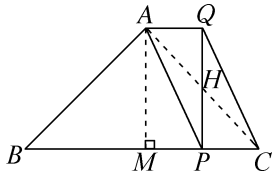
以 $AC = AB = 2$, $\angle ACB = 45^\circ$, 所以 $HC = 1$. 因为 $PQ \perp$

BC , 所以 $\angle PHC = 45^\circ$, 所以 $PH = PC = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以

$PQ = \sqrt{2}$, 所以 $QC = \sqrt{PC^2 + PQ^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$. 所以四边形

APCQ 的周长为 $2PC + 2QC = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \times \frac{\sqrt{10}}{2} =$

$$\sqrt{2} + \sqrt{10}.$$



8. (1) 12

(2) 证明: 因为 $AB=AC$, 所以 $\angle PBQ = \angle C$. 因为 $PQ \parallel AC$, 所以 $\angle PQB = \angle C$. 所以 $\angle PBQ = \angle PQB$, 所以 $PB=PQ$.

(3) 解: 分两种情况讨论. 当点 M 在点 D 上方时, 根据题意, 得 $PQ=BP=t$ cm, $AM=4t$ cm, $AD=12$ cm. 所以 $MD=(12-4t)$ cm. 因为 $PQ \parallel MD$, 所以当 $PQ=MD$ 时, 四边形 $PQDM$ 是平行四边形, 此时 $t=12-4t$, 解得 $t=\frac{12}{5}$. 同理, 当点 M 在点 D 下方时, $MD=(4t-12)$ cm, 此时 $t=4t-12$, 解得 $t=4$.

综上所述, 当 t 的值为 $\frac{12}{5}$ 或 4 时, 以 P, Q, D, M 为顶点的四边形是平行四边形.

9. 解: (1) 方法一: 如图 1, PM, PN 即为所求.

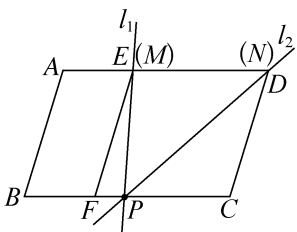


图 1

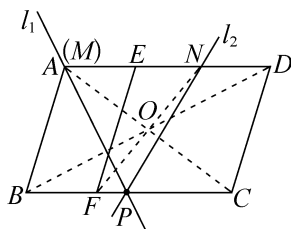


图 2

方法二: 如图 2, PM, PN 即为所求.

提示: 设 $AD=BC=3a$, 边 AD 到边 BC 的距离为 h . 因为 $AE=\frac{1}{3}AD, BF=\frac{1}{3}BC$, 所以 $AE=BF=a$, 则 $ED=AD-AE=2a$. 因为点 M, N 在边 AD 上, 点 P 在边 BC 上, 所以 $S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2}MN \cdot h, S_{\square ABCD} = AD \cdot h = 3ah$, 所以要使得 $S_{\triangle PMN} = \frac{1}{3}S_{\square ABCD}$, 只需 $MN=2a$ 即可. 如图 1, 当点 M, N 分别与点 E, D 重合时, $MN=$

$ED=2a$, 此时 $S_{\triangle PMN} = \frac{1}{3}S_{\square ABCD}$, 故 PM, PN 即为所求. 如图 2, 连接 AC, BD 相交于点 O , 连接 FO 并延长交 AD 于点 N . 因为 $\square ABCD$ 是中心对称图形, 点 O 为对称中心, 所以 $DN=BF=a$, 所以 $AN=AD-DN=2a$, 当点 M 与点 A 重合时, $MN=AN=2a$, 此时 $S_{\triangle PMN} = \frac{1}{3}S_{\square ABCD}$, 故 PM, PN 即为所求.

(2) 方法一: 如图 3, PM, PN 即为所求.

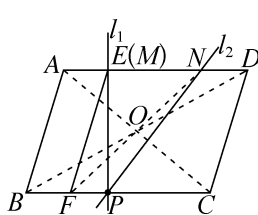


图 3

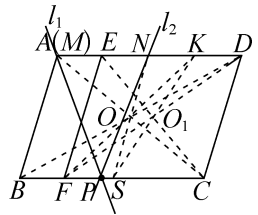


图 4

方法二: 如图 4, PM, PN 即为所求.

提示: 设 $AD=BC=4a$, 边 AD 到边 BC 的距离为 h . 因为 $AE=\frac{1}{4}AD, BF=\frac{1}{4}BC$, 所以 $AE=BF=a$, 则 $CF=ED=AD-AE=3a$. 因为点 M, N 在边 AD 上, 点 P 在边 BC 上, 所以 $S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2}MN \cdot h, S_{\square ABCD} = AD \cdot h = 4ah$, 所以要使得 $S_{\triangle PMN} = \frac{1}{4}S_{\square ABCD}$, 只需 $MN=2a$ 即可. 如图 3, 连接 AC, BD 相交于点 O , 连接 FO 并延长交 AD 于点 N . 因为 $\square ABCD$ 是中心对称图形, 点 O 为对称中心, 所以 $DN=BF=a$, 所以 $EN=AD-AE-DN=2a$, 当点 M 与点 E 重合时, $MN=EN=2a$, 此时 $S_{\triangle PMN} = \frac{1}{4}S_{\square ABCD}$, 故 PM, PN 即为所求. 如图 4, 连接 AC, BD 相交于点 O , 连接 FO 并延长交 AD 于点 K . 因为 $\square ABCD$ 是中心对称图形, 点 O 为对称中心, 所以 $DK=BF=a$, 所以 $DE=AD-AE=3a$. 因为 $CF=DE, CF \parallel DE$, 所以四边形 $EFCD$ 是平行四边形. 连接 FD, EC 相交于点 O_1 , 则点 O_1 为 $\square EFCD$ 的对称中心, 连接 KO_1 并延长交 BC 于点 S , 则 $FS=DK=a$, 连接 SO 并延长交 AD 于点 N , 则 $KN=FS=a$, 所以 $AN=AD-DK-KN=2a$, 当点 M 与点 A 重合时, $MN=AN=2a$, 此时 $S_{\triangle PMN} = \frac{1}{4}S_{\square ABCD}$, 故 $PM,$

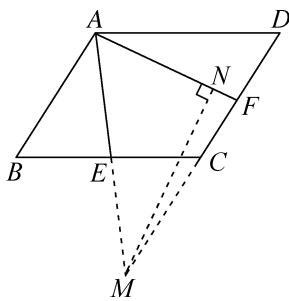
PN 即为所求.

10. $\frac{4\sqrt{7}}{3}$ 提示:如图,延长 AE 交 DC 的延长线

于点 M,过点 M 作 $MN \perp AF$ 于点 N,易证 $\triangle ABE \cong \triangle MCE$,所以 $AM = 2AE = 6, AB = MC$. 在 $\text{Rt}\triangle AMN$ 中,因为 $\angle EAF = 60^\circ$,所以 $AN = \frac{1}{2}AM = 3, MN = \sqrt{AM^2 - AN^2} = 3\sqrt{3}$. 所以 $NF = AF - AN = 1$. 在 $\text{Rt}\triangle MNF$ 中,根据勾股定理,可得 $MF = \sqrt{MN^2 + NF^2} = 2\sqrt{7}$. 因为四边形 ABCD 是平行四边形,所以 $CD = AB$,又因为 F 为 CD 的中点,所以 $CF = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB$.

所以 $MF = MC + CF = \frac{3}{2}AB$. 所以 $\frac{3}{2}AB = 2\sqrt{7}$,解得

$$AB = \frac{4\sqrt{7}}{3}.$$



11. (1) 相等 垂直 提示:如图 1,延长 BD

交 AE 于点 H. 由题意,得 $BD = AE, \angle CBD = \angle CAE$. 因为 $\angle BDC = \angle ADH$,所以 $\angle AHD = \angle BCD = 90^\circ$,所以 $BD \perp AE$.

(2) 证明:根据题意,可得 $AF = AE = BD, AF \perp AE$. 因为 $BD \perp AE$,所以 $AF \parallel BD$,所以四边形 ABDF 是平行四边形.

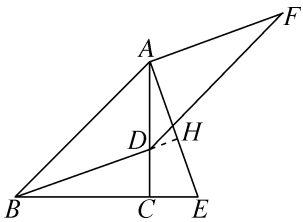


图 1

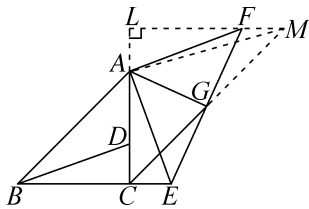


图 2

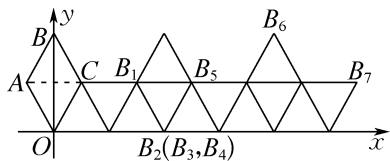
(3) 解:如图 2,过点 F 作 $FL \perp AC$ 于点 L,延长 CG 交 LF 的延长线于点 M,连接 AM. 由题意,得 $AF = EA, \angle FAE = 90^\circ$,所以

$\angle CAE = \angle LFA = 90^\circ - \angle FAL$,所以 $\triangle ACE \cong \triangle FLA$ (AAS),所以 $FL = AC = 12$. 因为 G 是 EF 的中点, $CE \parallel LM$,所以 $GE = GF, \angle GEC = \angle GFM$,所以 $\triangle GCE \cong \triangle GMF$,所以 $FM = EC = CD = t$,所以 $S_{\triangle ACG} = \frac{1}{2}S_{\triangle ACM} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}AC \cdot LM) = \frac{1}{4} \times 12 \times (12 + t) = 3t + 36$.

巅峰训练 6 特殊的平行四边形(1)

1. B 提示:延长 GE 交 AD 于点 P,过点 G 作 $GQ \perp AD$ 于点 Q,则 $\angle GQA = 90^\circ$. 易证四边形 ABGQ 是矩形,所以 $AQ = BG = 1, GQ = AB = 5$. 因为 $AD \parallel BC$,所以 $\angle CAD = \angle ACB$. 易证 $\triangle AEP \cong \triangle CFH$,所以 $EP = FH, AP = CH = 4$,所以 $PQ = AP - AQ = 3$. 在 $\text{Rt}\triangle QGP$ 中, $GP = \sqrt{GQ^2 + PQ^2} = \sqrt{34}$. 所以 $EG + FH = EG + EP = GP = \sqrt{34}$.

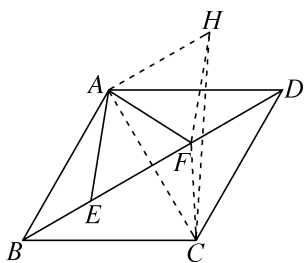
2. C 提示:如图,连接 AC. 因为 $\angle ABC = 60^\circ$,所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形. 所以 $AC = AB = OA = 1$,画出第 5 次、第 6 次、第 7 次翻转后的图形,如图所示. 由图可知,每翻转 6 次,图形向右平移 4. 因为 $2\ 024 = 337 \times 6 + 2$,所以点 B_2 向右平移 1 348 得到点 $B_{2\ 024}$. 因为点 B_2 的坐标为 $(2, 0)$,所以点 $B_{2\ 024}$ 的坐标为 $(2 + 1\ 348, 0)$,所以点 $B_{2\ 024}$ 的坐标为 $(1\ 350, 0)$.



3. B 提示:设 $AB = CD = 2a, AD = BC = 2b$,则根据折叠的性质,得 $OB = AB = 2a, DG = OG = CG = a$,所以 $BG = 3a$. 在 $\text{Rt}\triangle BCG$ 中,根据勾股定理,得 $CG^2 + BC^2 = BG^2$,即 $a^2 + (2b)^2 = (3a)^2$,所以 $b^2 = 2a^2$,所以 $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$ (负值已舍),所以 $\frac{AD}{AB}$ 的值为 $\sqrt{2}$.

4. D 提示:如图,过点 A 作 $AH \parallel BD$,使得 $AH = EF = 2$,连接 AC, CF, FH, CH. 易证四边形

EFHA 是平行四边形, 所以 $AE = FH$. 因为四边形 ABCD 是菱形, 所以 BD, AC 互相垂直平分, 所以 $AF = CF, \angle CAH = 90^\circ$, 所以 $AE + AF = FH + CF$. 当 H, F, C 三点共线时, $FH + CF$ 的值最小, 即 $AE + AF$ 的值最小, 最小值为 CH 的长. 根据菱形的性质, 得 $AB = BC = 3$. 因为 $\angle ABC = 60^\circ$, 所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 所以 $AC = 3$. 在 $\text{Rt}\triangle CAH$ 中, 根据勾股定理, 得 $CH = \sqrt{AC^2 + AH^2} = \sqrt{13}$. 所以 $AE + AF$ 的最小值是 $\sqrt{13}$.



5. $\frac{7}{8}$ 或 $\frac{4}{3}$ 提示: 当 $AE = EC'$ 时, 设 $BE = x$, 则

$EC = 4 - x$, 因为 $\triangle ECF$ 沿 EF 翻折得到 $\triangle EC'F$, 所以 $EC' = EC = 4 - x = AE$, 在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, 由勾股定理, 得 $AE^2 = BE^2 + AB^2$, 即 $(4 - x)^2 = x^2 + 3^2$, 解得 $x = \frac{7}{8}$; 当 $AE = AC'$ 时, 过点 A 作 $AH \perp EC'$ 于点 H , 则 $EH = C'H$, 因为 $EF \perp AE$, 所以 $\angle C'EF + \angle AEC' = 90^\circ, \angle BEA + \angle FEC = 90^\circ$, 因为 $\triangle ECF$ 沿 EF 翻折得到 $\triangle EC'F$, 所以 $\angle C'EF = \angle FEC$, 所以 $\angle BEA = \angle HEA$, 易证 $\triangle ABE \cong \triangle AHE$, 所以 $BE = HE$, 所以 $BE = HE = HC'$, 所以 $BE = \frac{1}{2}EC'$, 因为 $EC = EC'$, 所以 $BE = \frac{1}{2}EC$, 所以 $BE = \frac{1}{3}BC = \frac{4}{3}$.

6. 6 $\sqrt{41}$ 或 $\sqrt{30}$ 或 $\sqrt{6}$ 提示: 当 A_1, D 两点重合时, 由折叠的性质, 可知 $AC = A_1C$. 因为点 A_1 与点 D 重合, 所以 $AC = A_1C = CD = 6$ cm.

当 A_1, D 两点不重合时, 由题意, 可知 BC, A_1D 必定为矩形的一组对边. 分 3 种情况: ① 如图 1, A_1C 为对角线, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AC = \sqrt{BC^2 + AB^2} = \sqrt{41}$ cm; ② 如图 2, A_1C 为边, 且 $A_1C > BC$, 设对角线交点为 O , 因为 OB 为 $\text{Rt}\triangle CBD$ 斜边上的中线, 所以 $OB = OC =$

$OD = \frac{1}{2}CD = 3$ cm, 过点 B 作 $BE \perp CD$ 于点 E , 则 $BE = \sqrt{5}$ cm, 在 $\text{Rt}\triangle OBE$ 中, $OE = \sqrt{OB^2 - BE^2} = 2$ cm, 则 $DE = 5$ cm, 在 $\text{Rt}\triangle BED$ 中, $BD = \sqrt{BE^2 + DE^2} = \sqrt{30}$ cm, 所以 $AC = BD = \sqrt{30}$ cm; ③ 如图 3, A_1C 为边, 且 $A_1C < BC$, 同②可得 $AC = \sqrt{6}$ cm.

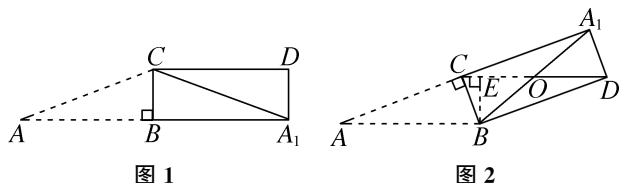


图 1

图 2

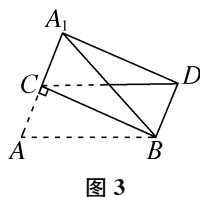


图 3

7. 5 或 20 提示: 因为四边形 ABCD 是矩形, $AB = 12, BC = 10$, 所以 $CD = AB = 12, AD = BC = 10, \angle BAD = 90^\circ$. 因为点 E, F 分别在边 AB, DC 上, 且 $AB = 3BE, CD = 3CF$, 所以 $BE = \frac{1}{3}AB = 4, CF = \frac{1}{3}CD = 4$, 所以 $AE = DF = 12 - 4 = 8$, 所以 $AE \parallel DF$, 所以四边形 AEFD 是平行四边形. 因为 $\angle EAD = 90^\circ$, 所以四边形 AEFD 是矩形, 所以 $EF = AD = 10, \angle AEF = \angle DFE = 90^\circ$. 如图 1, 点 A' 落在线段 EF 上, 由翻折, 得 $A'D = AD = 10, A'P = AP$, 所以 $A'F = \sqrt{A'D^2 - DF^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$, 所以 $A'E = EF - A'F = 10 - 6 = 4$. 因为 $A'E^2 + PE^2 = A'P^2$, 且 $PE = 8 - AP$, 所以 $4^2 + (8 - AP)^2 = AP^2$, 解得 $AP = 5$. 如图 2, 点 A' 落在线段 EF 的延长线上, 则点 P 在线段 AE 的延长线上, 所以 $PE = AP - 8$. 因为 $\angle A'FD = 90^\circ, A'D = AD = 10, DF = 8$, 所以 $A'F = \sqrt{A'D^2 - DF^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$, 所以 $A'E = EF + A'F = 10 + 6 = 16$. 因为 $A'E^2 + PE^2 = A'P^2$, 且 $A'P = AP$, 所以 $16^2 + (AP - 8)^2 = AP^2$, 解得 $AP = 20$. 综上所述, AP 的长为 5 或 20.

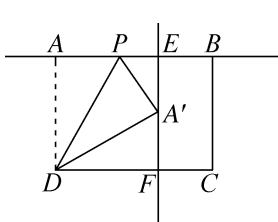


图 1

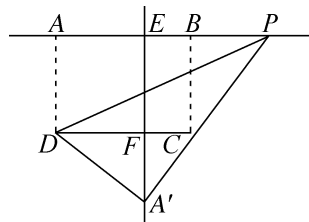


图 2

8. $\frac{8}{3}$ 提示: 因为 $CP = CB$, 所以 $\angle PBC =$

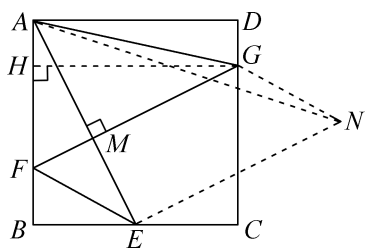
$\angle CPB$. 因为 $\angle APB = 90^\circ$, 所以 $\angle PAB + \angle ABP = 90^\circ$, 又因为 $\angle PBC + \angle ABP = \angle ABC = 90^\circ$, 所以 $\angle PAB = \angle PBC = \angle CPB$. 又因为 $\angle EAP + \angle PAB = \angle APE + \angle CPB = 90^\circ$, 所以 $\angle EAP = \angle APE$, 所以 $AE = PE$. 设 $AE = x$, 则 $DE = AD - AE = 6 - x$, $CE = CP + PE = CB + AE = 6 + x$. 在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中, $CD^2 + DE^2 = CE^2$, 即 $8^2 + (6 - x)^2 = (6 + x)^2$, 解得 $x = \frac{8}{3}$.

9. 解: (1) 过点 M 作 $ME \perp x$ 轴于点 E , 则 $\angle MEP = 90^\circ$, 所以 $\angle MPE + \angle PME = 90^\circ$. 因为四边形 $OABC$ 是正方形, 所以 $\angle POC = 90^\circ$. 因为 $PM \perp CP$, 所以 $\angle CPM = 90^\circ$, 所以 $\angle MPE + \angle CPO = 90^\circ$. 所以 $\angle PME = \angle CPO$. 所以 $\triangle MPE \cong \triangle PCO$, 所以 $EM = OP = t$, $EP = OC = 4$, 所以 $OE = t + 4$, 所以点 M 的坐标为 $(t + 4, t)$.

(2) 线段 MN 的长度不变. 理由如下:

连接 AM . 因为 $AE = OE - OA = t + 4 - 4 = t = EM$, $\angle MEP = 90^\circ$, 所以 $\triangle MEA$ 为等腰直角三角形. 所以 $\angle MAE = 45^\circ = \angle BOA$, 所以 $AM \parallel OB$. 所以四边形 $OAMN$ 是平行四边形, 所以 $MN = OA = 4$.

10. $\sqrt{10}$ 提示: 如图, 以 FE, FG 为邻边作 $\square FGNE$, 则 $EF = GN, FG = EN, \angle AEN = \angle AMG = 90^\circ$, 连接 AN , 过点 G 作 $GH \perp AB$ 于点 H , 易证 $\triangle ABE \cong \triangle GHF$ (AAS), 所以 $GF = AE$. 在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, 由勾股定理, 得 $AE = \sqrt{5}$, 所以 $GF = AE = EN = \sqrt{5}$, 所以 $\triangle AEN$ 是等腰直角三角形, 所以 $AN = \sqrt{2}AE = \sqrt{10}$. 因为 $EF + AG = GN + AG \geq AN$, 所以当 A, G, N 三点共线时, $GN + AG$ 的值最小, 即 $EF + AG$ 的值最小, 此时最小值是 AN 的长, 为 $\sqrt{10}$.



11. 解: (1) 如图 1 所示, 点 P 即为所求.

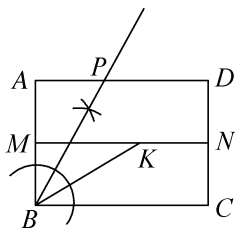


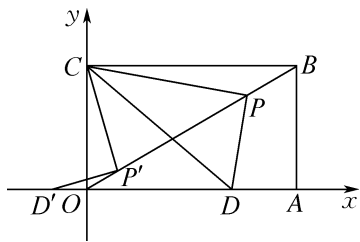
图 1

(2) 连接 AK . 由题意, 知直线 MN 是矩形 $ABCD$ 的对称轴, 所以 $AK = BK, KM \perp AB$. 由折叠的性质, 得 $BK = AB = 4\sqrt{3}$. 所以 $AK = BK = AB$, 所以 $\triangle ABK$ 为等边三角形, 所以 $\angle BKM = 30^\circ$. 在 $\text{Rt}\triangle BMK$ 中, 由勾股定理, 得 $MK = \sqrt{BK^2 - BM^2} = 6$.

(3) $\sqrt{3}$ 提示: 连接 AF , 取 BK 的中点 H , 连接 EH . 因为 $BF = BE, BA = BK, \angle FBE = \angle ABK = 60^\circ$, 所以 $\angle FBA = \angle EBK$, 所以 $\triangle FBA \cong \triangle EBK$. 因为 MF, HE 分别是 AB, BK 上的中线, 所以 $MF = HE$. 根据“垂线段最短”, 可知当 $HE \perp MN$ 时, HE 的值最小. 因为 H 是 BK 的中点, 所以 $HK = \frac{1}{2}BK = 2\sqrt{3}$. 当 $HE \perp MN$ 时, 由 (2), 得 $\angle BKM = 30^\circ$, 所以 $HE = \frac{1}{2}HK = \sqrt{3}$. 所以 HE 的最小值为 $\sqrt{3}$, 即 MF 的最小值为 $\sqrt{3}$. (此题也可由 $\triangle FBA \cong \triangle EBK$, 得 $\angle BAF = \angle BKE = 30^\circ$, 可知点 F 在与直线 BA 所夹锐角为 30° 的直线上运动, 进而解之)

(4) KE 的长为 4 或 6 或 8 或 12. 提示: 分情况讨论: ①如图 2, 当 $\angle TBQ = 90^\circ$ 时, 点 T 与点 A 重合, 此时 $\angle MBE = \angle EBK = \frac{1}{2}\angle ABK = 30^\circ$, 易得 $KE = ET = EB = 4$; ②如图 3, 当 $\angle TQB = 90^\circ$ 时, 因为 $BQ = KE, BQ \parallel KE$, 所以四边形 $BQEK$ 为平行四边形. 所以 $QE = BK, QE \parallel BK$, 所以 $\angle QEB = \angle EBK$. 由折叠的性质, 得 $BK = BT, \angle EBK = \angle EBT$. 所以 $QE = BK = BT, \angle QEB = \angle EBT$. 设 EQ, BT 相交于点 O , 则 $EO = BO$, 所以 $QE - EO = BT - BO$, 即 $QO = TO$, 所以 $\angle TQO = \angle QTO$, 又因为 $\angle TOQ = \angle EOB$, 所以 $\angle TQE = \angle QTB =$

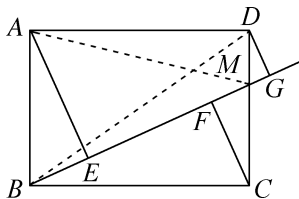
$\angle CPD - \angle ODP = 30^\circ$, 所以 $OD = \frac{1}{2}CD$. 由勾股定理, 得 $OC = \frac{\sqrt{3}}{2}CD$. 所以 $OD = \frac{OC}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 所以点 $D\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$. 当点 D 在 x 轴的正半轴上, 且 $OP = OD$ 时, $\angle ODP = \angle OPD = 75^\circ$, 则 $\angle OCP = 105^\circ > 90^\circ$, 不合题意, 故舍去. 当点 D 在 x 轴的正半轴上, 且 $OP = PD$ 时, $\angle PDO = \angle POD = 30^\circ$, 则 $\angle OCP = 150^\circ > 90^\circ$, 不合题意, 故舍去. 当点 D 在 x 轴的负半轴上, 且 $OP = OD$ 时(如图中 $\triangle OD'P'$ 所示), $\angle D'OP' = 150^\circ$, $\angle OD'P' = \angle OP'D' = 15^\circ$. 易得 $\angle BCP' = \angle CP'B = 75^\circ$, 所以 $BP' = BC = 2\sqrt{3}$. 所以 $OD' = OP' = OB - BP' = 4 - 2\sqrt{3}$, 所以点 $D'(2\sqrt{3} - 4, 0)$. 综上所述, 当 $\triangle ODP$ 为等腰三角形时, 点 D 的坐标为 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ 或 $(2\sqrt{3} - 4, 0)$, 故③错误.



5. $\sqrt{3}$ 提示: 延长 GP 交 DC 于点 H . 因为 P 是线段 DF 的中点, 所以 $FP = DP$. 根据题意, 得 $DC \parallel GF$, 所以 $\angle GFP = \angle HDP$. 所以 $\triangle GFP \cong \triangle HDP$, 所以 $GP = HP, GF = HD$. 因为四边形 $ABCD$ 和四边形 $BEFG$ 均为菱形, 所以 $CD = CB, BG = GF = HD$. 所以 $BC - BG = CD - HD$, 即 $CG = CH$, 所以 $\triangle CHG$ 是等腰三角形, 所以 $PC \perp PG$. 又因为 $\angle ABC = 60^\circ$, 所以 $\angle BCD = 120^\circ$, 所以 $\angle PGC = 30^\circ$, 所以 $PC = \frac{1}{2}CG$. 在 $\text{Rt}\triangle CPG$ 中, 由勾股定理, 得 $PG = \sqrt{CG^2 - PC^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}CG$. 所以 $\frac{PG}{PC} = \sqrt{3}$.

6. $\frac{24}{5}$ 提示: 如图, 连接 AM, BD . 因为 $\triangle ADM$ 和 $\triangle BDM$ 的边 DM 上的高 $AD = BC = 4$, 所以 $S_{\triangle ADM} = S_{\triangle BDM} = \frac{1}{2}BM \cdot DG$. 因为 $S_{\triangle ABM} + S_{\triangle BCM} + S_{\triangle ADM} = S_{\text{矩形}ABCD}$, 所以 $\frac{1}{2}BM \cdot AE + \frac{1}{2}BM \cdot CF + \frac{1}{2}BM \cdot$

$DG = \frac{1}{2}BM(AE + CF + DG) = 12$, 所以 $\frac{1}{2}BM \cdot m = 12$, 即 $m = \frac{24}{BM}$. 由勾股定理, 得 $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 5$. 因为 M 是边 CD 上任意一点, 所以 $4 \leq BM \leq 5$, 所以当 $BM = 5$ 时, m 取得最小值, 最小值为 $\frac{24}{5}$.



7. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 提示: 过点 F 作 $FG \perp AC$ 于点 G . 易证 $\triangle BCE \cong \triangle GCF$, 所以 $BE = GF, BC = GC$. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 4$, 所以 $AC = 2AB$. 易得 $\angle ACB = 30^\circ$, 所以 $\angle DAC = \angle ACB = 30^\circ$. 因为 $FG \perp AC$, 所以 $AF = 2GF$, 所以 $AE + AF = AE + 2BE = AB + BE$. 设 $BE = x$. 在 $\text{Rt}\triangle AFG$ 中, $AF = 2GF = 2BE = 2x$, 所以 $AG = \sqrt{AF^2 - FG^2} = \sqrt{3}x$, 所以 $AC = AG + GC = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} = 4$, 解得 $x = \frac{4\sqrt{3}}{3} - 2$. 所以 $AE + AF = AB + BE = 2 + \frac{4\sqrt{3}}{3} - 2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

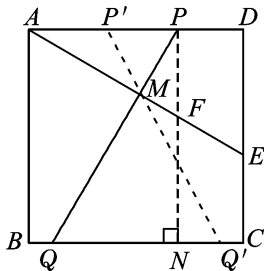
8. 3 提示: 设 MN, AC 相交于点 L . 由折叠, 得 $GM = CM, GN = CN, \angle CLM = \angle GLM = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$, 所以 $\angle CLN = \angle CLM = 90^\circ$. 因为四边形 $ABCD$ 是边长为 1 的菱形, $\angle B = 120^\circ$, 所以 $AB = CB = CD = AD = 1, AB \parallel CD, AD \parallel CB$, 所以 $\angle BCA = \angle BAC = \angle DCA, \angle BAD = \angle BCD = 180^\circ - \angle B = 60^\circ$. 在 $\triangle CLN$

和 $\triangle CLM$ 中, $\begin{cases} \angle CLN = \angle CLM, \\ CL = CL, \\ \angle NCL = \angle MCL, \end{cases}$ 所以 $\triangle CLN \cong \triangle CLM$

(ASA), 所以 $CN = CM$, 所以 $GM = CM = GN = CN$, 所以四边形 $CMGN$ 是菱形. 因为 $CN = CM, \angle NCM = 60^\circ$, 所以 $\triangle CMN$ 是等边三角形. 同理可得四边形 $AEGF$ 是菱形, $\triangle AEF$ 是等边三角形, 所以 $GM \parallel CN \parallel ED, GE \parallel AF \parallel MD$, 所以四边形 $DMGE$ 是平行四边形, 所以 $DM = GE = AE$. 因为 $EF = AF, MN = CN$, 所以

$DM+DE=AE+DE=AD=1, EF+BF=AF+BF=AB=1, BN+MN=BN+CN=CB=1$, 所以 $DM+DE+EF+BF+BN+MN=1+1+1=3$, 所以六边形 $DEFBNM$ 的周长为 3.

9. 1 或 2 提示: 如图, 过点 P 作 $PN \perp BC$ 于点 N , 交 AE 于点 F . 因为四边形 $ABCD$ 为正方形, 所以 $AD=DC=PN$. 在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, $\angle DAE=30^\circ, AD=3$ cm, 设 $DE=x$ cm, 则 $AE=2x$ cm, 根据勾股定理, 得 $AE^2-DE^2=AD^2$, 即 $(2x)^2-x^2=3^2$, 解得 $x=\sqrt{3}$ (负值已舍), 所以 $AE=2\sqrt{3}$ cm. 因为 M 为 AE 的中点, 所以 $AM=\frac{1}{2}AE=\sqrt{3}$ cm. 易证 $\triangle PNQ \cong \triangle ADE$, 所以 $\angle NPQ=\angle DAE=30^\circ$. 因为 $PN \parallel DC$, 所以 $\angle PFA=\angle DEA=60^\circ$. 所以 $\angle PMF=90^\circ$, 即 $PM \perp AF$. 在 $\text{Rt}\triangle AMP$ 中, $\angle MAP=30^\circ, AM=\sqrt{3}$ cm, 易得 $AP=2$ cm. 由对称性, 可得 $AP'=DP=AD-AP=3-2=1$ (cm). 综上所述, $AP=1$ cm 或 $AP=2$ cm.



10. 解: (1) 如图 1, 点 F 即为所求.

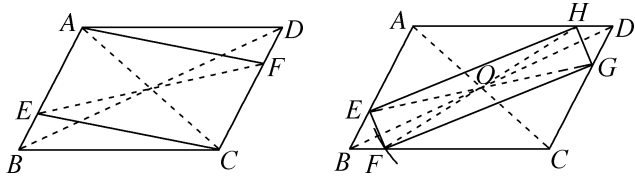


图 1

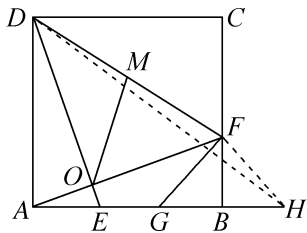
图 2

(2) 如图 2, 连接 AC, BD 交于点 O , 连接 EO 并延长交 CD 于点 G , 以点 O 为圆心, OG 的长为半径作弧交 BC 于点 F , 延长 FO 交 AD 于点 H , 连接 EF, FG, GH, HE , 四边形 $EFGH$ 即为所求.

理由: 易证 $\triangle AOE \cong \triangle COG$, 所以 $OE=OG$. 易证 $\triangle AOH \cong \triangle COF$, 所以 $OH=OF$. 因为 $OG=OF$, 所以 $OE=OG=OF=OH$, 所

以四边形 $EFGH$ 为矩形.

11. B 提示: 易证 $\triangle ADE \cong \triangle BAF$ (SAS), 所以 $\angle ADE=\angle BAF$, 则 $\angle DOF=90^\circ$. 因为 M 是 DF 的中点, 所以 $OM=\frac{1}{2}DF$. 如图, 在 AB 的延长线上截取 $BH=BG$, 连接 DH, FH . 易证 $\triangle FBG \cong \triangle FBH$ (SAS), 所以 $FH=FG$, 所以 $OM+\frac{1}{2}FG=\frac{1}{2}DF+\frac{1}{2}HF=\frac{1}{2}(DF+HF)$, 易知当 D, F, H 三点共线时, $DF+HF$ 取得最小值, 即此时 $OM+\frac{1}{2}FG$ 取得最小值, 最小值为 DH 长的一半. 因为 $AB=AD=6, AG=2GB$, 所以 $BG+2BG=AB$, 求得 $BG=2$. 易得 $AH=8$. 在 $\text{Rt}\triangle ADH$ 中, 由勾股定理, 得 $DH=\sqrt{AD^2+AH^2}=10$, 所以 $OM+\frac{1}{2}FG$ 的最小值为 5.



12. 解: (1) R, S

(2) 如图 1, 过点 A 作 $AH \perp x$ 轴于点 H . 因为点 A, B 的“相关菱形”为正方形, 所以 $\triangle ABH$ 为等腰直角三角形. 因为点 $A(1, 4)$, 所以 $BH=AH=4$. 所以 $b=-3$ 或 $b=5$. 所以点 B 的坐标为 $(-3, 0)$ 或 $(5, 0)$. 设直线 AB 的函数表达式为 $y=kx+b$ ($k \neq 0$). 根据题意, 得 $\begin{cases} k+b=4, \\ -3k+b=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} k+b=4, \\ 5k+b=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=1, \\ b=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} k=-1, \\ b=5. \end{cases}$ 所以直线 AB 的函数表达式为 $y=x+3$ 或 $y=-x+5$.

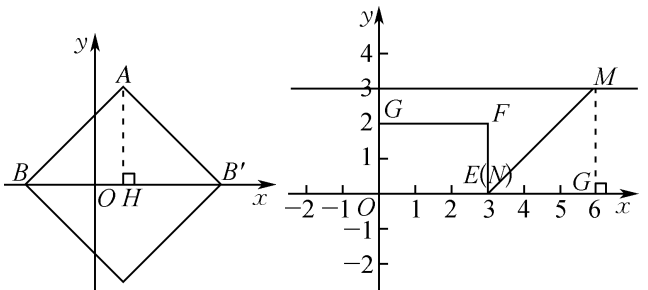


图 1

图 2

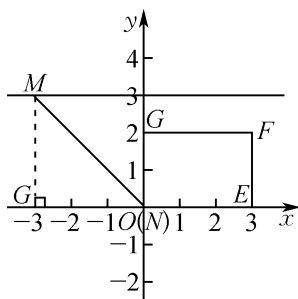


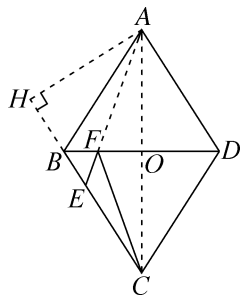
图3

(3) $-3 \leq m \leq 6$. 提示:如图2,当点N与点E重合时,过点M作 $MG \perp x$ 轴于点G.因为点M,N的“相关菱形”为正方形,所以 $\triangle NMG$ 为等腰直角三角形,所以 $EG=MG=3$,所以点 $M(6,3)$.如图3,当点N与点O重合时,同理求得点 $M(-3,3)$.综上所述, m 的取值范围是 $-3 \leq m \leq 6$.

巅峰训练8 特殊的平行四边形(3)

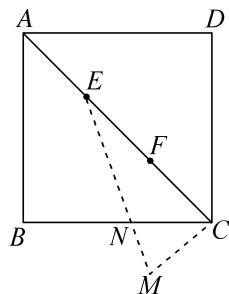
1. B 提示:设 $BE=a$,则 $CE=4a, BC=AB=5a$.由点 $(0,6)$ 可知,当 $x=0$,即点F与点B重合时, $EF+CF=BE+BC=6a=6$,解得 $a=1$,即 $BE=1, CE=4, BC=5$.由点 $(6,0)$ 可知 $BD=6$.如图,连接AC,则 $AC \perp BD$,垂足为O, $BO=OD=3$,所以 $OC=\sqrt{5^2-3^2}=4$,所以 $AC=8$.连接AF,则 $AF=CF$,所以 $y=EF+CF=EF+AF \geq AE$.当点A,F,E在同一直线上时, y 取得最小值,为题图象最低点的纵坐标.过点

A作 $AH \perp BC$,垂足为H,则 $\frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2}AC \cdot BO$,所以 $AH = \frac{24}{5}$,所以 $HB = \sqrt{5^2 - (\frac{24}{5})^2} = \frac{7}{5}$.所以 $HE = \frac{7}{5} + 1 = \frac{12}{5}$,所以 $AE = \sqrt{(\frac{12}{5})^2 + (\frac{24}{5})^2} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$,即图象最低点纵坐标为 $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

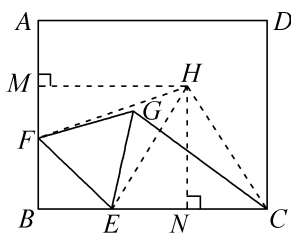


2. D 提示:如图,作点F关于BC的对称点M,

连接EM交BC于点N,连接CM.因为点E,F将对角线AC三等分,且 $AC=12$,所以 $EC=8, FC=4$.因为点M与点F关于BC对称,所以 $CM=CF=4, \angle BCM = \angle ACB = 45^\circ$,所以 $\angle ACM = 90^\circ$,所以 $EM = \sqrt{EC^2 + CM^2} = 4\sqrt{5}$.所以线段BC上存在点N到点E和点F距离之和的最小值为 $4\sqrt{5}$.因为 $4\sqrt{5} < 9$,所以线段BC上点N的左右两侧各有一个点P使得 $PE+PF=9$.同理,在线段AB,AD,CD上均存在两个点P使 $PE+PF=9$.即共有8个点P满足 $PE+PF=9$.



3. C 提示:如图,以EC为边作等边三角形ECH,过点H作 $HN \perp BC$ 于点N, $HM \perp AB$ 于点M,连接FH.易证四边形MHN B是矩形, $EN=NC = \frac{1}{2}EC=2$,所以 $HM=BN=4$.易证 $\triangle FEH \cong \triangle GEC$ (SAS),可得 $FH=GC$.当点F与点M重合时,FH的长取得最小值,即CG的长取得最小值,最小值为HM的长,为4.



4. $\frac{19}{8}$ 提示:如图,过点F作 $FH \perp CD$ 于点H,

过点G作 $GK \perp BC$,交BC的延长线于点K.因为四边形ABCD是矩形,所以 $CD=AB=10, BC=AD=4, \angle BCD=90^\circ$.因为 $DE=2t$,所以 $CE=CD-DE=10-2t$.因为四边形BEFG是正方形,所以 $BE=EF=BG, \angle BEF = \angle GBE = 90^\circ$.在 $Rt\triangle BCE$ 中,由勾股定理,得 $BE^2 = CE^2 + BC^2 = (10-2t)^2 + 4^2$,所以 $S_{\text{正方形BEFG}} = (10-2t)^2 + 16, S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2}BC \cdot CE = 2(10-2t)$.因为

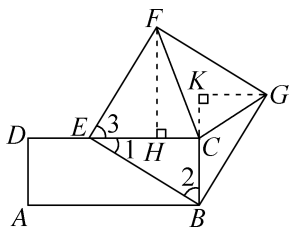
$\angle BCE = \angle EHF = 90^\circ$, 所以 $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$, 又因为 $\angle 1 + \angle 3 = \angle BEF = 90^\circ$, 所以 $\angle 2 = \angle 3$. 在 $\triangle BCE$ 和

$$\triangle EHF \text{ 中, } \begin{cases} \angle BCE = \angle EHF = 90^\circ, \\ \angle 2 = \angle 3, \\ BE = EF, \end{cases} \text{ 所以 } \triangle BCE \cong \triangle EHF$$

$\triangle EHF$ (AAS), 所以 $FH = EC = 10 - 2t$, 所以 $S_{\triangle EFC} = \frac{1}{2} EC \cdot FH = \frac{1}{2} (10 - 2t)^2$, 同理可证 $\triangle BCE \cong \triangle GKB$

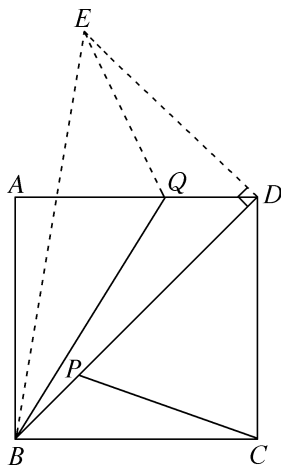
(AAS), 所以 $GK = BC = 4$, 所以 $S_{\triangle BCG} = \frac{1}{2} BC \cdot GK = 8$.

8. 因为 $S_{\text{正方形} BEFG} = S_{\triangle EFC} + S_{\triangle BCG} + S_{\triangle BCE} + S_{\triangle CFG}$, $S_{\triangle CFG} = 2t^2$, 所以 $(10 - 2t)^2 + 16 = \frac{1}{2} (10 - 2t)^2 + 8 + 2(10 - 2t) + 2t^2$, 整理, 得 $16t = 38$, 解得 $t = \frac{19}{8}$.



5. $\sqrt{2}$ 提示: 连接 AC 交 BD 于点 O . 因为四边形 $ABCD$ 是菱形, 所以 $AB = BC = 1$. 因为 $\angle ABC = 60^\circ$, 所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 所以 $AC = AB = 1$. 过点 C 向左侧作 $CG \parallel BD$, 且 $CG = AD = 1$, 连接 AG, EG . 所以 $\angle GCA = \angle AOD = 90^\circ$. 易证 $\angle GCE = \angle GCA - \angle ACB = 30^\circ = \angle ADF$, 所以 $\triangle ADF \cong \triangle GCE$, 所以 $AF = GE$. 所以 $AE + AF = AE + GE \geq AG$. 在 $\text{Rt}\triangle ACG$ 中, 由勾股定理, 得 $AG = \sqrt{2}$. 所以 $AE + AF$ 的最小值为 $\sqrt{2}$.

6. $4\sqrt{3}$ 提示: 如图, 过点 D 作 $DE \perp BD$, 且使 $DE = BC$, 连接 EQ, EB . 依题意得 $DQ = BP$. 因为四边形 $ABCD$ 为正方形, $DE \perp BD$, 所以 $\angle QDE = \angle PBC = 45^\circ$, 易证 $\triangle QDE \cong \triangle PBC$ (SAS), 所以 $EQ = CP$, 所以 $CP + BQ = EQ + BQ$. 易知 $EQ + BQ \geq BE$, 当点 B, Q, E 在同一条直线上时, $EQ + BQ$ 的值最小, 最小值为线段 BE 的长, 所以 $CP + BQ$ 的最小值为线段 BE 的长. 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, 由勾股定理, 得 $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 4\sqrt{2}$. 在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中, 由勾股定理, 得 $BE = \sqrt{BD^2 + DE^2} = 4\sqrt{3}$, 所以 $CP + BQ$ 的最小值为 $4\sqrt{3}$.



7. $2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$ 提示: 因为 $DE = AF$, $\angle CDE = \angle DAF$, $CD = DA$, 所以 $\triangle CDE \cong \triangle DAF$, 所以 $\angle CED = \angle DFA$. 因为 CE 平分 $\angle ACD$, 所以 $\angle DCE = 22.5^\circ$, 所以 $\angle CED = 67.5^\circ$, 所以 $\angle DFA = 67.5^\circ$. 在 $\triangle AHF$ 中, $\angle HAF = 45^\circ$, 所以 $\angle AHF = 67.5^\circ$. 所以 $\angle DFA = \angle AHF$, 所以 $AH = AF$. 因为 $AB \parallel CD$, 所以 $\angle CDH = \angle DFA$. 因为 $\angle DHC = \angle AHF$, 所以 $\angle CDH = \angle DHC$, 所以 $CD = CH$. 因为 $AB = 2$, 所以 $AC = 2\sqrt{2}$. 所以 $AH = 2\sqrt{2} - 2$. 所以 $DE = AF = AH = 2\sqrt{2} - 2$. 连接 PD , 过点 D 作 $DQ' \perp AC$ 于点 Q' . 因为 $\angle EDG + \angle DEG = \angle DCE + \angle DEG = 90^\circ$, 所以 $DH \perp CE$. 因为 $\triangle CDH$ 为等腰三角形, 所以点 D 与点 H 关于 CE 对称, 所以 $PD = PH$, 所以 $PH + PQ = PD + PQ$. 当 D, P, Q 三点共线, 且 $DQ \perp AC$ 时, $PH + PQ$ 的值最小, 最小值为 DQ' 的长. 在 $\text{Rt}\triangle CDQ'$ 中, $\angle DCQ' = 45^\circ$, $CD = 2$, 所以 $DQ' = \sqrt{2}$. 所以 $PH + PQ$ 的最小值为 $\sqrt{2}$.

8. 解: (1) 78

(2) $\triangle MNK$ 为等腰三角形. 理由如下:

因为 $AM \parallel DN$, 所以 $\angle KNM = \angle 1$. 又因为 $\angle 1 = \angle KMN$, 所以 $\angle KNM = \angle KMN$, 所以 $\triangle MNK$ 为等腰三角形.

(3) 45°

(4) 分两种情况: ①如图 1, 将矩形纸片对折, 使点 B' 与点 D 重合, 此时点 K 也与点 D 重合. 设 $MD = MB = x$, 则 $AM = 10 - x$. 由勾股定理, 得 $2^2 + (10 - x)^2 = x^2$, 解得 $x = 5$. 2.

易得 $ND=MD=5.2$, 所以 $S_{\triangle MNK}=S_{\triangle MND}=\frac{1}{2}\times 2\times 5.2=5.2$. ②如图 2, 将矩形纸片沿对角线 AC 对折, 此时折痕即为 AC , 点 M 与点 A 重合, 点 N 与点 C 重合. 易得 $CK=AK$. 设 $MK=AK=CK=y$, 则 $DK=10-y$, 同理可得 $MK=NK=5.2$. 因为 $MD=2$, 所以 $S_{\triangle MNK}=\frac{1}{2}\times 2\times 5.2=5.2$. 综上所述, $\triangle MNK$ 的面积最大值为 5.2 .

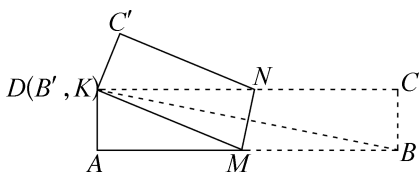


图 1

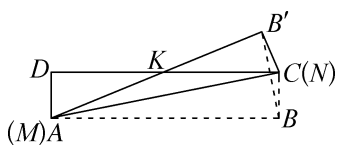


图 2

9. (1) 证明: ①因为四边形 $ABCD$ 是正方形, 所以 $AB=BC$, $\angle ABD=\angle CBD=45^\circ$. 由旋转的性质, 得 $A'B=AB$, $BP'=BP$, $\angle A'BP'=\angle ABP=45^\circ$. 所以 $BC=A'B$, $\angle A'BP=\angle CBP'$. 在 $\triangle BPA'$ 和 $\triangle BP'C$ 中,

$$\begin{cases} BA'=BC, \\ \angle A'BP=\angle CBP', \text{ 所以 } \triangle BPA' \cong \triangle BP'C. \\ BP=BP', \end{cases}$$

②连接 AA' . 因为四边形 $ABCD$ 是正方形, 所以 $AB=BC=AD$, $\angle BAD=\angle ABC=90^\circ$. 由旋转的性质, 得 $A'B=AB$, $\angle A'BA=60^\circ$, 所以 $\triangle A'BA$ 是等边三角形, $\angle A'BC=30^\circ$, 所以 $AA'=BA'$, $\angle A'AB=60^\circ$, 所以 $\angle A'AP=30^\circ=\angle A'BC$. 易证 $\triangle A'AP \cong \triangle A'BC$, 所以 $A'P=A'C$. 由 (1) ① 知, $\triangle BPA' \cong \triangle BP'C$, 所以 $A'P=CP'$. 所以 $A'C=CP'$, 所以 $\triangle A'P'C$ 是等腰三角形.

(2) 解: ①如图 1, 点 P 即为所求.

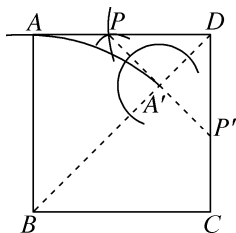


图 1

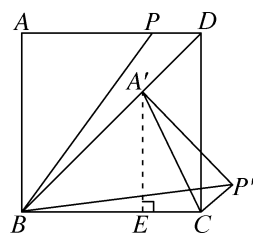


图 2

②由旋转的性质, 得 $A'B=AB=\sqrt{2}$, $A'P'=AP$, $\angle BA'P'=\angle A=90^\circ$. 如图 2, 过点 A' 作 $A'E \perp BC$ 于点 E , 则 $\triangle A'BE$ 是等腰直角三角形, 所以 $A'E=BE=1$, 所以 $CE=\sqrt{2}-1$, 所以 $A'C^2=A'E^2+CE^2=4-2\sqrt{2}$. 因为 $A'B=BC$, 所以 $\angle BA'C=\angle A'CB=67.5^\circ$, 所以 $\angle CA'P'=22.5^\circ < 90^\circ$.

分以下两种情况:

(I) 如图 3, 当 $\angle A'P'C=90^\circ$ 时, 过点 C 作 $\angle A'CF=\angle CA'P'=22.5^\circ$, 交 $A'P'$ 于点 F , 则 $CF=A'F$, $\angle CFP'=45^\circ$, 所以 $\triangle CFP'$ 是等腰直角三角形, $CP'=FP'$. 设 $CP'=FP'=x(x>0)$, 则 $A'F=CF=\sqrt{2}x$, 所以 $A'P'=(\sqrt{2}+1)x$. 在 $\text{Rt}\triangle A'P'C$ 中, $CP'^2+A'P'^2=A'C^2$, 即 $x^2+[(\sqrt{2}+1)x]^2=4-2\sqrt{2}$. 整理, 得 $x^2=(\sqrt{2}-1)^2$, 解得 $x=\sqrt{2}-1$ 或 $x=-\sqrt{2}+1 < 0$ (舍去). 所以 $A'P'=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$. 所以 $AP=A'P'=1$.

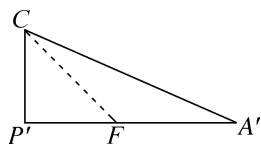


图 3

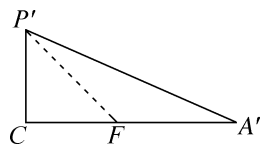


图 4

(II) 如图 4, 当 $\angle A'CP'=90^\circ$ 时, 过点 P' 作 $\angle A'P'F=\angle CA'P'=22.5^\circ$, 交 $A'C$ 于点 F . 同理可得 $A'F=P'F$, $CF=CP'$. 设 $CF=CP'=y(y>0)$, 则 $A'F=P'F=\sqrt{2}y$. 因为 $(A'F+CF)^2=A'C^2$, 所以 $(\sqrt{2}y+y)^2=4-$

$2\sqrt{2}$. 整理, 得 $y^2 = 20 - 14\sqrt{2}$, 所以 $A'P'^2 = P'C^2 + A'C^2 = y^2 + 4 - 2\sqrt{2} = (4 - 2\sqrt{2})^2$, 解得 $A'P' = 4 - 2\sqrt{2}$ 或 $A'P' = 2\sqrt{2} - 4 < 0$ (舍去). 所以 $AP = A'P' = 4 - 2\sqrt{2}$.

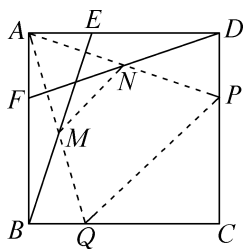
综上所述, 当 $\triangle A'P'C$ 是直角三角形时, AP 的长为 1 或 $4 - 2\sqrt{2}$.

巅峰训练 9 三角形的中位线

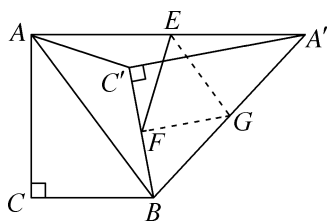
1. B 提示: 如图, 连接 AM 并延长交 BC 于点 Q , 连接 AN 并延长交 CD 于点 P . 因为 M 是 BE 的中点, 所以 $EM = BM$. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形, 所以 $AD \parallel BC$, 所以 $\angle AEB = \angle QBM$. 在 $\triangle AME$ 和 $\triangle QMB$

$$\text{中, } \begin{cases} \angle AEM = \angle QBM, \\ EM = BM, \\ \angle AME = \angle QMB, \end{cases} \text{ 所以 } \triangle AME \cong \triangle QMB \text{ (ASA),}$$

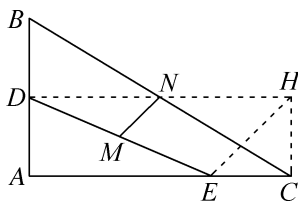
所以 $QB = AE = 2$, $AM = QM$, 同理 $PD = AF = 2$, $AN = PN$, 所以 MN 是 $\triangle APQ$ 的中位线, 所以 $MN = \frac{1}{2}PQ$. 因为正方形 $ABCD$ 的边长为 6, 所以 $CQ = CP = 4$, 所以 $PQ = \sqrt{2}CP = 4\sqrt{2}$, 所以 $MN = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.



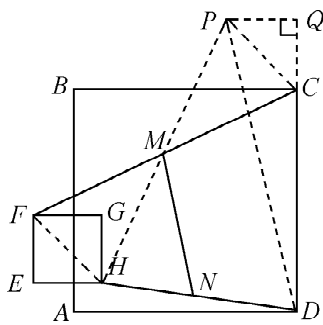
2. D 提示: 如图, 取 $A'B$ 的中点 G , 连接 EG, FG , 由勾股定理和旋转的性质, 可知 $A'C' = AC = 4$, $BC' = BC = 3$, $A'B = AB = 5$. 因为点 E, F, G 分别是 $AA', BC', A'B$ 的中点, 所以 $EG = \frac{1}{2}AB = \frac{5}{2}$, $FG = \frac{1}{2}A'C' = 2$. 所以 $EG - FG \leq EF \leq EG + FG$, 即 $\frac{1}{2} \leq EF \leq \frac{9}{2}$.



3. A 提示: 如图, 过点 C 作 $CH \parallel AB$, 则 $\angle ECH = 90^\circ$, 连接 DN 并延长交 CH 于点 H , 连接 EH . 易证 $\triangle DNB \cong \triangle HNC$ (ASA), 所以 $CH = BD = 4$, $DN = HN$. 在 $\text{Rt}\triangle CEH$ 中, 由勾股定理, 得 $EH = \sqrt{CH^2 + CE^2} = 5$. 因为 $DM = ME$, $DN = HN$, 所以 $MN = \frac{1}{2}EH = \frac{5}{2}$.



4. C 提示: 如图, 连接 HM 并延长至点 P , 使 $MP = MH$, 过点 P 作 $PQ \perp CD$, 交 DC 的延长线于点 Q , 连接 PC, FH, PD . 因为 M 为 CF 的中点, 所以 $MF = MC$. 易证 $\triangle FHM \cong \triangle CPM$, 所以 $FH = CP$, $\angle HFM = \angle PCM$. 因为 $EF = EH = 2$, 所以 $CP = FH = 2\sqrt{2}$. 易知 $FG \parallel BC$, 所以 $\angle GFM = \angle BCM$, 所以 $\angle PCB = \angle HFG = 45^\circ$, 所以 $\angle PCQ = 45^\circ$, 所以 $PQ = QC = 2$. 所以 $DQ = 8$, 所以 $PD = \sqrt{PQ^2 + DQ^2} = 2\sqrt{17}$. 因为 M 为 PH 的中点, N 为 DH 的中点, 所以 $MN = \frac{1}{2}PD = \sqrt{17}$.

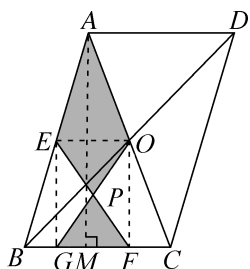


5. $\frac{15}{2}$ 提示: 作点 A 关于 x 轴的对称点 $E(8, -6)$, 连接 CE, OE , 则 B 是 AE 的中点. 又因为 D 是 AC 的中点, 所以 BD 是 $\triangle AEC$ 的中位线, 所以 $BD = \frac{1}{2}CE$, 所以当 CE 的长最大时, BD 的长最大. 当点 C 在 EO 的延长线上时, CE 的长有最大值. 因为 $OB = 8$, $BE = 6$, 所以 $OE = \sqrt{BE^2 + OB^2} = 10$, 所以 CE 的最大值为 $10 + 5 = 15$, 所以 BD 的最大值为 $\frac{1}{2} \times 15 = \frac{15}{2}$.

6. $2-\sqrt{3}$ 或 $\frac{6+\sqrt{3}}{11}$ 提示: 因为 $\angle ABC=90^\circ$,

$\angle ACB=30^\circ$, $AB=2$ cm, 所以 $AC=2AB=4$ cm, 所以 $BC=2\sqrt{3}$ cm. 因为 E, F 分别是 AB, AC 的中点, 所以 $EF=\frac{1}{2}BC=\sqrt{3}$ cm, $EF\parallel BC$, $BF=CF=\frac{1}{2}AC=2$ cm, 所以 $\angle PFQ=\angle FBC=\angle ACB=30^\circ$. 根据题意, 得 $EP=t$ cm, $BQ=2t$ cm, 所以 $PF=(\sqrt{3}-t)$ cm, $FQ=(2-2t)$ cm. 分 3 种情况讨论: 当 $PF=FQ$ 时, $\sqrt{3}-t=2-2t$, 解得 $t=2-\sqrt{3}$. 当 $PQ=FQ$ 时, 过点 Q 作 $QD\perp EF$ 于点 D , 所以 $PF=2DF$. 因为 $\angle PFQ=30^\circ$, 所以 $QD=\frac{1}{2}FQ=(1-t)$ cm, 所以 $DF=\frac{\sqrt{3}}{2}FQ=\sqrt{3}(1-t)$ cm, 所以 $PF=2DF=2\sqrt{3}(1-t)$ cm, 所以 $2\sqrt{3}(1-t)=\sqrt{3}-t$, 解得 $t=\frac{6+\sqrt{3}}{11}$. 当 $PF=PQ$ 时, $\angle PFQ=\angle PQF=30^\circ$, 所以 $\angle FPQ=120^\circ$, 在点 P, Q 的运动过程中, $\angle FPQ<90^\circ$ (只有当点 Q 的运动速度不大于 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm/s 时, 才可能为直角或钝角), 所以此种情况不成立.

7. 84 提示: 如图, 连接 EO, EG, OF , 过点 A 作 $AM\perp BC$ 于点 M , 设 OG 与 EF 相交于点 P . 易知 EO 是 $\triangle ABC$ 的中位线, 所以 $EO\parallel BC$, $EO=\frac{1}{2}BC=7$. 因为 $GF=7$, 所以 $EO=GF$. 所以四边形 $EOFG$ 是平行四边形, 所以 $S_{\triangle EOP}+S_{\triangle FGP}=\frac{1}{2}S_{\square EOPG}=S_{\triangle EOG}$. 因为 $EO\parallel BG$, 所以 $S_{\triangle EOG}=S_{\triangle EOB}$, 所以 $S_{\text{阴影部分}}=S_{\triangle ABO}$. 因为 $AM\perp BC$, $AC=AB=25$, $BC=14$, 所以 $BM=CM=\frac{1}{2}BC=7$, 所以 $AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=24$, 所以 $S_{\triangle ABC}=168$. 因为 O 是 AC 的中点, 所以 $S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=84$. 所以阴影部分的面积为 84.



8. 6 提示: 由题意, 得 $BD=B'D=\frac{1}{2}BB'$,

$AD\perp BC$, $AM=DM$, $\angle MAN=\angle MDN$, $AN=DN$, 所以 $\angle NDC=\angle C$, 所以 $CN=DN=AN$. 因为 $AM=DM$, 所以 MN 是 $\triangle ADC$ 的中位线. 同理, MP 是 $\triangle ADB'$ 的中位线. 所以 $MN=\frac{1}{2}DC$, $MP=\frac{1}{2}DB'$. 因为 $BC=12$, 所以 $MP+MN=\frac{1}{2}DB'+\frac{1}{2}DC=\frac{1}{2}(DB'+DB'+B'C)=\frac{1}{2}BC=6$.

9. (1) D

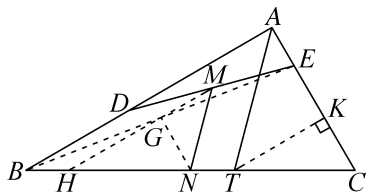
(2) ① 证明: 因为 $AB=AC$, 所以 $\angle ABC=\angle ACB$. 因为 $\angle BCD=90^\circ$, E 为 BD 的中点, 所以 $EC=EB$, 所以 $\angle EBC=\angle ECB$, 所以 $\angle ABC-\angle EBC=\angle ACB-\angle ECB$, 即 $\angle ABD=\angle ACE$.

② 证明: 因为 E, F 分别是 BD, AD 的中点, 所以 EF 是 $\triangle ABD$ 的中位线, 所以 $EF\parallel AB$, $EF=\frac{1}{2}AB$. 因为 $\angle BCD=90^\circ$, E 为 BD 的中点, 所以 $EC=\frac{1}{2}BD$. 由“垂等四边形”的定义, 得 $AB=AC=BD$, 所以 $EF=EC$, 所以四边形 $CEFG$ 为菱形. 因为 $EF\parallel AB$, 所以 $\angle FED=\angle ABD$. 由 (2) ①, 得 $\angle ABD=\angle ACE$, 所以 $\angle FED=\angle ACE$. 由“垂等四边形”的定义, 得 $AC\perp BD$, 所以 $\angle ACE+\angle CED=90^\circ$, 所以 $\angle FEC=\angle FED+\angle CED=90^\circ$, 所以四边形 $CEFG$ 为正方形.

(3) 证明: 由题意, 可得 $S_{\triangle EBD}=S_{\triangle CBD}$, 所以点 E 到 BD 距离等于点 C 到 BD 距离, 所以 $EC\parallel BF$. 因为 $BF=CE$, 所以四边形 $ECFB$ 为平行四边形, 所以 $FC\parallel BE$. 又因为 $BE\perp DE$, 所以 $FC\perp DG$, 所以 $FC=BE=AB=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}ED=DG$, 则四边形 $CDFG$ 是“垂等

四边形”.

10. $\sqrt{3}-1$ 提示:如图,连接 BE ,取 BE 的中点 G ,连接 GM,GN ,延长 MG 交 BC 于点 H ,过点 T 作 $KT \perp AC$ 于点 K . 因为 M,N,G 分别为 DE,BC,BE 的中点,所以 $MG \parallel BD, MG = \frac{1}{2}BD, GN \parallel CE, GN = \frac{1}{2}CE$,所以 $\angle MHN = \angle ABC = 30^\circ$. 因为 $\angle BAC = 90^\circ, BD = CE$,所以 $MG \perp GN, MG = GN$,所以 $\triangle GMN$ 为等腰直角三角形,所以 $\angle GNM = 45^\circ$. 因为 $\angle HNG = 90^\circ - \angle MHN = 60^\circ$,所以 $\angle MNC = 75^\circ$. 因为 $AT \parallel MN$,所以 $\angle ATC = 75^\circ$. 因为 $\angle C = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = 60^\circ, KT \perp AC$,所以 $\angle KTC = 30^\circ$,所以 $\angle ATK = 45^\circ$,所以 $\triangle ATK$ 为等腰直角三角形. 设 $KC = x$,则 $TK = AK = \sqrt{3}x$. 因为 $AC = CK + AK$,所以 $x + \sqrt{3}x = 1 + \sqrt{3}$,解得 $x = 1$,所以 $TC = 2$. 因为 $BC = 2AC = 2 + 2\sqrt{3}$,所以 $NC = 1 + \sqrt{3}$,所以 $NT = NC - TC = \sqrt{3} - 1$.



11. (1) 解:如图 1,连接 DC ,过点 D 作 $DG \perp AC$ 交 AC 于点 G . 因为 D 为 AB 的中点,所以 $CD = AD$. 又因为 $DG \perp AC$,所以 G 为 AC 的中点,所以 DG 为 $\triangle ACB$ 的中位线,所以 $DG = \frac{1}{2}BC = 1$. 因为 $AE = \frac{1}{4}AC, AC = 4$,所以 $AE = 1$,所以 $GE = 1$. 在 $\text{Rt}\triangle DGE$ 中, $DE = \sqrt{DG^2 + GE^2} = \sqrt{2}$.

(2) 证明:如图 2,连接 BE ,取 BE 的中点 M ,连接 MD, MF . 因为 F 为 EC 的中点, D 为 AB 的中点,所以 $MF \parallel BC$ 且 $MF = \frac{1}{2}BC$, $MD \parallel AE$ 且 $MD = \frac{1}{2}AE$,又因为 $AE = BC$,所以 $MF = MD$,所以 $\angle MDF = \angle MFD$. 又因为 $MD \parallel AE$,所以 $\angle AFD = \angle MDF$,所以

$\angle AFD = \frac{1}{2} \angle AFM$. 因为 $MF \parallel BC$,所以 $\angle AFM = \angle C$,所以 $\angle AFD = \frac{1}{2} \angle C$.

(3) 解: $AC = 2AE + BC$. 证明如下:

如图 3,在 EC 上截取 $EM = AE$,连接 BM ,过点 C 作 $CH \perp BM$ 于点 H . 因为 $AE = EM, AD = DB$,所以 $DE \parallel BM$,所以 $\angle AED = \angle AMB = \angle MHC + \angle MCH = 90^\circ + \angle MCH$. 因为 $2\angle AED - \angle ACB = 180^\circ$,所以 $\angle AED = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle ACB$,所以 $\angle MCH = \frac{1}{2} \angle ACB$,所以 $\angle ACB = 2\angle MCH$. 易证 $\triangle CHM \cong \triangle CHB$,所以 $BC = MC$,所以 $AC = 2AE + BC$.

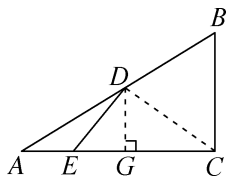


图 1

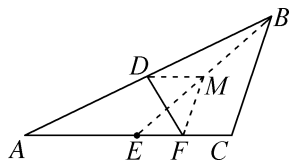


图 2

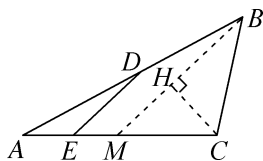
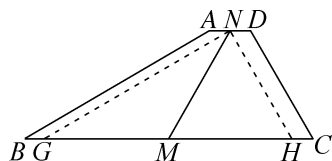


图 3

巅峰训练 10 梯形

1. B

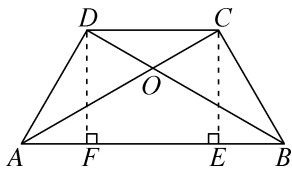
2. A 提示:如图,过点 N 作 $NG \parallel AB$ 交 BC 于点 $G, NH \parallel CD$ 交 BC 于点 H ,易得 $\triangle GNH$ 是直角三角形,所以 $MN = \frac{1}{2}GH = \frac{1}{2}(BC - AD)$,所以 $AD = 1$.



3. A 提示:如图,过点 C 作 $CE \perp AB$ 于点 E ,过点 D 作 $DF \perp AB$ 于点 F . 易得 $AD = BC, \angle DAB = \angle CBA$,四边形 $CDFE$ 是矩形,所以 $EF = CD$. 在

$\triangle ABD$ 和 $\triangle BAC$ 中, $\begin{cases} AB=BA, \\ \angle DAB=\angle CBA, \text{ 所以 } \triangle ABD \cong \\ AD=BC, \end{cases}$

$\triangle BAC$ (SAS), 所以 $\angle BAC = \angle ABD = 30^\circ$, $\angle BDA = \angle ACB$. 因为 $AC \perp BC$, 所以 $\angle ACB = 90^\circ = \angle BDA$, 所以 $BC = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 24 = 12$ (cm), $\angle ABC = 90^\circ - \angle BAC = 60^\circ$, 所以 $\angle CBD = \angle ABC - \angle ABD = 30^\circ$, $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 12\sqrt{3}$ cm, 所以 $OB = 2OC$. 因为 $OB^2 = OC^2 + BC^2$, 所以 $4OC^2 = OC^2 + 144$, 所以 $OC = 4\sqrt{3}$ (cm), 所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \times 12\sqrt{3} \times 12 = 72\sqrt{3}$ (cm²), $S_{\triangle AOD} = S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} OC \cdot BC = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 12 = 24\sqrt{3}$ (cm²). 因为 $\angle CEB = \angle DFA = 90^\circ$, $\angle BAD = \angle ABC = 60^\circ$, 所以 $\angle ADF = \angle BCE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, 所以 $AF = BE = \frac{1}{2} BC = 6$ cm, 所以 $CD = EF = AB - AF - BE = 12$ cm, $CE = \sqrt{BC^2 - BE^2} = 6\sqrt{3}$ cm, $S_{\text{梯形}ABCD} = \frac{1}{2} (AB + CD) \cdot CE = \frac{1}{2} (24 + 12) \times 6\sqrt{3} = 108\sqrt{3}$ (cm²), 所以 $S_{\triangle COD} = S_{\text{梯形}ABCD} - S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AOD} = 12\sqrt{3}$ (cm²).



4. B 提示: 由题意可知, $AD \parallel BC$, $QD = t$, $BP = 3t$. 分两种情况: ①如图1, 点 P 在线段 BC 上, 当 $QD = CP$ 时, 四边形 $CDQP$ 是平行四边形, 由题意, 得 $CP = BC - BP = 21 - 3t$, 所以 $t = 21 - 3t$, 解得 $t = \frac{21}{4}$; ②如图2, 点 P 在 BC 的延长线上, 当 $QD = CP$ 时, 四边形 $CQDP$ 是平行四边形, 由题意, 得 $CP = BP - BC = 3t - 21$, 所以 $t = 3t - 21$, 解得 $t = \frac{21}{2}$. 综上所述, 当 t 的值为 $\frac{21}{4}$ 或 $\frac{21}{2}$ 时, 以 P, C, D, Q 为顶点的四边形是平行四边形.

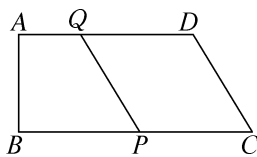


图 1

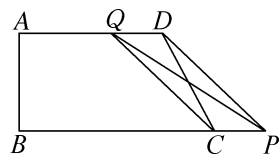
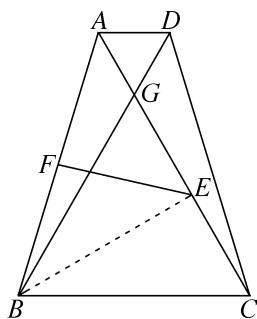


图 2

5. 8 提示: 设 $OA = a$ m, $OC = b$ m. 由题意, 得 $a + b = 20$. 因为主舞台和观众区的面积和为 116 m², 所以 $\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2 = 116$, 所以 $a^2 + b^2 = 232$. 因为 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, 所以 $400 = 232 + 2ab$, 所以 $ab = 84$. 因为 $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = 400 - 336 = 64$, $a > b > 0$, 所以 $a - b = 8$, 即表演区护栏 AO 比 DO 长 8 m.

6. 5 提示: 如图, 连接 BE . 因为 $AB = DC$, 所以 $AC = BD$. 易证 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$, 所以 $\angle GCB = \angle GBC$. 又因为 $\angle BGC = \angle AGD = 60^\circ$, 所以 $\triangle BCG$ 为等边三角形. 因为 BE 为 $\triangle BCG$ 的中线, 所以 $BE \perp AC$, 所以 $EF = \frac{1}{2} AB = 5$ cm.



7. 1.5 或 2 提示: 由题意可得, 当 $\triangle BEC$ 是直角三角形时, 有以下两种情况:

①如图1, 当 $\angle BCE = 90^\circ$ 时, 过点 B 作 $BG \perp DC$, 交 DC 的延长线于点 G . 所以 $\angle D = \angle A = \angle G = 90^\circ$, 所以四边形 $ABGD$ 为矩形, 所以 $BG = AD = 4$, $DG = AB = 5$. 因为 BE 平分 $\angle ABC$, 所以 $\angle CBE = \angle ABE$, 所以 $\triangle CBE \cong \triangle ABE$ (AAS), 所以 $BC = AB = 5$. 设 $DE = x$, 则 $AE = AD - DE = 4 - x$, $CE = AE = 4 - x$. 在 $\text{Rt}\triangle BCG$ 中, 由勾股定理, 得 $CG = 3$, 所以 $CD = DG - CG = 2$. 在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中, 由勾股定理, 得 $DE^2 + CD^2 = CE^2$, 即 $x^2 + 2^2 = (4 - x)^2$, 解得 $x = 1.5$, 所以 $DE = 1.5$.

②如图2, 当 $\angle BEC = 90^\circ$ 时, 过点 E 作 $EH \perp BC$ 于点 H . 因为 BE 平分 $\angle ABC$, 所以 $\angle HBE = \angle ABE$, 所以 $\triangle HBE \cong \triangle ABE$ (AAS), 所以 $EH = EA$, $\angle HEB =$

$\angle AEB$. 因为 $\angle BEC = 90^\circ$, 所以 $\angle CEH + \angle HEB = 90^\circ$, $\angle CED + \angle AEB = 90^\circ$, 所以 $\angle CEH = \angle CED$. 因为 $AB \parallel CD$, $\angle A = 90^\circ$, 所以 $\angle D = \angle A = 90^\circ$, 所以 $\angle CHE = \angle D = 90^\circ$, 所以 $\triangle CEH \cong \triangle CED$ (AAS), 所以 $EH = DE$, 所以 $DE = EA = \frac{1}{2}AD = 2$.

综上所述, DE 的长为 1.5 或 2.

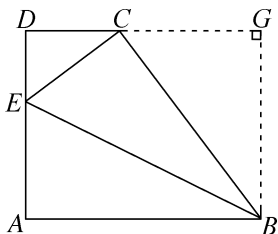


图 1

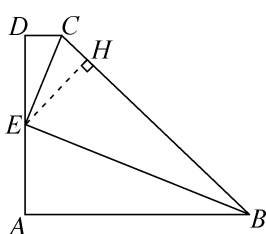


图 2

8. $(-3, 2)$ 或 $(-4, -3)$ 提示: 因为 A 是函数 $y = 2x + 3$ 图象上的“不动点”, 所以 $x = 2x + 3$, 解得 $x = -3$, 所以点 $A(-3, -3)$. 因为点 $B(-1, -1)$, $C(-1, 0)$, 所以 $BC = 1$, $BC \perp x$ 轴. 如图 1, 当 $AD \parallel BC$ 时, 过点 B 作 $BE \perp AD$ 于点 E , AD 交 x 轴于点 F . 因为四边形 $ABCD$ 是等腰梯形, 所以 $AB = DC$, 所以 $AD \perp x$ 轴, 所以 $\angle CFD = \angle BEA = 90^\circ$, $AE = -1 - (-3) = 2$. 又因为 $\angle BCF = 90^\circ$, 所以四边形 $BCFE$ 是矩形, 所以 $BE = CF$, 所以 $\text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle DCF$ (HL), 所以 $DF = AE = 2$, 所以点 $D(-3, 2)$. 如图 2, 当 $AB \parallel CD$ 时, 易得 $\angle DAB = \angle ABC = 135^\circ$, 所以 $AD \parallel x$ 轴. 因为点 $B(-1, -1)$, $C(-1, 0)$, 所以 $BC = 1$. 因为四边形 $ABCD$ 是等腰梯形, 所以 $AD = BC = 1$. 因为点 $A(-3, -3)$, 所以点 $D(-4, -3)$. 综上所述, 点 D 的坐标为 $(-3, 2)$ 或 $(-4, -3)$.

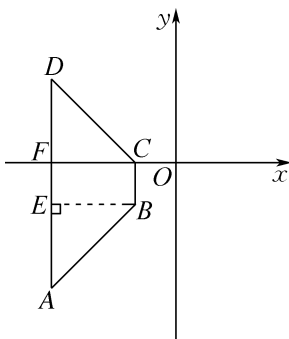


图 1

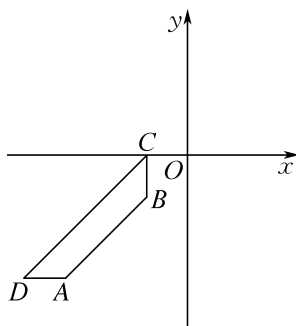
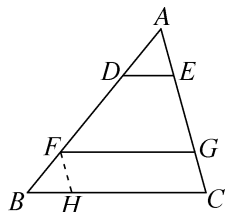


图 2

9. (1) 解: 因为 $AB \parallel CE$, $AC \parallel BE$, 所以四边形 $ABEC$ 是平行四边形, 所以 $BE = AC$,

$CE = AB$. 因为 $CD = AB$, 所以 $CD = CE$. 因为 $AB \parallel CE$, 所以 $\angle DCE = \angle AOC = 60^\circ$, 所以 $\triangle DCE$ 是等边三角形, 所以 $DE = CD$. 因为 $BE + BD > DE$, 所以 $AC + BD > CD$.

(2) $BC = FG + DE$ 提示: 如图, 过点 F 作 $FH \parallel AC$ 交 BC 于点 H . 因为 $FG \parallel BC$, $FH \parallel AC$, 所以四边形 $FGCH$ 是平行四边形, 所以 $FG = CH$. 因为 $DE \parallel BC$, $AC \parallel FH$, 所以 $\angle ADE = \angle B$, $\angle A = \angle BFH$. 又因为 $BF = DA$, 所以 $\triangle ADE \cong \triangle FBH$ (ASA), 所以 $DE = BH$. 因为 $BC = CH + BH$, 所以 $BC = FG + DE$.



10. 解: (1) 如图 1, 过点 E 作 $EG \perp BC$ 于点 G . 因为 E 为 AB 的中点, 所以 $BE = \frac{1}{2}AB = 2$. 因为 $\angle B = 60^\circ$, 所以 $\angle BEG = 30^\circ$. 所以 $BG = \frac{1}{2}BE = 1$, $EG = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$, 即点 E 到 BC 的距离为 $\sqrt{3}$.

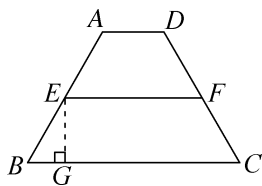


图 1

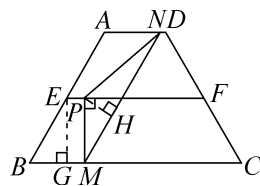


图 2

(2) ① 当点 N 在线段 AD 上运动时, $\triangle PMN$ 的形状不发生改变. 如图 2, 过点 E 作 $EG \perp BC$ 于点 G , 过点 P 作 $PH \perp MN$ 于点 H . 因为 $PM \perp EF$, $EG \perp BC$, $EF \parallel BC$, 所以 $\angle PMB = \angle EGM = \angle MPE = 90^\circ$, 所以四边形 $EPMG$ 为矩形, 所以 $EP = GM$, $PM = EG = \sqrt{3}$, 同理可得 $MN = AB = 4$. 因为 $MN \parallel AB$, 所以 $\angle NMC = \angle B = 60^\circ$. 又因为 $\angle PMC = \angle PMB = 90^\circ$, 所以 $\angle PMH = \angle PMC - \angle NMC =$

30° . 所以 $PH = \frac{1}{2}PM = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $MH = \frac{3}{2}$,

所以 $NH = MN - MH = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$. 在

$\text{Rt}\triangle PNH$ 中, $PN = \sqrt{NH^2 + PH^2} =$

$\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{7}$, 所以 $\triangle PMN$ 的周长 =

$PM + PN + MN = \sqrt{3} + \sqrt{7} + 4$.

②当点 N 在线段 DC 上运动时, 存在点 P , 使 $\triangle PMN$ 为等腰三角形. 如图 3, 当 $PM = PN$ 时, 过点 P 作 $PR \perp MN$ 于点 R , 则 $MR = NR$. 由 ①, 可得 $PM = \sqrt{3}$, $\angle PMR = 30^\circ$, $\angle NMC = 60^\circ$, $MR = \frac{3}{2}$, 所以 $MN = 2MR = 3$.

因为 $\angle CNM = 180^\circ - \angle C - \angle NMC = 60^\circ = \angle C = \angle NMC$, 所以 $\triangle MNC$ 是等边三角形, 所以 $MC = MN = 3$. 此时, $x = EP = GM = BC - BG - MC = 6 - 1 - 3 = 2$. 如图 4, 当 $MP = MN$ 时, 因为 $EG = \sqrt{3}$, 所以 $MP = MN = \sqrt{3}$. 因为 $MC = MN = MP = \sqrt{3}$, 所以 $x = EP = GM = BC - BG - MC = 6 - 1 - \sqrt{3} = 5 - \sqrt{3}$. 如图 5, 当 $NP = NM$ 时, 因为 $\angle NPM = \angle PMN = 30^\circ$, 所以 $\angle PNM = 120^\circ$. 又因为 $\angle MNC = 60^\circ$, 所以 $\angle PNM + \angle MNC = 180^\circ$. 因此点 P 与点 F 重合. 易得 $MC = BG = 1$. 此时, $x = EP = GM = BC - BG - MC = 6 - 1 - 1 = 4$. 综上所述, 当 x 的值为 2 或 4 或 $(5 - \sqrt{3})$ 时, $\triangle PMN$ 为等腰三角形.

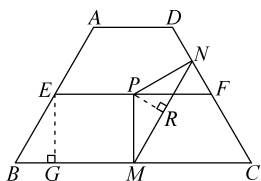


图 3

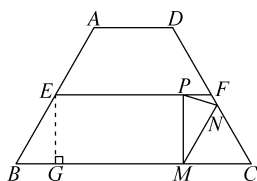


图 4

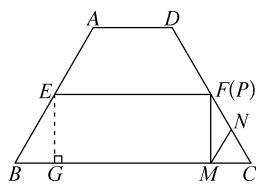


图 5

第 8 章综合练(1)

1. A 提示: 过点 G 作 $GM \perp EF$ 于点 M . 由题意, 得 $S_{\text{⑤}} = S_{\text{四边形}ABCD} - \frac{1}{2}(S_{\text{①}} + S_{\text{②}} + S_{\text{③}} + S_{\text{④}}) = 4 \text{ cm}^2$, 所以 $S_{\text{菱形}EFGH} = 14 + 4 = 18 (\text{cm}^2)$. 设菱形的边长为 $x \text{ cm}$. 因为 $\angle F = 30^\circ$, 所以菱形的高为 $GM = \frac{1}{2}GF = \frac{1}{2}x \text{ cm}$. 根据菱形的面积公式, 得 $x \cdot \frac{x}{2} = 18$, 解得 $x = 6$ (负值已舍), 所以菱形的边长为 6 cm . 所以 ①②③④ 四个平行四边形周长的总和为 $2(AE + AH + HD + DG + GC + CF + FB + BE) = 2(EH + HG + GF + EF) = 48 \text{ cm}$.

2. B 提示: 由折叠的性质, 可得 $FC = FH$, $\angle HFE = \angle CFE$. 因为 $AD \parallel BC$, 所以 $\angle HEF = \angle CFE = \angle HFE$, 所以 $\triangle HFE$ 为等腰三角形, 所以 $HE = HF = FC$, 所以四边形 $CFHE$ 是平行四边形. 又因为 $FC = FH$, 所以四边形 $CFHE$ 是菱形, 故 ① 正确. 因为 HC 为菱形的对角线, 所以 $\angle BCH = \angle ECH$. 因为 $\angle BCD = 90^\circ$, 所以只有当 $\angle DCE = 30^\circ$ 时, CE 平分 $\angle DCH$, 故 ② 错误. 如图 1, BF 的长为最小. 设 $BF = x$, 则 $AF = FC = 8 - x$. 在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中, $AB^2 + BF^2 = AF^2$, 即 $4^2 + x^2 = (8 - x)^2$, 解得 $x = 3$. 如图 2, BF 的长为最大, $CF = FH = DH = CD = 4$, 所以 $BF = 4$. 所以线段 BF 长的取值范围为 $3 \leq BF \leq 4$, 故 ③ 正确. 当点 H 与点 A 重合时, 如图 1, $BF = 3$, 所以 $AE = CF = 8 - 3 = 5$. 过点 F 作 $FM \perp AD$ 于点 M , 则 $ME = 5 - 3 = 2$, $MF = AB = 4$. 由勾股定理, 得 $EF = \sqrt{MF^2 + ME^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$, 故 ④ 错误.

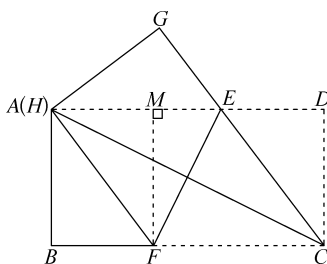


图 1

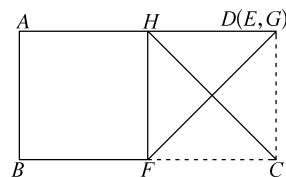
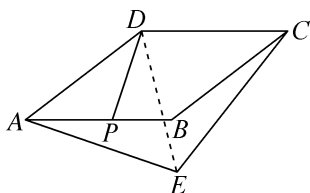


图 2

3. D 提示:如图,连接 DE . 因为 $\angle ADC = \angle B = \alpha$, $AD = CD = ED$, 所以 $\angle DAE = \angle DEA$, $\angle DCE = \angle DEC$. 因为 $\angle ADE + \angle CDE + \angle DAE + \angle DEA + \angle DEC + \angle DCE = 360^\circ$, 所以 $\alpha + 2(\angle DEA + \angle DEC) = 360^\circ$, 即 $\alpha + 2\angle AEC = 360^\circ$, 所以 $\angle AEC = 180^\circ - \frac{1}{2}\alpha$.



4. C 提示:因为 $\angle EAB + \angle BAP = \angle PAD + \angle BAP = 90^\circ$, 所以 $\angle EAB = \angle PAD$, 又因为 $AE = AP$, $AB = AD$, 所以 $\triangle APD \cong \triangle AEB$ (SAS), 故①正确; 因为 $AE = AP$, $\angle EAP = 90^\circ$, 所以 $\angle AEP = \angle APE = 45^\circ$, 所以 $\angle APD = 135^\circ$, 因为 $\triangle APD \cong \triangle AEB$, 所以 $\angle AEB = \angle APD = 135^\circ$, 故②正确; 易得 $PE = 6$, $\angle BEP = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$, 在 $\text{Rt}\triangle BPE$ 中, $BE = \sqrt{PB^2 - PE^2} = 8$, 故③错误; 因为 $\triangle APD \cong \triangle AEB$, 所以 $S_{\triangle APD} + S_{\triangle APB} = S_{\triangle AEB} + S_{\triangle APB} = S_{\text{四边形}AEBP} = S_{\triangle AEP} + S_{\triangle EPB} = \frac{1}{2}AE \cdot AP + \frac{1}{2}PE \cdot BE = 33$, 故④正确; 连接 BD , 因为 $\triangle APD \cong \triangle AEB$, 所以 $PD = EB = 8$, 所以 $S_{\triangle BDP} = \frac{1}{2}PD \cdot BE = 32$, 所以 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle APD} + S_{\triangle APB} + S_{\triangle BDP} = 65$, 所以 $S_{\text{正方形}ABCD} = 2S_{\triangle ABD} = 130$, 所以 $CD^2 = 130$, 所以 $CD = \sqrt{130}$, 故⑤错误.

5. 1 提示:延长 MO 交 CG 于点 H . 因为 $OM \perp EF$, 且矩形 $EFCG$ 是由矩形 $ABCD$ 旋转所得, 所以 $OH \perp CG$, 所以 $MH = FC = BC = 4$. 因为 $AB = 5$, 所以 $OC = OM = \frac{1}{2}AB = \frac{5}{2}$, 所以 $OH = MH - OM = \frac{3}{2}$, 所以 $CH = \sqrt{OC^2 - OH^2} = 2$. 因为 $OC = ON$, $OH \perp CG$, 所以 $HN = CH = 2$. 又因为 $CG = CD = 5$, 所以 $NG = 1$.

6. $2 \leq x \leq 6$ 提示:设 $AG = y$, 则 $BG = 6 - y$. 如图 1, 当折痕过点 C 时, AG 的长最大, 根据折叠的性质和勾股定理, 得 $CD^2 + ED^2 = EC^2$, 所以 $ED = 8$, 此时 $x = 2$. 在 $\text{Rt}\triangle AEG$ 中, $AG^2 + AE^2 = EG^2$, 即 $y^2 + 2^2 =$

$(6 - y)^2$, 解得 $y = \frac{8}{3}$. 如图 2, 当折痕过点 A 时, AG 的长最小, 最小值为 0, 即此时 $y = 0$. 所以 y 的取值范围为 $0 \leq y \leq \frac{8}{3}$. 如题图, 在 $\text{Rt}\triangle AEG$ 中, $x^2 + y^2 = (6 - y)^2$, 所以 $x = \sqrt{36 - 12y}$ ($0 \leq y \leq \frac{8}{3}$), 当 $y = 0$ 时, x 的值最大, 最大值为 6; 当 $y = \frac{8}{3}$ 时, x 的值最小, 最小值为 2. 故 $2 \leq x \leq 6$.

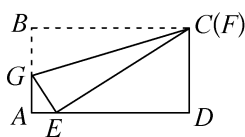


图 1

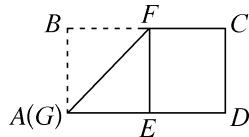


图 2

7. 4.5 提示:取 CD 的中点 M , 连接 GM, FM . 因为 $AG = CG$, $AE = EB$, 所以 EG 是 $\triangle ABC$ 的中位线, 所以 $EG = \frac{1}{2}BC = 3$. 同理可得 $FM = \frac{1}{2}BC = 3$, $EF = GM = \frac{1}{2}AD = 3$. 所以四边形 $EFGM$ 是菱形. 当 $EF \perp EG$ 时, 四边形 $EFGM$ 是正方形, 此时四边形 $EFGM$ 的面积最大, 最大值为 $3 \times 3 = 9$. 所以 $\triangle EGF$ 的面积的最大值为 $\frac{1}{2}S_{\text{正方形}EFGM} = 4.5$.

8. 解:(1) ②

(2) 如图 1, 过点 D 作 $DE \parallel BC$, 交 AB 于点 E , 所以 $\angle AED = \angle B$. 由题意, 得 $\angle A + \angle B = 90^\circ$, 所以 $\angle A + \angle AED = 90^\circ$, 所以 $\angle ADE = 90^\circ$. 因为 $AB \parallel CD$, 所以四边形 $CDEB$ 是平行四边形, 所以 $DE = BC$, $BE = CD = 2$, 所以 $AE = AB - BE = 7 - 2 = 5$, 所以 $DE = \sqrt{AE^2 - AD^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$, 所以 $BC = 4$.

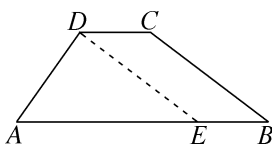


图 1

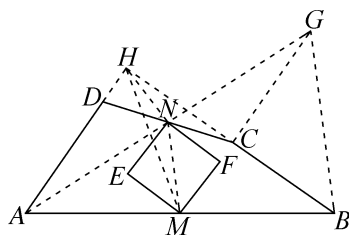


图 2

(3) ①如图 2, 作射线 AN , 并截取 $GN = AN$, 连接 BG, CG, MN , 延长 AD, BC 交于点 H . 因为 N 是 CD 的中点, 所以 $DN = CN$. 因为 $\angle AND = \angle GNC$, 所以 $\triangle ADN \cong \triangle GCN$ (SAS), 所以 $GC = AD = a$, $\angle DAN = \angle CGN$, 所以 $AD \parallel CG$, 所以 $\angle HCG = \angle AHC$. 因为 M 是 AB 的中点, 所以 $MN = \frac{1}{2}BG$. 由题意, 得 $\angle HAB + \angle B = 90^\circ$, 所以 $\angle AHC = 90^\circ$, 所以 $\angle BCG = \angle HCG = 90^\circ$, 所以 $BG = \sqrt{CG^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$, 所以 $MN = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$, 所以 $S_{\text{正方形}EMFN} = \frac{1}{2}MN^2 = \frac{a^2 + b^2}{8}$.

$$\textcircled{2} \sqrt{a^2 + (b+c)^2} < AB \leq \sqrt{a^2 + b^2} + c$$

提示: 如图 2, 连接 HN, HM . 由 $\textcircled{1}$ 知, $\angle AHC = 90^\circ$, $MN = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$. 因为 N 是 CD 的中点, M 是 AB 的中点, 所以 $HN = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}c$, $HM = \frac{1}{2}AB$, 所以 $HM \leq MN + HN$, 所以 $HM \leq \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} + \frac{1}{2}c$, 所以 $AB \leq \sqrt{a^2 + b^2} + c$. 设 $HD = x$, $HC = y$, 在 $\text{Rt}\triangle HDC$ 与 $\text{Rt}\triangle HAB$ 中, $x^2 + y^2 = c^2$, $(x+a)^2 + (y+b)^2 = AB^2$, 所以 $AB^2 = x^2 + y^2 + a^2 + b^2 + 2ax + 2by = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ax + by)$, 因为 $a \geq b$, 所以 $ax + by \geq bx + by = b(x+y) > bc$, 所以 $AB^2 > a^2 + b^2 + c^2 + 2bc = a^2 + (b+c)^2$, 所以 $AB > \sqrt{a^2 + (b+c)^2}$. 综上所述, $\sqrt{a^2 + (b+c)^2} < AB \leq \sqrt{a^2 + b^2} + c$.

9. (1) 解: 因为 $BE \perp l$, $l \parallel k$, 所以 $\angle AEB = \angle BFC = 90^\circ$, 所以 $\angle FBC + \angle BCF = 90^\circ$. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形, 所以 $\angle ABC = 90^\circ$, 所以 $\angle ABE + \angle FBC = 90^\circ$. 所以 $\angle ABE = \angle BCF$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle BCF$ 中, $\begin{cases} \angle ABE = \angle BCF, \\ \angle AEB = \angle BFC, \\ AB = BC, \end{cases}$ 所以 $\triangle ABE \cong \triangle BCF$.

$\triangle BCF$, 所以 $AE = BF = d_3 = 1$. 因为 $BE = d_1 + d_2 = 3$, 所以 $AB = \sqrt{BE^2 + AE^2} = \sqrt{10}$. 所以正方形 $ABCD$ 的边长是 $\sqrt{10}$.

(2) 证明: 连接 AC . 因为四边形 $ABCD$ 是菱形, 所以 $AD = DC$. 又因为 $\angle ADC = 60^\circ$, 所以 $\triangle ADC$ 是等边三角形, 所以 $AD = AC$, $\angle CAD = 60^\circ$. 因为 $\triangle AEF$ 是等边三角形, 所以 $AF = AE$, $\angle EAF = 60^\circ$. 所以 $\angle EAC + \angle CAF = \angle CAF + \angle FAD$, 所以 $\angle EAC = \angle FAD$. 在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle AFD$ 中, $\begin{cases} AE = AF, \\ \angle EAC = \angle FAD, \\ AC = AD, \end{cases}$ 所以 $\triangle AEC \cong \triangle AFD$, 所以 $EC = DF$.

$$(3) \text{解: 当 } BC \parallel DE \text{ 时, } \frac{2\sqrt{3}}{3} < HG < \frac{4\sqrt{3}}{3};$$

当 BC 与 DE 相交时, $0 \leq HG < \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

提示: 如图 1, 过点 C 作 $CT \perp AG$ 于点 T , 过点 M 作 $MK \perp AG$ 于点 K . 因为 $AB \perp k$, $l \parallel k$, 所以 $AB = d_1 + d_2 + d_3 = 4$, $\angle BAG = 90^\circ$. 因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 所以 $\angle BAC = 60^\circ$, $AB = AC$, 所以 $\angle GAC = 30^\circ$. 在 $\text{Rt}\triangle ACG$ 中, $\angle ACG = 90^\circ$, $\angle GAC = 30^\circ$, $AC = AB = 4$, 所以由勾股定理, 易得 $CG = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. 在 $\text{Rt}\triangle TCG$ 中, 因为 $\angle TCG = 30^\circ$, 所以 $TG = \frac{1}{2}CG = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. 在 $\text{Rt}\triangle KMG$ 中, $KM = AB = 4$, 同理可得 $KG = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. 当点 D 在线段 CM 上时, 因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 所以 $\angle ABC = \angle ACB = 60^\circ$. 因为 $AB \perp BM$, $\angle ACD = 90^\circ$, 所以 $\angle MBC = \angle MCB = 30^\circ$, 所以 $\angle BMC = 120^\circ$, $MB = MC$. 易证 $\text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle ACD$, 所以 $BE = CD$. 所以 $ME = MD$, 所以 $\angle MED = \angle MDE = 30^\circ$. 所以 $\angle MBC = \angle MED$, 所以 $ED \parallel BC$. 观察图形可知, 当 $\frac{2\sqrt{3}}{3} < HG < \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时, $BC \parallel DE$. 当点 D 运动到点 M 时, 因为 $AD = AE$, 所以点 E 也运动到点 M , 即点 D, E 重

合,此时不合题意,舍去.

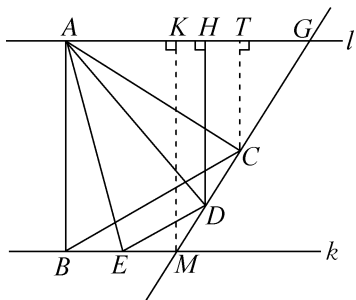


图 1

如图 2,当点 D 在线段 CG 上时,BC 与 DE 相交,

此时 $0 \leq HG < \frac{2\sqrt{3}}{3}$. 当点 D 运动到点 G 时,点 E 运动

到点 M,此时 $HG=0$.

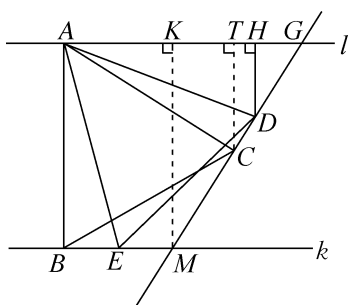
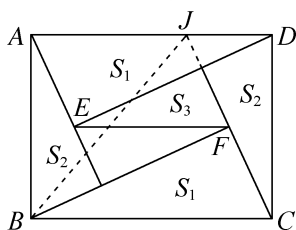


图 2

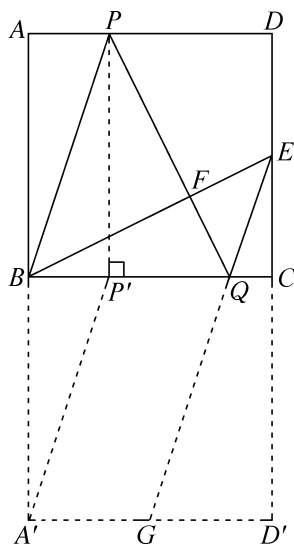
第 8 章综合练(2)

1. C 提示:连接 CF, CG, AE, AC. 易证 $\triangle ADE \cong \triangle CDG$, 所以 $AE=CG$, 所以 $d_1+d_2+d_3=DE+CF+CG=EF+CF+AE \geq AC$. 当点 E, F 都在线段 AC 上时取等号. 因为 $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=2\sqrt{2}$, 所以 $d_1+d_2+d_3$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

2. A 提示:如图,延长 CF 交 AD 于点 J, 连接 BJ. 由题意,得 $\triangle ADE \cong \triangle CBF$, 所以 $AE=CF$. 易证四边形 AEFJ 是平行四边形, 所以 $AE=FJ$, 所以 $CF=FJ$, 所以 $S_{\triangle BCF}=S_{\triangle BFJ}=\frac{1}{2}S_{\triangle BCJ}=\frac{1}{4}S_{\text{矩形}ABCD}$, 所以 $S_{\text{矩形}ABCD}=4S_{\triangle BCF}=4S_1$.

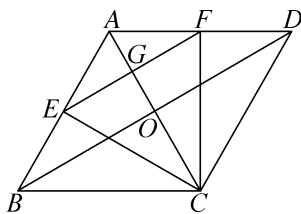


3. D 提示:如图,过点 P 作 $PP' \perp BC$ 于点 P', 将正方形 ABCD 沿 BC 向下翻折得到正方形 BCD'A', 连接 A'P', 将线段 A'P' 平移至 GQ 位置. 易证 $BP=A'P'=GQ$. 因为 $PQ \perp BE$, 所以 $\angle P'PQ = \angle CBE$. 易证 $\triangle PP'Q \cong \triangle BCE$, 所以 $P'Q=CE=3$. 因为 $BP+QE=GQ+QE \geq GE$, 所以当 E, Q, G 三点共线时(如图所示), $BP+QE$ 的值最小, 最小值为 GE 的长. 易证四边形 P'QGA' 为平行四边形, 所以 $A'G=P'Q=3$, 所以 $GD'=3$. 因为 $ED'=EC+CD'=9$, 所以 $GE=\sqrt{GD'^2+ED'^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$, 所以 $BP+QE$ 的最小值为 $3\sqrt{10}$.

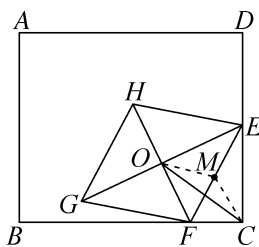


4. A 提示:因为四边形 ABCD 是菱形, $AC=2$, 所以 $AB=BC$, $OA=\frac{1}{2}AC=1$, $AC \perp BD$, $BD=2OB$, 因为 $\angle ABC=60^\circ$, 所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 所以 $AB=BC=AC=2$, $\angle BAC=\angle ACB=60^\circ$, 所以 $\angle DAC=\angle BAC=60^\circ$, 在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, 由勾股定理, 得 $OB=\sqrt{AB^2-OA^2}=\sqrt{3}$, 所以 $BD=2\sqrt{3}$, $S_{\text{菱形}ABCD}=\frac{1}{2}AC \cdot BD=\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$, 故①正确; 由题意, 得 $BE=AF$, 又因为 $\angle CBE=\angle CAF=60^\circ$, $CB=CA$, 所以 $\triangle CBE \cong \triangle CAF$ (SAS), 所以 $CE=CF$, $\angle ACF=\angle BCE$, 所以 $\angle ECF=\angle ACE+\angle ACF=\angle ACE+\angle BCE=\angle ACB=60^\circ$, 所以 $\triangle ECF$ 是等边三角形, 故②正确; 所以 $EF=CE$, 所以当 $CE \perp AB$ 时, CE 的长取最小值, 即 EF 的长取最小值, 此时 $S_{\text{菱形}ABCD}=AB \cdot CE=2CE=2\sqrt{3}$, 即 $CE=\sqrt{3}$, 所以 EF 长的最小值为

$\sqrt{3}$,故③正确;因为 $BE=AF, AD=AB$,所以 $AB-BE=AD-AF$,即 $AE=DF$,由菱形的对称性,可得点 G 先从点 A 运动到最远(离点 A)为止,再从最远位置运动回点 A ,且当点 G 运动到最远位置时,点 E, F 位置如图所示,此时 E 为 AB 的中点, F 为 AD 的中点,所以 EF 为 $\triangle ABD$ 的中位线,所以 $EF \parallel BD, EF = \frac{1}{2}BD = \sqrt{3}$,所以 $EF \perp AC, EG = \frac{1}{2}EF = \frac{\sqrt{3}}{2}$,易知 $CE = \sqrt{3}$,所以 $CG = \sqrt{CE^2 - EG^2} = \frac{3}{2}$,所以 $AG = AC - CG = \frac{1}{2}$,所以点 G 离点 A 的最远距离为 $\frac{1}{2}$,所以整个过程中点 G 走过的路径长为 $\frac{1}{2} \times 2 = 1$,故④正确.



5. $\sqrt{2}$ 提示:如图,取 EF 的中点 M ,连接 OM, CM . 因为四边形 $EFGH$ 是菱形,所以 $EF=GF, OE=OG$. 又因为 M 是 EF 的中点,所以 $OM = \frac{1}{2}EF, CM = \frac{1}{2}EF$,所以 $EF = OM + CM$. 当 O, M, C 三点共线时, $OM + CM$ 取最小值,最小值为 OC 的长,所以 EF 长的最小值为 $\sqrt{2}$.

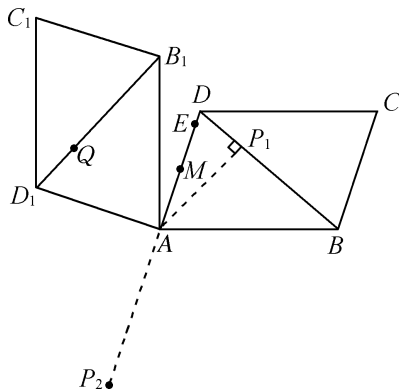


6. $2\sqrt{6}$ 提示:连接 BD, AF . 因为四边形 $ABCD$ 是矩形, $AC = 6$,所以 $BD = 6, \angle ADC = \angle ECF = 90^\circ, CD = AB$. 因为 E, F 分别为矩形 $ABCD$ 的边 CD, BC 的中点,所以 $EF = \frac{1}{2}BD = 3$. 设 $DE = CE = a, CF = BF = b$,则 $AB = CD = 2a, AD = BC = 2b$. 因为 $AE \perp EF$,所以在 $\text{Rt}\triangle ADE, \text{Rt}\triangle CEF, \text{Rt}\triangle AEF, \text{Rt}\triangle ABF$ 中,

由勾股定理,可得 $a^2 + 4b^2 + 9 = 4a^2 + b^2$ ①, $a^2 + b^2 = 9$ ②, 所以由①②可得 $a^2 = 6$,解得 $a = \sqrt{6}$ (负值已舍). 所以 $AB = 2\sqrt{6}$.

7. 11 提示:以 B 为原点, BC 所在直线为 x 轴, AB 所在直线为 y 轴,建立平面直角坐标系,设 $AE = a$ ($0 \leq a \leq 12$),过点 F 作 $FG \perp AD$ 于点 G . 易知 $\triangle BAE \cong \triangle EGF$,所以 $GF = AE = a, EG = BA = 6$,所以点 $F(a+6, 6-a)$,所以点 F 在线段 $y = -x + 12$ ($6 \leq x \leq 18$) 上. 当 $x = 6$ 时,点 $F_1(6, 6)$,当 $x = 18$ 时,点 $F_2(18, -6)$,过点 D 作 $DH \perp F_1F_2$ 于点 H ,因为点 $D(12, 6)$,易得 $DF_1 = 6, \triangle DHF_1$ 为等腰直角三角形,所以 $DH = 3\sqrt{2}$. 因为 $DF_2 = DB = 6\sqrt{5}$,当点 F 在点 F_1 与点 H 之间时, $3\sqrt{2} \leq DF \leq 6, DF$ 为整数有 5, 6;当点 F 在点 F_2 与点 H 之间时, $3\sqrt{2} \leq DF \leq 6\sqrt{5}, DF$ 为整数有 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 所以满足条件的点 F 的位置共有 11 个.

8. $18 - 5\sqrt{2}$ 提示:如图,过点 A 作 $AP_1 \perp BD$ 于点 P_1 . 因为 $\angle ABD = 45^\circ, AB = 10$,所以 $AP_1 = P_1B = 5\sqrt{2}$. 因为 M 为 AD 的中点,所以 $AM = \frac{1}{2}AD = 4$. 当 AP_1 与射线 AD 重合时(点 P_1 与点 E 重合), ME 的长就是 MQ 长的最小值,为 $AP_1 - AM = 5\sqrt{2} - 4$;当点 P 与点 B 重合,且 AP 旋转到与 DA 的延长线重合时,如图中 AP_2, MP_2 的长就是 MQ 长的最大值,为 $AB + AM = 14$. 所以 MQ 长的最大值与最小值之差为 $14 - (5\sqrt{2} - 4) = 18 - 5\sqrt{2}$.



9. 解:(1) $\frac{3}{2}$

(2) 当 $t = 1$ 时, PQ 垂直平分线段 AC , 此

时四边形 $AQCP$ 为菱形. 理由如下:

若 PQ 垂直平分线段 AC , 则 $CP = PA = 8 - 3t$, $AQ = CQ = 6 - t$. 在 $\text{Rt}\triangle OPC$ 中, 根据勾股定理, 得 $OC^2 + OP^2 = CP^2$, 即 $16 + 9t^2 = (8 - 3t)^2$, 解得 $t = 1$. 此时 $CP = PA = 5$, $AQ = CQ = 5$. 故当 $t = 1$ 时, PQ 垂直平分线段 AC , 此时四边形 $AQCP$ 为菱形.

(3) ①当点 P 在线段 OA 上时, $BQ = t$, $AP = 8 - 3t$, 因为 $BQ \parallel AP$, 所以当 $BQ = AP$ 时, 四边形 $ABQP$ 为平行四边形, 所以 $t = 8 - 3t$, 解得 $t = 2$; ②当点 P 在线段 OA 的延长线上时, $BQ = t$, $AP = 3t - 8$, 同理, 当 $BQ = AP$ 时, 四边形 $APBQ$ 为平行四边形, 所以 $t = 3t - 8$, 解得 $t = 4$.

综上所述, 当 $t = 2$ 或 $t = 4$ 时, 以 A, B, P, Q 为顶点的四边形为平行四边形.

10. (1) 解: 四边形 $ABCD$ 是“垂美四边形”. 理由如下:

连接 BD, AC . 因为 $AB = AD, CB = CD$, 所以点 A, C 在线段 BD 的垂直平分线上, 所以直线 AC 是线段 BD 的垂直平分线, 所以 $AC \perp BD$, 所以四边形 $ABCD$ 是“垂美四边形”.

(2) **证明:** 因为 $AC \perp BD$, 所以 $\angle AED = \angle AEB = \angle BEC = \angle CED = 90^\circ$. 根据勾股定理, 得 $AB^2 + CD^2 = AE^2 + BE^2 + CE^2 + DE^2$, $AD^2 + BC^2 = AE^2 + DE^2 + BE^2 + CE^2$, 所以 $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

(3) **解:** 连接 CG, BE . 设 CE 交 BG, AB 于点 N, M . 因为 $\angle CAG = \angle BAE = 90^\circ$, 所以 $\angle CAG + \angle BAC = \angle BAE + \angle BAC$, 即 $\angle GAB = \angle CAE$. 易证 $\triangle GAB \cong \triangle CAE$, 所以 $\angle ABG = \angle AEC$. 因为 $\angle AEC + \angle AME = 90^\circ$, $\angle AME = \angle BMN$. 所以 $\angle ABG + \angle BMN = 90^\circ$, 所以 $\angle BNE = 90^\circ$, 即 $CE \perp BG$, 所以四边

形 $CGEB$ 是“垂美四边形”. 由 (2), 得 $CG^2 + BE^2 = CB^2 + GE^2$. 因为 $AC = 4, AB = 5$, 所以 $CB = 3, CG^2 = 32, BE^2 = 50$. 所以 $GE^2 = CG^2 + BE^2 - CB^2 = 73$, 所以 $GE = \sqrt{73}$.

第 9 章 因式分解

巅峰训练 11 因式分解的概念 提公因式法

1. B 2. B 3. D

4. C 提示: $(2k+1)^2 - (k+1)^2 + k = 4k^2 + 4k + 1 - (k^2 + 2k + 1) + k = 4k^2 + 4k + 1 - k^2 - 2k - 1 + k = 3k^2 + 3k = 3k(k+1)$. 因为 k 和 $k+1$ 中必有一个为偶数, 所以一定能被 6 整除.

5. C 提示: 因为 $x^2 + x = 1$, 所以 $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 2026 = x^2(x^2 + x) + x^3 - x^2 - 2x + 2026 = x^2 + x^3 - x^2 - 2x + 2026 = x(x^2 + x) - x^2 - 2x + 2026 = -x^2 - x + 2026 = -(x^2 + x) + 2026 = 2025$.

6. $(a+1)^{2026}$ 提示: 原式 $= (a+1)[1 + a + a(a+1) + a(a+1)^2 + \dots + a(a+1)^{2024}] = (a+1)^2[1 + a + a(a+1) + a(a+1)^2 + \dots + a(a+1)^{2023}] = (a+1)^3 \cdot [1 + a + a(a+1) + a(a+1)^2 + \dots + a(a+1)^{2022}] = \dots = (a+1)^{2026}$.

7. 15 提示: 分解因式 $x^2 + ax + b$, 甲看错了 b , 但 a 是正确的, 他分解结果为 $(x+2)(x+4) = x^2 + 6x + 8$, 所以 $a = 6$, 同理可得 $b = 9$, 所以 $a + b = 15$.

8. 6 5 提示: 因为 $a + b = 3, ab = 2$, 所以 $a^2b + ab^2 = ab(a+b) = 6, a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 9 - 4 = 5$.

9. **解:** (1) 原式 $= 3x(a-b) + 6y(a-b) = 3(a-b)(x+2y)$.

(2) 原式 $= (1-3a)(1-3a-3) = (1-3a)(-3a-2) = -(1-3a)(3a+2)$.

(3) 原式 $= (m+1)[(m+1) - (m-1)] = (m+1)(m+1-m+1) = 2(m+1)$.

(4) 原式 $= (b-a)^2 + (b-a) = (b-a) \cdot$

$(b-a+1)$.

10. 解: (1) $ab-ac+b^2-bc=(ab-ac)+(b^2-bc)=a(b-c)+b(b-c)=(a+b)\cdot(b-c)$.

(2) 因为 $a^3+ab^2-a^2b-b^3=c^2(a-b)$, 所以 $(a^3-a^2b)+(ab^2-b^3)=c^2(a-b)$, 所以 $a^2(a-b)+b^2(a-b)-c^2(a-b)=0$, 所以 $(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$, 所以 $a-b=0$ 或 $a^2+b^2-c^2=0$, 所以 $a=b$ 或 $a^2+b^2=c^2$, 所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形.

11. 解: $3^{2\ 027}-2\times 3^{2\ 026}+8\times 3^{2\ 025}=3^{2\ 025}\times(3^2-2\times 3+8\times 1)=3^{2\ 025}\times 11=3\times 11\times 3^{2\ 024}=33\times 3^{2\ 024}$. 因为 $33\times 3^{2\ 024}$ 能被 33 整除, 所以 $3^{2\ 027}-2\times 3^{2\ 026}+8\times 3^{2\ 025}$ 能被 33 整除.

12. 解: (1) 因为多项式 x^2+kx-6 有一个因式为 $x-3$, 所以当 $x=3$ 时, $x^2+kx-6=0$, 所以 $3^2+3k-6=0$, 所以 $k=-1$.

(2) 因为 $x+2, x-1$ 是多项式 $2x^3+ax^2+5x-b$ 的两个因式, 所以当 $x=-2$ 或 $x=1$ 时, $2x^3+ax^2+5x-b=0$, 即 $2\times(-2)^3+a\times(-2)^2+5\times(-2)-b=0$ ①, $2\times 1^3+a\times 1^2+5\times 1-b=0$ ②. 由①, 得 $4a-b=26$ ③, 由②, 得 $a-b=-7$ ④, ③-④, 得 $3a=33$, 所以 $a=11$, 将 $a=11$ 代入④, 得 $b=18$. 所以 $a=11, b=18$.

13. 解: (1) 1 717 是 2 阶 4 位循环数, 7 171 是 2 阶 4 位循环数. 证明如下:

设原数为 \overline{abab} , 则新数为 \overline{baba} , 即原数是 $1\ 000a+100b+10a+b$, 新数是 $1\ 000b+100a+10b+a$. 两数相减, 得 $1\ 000b+100a+10b+a-(1\ 000a+100b+10a+b)=909b-909a=909(b-a)=9\times 101(b-a)$. 因为 a, b 为整数, 所以 $b-a$ 也为整数, 所以新数和原数

的差能够被 9 整除.

(2) 该 2 阶 4 位循环数为 \overline{abab} , 即 $\frac{1\ 010a+101b}{9}=112a+11b+\frac{2(a+b)}{9}$. 要使得 $1\ 010a+101b$ 能被 9 整除, 则需 $(a+b)$ 能被 9 整除. 因为 $0<a\leq 9, 0\leq b\leq 9$, 所以 $0<a+b\leq 18$, 所以 a, b 应满足的关系是 $a+b=9$ 或 $a+b=18$.

巅峰训练 12 公式法

1. D

2. C 提示: 因为 $a=m+2\ 024, b=m+2\ 025, c=m+2\ 026$, 所以 $a-b=-1, b-c=-1, a-c=-2$, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac)=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]=\frac{1}{2}\times[(-1)^2+(-2)^2+(-1)^2]=3$.

3. B 提示: 因为 $(4m+5)^2-81=(4m+5)^2-9^2=(4m+5+9)(4m+5-9)=(4m+14)(4m-4)=2(2m+7)\times 4(m-1)=8(2m+7)(m-1)$, 所以该多项式能被 8 整除.

4. C 提示: 因为 $a^2+b^2+c^2+50=6a+8b+10c$, 即 $a^2+b^2+c^2+50-6a-8b-10c=0$, 所以 $(a-3)^2+(b-4)^2+(c-5)^2-9-16-25+50=0$, 即 $(a-3)^2+(b-4)^2+(c-5)^2=0$, 所以 $a=3, b=4, c=5$, 所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $3+4+5=12$.

5. -80 提示: $(x+25)(x+5)=(x+15+10)\cdot(x+15-10)=(x+15)^2-100=-80$.

6. 2 025 提示: 原式 $=x^2-4xy+4y^2+y^2-2y+1+2\ 025=(x-2y)^2+(y-1)^2+2\ 025$. 因为 $(x-2y)^2\geq 0, (y-1)^2\geq 0$, 所以当 $x=2, y=1$ 时, 原式有最小值, 最小值为 2 025.

7. -2 提示: 因为 $a^2=b+2, b^2=a+2$, 所以 $a^2-b^2=b-a$, 即 $(a-b)(a+b+1)=0$. 因为 $a\neq b$, 所以 $a+b=-1$. 所以 $a^3-2ab+b^3=a\cdot a^2-2ab+b\cdot b^2=a(b+2)-2ab+b(a+2)=ab+2a-2ab+ab+$

$$2b=2(a+b)=2 \times (-1)=-2.$$

8. 解: (1) 原式 $= (a-b)x^2 - (a-b)y^2 = (a-b)(x^2 - y^2) = (a-b)(x+y)(x-y)$.

(2) 原式 $= 4(x^2 - 16) = 4(x+4)(x-4)$.

(3) 原式 $= (x^2 + 4)^2 - (4x)^2 = (x^2 + 4 + 4x)(x^2 + 4 - 4x) = (x+2)^2(x-2)^2$.

(4) 原式 $= (a^2 + b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2 + b^2 + 2ab)(a^2 + b^2 - 2ab) = (a+b)^2(a-b)^2$.

9. 解: (1) $x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 4 - 1 = (x+2)^2 - 1 = (x+2+1)(x+2-1) = (x+3)(x+1)$.

(2) 设 $x - y = a$, 则原式 $= a^2 - 10a + 25 = (a-5)^2 = (x-y-5)^2$.

(3) 设 $m^2 - 2m = a$, 则 $(m^2 - 2m)(m^2 - 2m - 3) - 4 = a(a-3) - 4 = a^2 - 3a - 4 = a^2 - 3a + \frac{9}{4} - \frac{25}{4} = (a - \frac{3}{2})^2 - \frac{25}{4} = (a - \frac{3}{2} + \frac{5}{2})(a - \frac{3}{2} - \frac{5}{2}) = (a+1)(a-4) = (m^2 - 2m + 1)(m^2 - 2m - 4) = (m-1)^2(m^2 - 2m - 4)$.

10. 解: (1) 因为 $(x-2)(x^2 + mx + n) = x^3 + (m-2)x^2 + (n-2m)x - 2n = x^3 - 5x^2 + x + 10$, 所以 $m-2 = -5, n-2m = 1$, 所以 $m = -3, n = -5$.

(2) ①把 $x = -1$ 代入 $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$, 得其值为 0, 则该多项式可分解为 $(x+1) \cdot (x^2 + ax + b)$ 的形式, 易求得 $a = 4, b = 4$, 所以 $x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x+1)(x^2 + 4x + 4) = (x+1)(x+2)^2$.

②把 $x = 2$ 代入 $x^3 - 4x^2 + 6x - 4$, 得其值为 0, 则该多项式可分解为 $(x-2)(x^2 + ax + b)$ 的形式, 易求得 $a = -2, b = 2$, 所以 $x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = (x-2)(x^2 - 2x + 2)$.

11. 解: (1) $x^2 - 16 = (x+4)(x-4) > 0$,

原不等式可转化为 $\begin{cases} x+4 > 0, \\ x-4 > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+4 < 0, \\ x-4 < 0. \end{cases}$ 解

得 $x > 4$ 或 $x < -4$, 即一元二次不等式 $x^2 - 16 > 0$ 的解集为 $x > 4$ 或 $x < -4$.

(2) 原不等式可转化为 $\begin{cases} x-1 > 0, \\ x-3 < 0 \end{cases}$ 或

$\begin{cases} x-1 < 0, \\ x-3 > 0. \end{cases}$ 解得 $1 < x < 3$, 即不等式 $\frac{x-1}{x-3} < 0$

的解集为 $1 < x < 3$.

(3) $2x^2 - 3x = x(2x-3) < 0$, 原不等式

可转化为 $\begin{cases} x > 0, \\ 2x-3 < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x < 0, \\ 2x-3 > 0. \end{cases}$ 解得 $0 <$

$x < \frac{3}{2}$, 即一元二次不等式 $2x^2 - 3x < 0$ 的解集

为 $0 < x < \frac{3}{2}$.

第 9 章综合练

1. D

2. C 提示: 因为 $6^8 - 1 = (6^4 + 1) \times (6^2 + 1) \times (6^2 - 1)$, 且 $6^8 - 1$ 能被 30 到 40 之间的两个整数整除, 所以这两个整数是 $6^2 + 1 = 37, 6^2 - 1 = 35$.

3. A 提示: $(n^2 + 2n)(n+1) = n(n+1)(n+2)$. 因为 $n, n+1, n+2$ 为 3 个连续正整数, 所以这 3 个正整数中, 必有 1 个数是 2 的倍数, 必有 1 个数是 3 的倍数, 所以 $n(n+1)(n+2)$ 必是 6 的倍数.

4. $-3a^2$ (或 $-2a$ 或 $6a$ 或 $-\frac{3}{4}$) 提示: 因为 ① $4a^2 - 2a + 1 - 3a^2 = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$; ② $4a^2 - 2a + 1 - 2a = 4a^2 - 4a + 1 = (2a-1)^2$; ③ $4a^2 - 2a + 1 + 6a = 4a^2 + 4a + 1 = (2a+1)^2$; ④ $4a^2 - 2a + 1 - \frac{3}{4} = 4a^2 - 2a + \frac{1}{4} = (2a - \frac{1}{2})^2$. 所以加上的单项式可以为 $-3a^2$ 或 $-2a$ 或 $6a$ 或 $-\frac{3}{4}$.

5. 10 提示: 因为 $(9^2 - 1)(11^2 - 1) = 8 \times 10 \times$

12k, 所以 $(9+1)(9-1)(11+1)(11-1)=8 \times 10 \times 12k$,
所以 $80 \times 120=8 \times 10 \times 12k$, 所以 $k=10$.

6. 36 提示: 因为 $M=x^2+4xy+5y^2-12y+k=k+(x+2y)^2+(y-6)^2+k-36$, 所以当 $k=36$ 时, M 是“完美数”.

7. 108 提示: 由题意, 得 $y=12-x$, 所以 $3x^2+y^2=3x^2+(12-x)^2=4x^2-24x+144=(2x-6)^2+108 \geq 108$, 所以 $3x^2+y^2$ 的最小值为 108.

8. 解: (1) 原式 $=x(x^2+2xy+y^2)=x(x+y)^2$.

(2) 原式 $=[9(a+b)]^2-[6(a-b)]^2=[9(a+b)+6(a-b)][9(a+b)-6(a-b)]= (9a+9b+6a-6b)(9a+9b-6a+6b)= (15a+3b)(3a+15b)=9(5a+b)(a+5b)$.

9. 解: (1) 原式 $=(x-10)(x+6)$.

(2) **12 提示:** 因为 $-60=-(1 \times 60)=-(2 \times 30)=-(3 \times 20)=-(4 \times 15)=-(5 \times 12)=-(6 \times 10)$, 所以 $p=\pm 59$ 或 ± 28 或 ± 17 或 ± 11 或 ± 7 或 ± 4 , 则整数 p 的值有 12 个.

10. 解: (1) $a^2-6a+5=a^2-6a+9-9+5=(a-3)^2-4=(a-3+2)(a-3-2)=(a-1)(a-5)$.

(2) 因为 $ab=\frac{3}{4}$, $a+2b=3$, 所以 $a^2-2ab+4b^2=a^2+4ab+4b^2-6ab=(a+2b)^2-6ab=3^2-6 \times \frac{3}{4}=\frac{9}{2}$.

(3) 设 $4x^2+12x+m=(x+2)(4x+n)$, 则 $4x^2+12x+m=4x^2+(n+8)x+2n$. 所以 $n+8=12, m=2n$, 解得 $n=4, m=8$.

11. 解: (1) -1

(2) 因为 $a^2+b^2-4a-6b+13=(a-2)^2+(b-3)^2=0$, 所以 $a=2, b=3$. 因为 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边, 所以 $1 < c < 5$. 因为 a, b, c 是三个互不相等的正整数, 所以 $c=4$.

(3) $A > B$. 理由如下: 因为 $A-B=3a^2+$

$3a-4-2a^2-4a+6=a^2-a+2=(a-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}$, 而 $(a-\frac{1}{2})^2 \geq 0$, 所以 $A-B=(a-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}$, 所以 $A-B > 0$, 即 $A > B$.

(4) **8 提示:** 由 $a-b=10$, 得 $a=b+10$. 代入, 得 $b(b+10)+c^2-16c+89=0$. 整理, 得 $(b+5)^2+(c-8)^2=0$, 所以 $b=-5, c=8, a=5$. 所以 $a+b+c=5-5+8=8$.

第 10 章 分式

巅峰训练 13 分式的概念

分式的基本性质

1. B 提示: $\frac{2a-2}{a^2-1}=\frac{2(a-1)}{(a+1)(a-1)}=\frac{2}{a+1}$. 根据分式要有意义的条件, 可知 $(a+1)(a-1) \neq 0$, 解得 $a \neq 1$ 且 $a \neq -1$, 所以 a 的最小值为 2. 因为分式的值随着 a 的值的增大而减小, 所以当 a 取最小整数 2 时, 原式有最大值, 最大值是 $\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}$, 且原分式无最小值.

2. C 提示: 原式 $=\frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{2}{x+1}$. 当 $x+1$ 的值为 $\pm 1, \pm 2$ 时, $\frac{2}{x+1}$ 的值为整数, 所以 x 的值可取 $-2, 0, -3, 1$. 又因为 $x^2-1 \neq 0$, 所以 $x \neq \pm 1$. 所以 x 的值可取 $-2, 0, -3$, 共 3 个.

3. D 提示: 因为 $a+\frac{1}{a}=\sqrt{10}$, 所以 $(a+\frac{1}{a})^2=10$, 即 $a^2+2+(\frac{1}{a})^2=10$, 所以 $a^2-2+(\frac{1}{a})^2=(a-\frac{1}{a})^2=6$, 所以 $a-\frac{1}{a}=\pm\sqrt{6}$.

4. A 提示: 因为 $m^2+n^2=4mn$, 所以 $(m+n)^2=6mn, (m-n)^2=2mn$. 因为 $m > n > 0$, 所以 $m+n=\sqrt{6mn}, m-n=\sqrt{2mn}$, 所以 $\frac{m^2-n^2}{mn}=\frac{\sqrt{6mn} \cdot \sqrt{2mn}}{mn}=\frac{2\sqrt{3}mn}{mn}=2\sqrt{3}$.

5. D 提示: 因为 $a_1 = x$, 所以 $a_2 = \frac{1}{1-x}$, $a_3 =$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x}, a_4 = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = x, \dots, \text{由此可见, 这列}$$

式子从 a_1 开始按 $x, \frac{1}{1-x}, \frac{x-1}{x}$ 循环, 所以 $1-x \neq 0$ 且 $x \neq 0$, 所以 $x \neq 1$ 且 $x \neq 0$.

6. $\frac{25}{12}$ 提示: $\frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{(a+b)^2-2ab}{ab} = \frac{25}{12}$.

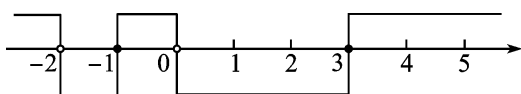
7. 2 提示: 因为 $x^2-4x-5=0$, 所以 $x^2=4x+5$, 代入分式的分母中, 则 $\frac{6x}{x^2-x-5} = \frac{6x}{4x+5-x-5} = \frac{6x}{3x} = 2$.

8. $\frac{2}{17}$ 提示: 因为 $x + \frac{1}{x} = 4$, 所以 $(x + \frac{1}{x})^2 = 16$, 所以 $x^2 + \frac{1}{x^2} = 14$. 因为 $x \neq 0$, 所以 $\frac{2x^2}{x^4+3x^2+1} = \frac{2}{x^2+3+\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{14+3} = \frac{2}{17}$.

9. -1 或 8 提示: 设 $\frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c} = k$, 则 $b+c=ak, c+a=bk, a+b=ck$. 三式相加, 得 $2(a+b+c) = k(a+b+c)$. 若 $a+b+c=0$, 则 $a+b=-c, b+c=-a, c+a=-b$, 此时 $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = -1$; 若 $a+b+c \neq 0$, 则 $k=2$, 即 $a+b=2c, b+c=2a, c+a=2b$, 此时 $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = 8$.

10. 4 提示: 因为 $a+b+c=abc$, 所以 $a(1-b^2)(1-c^2)+b(1-c^2)(1-a^2)+c(1-a^2)(1-b^2) = a(1-b^2-c^2+b^2c^2)+b(1-c^2-a^2+a^2c^2)+c(1-a^2-b^2+a^2b^2) = (a+b+c) - ab(a+b) - bc(b+c) - ac(c+a) + abc(ab+ac+bc) = abc - ab(abc-c) - bc(abc-a) - ac(abc-b) + abc(ab+ac+bc) = abc - abc(ab-1+bc-1+ac-1) + abc(ab+ac+bc) = abc + 3abc = 4abc$. 所以原式 $= \frac{4abc}{abc} = 4$.

11. 解: 以 $-2, -1, 0, 3$ 为分界点把全体实数分为五个区间, 标在数轴上(如图).



当 $x = -1$ 或 $x = 3$ 时, 分子为 0, 分母不等于 0, 此时分式的值为零.

当 $x < -2$ 或 $-1 < x < 0$ 或 $x > 3$ 时, 分式的值为正数(因为负因数的个数为偶数).

当 $-2 < x < -1$ 或 $0 < x < 3$ 时, 分式的值为负数(因为负因数的个数为奇数).

12. 解: 因为 $a^2+4a+1=0$, 所以 $a + \frac{1}{a} = -4$, 所以 $a^2+2+(\frac{1}{a})^2=16$, 即 $a^2+\frac{1}{a^2}=14$. 因为 $\frac{a^4+ma^2+1}{2a^3+ma^2+2a} = 3$, 所以 $\frac{a^2+m+\frac{1}{a^2}}{2(a+\frac{1}{a})+m} = 3$, 即 $\frac{m+14}{m-8} = 3$, 解得 $m = 19$. 经检验, $m = 19$ 符合题意. 所以 m 的值为 19.

13. 解: (1) 原式 $= \frac{2x-2+3}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}$.
(2) 原式 $= 2 + \frac{3}{x-1}$. 当 $x-1 = \pm 1$ 或 $x-1 = \pm 3$ 时, 分式的值为整数, 所以 x 的整数值为 2, 0, 4, -2.

(3) 原式 $= \frac{2x^2-2+3}{x+1} = \frac{2(x+1)(x-1)+3}{x+1} = 2(x-1) + \frac{3}{x+1}$. 当 $x+1 = \pm 1$ 或 $x+1 = \pm 3$ 时, 原式的值为整数, 所以 x 的整数值为 0, -2, 2, -4.

(4) 解方程组 $\begin{cases} x+my=11, \\ x+3m=2y \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=6-3m+\frac{10}{m+2}, \\ y=3+\frac{5}{m+2}. \end{cases}$ 因为关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} x+my=11, \\ x+3m=2y \end{cases}$ 有正整数解, 所以 $m+2 = \pm 1$ 或 $m+2 = \pm 5$, 解得 $m = -3$ 或 $m =$

-1 或 $m = -7$ 或 $m = 3$. 当 $m = -3$ 时, $x = 5$, $y = -2$, 不合题意, 故舍去; 当 $m = -1$ 时, $x = 19$, $y = 8$, 符合题意; 当 $m = -7$ 时, $x = 25$, $y = 2$, 符合题意; 当 $m = 3$ 时, $x = -1$, $y = 4$, 不合题意, 故舍去. 综上所述, 整数 m 的值为 -1 或 -7 .

14. 解: (1) 因为 $\frac{x}{x^2-x+1} = \frac{1}{4}$, 所以

$$\frac{x^2-x+1}{x} = 4, \text{ 所以 } x-1+\frac{1}{x} = 4, \text{ 所以 } x +$$

$$\frac{1}{x} = 5.$$

(2) 令 $\frac{1}{5}a = \frac{1}{2}b = \frac{1}{3}c = k (k \neq 0)$, 则 $a =$

$$5k, b = 2k, c = 3k. \text{ 所以 } \frac{3b+4c}{2a} = \frac{6k+12k}{10k} =$$

$$\frac{18}{10} = \frac{9}{5}.$$

(3) **解法 1** 令 $\frac{yz}{bz+cy} = \frac{zx}{cx+az} = \frac{xy}{ay+bx} =$

$$\frac{1}{k} (k \neq 0), \text{ 所以 } \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = k \text{ ①}, \frac{c}{z} + \frac{a}{x} = k \text{ ②},$$

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = k \text{ ③}. \text{ ①} + \text{②} + \text{③}, \text{ 得 } 2\left(\frac{b}{y} + \frac{c}{z} + \frac{a}{x}\right) =$$

$$3k, \text{ 所以 } \frac{b}{y} + \frac{c}{z} + \frac{a}{x} = \frac{3}{2}k \text{ ④}. \text{ ④} - \text{①}, \text{ 得 } \frac{a}{x} =$$

$$\frac{1}{2}k; \text{ ④} - \text{②}, \text{ 得 } \frac{b}{y} = \frac{1}{2}k; \text{ ④} - \text{③}, \text{ 得 } \frac{c}{z} = \frac{1}{2}k. \text{ 所}$$

$$\text{以 } x = \frac{2a}{k}, y = \frac{2b}{k}, z = \frac{2c}{k}, \text{ 代入 } \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2} =$$

$$\frac{1}{k} \text{ 中, 得 } \frac{\frac{4}{k^2}(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2} = \frac{1}{k}, \text{ 所以 } \frac{4}{k^2} = \frac{1}{k}, \text{ 解}$$

$$\text{得 } k = 4. \text{ 所以 } x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}, z = \frac{c}{2}, \text{ 所以}$$

$$xyz = \frac{abc}{8} = \frac{7}{8}.$$

解法 2 因为 $\frac{yz}{bz+cy} = \frac{zx}{cx+az} = \frac{xy}{ay+bx}$,

$$\text{所以 } \frac{bz+cy}{yz} = \frac{cx+az}{zx} = \frac{ay+bx}{xy}, \text{ 所以 } \frac{b}{y} +$$

$$\frac{c}{z} = \frac{c}{z} + \frac{a}{x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{y}, \text{ 所以 } \frac{b}{y} = \frac{a}{x}, \frac{c}{z} = \frac{b}{y}, \text{ 所以}$$

$$x = \frac{ay}{b}, z = \frac{cy}{b}. \text{ 将其代入 } \frac{zx}{cx+az} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2},$$

$$\text{得 } \frac{\frac{cy}{b} \cdot \frac{ay}{b}}{\frac{acy}{b} + \frac{acy}{b}} = \frac{\frac{a^2y^2}{b^2} + y^2 + \frac{c^2y^2}{b^2}}{a^2+b^2+c^2}, \text{ 即 } \frac{y}{2b} = \frac{y^2}{b^2}, \text{ 所以}$$

$$y = \frac{b}{2}, \text{ 所以 } x = \frac{ab}{2b} = \frac{a}{2}, z = \frac{cb}{2b} = \frac{c}{2}, \text{ 所以}$$

$$xyz = \frac{abc}{8} = \frac{7}{8}.$$

巅峰训练 14 分式的加减 分式的乘除

1. C 2. A

3. B 提示: 因为 $M = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}, N = \frac{1}{a+1} +$

$$\frac{1}{b+1}, \text{ 所以 } M - N = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} - \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}\right) =$$

$$\frac{a-1}{a+1} + \frac{b-1}{b+1} = \frac{(a-1)(b+1) + (b-1)(a+1)}{(a+1)(b+1)} =$$

$$\frac{2ab-2}{(a+1)(b+1)}. \text{ 当 } ab=1 \text{ 时}, M-N=0, \text{ 所以 } M=N, \text{ 故}$$

① 正确; 当 $ab > 1$ 时, $2ab > 2$, 所以 $2ab - 2 > 0$, 当 $a < 0$, $b < 0$ 时, $(a+1)(b+1) > 0$ 或 $(a+1)(b+1) < 0$, 所以

$M - N > 0$ 或 $M - N < 0$, 所以 $M > N$ 或 $M < N$, 故②错误; 当 $ab < 1$ 时, a 和 b 可能同号, 也可能异号, 所以

$(a+1)(b+1) > 0$ 或 $(a+1)(b+1) < 0$, 而 $2ab - 2 < 0$, 所以 $M > N$ 或 $M < N$, 故③错误; 当 $a + b = 0$ 时, $M \cdot$

$$N = \left(\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}\right) \cdot \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}\right) = \frac{a}{(a+1)^2} +$$

$$\frac{a+b}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)^2} = \frac{a}{(a+1)^2} + \frac{b}{(b+1)^2} =$$

$$\frac{a(b+1)^2 + b(a+1)^2}{(a+1)^2(b+1)^2} = \frac{4ab}{(a+1)^2(b+1)^2}, \text{ 因为 } a \neq -1,$$

$b \neq -1$, 所以 $(a+1)^2 \cdot (b+1)^2 > 0$, 因为 $a + b = 0$, 所以 $ab \leq 0, M \cdot N \leq 0$, 故④正确.

4. $\frac{2}{5}$ 提示: 因为 $\frac{y}{x} - \frac{x}{y} = 2$, 所以 $\frac{y^2-x^2}{xy} = 2$,

所以 $(y+x)(y-x) = 2xy$. 因为 $x+y=2$, 所以 $y-x =$

$$x = xy, \text{ 原式} = \frac{-(y-x) + 3xy}{2xy + 3(y-x)} = \frac{-xy + 3xy}{2xy + 3xy} =$$

$$\frac{2xy}{5xy} = \frac{2}{5}.$$

5. $-\frac{17}{3}$ 或 $-\frac{1}{3}$ 提示: 因为 $\left| \frac{4a^2}{a^2-b^2} - \frac{a}{a+b} \right| =$

$$\left| \frac{4a^2}{(a+b)(a-b)} - \frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)} \right| = \left| \frac{3a^2+ab}{(a+b)(a-b)} \right| =$$

3, 所以 $\frac{3a^2+ab}{(a+b)(a-b)} = 3$ 或 $\frac{3a^2+ab}{(a+b)(a-b)} = -3$, 所以

$3a^2+ab=3(a^2-b^2)$ 或 $3a^2+ab=-3(a^2-b^2)$. 因为 a, b 均不为等于 0 的实数, 所以 $a=-3b$ ①, $ab=3b^2-6a^2$ ②.

把①代入 $\frac{2a^2-b^2}{ab}$, 得 $\frac{2(-3b)^2-b^2}{-3b^2} = \frac{17b^2}{-3b^2} = -\frac{17}{3}$; 把②

代入 $\frac{2a^2-b^2}{ab}$, 得 $\frac{2a^2-b^2}{3b^2-6a^2} = \frac{2a^2-b^2}{-3(2a^2-b^2)} = -\frac{1}{3}$. 综上

所述, 分式 $\frac{2a^2-b^2}{ab}$ 的值为 $-\frac{17}{3}$ 或 $-\frac{1}{3}$.

6. -1 提示: 由题意, 得 $m^2+2m=2, n=m-$

2, 所以原式 $= \frac{1}{m+1} + \frac{2}{m-2} = \frac{m-2+2m+2}{(m+1)(m-2)} =$

$$\frac{3m}{m^2-m-2} = \frac{3m}{m^2+2m-3m-2} = \frac{3m}{-3m} = -1.$$

7. $\frac{2}{2025} - \frac{2}{2026}$ 提示: 由题意, 得 $x^2-1=0, |xy|-$

$2=0$, 且 $x+1 \neq 0, y+2 \neq 0$, 所以 $x=1, y=2$. 所以原式

$$= \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{2025 \times 2026} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} +$$

$$\dots + \frac{1}{2025} - \frac{1}{2026} = 1 - \frac{1}{2026} = \frac{2025}{2026}.$$

8. (1) 1 1

(2) 1 证明: $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x+1} +$

$$\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1} = \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} = 1.$$

(3) 解: 原式 $= \left[f(2026) + f\left(\frac{1}{2026}\right) \right] +$

$$\left[f(2025) + f\left(\frac{1}{2025}\right) \right] + \dots + \left[f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) \right] +$$

$$f(1) = 2025 + \frac{1}{2} = 2025 \frac{1}{2}.$$

9. 解: (1) 2 1.5

(2) 甲两次买菜的均价为 $(3+2) \div 2 = 2.5$ (元/kg), 乙两次买菜的均价为 $(3+3) \div (1+1.5) = 2.4$ (元/kg).

答: 甲两次买菜的均价为 2.5 元/kg, 乙两次买菜的均价为 2.4 元/kg.

(3) $\bar{x}_甲 \geq \bar{x}_乙$. 理由如下:

$$\text{因为 } \bar{x}_甲 = \frac{ma+mb}{2m} = \frac{a+b}{2}, \bar{x}_乙 = \frac{2n}{\frac{n}{a} + \frac{n}{b}} =$$

$$\frac{2ab}{a+b}, \text{ 所以 } \bar{x}_甲 - \bar{x}_乙 = \frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{(a-b)^2}{2(a+b)} \geq$$

0, 所以 $\bar{x}_甲 \geq \bar{x}_乙$.

(4) $t_1 < t_2$. 理由如下:

$$\text{因为 } t_1 = \frac{2s}{v}, t_2 = \frac{s}{v+p} + \frac{s}{v-p} = \frac{2sv}{v^2-p^2},$$

$$\text{所以 } t_1 - t_2 = \frac{2s}{v} - \frac{2sv}{v^2-p^2} = \frac{-2sp^2}{v(v^2-p^2)}. \text{ 因为}$$

$s > 0, 0 < p < v$, 所以 $v^2 - p^2 > 0, -2sp^2 < 0$,

所以 $t_1 - t_2 < 0$, 所以 $t_1 < t_2$.

10. C 提示: 因为 $\frac{z}{x+y} + \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} = 12$, 所

$$\text{以 } 1 + \frac{z}{x+y} + 1 + \frac{x}{y+z} + 1 + \frac{y}{z+x} = 15, \text{ 即 } \frac{x+y+z}{x+y} +$$

$$\frac{x+y+z}{y+z} + \frac{x+y+z}{z+x} = 15, \text{ 所以 } \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} =$$

$$\frac{15}{x+y+z}. \text{ 因为 } \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = \frac{3}{4}, \text{ 所以 } \frac{15}{x+y+z} =$$

$$\frac{3}{4}, \text{ 所以 } x+y+z=20.$$

11. (1) ②③

(2) 证明: 因为 a, b 互为倒数, 所以 $ab =$

$$1, b = \frac{1}{a}, \text{ 所以 } \left| \frac{3a^2}{a^2+b} - \frac{a-2b^2}{a+b^2} \right| = \left| \frac{3a^2}{a^2+\frac{1}{a}} -$$

$$\frac{a-\frac{2}{a^2}}{a+\frac{1}{a^2}} \right| = \left| \frac{3a^3}{a^3+1} - \frac{a^3-2}{a^3+1} \right| = \left| \frac{3a^3-a^3+2}{a^3+1} \right| =$$

2, 所以分式 $\frac{3a^2}{a^2+b}$ 与 $\frac{a-2b^2}{a+b^2}$ 属于“友好分式组”.

(3) 解: 因为 $\left| \frac{3a^2}{a^2-4b^2} - \frac{a}{a+2b} \right| = \left| \frac{3a^2}{(a+2b)(a-2b)} - \frac{a(a-2b)}{(a+2b)(a-2b)} \right| = \left| \frac{3a^2 - a^2 + 2ab}{(a+2b)(a-2b)} \right| = \left| \frac{2a^2 + 2ab}{a^2 - 4b^2} \right|$, $\frac{3a^2}{a^2-4b^2}$ 与 $\frac{a}{a+2b}$ 属于“友好分式组”, 所以 $\left| \frac{2a^2 + 2ab}{a^2 - 4b^2} \right| = 2$, 所以 $2a^2 + 2ab = 2(a^2 - 4b^2)$ 或 $2a^2 + 2ab = -2(a^2 - 4b^2)$, 所以 $a = -4b$ 或 $ab = 4b^2 - 2a^2$. 所以 $\frac{a^2 - 2b^2}{ab} = \frac{16b^2 - 2b^2}{-4b^2} = -\frac{7}{2}$ 或 $\frac{a^2 - 2b^2}{ab} = \frac{a^2 - 2b^2}{4b^2 - 2a^2} = -\frac{1}{2}$. 所以分式 $\frac{a^2 - 2b^2}{ab}$ 的值为 $-\frac{7}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$.

巅峰训练 15 分式方程

1. B 2. C 3. D 4. D

5. B 提示: 设 $y^2 + 2 = a$, 则关于 y 的方程可化为 $\frac{3}{a} - \frac{2}{a-2} = 0$. 因为方程 $\frac{3}{x} - \frac{2}{x-2} = 0$ 的解为 $x = 6$, 所以 $a = 6$. 所以 $y^2 + 2 = 6$, 所以 $y = 2$ 或 $y = -2$.

6. A 提示: 分式方程去分母, 得 $(x+k)(x-1) - k(x+1) = x^2 - 1$, 解得 $x = 1 - 2k$. 根据题意, 得 $1 - 2k < 0$ 且 $1 - 2k \neq 1, 1 - 2k \neq -1$, 所以 $k > \frac{1}{2}$ 且 $k \neq 1$.

7. B 提示: 解不等式组 $\begin{cases} x - \frac{1}{4}(4a-2) \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{3x-1}{2} < x+2, \end{cases}$ 得

$\begin{cases} x \leq a, \\ x < 5. \end{cases}$ 因为原不等式组的解集是 $x \leq a$, 所以 $a < 5$. 因

为关于 y 的分式方程 $\frac{2y-a}{y-1} - \frac{y-4}{1-y} = 1$ 有非负整数解,

所以 $y = \frac{3+a}{2} \geq 0$, 且 $\frac{3+a}{2}$ 是整数, a 为整数, 所以 a 的值为 $-3, 3, -1, 1$. 经检验, 当 $a = -1$ 时, 原分式方程有增根, 故舍去. 所以所有符合条件的整数 a 的值的和为 1.

8. 6 或 $-\frac{3}{2}$ 提示: 解 $\frac{1}{x+2} + \frac{ax}{(x-1)(x+2)} = \frac{2}{x-1}$, 得 $x = \frac{5}{a-1}$. 因为分式方程有增根, 所以 $(x-1) \cdot (x+2) = 0$, 解得 $x_1 = 1, x_2 = -2$. 当 $x = 1$ 时, $a = 6$; 当 $x = -2$ 时, $a = -\frac{3}{2}$.

9. 20 提示: 设甲、乙两港相距 s km, 水流速度为 x km/h. 根据题意, 得 $\begin{cases} \frac{s}{8-x} : \frac{s}{8+x} = 2 : 1, \\ \frac{s}{8-2x} + \frac{s}{8+2x} = 9. \end{cases}$ 解得 $s = 20, x = \frac{8}{3}$. 经检验, $s = 20, x = \frac{8}{3}$ 是方程的解. 所以甲、乙两港相距 20 km.

10. 解: (1) 去分母, 得 $(x+1)^2 - (x^2 - 1) = 4$. 解得 $x = 1$. 经检验, $x = 1$ 是原方程的增根, 所以原方程无解.

(2) 去分母, 得 $(x-2)^2 + 4 = x^2 - 4$. 解得 $x = 3$. 经检验, $x = 3$ 是原方程的解.

11. 解: 去分母, 得 $2(x+2) + mx = x-1$. 去括号, 得 $2x + 4 + mx = x - 1$. 移项、合并同类项, 得 $(m+1)x = -5$. 因为原分式方程无解, 所以 $m+1=0$ 或 $x=1$ 或 $x=-2$. 当 $m+1=0$ 时, 解得 $m=-1$; 当 $x=1$ 时, $m+1=-5$, 解得 $m=-6$; 当 $x=-2$ 时, $-2(m+1)=-5$, 解得 $m=1.5$. 综上所述, m 的值是 -1 或 -6 或 1.5 .

12. 解: (1) 设乙队单独完成这项工程需要 x 天.

由题意, 得 $20 \cdot \frac{1}{x} + 36 \left(\frac{1}{120} + \frac{1}{x} \right) = 1$. 解得 $x = 80$. 经检验, $x = 80$ 是原分式方程的解.

答: 乙队单独完成这项工程需要 80 天.

(2) 由甲、乙两队全程合作完成更省钱. 理由如下:

由乙队单独完成所需费用为 $2.5 \times 80 = 200$ (万元); 甲队单独完成工期超过 90 天, 不

符合要求. 设甲、乙两队合作完成这项工程需 y 天. 由题意, 得 $(\frac{1}{120} + \frac{1}{80})y = 1$, 解得 $y = 48$, 所需费用为 $(1.5 + 2.5) \times 48 = 192$ (万元).

因为 $192 < 200$, 所以由甲、乙两队全程合作完成更省钱.

13. 解: (1) $-2 \quad -3$

(2) 由题意, 得 $mn = -5, m + n = -2$, 所以 $\frac{n}{m} + \frac{m}{n} = \frac{m^2 + n^2}{mn} = \frac{(m+n)^2 - 2mn}{mn} = -\frac{14}{5}$.

(3) 原方程整理, 得 $x - 2 - \frac{2k^2 + 3k}{x - 2} = -k - 3$, 所以 $x - 2 + \frac{k(-2k - 3)}{x - 2} = k + (-2k - 3)$, 所以 $x_1 - 2 = k, x_2 - 2 = -2k - 3$, 所以 $\frac{x_1 - 2}{x_2 + 1} = \frac{k}{-2k} = -\frac{1}{2}$.

14. $x = n + 3$ 或 $x = n + 4$ 提示: 由①, 得 $x + \frac{1 \times 2}{x} = 1 + 2$, 解得 $x = 1$ 或 $x = 2$. 由②, 得 $x + \frac{2 \times 3}{x} = 2 + 3$, 解得 $x = 2$ 或 $x = 3$. 由③, 得 $x + \frac{3 \times 4}{x} = 3 + 4$, 解得 $x = 3$ 或 $x = 4$. 故由 $x + \frac{n^2 + n}{x - 3} = 2n + 4$, 得 $(x - 3) + \frac{n(n + 1)}{x - 3} = n + (n + 1)$, 解得 $x - 3 = n$ 或 $x - 3 = n + 1$, 所以 $x = n + 3$ 或 $x = n + 4$.

第 10 章综合练(1)

1. B

2. B 提示: 因为 $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} = \frac{b+c}{b+c-a}$, 所以 $a(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}) = \frac{b+c}{b+c-a}$, 所以 $a \cdot \frac{b+c}{bc} = \frac{b+c}{b+c-a}$, 所以 $\frac{a}{bc} = \frac{1}{b+c-a}$, 所以 $ab + ac - a^2 - bc = 0$, 所以 $(ab - a^2) + (ac - bc) = 0$, 所以 $(b-a)(a-c) = 0$. 所以 $a = b$ 或 $a = c$. 因为 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边长, 所以 $\triangle ABC$ 是腰长为 a 的等腰三角形.

3. C 提示: 因为 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{7}{m+n}$, 所以 $\frac{m+n}{mn} =$

$\frac{7}{m+n}$, 所以 $(m+n)^2 = 7mn$, 所以 $m^2 + 2mn + n^2 = 7mn$, 所以 $m^2 + n^2 = 5mn$. 所以 $\frac{n}{m} + \frac{m}{n} = \frac{n^2 + m^2}{mn} = \frac{5mn}{mn} = 5$.

4. C 提示: 因为 $abc = 6$, 所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ac + ab}{abc} = \frac{bc + ac + ab}{6}$. 因为 $bc + ac + ab = \frac{1}{2}[(a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)]$, $a + b + c = 0$, 所以 $bc + ac + ab = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$. 因为 a, b, c 均不为 0, 所以 $a^2 + b^2 + c^2 > 0$, 所以 $bc + ac + ab < 0$, 所以 $\frac{bc + ac + ab}{6} < 0$, 即 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 的值是负数.

5. 1 **6. $\frac{1}{4}$**

7. 1 提示: 因为 $abc = 1$, 所以原式 $= \frac{a}{ab+a+1} + \frac{ab}{1+ab+a} + \frac{c}{ac+c+abc} = \frac{a}{ab+a+1} + \frac{ab}{1+ab+a} + \frac{1}{a+1+ab} = \frac{a+ab+1}{ab+a+1} = 1$.

8. $\frac{7}{3}$ 提示: 设乙单独做 x 天完成, 则乙每天完成总工作量的 $\frac{1}{x}$, 则甲每天完成总工作量的 $(\frac{1}{10} - \frac{1}{x})$.

根据题意, 得 $13(\frac{1}{10} - \frac{1}{x}) + 3 \cdot \frac{1}{x} = 1$, 解得 $x = \frac{100}{3}$. 经检验, $x = \frac{100}{3}$ 是所列方程的解. 所以 $\frac{1}{10} - \frac{1}{x} = \frac{7}{100}$. 所以

$\frac{7}{\frac{100}{3}} = \frac{7}{3}$, 即甲的工作效率是乙的 $\frac{7}{3}$ 倍.

9. 3 提示: 因为 $\frac{xy}{x+y} = \frac{1}{a^3 - b^3}$, 所以 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a^3 - b^3$ ①. 同理可得 $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = a^3$ ②, $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = a^3 + b^3$ ③. 由① + ② + ③, 得 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{2}a^3$. 又因为 $\frac{xyz}{xy+yz+zx} = \frac{2}{81}$, 即 $\frac{xy+yz+zx}{xyz} = \frac{81}{2}$, 所以 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} +$

$\frac{1}{z} = \frac{81}{2}$. 所以 $\frac{3}{2}a^3 = \frac{81}{2}$, 解得 $a=3$.

10. 解: 因为 $\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} =$

$$\frac{A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)} =$$

$$\frac{(A+B+C)x^2 + (A+2B-C)x - 2A}{x(x-1)(x+2)} =$$

$$\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}, \text{ 所以 } \begin{cases} A+B+C=0, \\ A+2B-C=2, \\ -2A=3. \end{cases} \text{ 解得}$$

$$\begin{cases} A = -\frac{3}{2}, \\ B = \frac{5}{3}, \\ C = -\frac{1}{6}. \end{cases} \text{ 所以 } A, B, C \text{ 的值分别为 } -\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{6}.$$

$$-\frac{1}{6}.$$

11. 解: 原式 = $\left[\frac{x-1}{x(x+1)} - \frac{x-3}{(x+1)(x-1)} \right] \div$

$$\frac{2x^2+x+1-x^2+x}{x(x-1)} = \frac{(x-1)^2 - (x-3)x}{x(x+1)(x-1)}.$$

$$\frac{x(x-1)}{x^2+2x+1} = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

因为分式分母不为 0, 所以 $x \neq 0, x \neq \pm 1$. 所以令 $x=2$, 则原式 =

$$\frac{1}{(2+1)^2} = \frac{1}{9} \text{ (答案不唯一).}$$

12. (1) $\frac{a-c}{(a-b)(a-c)(b-c)}$

$$\frac{a-b}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$\frac{(b-c) - (a-c) + a-b}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

(2) 解: 当 $r=2$ 时, $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} +$

$$\frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = 1. \text{ 证明如下:}$$

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} =$$

$$\frac{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} =$$

$$\frac{a^2b - a^2c + b^2c - b^2a + c^2a - c^2b}{(a-b)(a-c)(b-c)} =$$

$$\frac{a^2b - a^2c + b^2c - b^2a + c^2a - c^2b}{(a^2 - ac - ba + bc)(b-c)} =$$

$$\frac{a^2b - a^2c + b^2c - b^2a + c^2a - c^2b}{a^2b - a^2c - abc + ac^2 - b^2a + abc + b^2c - bc^2} = 1.$$

(3) 6 072 提示: 当 $r=3$ 时, $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} +$

$$\frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} = a+b+c. \text{ 令 } a=2\ 025,$$

$$b=2\ 024, c=2\ 023, \text{ 则 } \frac{2\ 025^3}{(2\ 025-2\ 024)(2\ 025-2\ 023)} +$$

$$\frac{2\ 024^3}{(2\ 024-2\ 023)(2\ 024-2\ 025)} + \frac{2\ 023^3}{(2\ 023-2\ 025)(2\ 023-2\ 024)} =$$

$$\frac{2\ 025^3}{2} - 2\ 024^3 + \frac{2\ 023^3}{2} = 2\ 025 + 2\ 024 + 2\ 023 =$$

6 072.

13. (1) $a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$

(2) 解: 因为 $a - \frac{1}{a} = 2$, 所以 $a^3 - \frac{1}{a^3} =$

$$\left(a - \frac{1}{a}\right) \cdot \left(a^2 + 1 + \frac{1}{a^2}\right) = \left(a - \frac{1}{a}\right) \left[\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 +$$

$$3\right] = 2 \times (4+3) = 14.$$

(3) 82 提示: 因为 $a - \frac{1}{a} = 2$, 所以 $a^2 + \frac{1}{a^2} =$

$$\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 2 = 6, \text{ 所以 } a^4 + \frac{1}{a^4} = \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 - 2 = 34.$$

$$\text{所以 } a^5 - \frac{1}{a^5} = \left(a - \frac{1}{a}\right) \left(a^4 + a^3 \cdot \frac{1}{a} + a^2 \cdot \frac{1}{a^2} + a \cdot \frac{1}{a^3} +$$

$$\frac{1}{a^4}\right) = \left(a - \frac{1}{a}\right) \left(a^4 + \frac{1}{a^4} + a^2 + \frac{1}{a^2} + 1\right) = 82.$$

14. 解: (1) A

(2) 由题意, 得 $\frac{-n}{x} + 1 = -\frac{1}{3} + n$, 解得

$$x = \frac{n}{\frac{4}{3} - n} = \frac{3n}{4-3n}, \text{ 所以 } \frac{3n}{4-3n} =$$

$$\frac{1}{-n + \left(-\frac{1}{3} + n\right)} = -3, \text{ 解得 } n=2.$$

(3) 由题意,得 $\frac{2m+k}{x}+1=-k$, 解得 $x=-\frac{2m+k}{k+1}$, 所以 $-\frac{2m+k}{k+1}=\frac{1}{2m+k+(-k)}=\frac{1}{2m}$. 当 $m \neq -\frac{1}{2}$ 时, 解得 $k=-\frac{4m^2+1}{2m+1}$. 代入 $kx-2m+1=\frac{-4m}{2m+1}x$ 并化简, 得 $(2m-1)^2x=(1-2m)(1+2m)$. 因为 $m \neq \frac{1}{2}$, 解得 $x=-\frac{2m+1}{2m-1}=-1-\frac{2}{2m-1}$. 因为关于 x 的方程 $kx-2m+1=\frac{-4m}{2m+1}x$ 有整数解, 且 m 为整数, 所以 $2m-1=\pm 1$ 或 ± 2 , 即 $2m-1=1$ 或 $2m-1=-1$ 或 $2m-1=2$ 或 $2m-1=-2$, 解得 $m=1$ 或 $m=0$ 或 $m=\frac{3}{2}$ (舍去) 或 $m=-\frac{1}{2}$ (舍去). 因为 $m \neq 0$, 所以 $m=1$.

第 10 章综合练(2)

1. D 2. C 3. C

4. A 提示: 解不等式组 $\begin{cases} \frac{x}{3}-2 \leq \frac{1}{4}(x-7), \\ 6x-2a > 5(1-x), \end{cases}$ 得

$\frac{2a+5}{11} < x \leq 3$. 因为原不等式组有且仅有三个整数解,

所以 $0 \leq \frac{2a+5}{11} < 1$, 解得 $-\frac{5}{2} \leq a < 3$. 因为关于 y 的分

式方程 $\frac{1-2y}{y-1}-\frac{a}{1-y}=-3$ 的解为正数, 所以 $y=2-a$

$a > 0$, 即 $a < 2$. 经检验, 当 $y=2-a=1$, 即 $a=1$ 时, 原

分式方程有增根. 所以 a 的取值范围是 $-\frac{5}{2} \leq a < 2$ 且

$a \neq 1$. 所以所有满足条件的整数 a 的值之和是 $(-2)+(-1)+0=-3$.

5. 3

6. $x=-3$ 提示: 整理, 得 $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+8}+\frac{1}{x+8}-\frac{1}{x+11}\right)=$

$\frac{1}{3(x-1)}-\frac{1}{24}$, 所以 $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+11}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{8}$, 即 $\frac{1}{x+11}=\frac{1}{8}$, 解得 $x=-3$. 经检验, $x=-3$ 是原分式方程的解.

7. 3 提示: 设该河水流的速度为 x km/h, 游泳者在静水中的速度为 a km/h, 则游泳者自桥 A 逆流游了 $\frac{1}{3}(a-x)$ km, 他再返回追到水壶用了 $\frac{2+\frac{1}{3}(a-x)}{a+x}$ h,

这个时间比水壶在遗失后漂流时间 $\frac{2}{x}$ h 少 $\frac{1}{3}$ h. 由此可

列出方程 $\frac{2+\frac{1}{3}(a-x)}{a+x}=\frac{2}{x}-\frac{1}{3}$, 解得 $x=3$. 经检验, $x=3$ 是原方程的解.

8. 7 提示: 因为 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{10}{9}$, 所以 $\frac{9}{a+b}+\frac{9}{b+c}+\frac{9}{c+a}=10$. 因为 $a+b+c=9$, 所以 $a=9-(b+c)$, $b=9-(a+c)$, $c=9-(a+b)$. 所以 $\frac{c}{a+b}+$

$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}=\frac{9-(a+b)}{a+b}+\frac{9-(b+c)}{b+c}+\frac{9-(a+c)}{c+a}=\frac{9}{a+b}-1+\frac{9}{b+c}-1+\frac{9}{c+a}-1=7$.

9. 解: 原式 $=\left[\frac{2x(x+1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{x(x-1)}{(x-1)^2}\right] \cdot \frac{x+1}{x}=\frac{x}{x-1} \cdot \frac{x+1}{x}=\frac{x+1}{x-1}$.

(1) 当 $x=1+\sqrt{2}$ 时, 原式 $=\frac{1+\sqrt{2}+1}{1+\sqrt{2}-1}$

$=1+\sqrt{2}$.

(2) 不能. 理由如下:

若原代数式的值等于 -1 , 则 $\frac{x+1}{x-1}=-1$.

去分母, 得 $x+1=-x+1$, 解得 $x=0$. 因为分式的分母不为 0, 所以原代数式中, $x \neq \pm 1$, $x \neq 0$. 所以原代数式的值不可能等于 -1 .

10. 解: (1) 方程两边同乘 $(x-3)$, 得 $3x+5(x-3)=-m$. 因为原方程有增根, 所以

$x-3=0$, 解得 $x=3$. 当 $x=3$ 时, $m=-9$, 故 m 的值为 -9 .

(2) 方程两边同乘 $(x-3)$, 得 $3x+5(x-3)=-m$. 因为原方程的根为 $x=-1$, 所以 $m=23$, 故 m 的值为 23 .

(3) 解方程, 得 $x=\frac{15-m}{8}$. 因为方程的三个根中两个根的和等于第三个根, 所以 $\frac{15-m_1}{8}+\frac{15-m_2}{8}=\frac{15-m_3}{8}$. 整理, 得 $m_3=m_1+m_2-15$, 故三个 m 的值只需满足 $m_1 \neq -9, m_2 \neq -9, m_3 \neq -9$, 且 $m_3=m_1+m_2-15$ 即可. 例如: $m_1=12, m_2=6, m_3=3$ (答案不唯一).

11. (1) $<$

$$(2) \frac{n+a}{m+a} < \frac{n}{m} < \frac{n+a}{m+a}$$

证明: 两式相减, 得 $\frac{n+a}{m+a} - \frac{n}{m} = \frac{mn+ma-mn-an}{m(m+a)} = \frac{(m-n)a}{m(m+a)}$. 因为 $m > n > 0, a > 0$, 所以 $\frac{(m-n)a}{m(m+a)} > 0$, 所以 $\frac{n+a}{m+a} > \frac{n}{m}$.

(3) 证明: 由题意, 可得 $x > 0, y > 0, z > 0$, $\frac{x+x}{x+y+z} > \frac{x}{y+z}, \frac{y+y}{x+y+z} > \frac{y}{x+z}, \frac{z+z}{x+y+z} > \frac{z}{x+y}$. 所以 $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} < \frac{2x}{x+y+z} + \frac{2y}{x+y+z} + \frac{2z}{x+y+z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2$. 因为 $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} > \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{z}{x+y+z} = \frac{x+y+z}{x+y+z} = 1$, 所以 $1 < \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} < 2$.

12. 解: (1) 由 $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}$, 知 $x \neq 0$, 所以

$$\frac{x^2+1}{x} = 2, \text{ 即 } x + \frac{1}{x} = 2. \text{ 所以 } \frac{x^4+1}{x^2} = x^2 +$$

$$\frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 2^2 - 2 = 2, \text{ 所以 } \frac{x^2}{x^4+1} \text{ 的值为 } 2 \text{ 的倒数, 即 } \frac{1}{2}.$$

为 2 的倒数, 即 $\frac{1}{2}$.

(2) 由 $\frac{x}{x^2-x+1} = \frac{1}{7}$, 知 $x \neq 0$, 所以

$$\frac{x^2-x+1}{x} = 7, \text{ 所以 } x-1 + \frac{1}{x} = 7, \text{ 即 } x + \frac{1}{x} =$$

$$8. \text{ 所以 } \frac{x^4-x^2+1}{x^2} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 -$$

$$3 = 8^2 - 3 = 61, \text{ 所以 } \frac{x^2}{x^4-x^2+1} \text{ 的值为 } 61 \text{ 的倒}$$

数, 即 $\frac{1}{61}$.

(3) 由 $\frac{xy}{x+y} = 2$, 知 $x \neq 0, y \neq 0$, 所以

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{2}, \text{ 即 } \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \text{ ①. 由 } \frac{yz}{y+z} = \frac{4}{3}, \text{ 知}$$

$$y \neq 0, z \neq 0, \text{ 所以 } \frac{y+z}{yz} = \frac{3}{4}, \text{ 即 } \frac{1}{z} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4} \text{ ②.}$$

$$\text{由 } \frac{zx}{z+x} = \frac{4}{3}, \text{ 知 } z \neq 0, x \neq 0, \text{ 所以 } \frac{z+x}{zx} = \frac{3}{4}, \text{ 即}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{3}{4} \text{ ③. ①+②+③, 得 } 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}. \text{ 所以 } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1, \text{ 所以}$$

$$\frac{xy+yz+zx}{xyz} = \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1, \text{ 所以}$$

$\frac{xyz}{xy+yz+zx}$ 的值为 1 的倒数, 即 1.

第 11 章 二次根式

巅峰训练 16 二次根式的概念

1. D 2. A

3. A 提示: $a=2\ 024 \times 2\ 026 - 2\ 024 \times 2\ 025 = 2\ 024 \times (2\ 026 - 2\ 025) = 2\ 024$. 因为 $b^2 = 2\ 027^2 - 4 \times$

$2\ 026 = (2\ 026 + 1)^2 - 4 \times 2\ 026 = 2\ 026^2 - 2 \times 2\ 026 + 1 = (2\ 026 - 1)^2 = 2\ 025^2$, 所以 $b = 2\ 025$. 因为 $\sqrt{2\ 025^2 + 25} > \sqrt{2\ 025^2}$, 所以 $c > b > a$.

4. B 提示: 由新运算定义, 得 $\langle x - 1 \rangle = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = 2$, 解得 $x = 3$ 或 $x = -1$, 所以①错误; 因为 $\sqrt{(x-5)^2} + \sqrt{2^2} + \sqrt{(x+3)^2} = |x-5| + 2 + |x+3| > 8$, 所以②错误; 易得 a, b, c 的“新运算操作”结果为 $|a+b| + |a+c| + |b+c|$, 当 $a+b \geq 0, a+c \geq 0, b+c \geq 0$ 时, 原式 $= a+b+a+c+b+c = 2a+2b+2c$, 当 $a+b \geq 0, a+c \geq 0, b+c \leq 0$ 时, 原式 $= a+b+a+c-b-c = 2a$, 当 $a+b \geq 0, a+c \leq 0, b+c \geq 0$ 时, 原式 $= a+b-a-c+b+c = 2b$, 当 $a+b \geq 0, a+c \leq 0, b+c \leq 0$ 时, 原式 $= a+b-a-c-b-c = -2c$, 当 $a+b \leq 0, a+c \geq 0, b+c \geq 0$ 时, 原式 $= -a-b+a+c+b+c = 2c$, 当 $a+b \leq 0, a+c \geq 0, b+c \leq 0$ 时, 原式 $= -a-b+a+c-b-c = -2b$, 当 $a+b \leq 0, a+c \leq 0, b+c \geq 0$ 时, 原式 $= -a-b-a-c+b+c = -2a$, 当 $a+b \leq 0, a+c \leq 0, b+c \leq 0$ 时, 原式 $= -a-b-a-c-b-c = -2a-2b-2c$, 所以③正确.

5. $2x+6$ 提示: 由题意, 可得 $2x+5 \geq 0$ 且 $2-x \geq 0$, 所以 $-\frac{5}{2} \leq x \leq 2$, 所以 $x-3 < 0$. 所以原式 $= 2x+5-(2-x)+3-x = 2x+5-2+x+3-x = 2x+6$.

6. (1) 3 (2) 6 (3) 10 (4) 15

(5) 21 (6) $\frac{n(n+1)}{2}$

7. -1 或 0 提示: 因为 $\sqrt{(m+1)^2} = m+1$, 所以 $m+1 \geq 0$, 解得 $m \geq -1$. 所以 $-1 \leq m < \frac{2\sqrt{5}}{5}$. 所以整数 $m = -1$ 或 $m = 0$.

8. 2 提示: 因为 $x^2 + y^2 = 1$, 所以 $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$. 因为 $\sqrt{xy-2x+y-2} = \sqrt{(x+1)(y-2)}$, 其中 $y-2 < 0$, 所以 $x+1 \leq 0$, 即 $x \leq -1$. 因为 $-1 \leq x \leq 1$, 所以 $x = -1$, 所以 $y = 0$. 所以原式 $= \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x+1)(y-2)} = 2+0=2$.

9. 8 提示: 因为 $y = \sqrt{\frac{200}{n}} = \sqrt{\frac{100 \times 2}{n}}$, 且 n 为

正整数, y 是大于 1 的整数, 所以 y 的最小值是 2, 此时 $n = 50$. 当 $n = 2$ 时, y 取得最大值, 最大值是 10, 所以 y 的最大值与 y 的最小值的差为 $10 - 2 = 8$.

10. 4 提示: 因为 $m-2 \geq 0$, 所以 $m \geq 2$, 所以 $4-2m \leq 0$. 原式可化为 $(n-2)^2 + \sqrt{(m-2)n^2} = 0$. 因为 $(n-2)^2 \geq 0, \sqrt{(m-2)n^2} \geq 0$, 所以 $\begin{cases} n-2=0, \\ (m-2)n^2=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} n=2, \\ m=2. \end{cases}$ 所以 $m+n=4$.

11. $m \geq 9$ 提示: 根据题意, 得 $x^2 - 6x + m \geq 0$, 即 $(x-3)^2 - 9 + m \geq 0$. 因为 $(x-3)^2 \geq 0$, 所以 $-9 + m \geq 0$, 所以 $m \geq 9$.

12. 解: 因为原等式可变形为 $\sqrt{a^2 - 3a + 1} + (b-1)^2 = 0$, 所以 $\begin{cases} a^2 - 3a + 1 = 0, \\ b = 1. \end{cases}$ 由 $a^2 - 3a + 1 = 0$, 得 $a + \frac{1}{a} = 3$. 两边平方, 得 $a^2 + \frac{1}{a^2} = 7$. 所以原式 $= 7 - 1 = 6$.

13. 解: 因为 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三边长, 所以 $b+c > a, a+b > c, a+c > b$, 所以原式 $= |a-b-c| + |c-a-b| + |b-a-c| = b+c-a+a+b-c+a+c-b = a+b+c$.

14. 解: 由题意可得, $x - 2\ 026 \geq 0$, 则 $x \geq 2\ 026$, 那么 $2\ 025 - x < 0$. 原方程可化为 $x - 2\ 025 + \sqrt{x - 2\ 026} = x$, 则 $\sqrt{x - 2\ 026} = 2\ 025$, 两边平方, 得 $x - 2\ 026 = 2\ 025^2$, 所以 $x - 2\ 025^2 = 2\ 026$.

15. (1) 4

(2) n

(3) 证明: 设 $m < n$. 因为 m, n 是连续的正整数, 所以 $n = m + 1$. 因为 $q = mn$, 所以 $q - m = mn - m = m(m+1) - m = m(m+1-1) = m^2$, 所以任意两个连续正整数的乘积与较小数的差也为某个正数的平方.

(4) 奇数 提示: 因为 m, n 是两个连续正整数,

且 $m < n$, 所以 $n = m + 1, q = mn = m(m + 1) = m^2 + m$, 所以 $p = \sqrt{q+n} + \sqrt{q-m} = \sqrt{m^2+m+m+1} + \sqrt{m^2+m-m} = \sqrt{(m+1)^2} + \sqrt{m^2}$. 因为 m 是正整数, 所以 $m > 0, m+1 > 0$, 所以 $p = \sqrt{(m+1)^2} + \sqrt{m^2} = m + 1 + m = 2m + 1$, 所以 p 一定是奇数.

16. 解: (1) 由题意, 得 $\begin{cases} a-2 \geq 0, \\ 2-a \geq 0, \end{cases}$ 所以 $a=2$, 所以 $b=1$, 所以 $a+b=2+1=3$.

(2) 原式 $= (1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (1 + \frac{1}{2025} - \frac{1}{2026}) = 1 \times 2025 + 1 - \frac{1}{2026} = 2025 \frac{2025}{2026}$.

巅峰训练 17 二次根式的乘除 二次根式的加减(1)

1. D

2. B 提示: $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{\frac{2024}{2025}}}{\sqrt{\frac{2025}{2026}}} = \frac{\sqrt{2024 \times 2026}}{2025} =$

$$\frac{\sqrt{(2025-1) \times (2025+1)}}{2025} = \frac{\sqrt{2025^2-1}}{2025} < 1.$$

3. A

4. D 提示: 原式 $= (\sqrt{3}-2)^{2025} \cdot (\sqrt{3}+2)^{2025} \cdot (\sqrt{3}+2) = (3-4)^{2025} \cdot (\sqrt{3}+2) = -\sqrt{3}-2$.

5. A 提示: 因为 $(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x) = x^2+1-x^2=1, (\sqrt{y^2+1}+y)(\sqrt{y^2+1}-y) = y^2+1-y^2=1, (\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{y^2+1}+y) = 1$, 所以 $\begin{cases} \sqrt{x^2+1}-x = \sqrt{y^2+1}+y \textcircled{1}, \\ \sqrt{y^2+1}-y = \sqrt{x^2+1}+x \textcircled{2}. \end{cases}$ ①+②, 得 $-x-y = x+y$, 所以 $2(x+y) = 0$, 所以 $x+y = 0$.

6. A 提示: 因为 $\sqrt{275} = 5\sqrt{11}$, 设 $\sqrt{x} = a\sqrt{11}, \sqrt{y} = b\sqrt{11}$, 所以 $a+b=5$. 因为 a, b 是正整数, 所以 $a=1, b=4$ 或 $a=2, b=3$ 或 $a=3, b=2$ 或 $a=4, b=1$. 因为 $x=11a^2, y=11b^2$, 所以 $x+y=11(a^2+b^2) = 11 \times 13 = 143$ 或 $x+y=11(a^2+b^2) = 11 \times 17 = 187$.

7. 2 提示: 因为 $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 所以原式 $= x^2(x^2+2x+1)+1 = x^2(x+1)^2+1 = (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2 \times (\frac{\sqrt{5}-1}{2}+1)^2 + 1 = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4} \times \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4} + 1 = \frac{[(\sqrt{5}-1) \times (\sqrt{5}+1)]^2}{16} + 1 = \frac{4^2}{16} + 1 = 2$.

8. -9 提示: 由 $m=1+\sqrt{2}$, 得 $(m-1)^2=2$, 即 $m^2-2m=1$, 故 $7m^2-14m=7$. 同理可得 $3n^2-6n=3$. 代入已知等式, 得 $(7+a) \times (3-7) = 8$, 解得 $a = -9$.

9. $2\sqrt{a}$ 提示: 原式 $= a+2\sqrt{a}-a = 2\sqrt{a}$.

10. 4 提示: 因为 a 是 $\sqrt{3}$ 的小数部分, 所以 $a = \sqrt{3}-1$, 所以 $a^2+2a+2 = (a+1)^2+1 = 4$.

11. $2\sqrt{6}$ 提示: 易知 $\triangle BCN$ 与 $\triangle ADM$ 全等, $\triangle AEM$ 与 $\triangle CFN$ 全等, 所以两组三角形的面积分别相等. 又因为 $\square DFNM$ 与 $\square BEMN$ 的面积也相等, 所以题图中阴影部分的面积是矩形面积的一半. 因为矩形面积为 $2\sqrt{3} \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{6}$, 所以阴影部分的面积为 $2\sqrt{6}$.

12. $<$ 提示: 因为 $\sqrt{2026} - \sqrt{2025} = \frac{1}{\sqrt{2026} + \sqrt{2025}}, \sqrt{2024} - \sqrt{2023} = \frac{1}{\sqrt{2024} + \sqrt{2023}}$, 且 $\frac{1}{\sqrt{2026} + \sqrt{2025}} < \frac{1}{\sqrt{2024} + \sqrt{2023}}$, 所以 $\sqrt{2026} - \sqrt{2025} < \sqrt{2024} - \sqrt{2023}$.

13. 解: (1) 原式 $= -\frac{2}{b} \cdot \frac{2}{3} \times 3 \cdot \sqrt{ab^5 \cdot a^2b \cdot \frac{a}{b}} = -\frac{4}{b} \sqrt{a^4b^5} = -\frac{4}{b} \times a^2b^2 \cdot \sqrt{b} = -4a^2b\sqrt{b}$.

(2) 原式 $= -6 \times \frac{\sqrt{2(a-b)}}{c} \div \frac{4\sqrt{a-b}}{5c\sqrt{2b}} \times \frac{\sqrt{b}}{5\sqrt{c}} = -\frac{6\sqrt{2} \times \sqrt{a-b}}{c} \times \frac{5\sqrt{2} \cdot c \cdot \sqrt{b}}{4\sqrt{a-b}} \times \frac{\sqrt{b}}{5\sqrt{c}} =$

$$-\frac{3b\sqrt{c}}{c}.$$

$$(3) \text{ 原式} = \frac{n}{m} \cdot \left(-\frac{1}{m}\right) \cdot \sqrt{\frac{n}{3n^3} \cdot \frac{n^3}{m^3} \cdot \frac{2n^3}{n}} =$$

$$-\frac{n}{m^2} \sqrt{\frac{2n^3}{3m^3}} = -\frac{n}{m^2} \cdot \frac{|n|}{3m^2} \cdot \sqrt{6mn} =$$

$$\pm \frac{n^2 \sqrt{6mn}}{3m^4}.$$

14. 解: (1) 原式 $= [(\sqrt{5} + \sqrt{6})^2 - (\sqrt{7})^2] \cdot$
 $[(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{6} - \sqrt{5})^2] = (5 + 6 + 2\sqrt{30} - 7) \cdot$
 $(7 - 6 + 2\sqrt{30} - 5) = (4 + 2\sqrt{30}) \cdot (-4 +$
 $2\sqrt{30}) = 120 - 16 = 104.$

(2) 设原式 $= x,$

$$\text{则 } \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{7}}{\sqrt{3 \times 5} + \sqrt{5 \times 7} + \sqrt{3 \times 7} + \sqrt{5 \times 5}} =$$

$$\frac{\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{7}}{(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{5} + \sqrt{7})} = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} =$$

$$\frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2},$$

$$\text{从而 } x = \frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{2}.$$

(3) 因为 $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} =$
 $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} =$
 $\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}},$ 所以原式 $= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) +$
 $\dots + \left(\frac{1}{\sqrt{99}} - \frac{1}{\sqrt{100}}\right) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}.$

15. 解: (1) 把 $g = 10 \text{ m/s}^2, h = 15 \text{ m}$ 代入
 $v = \sqrt{2gh},$ 得 $v = \sqrt{2 \times 10 \times 15} = \sqrt{300} =$
 $10\sqrt{3} \text{ (m/s)},$ 所以该物品落地时的速度为
 $10\sqrt{3} \text{ m/s}.$

(2) 不正确. 理由如下:

因为小明家所住楼层的高度是小亮家的

2 倍, 所以小明家所住楼层的高度 $h_1 = 2 \times$
 $15 = 30 \text{ (m)},$ 将 h_1 的值代入公式, 得从小明家
 坠落的物品落地时速度 $v_1 = \sqrt{2 \times 10 \times 30} =$
 $10\sqrt{6} \text{ (m/s)}.$ 因为 $\frac{10\sqrt{6}}{10\sqrt{3}} = \sqrt{2} \neq 2,$ 即从小明家
 坠落的物品落地时的速度是从小亮家坠落的
 物品速度的 $\sqrt{2}$ 倍, 而不是 2 倍, 因此, 小明的说
 法不正确.

16. 解: (1) ① $\sqrt{2} + 1$ ② $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$

(2) 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, 由勾股定理, 得
 $AC^2 + BC^2 = AB^2,$ 即 $(\sqrt{3})^2 + BC^2 = (4 -$
 $\sqrt{3})^2,$ 所以 $BC = \sqrt{16 - 8\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 2.$

巅峰训练 18 二次根式的乘除 二次根式的加减(2)

1. C

2. B 提示: 因为当 $n = \sqrt{2}$ 时, $n(n+1) = \sqrt{2} \times$
 $(\sqrt{2} + 1) = 2 + \sqrt{2},$ 且 $2 + \sqrt{2} < 15,$ 所以将 $n = 2 + \sqrt{2}$ 再次
 输入, 得 $n(n+1) = (2 + \sqrt{2})(2 + \sqrt{2} + 1) = 8 + 5\sqrt{2} >$
 $8 + 7 = 15,$ 所以输出结果是 $8 + 5\sqrt{2}.$

3. C

4. D 提示: $(\sqrt{17} + 4)^{2 \cdot 025} \cdot (\sqrt{17} - 4)^{2 \cdot 026} =$
 $(\sqrt{17} + 4)^{2 \cdot 025} \cdot (\sqrt{17} - 4)^{2 \cdot 025} \cdot (\sqrt{17} - 4) = [(\sqrt{17} +$
 $4) \cdot (\sqrt{17} - 4)]^{2 \cdot 025} \cdot (\sqrt{17} - 4) = 1 \cdot (\sqrt{17} - 4) =$
 $\sqrt{17} - 4.$

5. B 提示: 因为 $3 > 2,$ 所以 $3 \ast 2 = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$ 因
 为 $8 < 12,$ 所以 $8 \ast 12 = \sqrt{8} + \sqrt{12} = 2(\sqrt{2} + \sqrt{3}).$ 所以
 $(3 \ast 2) \times (8 \ast 12) = (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \times 2(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 2.$

6. C 提示: 原式 $= (7 + 4\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^2 + (2 +$
 $\sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) + \sqrt{3} = (7 + 4\sqrt{3})(7 - 4\sqrt{3}) + 4 - 3 + \sqrt{3} =$
 $49 - 48 + 1 + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}.$

7. 0

8. $-2\sqrt{3}$ 提示: 因为 $ab = 3 > 0,$ 所以 a, b 同

号. 因为 $a+b=-6<0$, 所以 $a<0, b<0$. 所以原式 $= -(-a)\sqrt{\frac{b}{a}} - (-b)\sqrt{\frac{a}{b}} = -\sqrt{(-a)^2 \frac{b}{a}} - \sqrt{(-b)^2 \frac{a}{b}} = -\sqrt{ab} - \sqrt{ab} = -2\sqrt{3}$.

9. 2 提示: 因为 $x = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2 = 2n+1-2\sqrt{n(n+1)}$, $y = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = (\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2 = 2n+1+2\sqrt{n(n+1)}$, 所以 $x+y=4n+2, xy=1$. 将 $xy=1$ 代入 $21x^2-33xy+21y^2=2025$, 得 $21x^2-33+21y^2=2025$. 化简, 得 $x^2+y^2=98$. 因为 $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=98+2=100$, 所以 $x+y=10$. 所以 $4n+2=10$, 解得 $n=2$.

10. -2 提示: 因为 $(\sqrt{x-1}-\frac{1}{\sqrt{x-1}})^2 = x-1-2+\frac{1}{x-1} = x+\frac{1}{x-1}-3$, $x+\frac{1}{x-1}=7$, 所以 $(\sqrt{x-1}-\frac{1}{\sqrt{x-1}})^2=4$. 因为 $1<x<2$, 所以 $\sqrt{x-1}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}<0$, 所以 $\sqrt{x-1}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}=-2$.

11. 解: 原式 $= 2+2\sqrt{6}+3-2\sqrt{6}=5$.

12. 解: 原式 $= (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2}-1)^2 = 3 - (2-2\sqrt{2}+1) = 3-2+2\sqrt{2}-1 = 2\sqrt{2}$.

13. 解: 原式 $= \frac{4-2\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = 2-\sqrt{3}+\sqrt{2}+1+\sqrt{3}-\sqrt{2}=3$.

14. 解: 原式 $= \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{(2\sqrt{a}+\sqrt{b})(2\sqrt{a}-\sqrt{b})}{2\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}+2\sqrt{a}-\sqrt{b} = 3\sqrt{a}$. 因为 $a^2+a^2b^2-4ab+b^2+1=0$, 所以 $(a-b)^2+(ab-1)^2=0$, 所以 $a-b=0, ab-1=0$. 由题中分式隐含的条件可知, a, b 都是正数, 所以 $a=b=1$. 所以原式 $= 3$.

15. 解: (1) 设 $x = \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}$. 两

边平方, 得 $x^2 = (\sqrt{4+\sqrt{7}})^2 + (\sqrt{4-\sqrt{7}})^2 - 2\sqrt{(4+\sqrt{7})(4-\sqrt{7})}$, 即 $x^2 = 4+\sqrt{7}+4-\sqrt{7}-6$, 所以 $x^2=2$, 所以 $x = \pm\sqrt{2}$. 因为 $\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} > 0$, 所以 $\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{2}$.

(2) 同(1)可得 $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{2}, \sqrt{6+3\sqrt{3}} - \sqrt{6-3\sqrt{3}} = \sqrt{6}$. 由条件, 得 $a = \sqrt{2}-1, b = \sqrt{6}-2$, 所以原式 $= \frac{2}{\sqrt{6}-2} - \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \sqrt{2} = \frac{2(\sqrt{6}+2)}{6-4} - (\sqrt{2}+1) + \sqrt{2} = \sqrt{6}+1$.

16. 解: (1) 1 2

(2) 因为 $x>4$, 所以 $x-4>0$, 所以 $\frac{1}{x-4} + (x-4) \geq 2\sqrt{\frac{1}{x-4} \cdot (x-4)} = 2$, 所以 $y = \frac{1}{x-4} + x = \frac{1}{x-4} + (x-4) + 4 \geq 6$, 当且仅当 $\frac{1}{x-4} = x-4$ 时, 等号成立, 所以 $x-4 = \pm 1$, 解得 $x=5$ 或 $x=3$. 经检验 $x=5, x=3$ 是分式方程的解. 因为 $x>4$, 所以 $x=5$. 所以当 $x=5$ 时, 函数 $y = \frac{1}{x-4} + x (x>4)$ 的值最小, 最小值是 6.

(3) 设每间隔离区与墙平行的边长为 m m, 所用钢丝网长度为 w m, 则与墙垂直的边长为 $\frac{24}{m}$ m.

由题意, 得 $w = 6m + 9 \times \frac{24}{m} = \frac{216}{m} + 6m$.

所以 $\frac{216}{m} + 6m \geq 2\sqrt{\frac{216}{m} \times 6m} = 72$, 当且仅当 $\frac{216}{m} = 6m$ 时, 等号成立, 即 $6m^2 = 216$, 解得 $m=6$ 或 $m=-6$ (不合题意, 舍去), 所以 $m=6$, 此时 $\frac{24}{m} = 4, w = 72$.

答: 当每间隔离区的长、宽分别为 6 m、

4 m 时,所用钢丝网长度最短,最短长度是 72 m.

第 11 章综合练(1)

1. A 2. D 3. C

4. B 提示:原式 $= x\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} - 4x\sqrt{x} = -x\sqrt{x}$. 又因为 $x \geq 0$, 所以 $-x\sqrt{x} \leq 0$.

5. A 提示:因为 $a+b=-4, ab=1$, 所以 $a < 0, b < 0$, 所以 $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{ab}}{-b} + \frac{\sqrt{ab}}{-a} = \frac{a\sqrt{ab} + b\sqrt{ab}}{-ab} = \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{-ab} = \frac{-4}{-1} = 4$.

6. B 提示:根据题意,可知 $x-1 \geq 0$ 且 $x-2 \neq 0$, 解得 $x \geq 1$ 且 $x \neq 2$, 故①正确;由 $N^2 - M^2 = 1$, 得 $\frac{x^2-5x+7}{(x-2)^2} - \frac{x-1}{(x-2)^2} = 1$, 解得 $x=2$, 经检验, $x=2$ 是增根, 所以原方程无解, 故②不正确;根据题意, 得 $N^2 + M^2 = \frac{x^2-5x+7}{(x-2)^2} + \frac{x-1}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+6}{(x-2)^2} = 1 + \frac{2}{(x-2)^2}$, 因为 $M^2 + N^2$ 是一个整数, 所以 $(x-2)^2 = 1$ 或 $(x-2)^2 = 2$, 解得 $x=3$ 或 $x=1$ 或 $x=2+\sqrt{2}$ 或 $x=2-\sqrt{2}$, 因为 x 为无理数, 且 $x-1 \geq 0$, 所以 $x=2+\sqrt{2}$, 故③不正确.

7. < 提示:因为 $(\sqrt{11})^2 = 11, (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 = 8 + 2\sqrt{15}$, 所以 $11 - (8 + 2\sqrt{15}) = 3 - 2\sqrt{15} < 0$, 所以 $\sqrt{11} < \sqrt{5} + \sqrt{3}$.

8. $m < k < n$

9. $2a$ 提示:因为 $-1 < a < 0$, 所以 $-\frac{1}{a} > 1, \frac{1}{a} < -1$, 所以 $a + \frac{1}{a} < -1, a - \frac{1}{a} > 0$. 所以原式 $= \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2} - \sqrt{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2} = a - \frac{1}{a} - \left[-\left(a + \frac{1}{a}\right)\right] = 2a$.

10. 3 提示:因为 $1 \leq a \leq 2$, 所以 $0 \leq a-1 \leq 1$, 所以 $m = \sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}} = \sqrt{a-1+2\sqrt{a-1}+1} + \sqrt{a-1-2\sqrt{a-1}+1} = \sqrt{a-1} + 1 + 1 - \sqrt{a-1} = 2$, 所以 $\sqrt{m^3+1} = \sqrt{2^3+1} = 3$.

11. 解:(1) 原式 $= \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

(2) 原式 $= 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$.

(3) 原式 $= (2\sqrt{6} - \frac{\sqrt{6}}{6}) \div \sqrt{3} = \frac{11\sqrt{2}}{6}$.

(4) 原式 $= 3 - 6\sqrt{2} + 6 - (4 - 5) = 10 - 6\sqrt{2}$.

12. 解:由 $3\sqrt{x} + 4\sqrt{y} = 16$, 得 $\sqrt{x} = \frac{16-4\sqrt{y}}{3}$, 所以 $16-4\sqrt{y} \geq 0$, 解得 $\sqrt{y} \leq 4$. 又因为 $\sqrt{y} \geq 0$, 所以 $0 \leq \sqrt{y} \leq 4$. 因为 $m = 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 4 \times \frac{16-4\sqrt{y}}{3} - 3\sqrt{y} = \frac{64-25\sqrt{y}}{3}$, 所以当 $\sqrt{y} = 0$ 时, $m_{\text{最大值}} = \frac{64}{3}$, 当 $\sqrt{y} = 4$ 时, $m_{\text{最小值}} = -12$. 所以 m 的取值范围是 $-12 \leq m \leq \frac{64}{3}$.

13. 解:(1) 因为 $\sqrt{m-3} + \sqrt{2-n} = 0$, 所以 $m-3=0, 2-n=0$, 解得 $m=3, n=2$. 所以 $\frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

(2) 所拼成的平行四边形的示意图, 如下图所示.

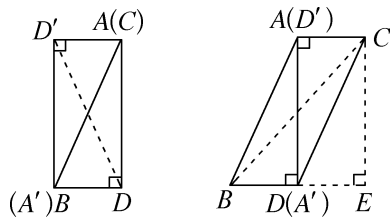


图 1

图 2

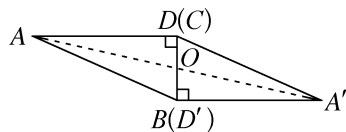


图 3

如图 1, $AB = m = 3$, 拼成的平行四边形为

矩形, 对角线的长均为 3.

如图 2, $BD = \frac{n}{2} = 1, BE = n = 2$. 对角线

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{m^2 - \frac{n^2}{4}} = 2\sqrt{2}, BC = \sqrt{BE^2 + CE^2} = \sqrt{BE^2 + AD^2} = 2\sqrt{3}.$$

如图 3, $OD = \frac{1}{2}BD = \frac{n}{4} = \frac{1}{2}$. 对角线

$$BD = \frac{n}{2} = 1, AA' = 2OA = 2\sqrt{AD^2 + OD^2} = \sqrt{33}.$$

14. 解: (1) 因为 $\sqrt{13} - \sqrt{15} = \frac{(\sqrt{13} - \sqrt{15})(\sqrt{13} + \sqrt{15})}{\sqrt{13} + \sqrt{15}} = -\frac{2}{\sqrt{13} + \sqrt{15}}$,

$$\sqrt{11} - \sqrt{13} = \frac{(\sqrt{11} - \sqrt{13})(\sqrt{11} + \sqrt{13})}{\sqrt{11} + \sqrt{13}} =$$

$$-\frac{2}{\sqrt{11} + \sqrt{13}}, \sqrt{13} + \sqrt{15} > \sqrt{11} + \sqrt{13}, \text{ 所以}$$

$$\sqrt{13} - \sqrt{15} > \sqrt{11} - \sqrt{13}.$$

(2) 0 大 1 提示: 由题意, 得 $1+x \geq 0, x \geq 0$, 所以 $x \geq 0$, 所以 $y = \sqrt{1+x} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{x})}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}$. 当

$x=0$ 时, 分母 $\sqrt{1+x} + \sqrt{x}$ 的最小值是 1, 所以当 $x=0$ 时, y 有最大值, 最大值为 1.

(3) 由题意, 得 $1-x \geq 0, 1+x \geq 0, x \geq 0$, 所以 $0 \leq x \leq 1$. 由 (2) 可知, $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} - \sqrt{x} = \sqrt{1-x} + \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}$, 当 $x=0$

时, 分母 $\sqrt{1+x} + \sqrt{x}$ 的最小值是 1, 所以 $y = \sqrt{1-x} + \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}$ 的最大值是 2; 当 $x=1$

时, 分母 $\sqrt{1+x} + \sqrt{x}$ 的最大值是 $\sqrt{2} + 1$, 所以 $y = \sqrt{1-x} + \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}$ 的最小值是 $\sqrt{2} - 1$,

所以 $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$ 的最大值为 2, 最小值为 $\sqrt{2} - 1$.

15. 解: (1) $\frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})} = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}.$

(2) $4 - \sqrt{15} > \sqrt{17} - 4$. 理由如下:

$$4 - \sqrt{15} = \frac{(4 - \sqrt{15})(4 + \sqrt{15})}{4 + \sqrt{15}} = \frac{1}{4 + \sqrt{15}},$$

$$\sqrt{17} - 4 = \frac{(\sqrt{17} - 4)(\sqrt{17} + 4)}{\sqrt{17} + 4} = \frac{1}{\sqrt{17} + 4}.$$
 因为

$$4 + \sqrt{15} < 4 + \sqrt{17}, \text{ 所以 } \frac{1}{4 + \sqrt{15}} > \frac{1}{4 + \sqrt{17}}, \text{ 即}$$

$$4 - \sqrt{15} > \sqrt{17} - 4.$$

(3) 因为 $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-7} = 5, (\sqrt{x-2} + \sqrt{x-7})(\sqrt{x-2} - \sqrt{x-7}) = 5$. 所以 $\begin{cases} \sqrt{x-2} + \sqrt{x-7} = 5, \\ \sqrt{x-2} - \sqrt{x-7} = 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} \sqrt{x-2} = 3, \\ \sqrt{x-7} = 2. \end{cases}$ 所以

$x-2=9, x-7=4$, 所以 $x=11$. 检验: $x=11$ 时, $x-2 > 0, x-7 > 0$, 符合题意. 所以原方程的解为 $x=11$.

第 11 章综合练(2)

1. C

2. A 提示: 由题意知 $P = \sqrt{\left(\frac{4049}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4049}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{4049}{2} - \frac{1}{2}\right)} = \sqrt{2025 \times 2024}, Q = \sqrt{2025^2 - 2 \times 2025 + 1} = \sqrt{(2025-1)^2} = \sqrt{2024^2}$. 因为 $2025 \times 2024 > 2024^2$, 所以 $P > Q$.

3. A 提示: 由三角形三边关系, 可知 $2 < k < 4$, 所以 $1 < 9-2k < 5, 1 < 2k-3 < 5$, 所以原式 $= |9-2k| - \sqrt{(2k-3)^2} = 9-2k-2k+3 = 12-4k$.

4. A 5. C

6. C 提示: 因为 $\sqrt{300} = 10\sqrt{3}$, 且 x, y 均为正整数, 所以 \sqrt{x}, \sqrt{y} 化为最简根式后应与 $\sqrt{3}$ 为同类二次根式, 所以有以下三种情况: $\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = \sqrt{3} + 9\sqrt{3} =$

$$4\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 7\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 10\sqrt{3}. \text{ 所以 } \begin{cases} x_1=3, \\ y_1=27, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2=48, \\ y_2=12, \end{cases} \begin{cases} x_3=147, \\ y_3=3. \end{cases} \text{ 所以共有三组正整数解.}$$

7. D 提示: 因为 $a+b=2\sqrt{a}+4\sqrt{b}-5$, 所以 $(a-2\sqrt{a}+1)+(b-4\sqrt{b}+4)=0$, 所以 $(\sqrt{a}-1)^2+(\sqrt{b}-2)^2=0$. 因为 $(\sqrt{a}-1)^2 \geq 0, (\sqrt{b}-2)^2 \geq 0$, 所以 $\sqrt{a}=1, \sqrt{b}=2$, 所以 $a=1, b=4$, 所以 $a+2b=9$.

8. $a \leq \frac{1}{2}$

9. $-\sqrt{2}$ 提示: 因为 $a+\frac{1}{a}=4$, 所以 $(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}})^2=a-2+\frac{1}{a}=2$, 所以 $\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}=\pm\sqrt{2}$. 因为 $0 < a < 1$, 所以 $\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}} < 0$. 所以 $\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}=-\sqrt{2}$.

10. 25 或 16 提示: 因为 $\sqrt{a^2-6a+9}+|b-4|=\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}$, $\begin{cases} x-3 \geq 0, \\ 3-x \geq 0, \end{cases}$ 解得 $x=3$, 所以 $\sqrt{a^2-6a+9}+|b-4|=0$, 所以 $a^2-6a+9=0, b-4=0$, 解得 $a=3, b=4$. ①若 a, b 为直角边, 则该直角三角形的斜边长的平方为 $3^2+4^2=25$. ②若 4 为斜边, 则该直角三角形的斜边长的平方为 16.

11. 19 提示: 根据 $\sqrt{2000}=20\sqrt{5}, \sqrt{1999} < 20\sqrt{5}$, 所以在 $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{1999}$ 这 1999 个式子中, 与 $\sqrt{2000}$ 可以合并的有 $\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, 3\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, \dots, 19\sqrt{5}$, 共 19 个.

12. 2 提示: 因为 $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$, 所以 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2, a+b-2\sqrt{ab}=8-2\sqrt{15}$. 因为 $\sqrt{ab}=\sqrt{15}$, 所以 $a+b=8$, 所以 $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=8^2-4 \times (\sqrt{15})^2=4$. 因为 $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{5}-\sqrt{3} > 0$, 所以 $a > b$, 所以 $a-b > 0$. 所以 $a-b=2$.

13. 0 提示: 因为 $\sqrt{(a-2)b^2} \geq 0, b^2 \geq 0$, 所以 $a-2 \geq 0$, 所以 $a \geq 2$, 所以 $|2a-3| \geq 1$. 因为 $|b+2| \geq 0, \sqrt{(a-2)b^2} \geq 0, |2a-3|+|b+2|+\sqrt{(a-2)b^2}=1$, 所以 $|2a-3|=1, |b+2|=0, \sqrt{(a-2)b^2}=0$. 所以 $a=2, b=-2$. 所以 $a+b=0$.

14. $5-2\sqrt{6}$ 或 $-5-2\sqrt{6}$ 提示: 由 $a+2\sqrt{6}$ 是整数可知, a 是含有 $-2\sqrt{6}$ 的代数式. 设 $a=m-2\sqrt{6}$, 所以 $\frac{1}{a}-2\sqrt{6}=\frac{1}{m-2\sqrt{6}}-2\sqrt{6}=\frac{m+2\sqrt{6}}{m^2-(2\sqrt{6})^2}-2\sqrt{6}$.

因为 $\frac{1}{a}-2\sqrt{6}$ 是整数, 所以 $m^2-(2\sqrt{6})^2=1$, 解得 $m=5$ 或 $m=-5$, 所以 a 的值为 $5-2\sqrt{6}$ 或 $-5-2\sqrt{6}$.

15. 123 提示: 因为 $m=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, n=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, 所以 $m+n=1, mn=-1$. 所以 $m^2+n^2=(m+n)^2-2mn=3, m^4+n^4=(m^2+n^2)^2-2(mn)^2=7, m^8+n^8=(m^4+n^4)^2-2(mn)^4=47, m^3+n^3=(m+n)^3-3mn(m+n)=4$, 所以 $m^6+n^6=(m^3+n^3)^2-2(mn)^3=18$. 因为 $(m^8+n^8)(m^2+n^2)=m^{10}+n^{10}+m^8n^2+m^2n^8=m^{10}+n^{10}+(mn)^2(m^6+n^6)$, 所以 $m^{10}+n^{10}=(m^8+n^8)(m^2+n^2)-(mn)^2(m^6+n^6)=47 \times 3 - 1 \times 18=123$.

16. 解: (1) 根据已知算式可知, $x < 0, y < 0$, 所以原式 $=\frac{1}{3} \times (-4) \times 6 \sqrt{\left(-\frac{x^2}{y}\right) \cdot \left(-\frac{y^2}{x}\right) \cdot x^3 y} = -8\sqrt{x^4 y^2} = -8x^2 \cdot (-y) = 8x^2 y$.

(2) 原式 $=\sqrt{6}-3-2\sqrt{6}+\sqrt{6}-3=-6$.

17. 解: (1) $\sqrt{1-\frac{11}{36}}=\sqrt{\frac{25}{36}}=\frac{5}{6}$

(2) $\sqrt{1-\frac{2n+1}{(n+1)^2}}=\frac{n}{n+1}$ 证明如下: 因为 $(n+1)^2=n^2+2n+1$, 所以 $\sqrt{1-\frac{2n+1}{(n+1)^2}}=\sqrt{\frac{(n+1)^2-(2n+1)}{(n+1)^2}}=\sqrt{\frac{n^2}{(n+1)^2}}$. 因为 n 是正整数, 所以 $\sqrt{1-\frac{2n+1}{(n+1)^2}}=\frac{n}{n+1}$.

(3) 由题意, 得

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(1-\frac{3}{4}\right)\left(1-\frac{5}{9}\right)\left(1-\frac{7}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{89}{2025}\right)} = \\ & \sqrt{1-\frac{3}{4}} \times \sqrt{1-\frac{5}{9}} \times \sqrt{1-\frac{7}{16}} \times \cdots \times \sqrt{1-\frac{89}{2025}} = \\ & \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{44}{45} = \frac{1}{45}. \end{aligned}$$

18. (1) ①如图1, $\angle POQ = 45^\circ$.

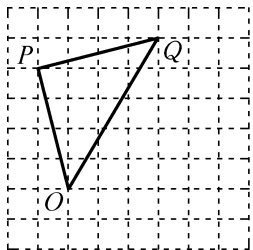


图 1

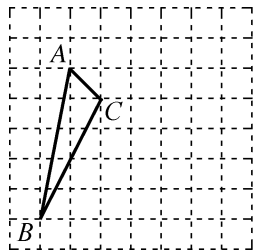


图 2

②如图 2, 构造 $AB = \sqrt{5^2+1^2} = \sqrt{26}$, $AC = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{2^2+4^2} = 2\sqrt{5}$. 因为 $AB - AC < BC$, 所以 $\sqrt{26} - \sqrt{2} < 2\sqrt{5}$.

(2) 如图 3, 设边 EF 上的高为 h , 由勾股定理, 得 $EF = \sqrt{1^2+4^2} = \sqrt{17}$. 因为 $\triangle DEF$ 的面积 $= 3 \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times 1 \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = \frac{1}{2} EF \cdot h$, 所以 $\frac{\sqrt{17}}{2} h = 5$, 所以 $h = \frac{10\sqrt{17}}{17}$,

即边 EF 上的高的长是 $\frac{10\sqrt{17}}{17}$.

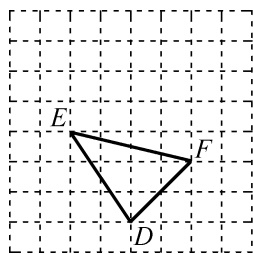


图 3

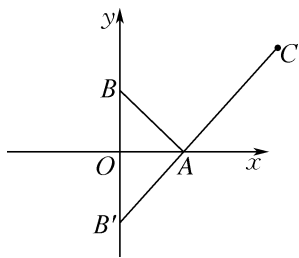


图 4

(3) 6 提示: 因为点 (a, b) 是一次函数 $y = -2x + 3\sqrt{2}$ 图象上一点, 所以 $-2a + 3\sqrt{2} = b$, 所以 $b = 3\sqrt{2} - 2a$, 所以 $\sqrt{4a^2+2} + \sqrt{b^2+8} = \sqrt{4a^2+2} + \sqrt{(3\sqrt{2}-2a)^2+8} = \sqrt{(2a-0)^2+(0-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2a-3\sqrt{2})^2+(0-2\sqrt{2})^2}$, 所以 $\sqrt{4a^2+2}$ 看作是点 $A(2a, 0)$ 到点 $B(0, \sqrt{2})$ 的距离, $\sqrt{(2a-3\sqrt{2})^2+8}$ 看作是点 $A(2a, 0)$ 到点 $C(3\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ 的距离, 所以 $\sqrt{4a^2+2} + \sqrt{b^2+8} = AB + AC$, 即 $\sqrt{4a^2+2} + \sqrt{b^2+8}$ 的最小值就是 $AB + AC$ 的最小值. 如图 4, 作点 B 关于 x 轴的对称点 $B'(0, -\sqrt{2})$, 连接 $B'C$ 交 x 轴于点 A , 此

时 $AB + AC$ 的值最小, 为 $B'C$ 的长, 所以 $B'C = \sqrt{(3\sqrt{2}-0)^2+(2\sqrt{2}+\sqrt{2})^2} = 6$, 所以 $\sqrt{4a^2+2} + \sqrt{b^2+8}$ 的最小值是 6.

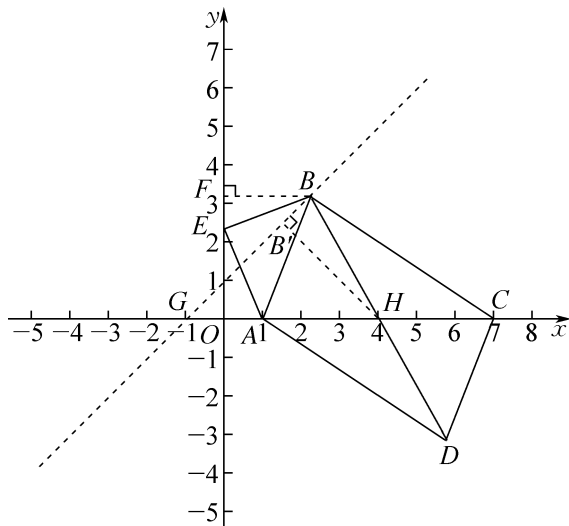
期末综合练(1)

1. D 2. B 3. C

4. $\frac{1}{5}$ 提示: 设第三个因式为 $2x + c$, 则 $(2x +$

$c)(x-1)(x+2) = (2x+c)(x^2+x-2) = 2x^3+2x^2-4x+cx^2+cx-2c = 2x^3+(2+c)x^2+(-4+c)x-2c$, 所以 $-2c = -6, -4+c = b, 2+c = a$, 所以 $c = 3, b = -1, a = 5$, 所以 $a^b = 5^{-1} = \frac{1}{5}$.

5. $5\sqrt{2}$ 提示: 如图, 过点 B 作 $BF \perp y$ 轴于点 F , 设 BD 与 AC 的交点为 H , 设点 $E(0, m)$, 则 $EO = m$. 易证 $\triangle EBF \cong \triangle AEO$, 所以 $BF = EO = m, EF = AO = 1$, 所以点 $B(m, m+1)$, 所以点 B 在直线 $y = x + 1$ 上运动. 易知直线 $y = x + 1$ 与 x 轴所夹锐角为 45° . 设直线 $y = x + 1$ 与 x 轴的交点为 G , 则点 $G(-1, 0)$. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 所以 $BH = HD = \frac{1}{2}BD, AH = HC$, 所以点 $H(4, 0)$. 当 BH 长取得最小值时, BD 长取得最小值. 由垂线段最短, 可得当 $BH \perp$ 直线 $y = x + 1$ 时, BH 长取得最小值, 最小值为 $B'H$ 的长, 所以 $\angle B'GH = \angle B'HG = 45^\circ$, 所以 $B'G = B'H$, 所以 $GH = \sqrt{2}B'H = 4 - (-1) = 5$, 所以 $B'H = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. 所以 BD 长的最小值为 $5\sqrt{2}$.



6. $\frac{81}{16}$ 提示:连接 BE, FH . 由题意,得 $AB =$

4 cm, $DE = EF = BF = DB = 3$ cm, $GH = HI$. 因为

$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABE} + S_{\triangle BCE}$, 所以 $\frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot DE +$

$\frac{1}{2}BC \cdot EF$, 即 $4BC = 12 + 3BC$, 所以 $BC = 12$ cm, 所以

$FC = BC - BF = 9$. 因为 $S_{\triangle EFC} = S_{\triangle EFH} + S_{\triangle FHC}$, 所以

$\frac{1}{2}EF \cdot FC = \frac{1}{2}EF \cdot GH + \frac{1}{2}FC \cdot HI$, 即 $27 =$

$3GH + 9HI$, 所以 $GH = HI = \frac{9}{4}$ cm, 所以题图中阴影

部分的面积为 $\frac{81}{16}$ cm^2 .

7. $\frac{1}{2}$ 提示:如图,过点 P 作 $PH \perp BC$ 于点 P ,

且 $PH = PC$, 连接 MH, CN . 易证 $\triangle MPH \cong \triangle NPC$,

所以 $MH = NC$. 因为 E, F 分别为 PN, PC 的中点, 所

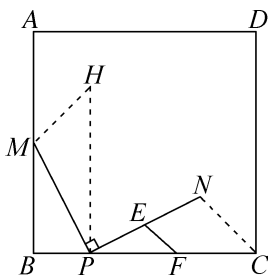
以 $EF = \frac{1}{2}NC$, 所以当 NC 的长取得最小值时, EF 的

长取得最小值, 即 MH 的长取得最小值时, EF 的长取

得最小值. 当 $MH \perp AB$ 时, MH 的长取得最小值, 此

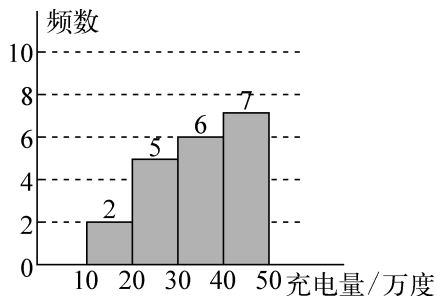
时, 四边形 $BPHM$ 是矩形, 所以 $MH = BP = 1$, 所以

MH 长的最小值为 1. 所以 EF 长的最小值为 $\frac{1}{2}$.



8. 解:(1) 5 0.35 20

(2) 补全直方图如下:



(3) 108°

(4) 因为 $500 \times 0.35 = 175$ (个), 所以估计第一季度充电量在 $40 \leq x \leq 50$ 万度的充电桩数量为 175 个.

9. (1) 证明:如图 1, 过点 B 作 $BG \parallel EF$ 交 CD 于点 G , 交 AM 于点 H . 因为四边形 $ABCD$ 为正方形, 所以 $\angle ABC = \angle C = 90^\circ$, $AB \parallel CD$, $AB = BC$, 所以 $\angle ABG + \angle CBG = \angle ABC = 90^\circ$. 由条件可知, 四边形 $BGFE$ 是平行四边形, 所以 $BG = EF$. 因为 $EF \perp AM$, $BG \parallel EF$, 所以 $\angle AHB = \angle ANE = 90^\circ$, 所以 $\angle ABG + \angle BAM = 90^\circ$, 所以 $\angle BAM = \angle CBG$, 所以 $\triangle ABM \cong \triangle BCG$ (ASA), 所以 $AM = BG$, 所以 $AM = EF$.

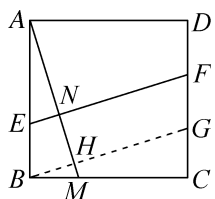


图 1

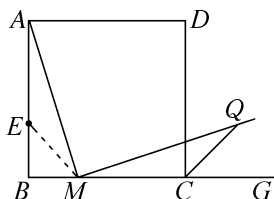


图 2

(2) 证明:如图 2, 在边 BA 上截取 BE , 使 $BE = BM$, 连接 ME . 由条件可知, $\angle ABC = \angle C = 90^\circ$, $AB = BC$, 所以 $\angle AMB + \angle BAM = 90^\circ$. 因为 $BE = BM$, 所以 $\angle BEM = \angle BME = 45^\circ$, $AB - BE = BC - BM$, 即 $AE = MC$, 所以 $\angle AEM = 180^\circ - \angle BEM = 135^\circ$. 因为 CQ 是正方形 $ABCD$ 的外角 $\angle DCG$ 的平分线, 所以 $\angle DCQ = 45^\circ$, 所以 $\angle MCQ = 135^\circ$, 所以 $\angle AEM = \angle MCQ$. 由条件可知, $\angle AMQ = 90^\circ$, 所以 $\angle AMB + \angle CMQ = 90^\circ$, 所以 $\angle EAM = \angle CMQ$, 所以 $\triangle AEM \cong \triangle MCQ$ (ASA), 所以 $AM = MQ$.

(3) 解:如图 3, 过点 F 作 $FG \perp AB$, 垂足为 G , 连接 GD , 易证四边形 $ADFG$ 为矩形, 所以 $AF = GD$. 因为 $AM \perp EF$, $FG \perp AB$, 所以

$\angle BAM + \angle AEN = 90^\circ = \angle GFE + \angle AEN$,
所以 $\angle BAM = \angle GFE$. 在 $\triangle FGE$ 和 $\triangle ABM$

中, $\begin{cases} \angle FGE = \angle ABM, \\ \angle GFE = \angle BAM, \\ GF = AB, \end{cases}$ 所以 $\triangle FGE \cong \triangle ABM$

(AAS), 所以 $GE = BM = 1$. 将线段 ME 向上
平移 1, 得到 QG , 作点 Q 关于 AB 的对称点
 Q' , 连接 GQ' . 因为 $ME + AF = GQ + GD =$
 $GQ' + GD$, 所以当点 D, G, Q' 三点共线时(如图
所示), $ME + AF$ 的值最小, 最小值为 $Q'D$ 的
长. 因为 $Q'D = \sqrt{(1+4)^2 + 3^2} = \sqrt{34}$, 所以
 $ME + AF$ 的最小值为 $\sqrt{34}$.

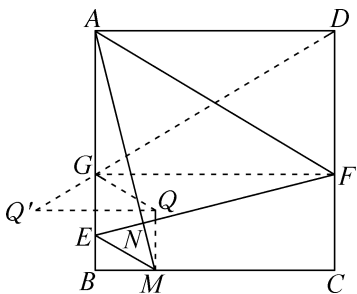


图 3

10. 解: (1) 2

(2) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 根据勾股定理, 得
 $AC = 5$. 根据旋转的性质, 得 $BE = AB$. 过点 B
作 $BM \perp AC$ 于点 M , 所以 $AE = 2AM$. 根据等
面积法, 得 $BM = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{12}{5}$. 在 $\text{Rt}\triangle ABM$

中, 根据勾股定理, 得 $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} =$
 $\sqrt{3^2 - (\frac{12}{5})^2} = \frac{9}{5}$. 所以 $AE = \frac{18}{5}$, 所以 $S_{\triangle BCE} =$

$$S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot BC - \frac{1}{2} AE \cdot BM = \frac{1}{2} \times$$

$$3 \times 4 - \frac{1}{2} \times \frac{18}{5} \times \frac{12}{5} = \frac{42}{25}.$$

(3) $AE \perp CG$. 理由如下:

设 AE, BC 交于点 P , AE, CG 交于点 Q .
由旋转的性质, 得 $\angle ABE = \angle CBG$, $AB =$

$BE, BC = BG$, 所以 $\angle BAE = \frac{1}{2} (180^\circ -$
 $\angle ABE)$, $\angle BCG = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle CBG)$, 所以
 $\angle BAE = \angle BCG$. 因为 $\angle APB = \angle CPE$, 所以
 $\angle CQP = \angle ABC = 90^\circ$, 所以 $AE \perp CG$.

连接 AC, EG . 由旋转的性质, 得 $BE =$
 $AB = 3, BG = BC = 4, EG = AC = 5$. 在 $\text{Rt}\triangle AQC$
中, 由勾股定理, 得 $AQ^2 + CQ^2 = AC^2 = 25$. 在
 $\text{Rt}\triangle GQE$ 中, 由勾股定理, 得 $GQ^2 + EQ^2 =$
 $EG^2 = 25$. 在 $\text{Rt}\triangle CQE$ 中, 由勾股定理, 得
 $CE^2 = CQ^2 + EQ^2$. 在 $\text{Rt}\triangle AQC$ 中, 由勾股定
理, 得 $AG^2 = AQ^2 + GQ^2$, 所以 $CE^2 + AG^2 =$
 $CQ^2 + EQ^2 + AQ^2 + GQ^2 = AC^2 + EG^2 = 50$.

(4) $S_{\triangle BCE} + S_{\triangle ABG}$ 的最大值为 12.

提示: 延长 AB 至点 E' , 使 $BE' = BE$, 连接 GE' , 过
点 G 作 $GH \perp AB$ 交 AB 的延长线于点 H . 因为
 $\angle EBG = \angle CBE' = 90^\circ$, 所以 $\angle CBE = \angle GBE'$. 由旋转
的性质, 得 $BC = BG$, 所以 $\triangle BCE \cong \triangle BGE'$, 所以
 $S_{\triangle BCE} = S_{\triangle BGE'}$. 又因为 $AE' = AB + BE' = 6$, 所以 $S_{\triangle BCE} +$
 $S_{\triangle ABG} = S_{\triangle AEG} = \frac{1}{2} AE' \cdot GH = 3GH$. 要使 $S_{\triangle BCE} +$
 $S_{\triangle ABG}$ 的值最大, 则需 GH 的长最大. 在 $\text{Rt}\triangle BHG$ 中,
 $BG > GH$, 所以当 $BG \perp AB$ 且与 BC 反向共线时, GH
取得最大值, 此时 $GH = BG = 4$. 所以 $S_{\triangle BCE} + S_{\triangle ABG}$ 的
最大值为 $3 \times 4 = 12$.

期末综合练(2)

1. C 提示: $\frac{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$, 所以 ① 错误;

$\frac{1}{5 - \sqrt{5}} = \frac{5 + \sqrt{5}}{(5 - \sqrt{5})(5 + \sqrt{5})} = \frac{5 + \sqrt{5}}{25 - 5} = \frac{5 + \sqrt{5}}{20}$, 所以 ② 正

确; 因为 $\frac{b}{\sqrt{4} - \sqrt{3}} - \frac{c}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} = \frac{b(\sqrt{4} + \sqrt{3})}{(\sqrt{4} - \sqrt{3})(\sqrt{4} + \sqrt{3})} -$

$\frac{c(\sqrt{4} - \sqrt{3})}{(\sqrt{4} + \sqrt{3})(\sqrt{4} - \sqrt{3})} = (2 + \sqrt{3})b - (2 - \sqrt{3})c = \sqrt{3}(b + c) +$

$(2b - 2c)$, 所以 $b + c = 4, 2b - 2c = 4$, 所以 $b - 3c = 0$, 即
 $b = 3c$, 所以 ③ 错误; 因为 $(\sqrt{43 - m} - \sqrt{11 - m}) \cdot$

$(\sqrt{43-m} + \sqrt{11-m}) = 43 - m - (11 - m) = 32$, 而 $\sqrt{43-m} - \sqrt{11-m} = 4$, 所以 $4(\sqrt{43-m} + \sqrt{11-m}) = 32$, 所以 $\sqrt{43-m} + \sqrt{11-m} = 8$, 所以④正确.

2. D 提示: 因为 $PQ \parallel AB, AP \parallel BQ$, 所以四边形 $ABQP$ 是平行四边形, 所以 $AP = BQ$, 所以点 Q 走完 BC 一次就可以得到一次平行. 因为点 P 的速度是 1 cm/s , 所以两点运动的时间为 12 s , 所以点 Q 运动的路程为 48 cm , 所以点 Q 在边 BC 上运动的次数为 $48 \div 12 = 4$, 所以线段 PQ 有 4 次平行于 AB .

3. D 提示: 去分母, 得 $2x + a = x - 1$, 解得 $x = -1 - a$. 因为关于 x 的方程 $\frac{2x+a}{x-1} = 1$ 的解是正数, 所以 $-1 - a > 0$, 解得 $a < -1$. 又因为 $x - 1 \neq 0$, 即 $-1 - a - 1 \neq 0$, 所以 $a \neq -2$. 所以 a 的取值范围是 $a < -1$ 且 $a \neq -2$.

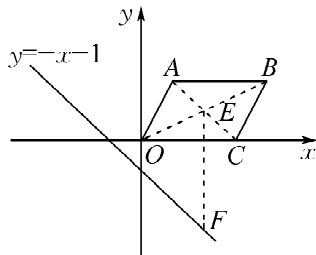
4. B 提示: 作点 D 关于 BC 的对称点 D' , 连接 PD', ED' . 因为四边形 $ABCD$ 是矩形, 所以 $AD = BC = 8, CD = AB = 4$, 所以 $DE = AD - AE = 6, DD' = 2CD = 8$. 在 $\text{Rt}\triangle EDD'$ 中, 由勾股定理, 得 $ED' = 10$. 由对称性, 可知 $PD' = PD$, 所以 $PF + PD = PF + PD'$. 因为 $EF = EA = 2$, 所以 EF 是定值, 所以当点 E, F, P, D' 共线时, $PF + PD'$ 的值最小, 最小值为 $ED' - EF = 10 - 2 = 8$. 所以 $PF + PD$ 的最小值为 8 .

5. $\frac{1}{18}$ 提示: 由 $\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{4}$, 知 $x \neq 0$, 所以 $\frac{x^2-1}{x} = 4$, 即 $x - \frac{1}{x} = 4$. 所以 $\frac{x^4+1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} = (x - \frac{1}{x})^2 + 2 = 18$. 所以 $\frac{x^2}{x^4+1}$ 的值为 18 的倒数, 即 $\frac{1}{18}$.

6. 179 提示: 因为 $a^5 = b^4, c^3 = d^2$, 所以可设 $a = m^4, b = m^5, c = x^2, d = x^3$ (m, x 为正整数). 因为 $a - c = 65$, 所以 $m^4 - x^2 = 65$, 即 $(m^2 + x)(m^2 - x) = 65$, 所以 $\begin{cases} m^2 + x = 65, \\ m^2 - x = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m^2 + x = 13, \\ m^2 - x = 5, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m^2 = 33, \\ x = 32 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m^2 = 9, \\ x = 4 \end{cases}$, 则 $\begin{cases} m = \sqrt{33}, \\ x = 32 \end{cases}$ (舍去) 或 $\begin{cases} m = 3, \\ x = 4 \end{cases}$, 所以 $b - d = m^5 - x^3 = 243 - 64 = 179$.

7. 4 提示: 如图, 连接 AC, BO , 交于点 E , 过点

E 作 $EF \parallel y$ 轴, 交直线 $y = -x - 1$ 于点 F . 由条件可得, 点 $E(2, 1), F(2, -3)$. 当直线 $y = -x - 1$ 向上移动经过点 E 时, 该直线可将 $\square ABCO$ 的面积平分. 因为 $EF = 4$, 所以直线 $y = -x - 1$ 向上平移 4 个单位长度后经过点 $E(2, 1)$, 所以移动的时间为 4 s .



8. (1) $\frac{1}{8} \quad 135^\circ$

(2) ①3

②解: $800 \times \frac{3}{8} = 300$ (次), 所以转动转盘 800 次, 估计转到“看电影”的次数为 300 .

9. 解: (1) 设乙工程队每天能完成绿化的面积是 $x \text{ m}^2$, 则甲工程队每天能完成绿化的面积是 $2x \text{ m}^2$. 根据题意, 得 $\frac{400}{x} - \frac{400}{2x} = 4$, 解得 $x = 50$. 经检验, $x = 50$ 是原方程的解, 则甲工程队每天能完成绿化的面积是 $50 \times 2 = 100 (\text{m}^2)$.

答: 甲、乙两工程队每天能完成绿化的面积分别是 $100 \text{ m}^2, 50 \text{ m}^2$.

(2) 根据题意, 得 $100x + 50y = 1\ 800$. 整理, 得 $y = 36 - 2x$, 所以 y 关于 x 的函数表达式为 $y = -2x + 36 (0 \leq x \leq 18)$.

(3) 设甲工程队施工 x 天, 乙工程队施工 y 天. 因为甲、乙两队施工的总天数不超过 26 , 所以 $x + y \leq 26$. 由(2)知, $y = -2x + 36$, 所以 $x + 36 - 2x \leq 26$, 解得 $x \geq 10$. 设施工总费用为 w 万元. 根据题意, 得 $w = 0.6x + 0.25y = 0.6x + 0.25 \times (36 - 2x) = 0.1x + 9$. 因为 $k = 0.1 > 0$, 所以 w 随 x 的增大而增大, 所以当

$x=10$ 时, w 最小, 最小值为 $0.1 \times 10 + 9 = 10$, 此时 $y = 36 - 20 = 16$.

答: 安排甲队施工 10 天, 乙队施工 16 天时, 施工总费用最低, 最低费用为 10 万元.

10. 解: (1) D

(2) ① 四边形 $AFHB$ 是“等补四边形”, 理由如下:

如图 1, 连接 CF . 因为四边形 $ABCD$ 是正方形, 所以 $AB=CB$, $\angle ABD = \angle CBD = 45^\circ$. 又因为 $BF=BF$, 所以 $\triangle ABF \cong \triangle CBF$ (SAS), 所以 $AF=CF$, $\angle BAF = \angle BCF$. 因为 $HF \perp AE$, 所以 $\angle AFH = \angle ABH = 90^\circ$, 所以 $\angle BAF + \angle BHF = 180^\circ$. 因为 $\angle BHF + \angle FHC = 180^\circ$, 所以 $\angle FHC = \angle BAF$, 所以 $\angle FHC = \angle FCH$, 所以 $FH=FC$, 所以 $FH=AF$. 所以四边形 $AFHB$ 是“等补四边形”.

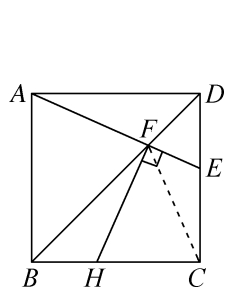


图 1

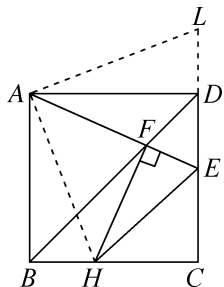


图 2

② 如图 2, 连接 AH . 由 (2) ① 知, $\triangle AFH$ 为等腰直角三角形, 则 $\angle HAF = 45^\circ$. 将 $\triangle ABH$ 绕点 A 逆时针旋转 90° , 得到 $\triangle ADL$, 点 H 的对应点是 L , 则 $AL=AH$, $LD=BH$, $\angle LAE = \angle LAD + \angle DAE = \angle DAE + \angle BAH = 90^\circ - \angle HAF = 45^\circ = \angle HAE$. 易证 $\triangle ALE \cong \triangle AHE$ (SAS), 所以 $HE=LE=LD+DE=BH+DE$, 所以 $\triangle CHE$ 的周长为 $HE+CH+CE=BH+DE+CH+CE=BC+CD=4+4=8$.

③ 当 $FH=CH$ 时, 连接 CF , 由 (2) ① 知, $FH=AF$, 所以 $CH=FH=AF=CF$, 所以

$\triangle FCH$ 为等边三角形. 由 (2) ① 知, $\triangle ABF \cong \triangle CBF$, 所以 $\angle FAB = \angle FCB = 60^\circ$, 所以 $\angle DAE = 30^\circ$. 设 $DE=x$, 则 $AE=2x$. 在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, 由勾股定理, 得 $(2x)^2 - x^2 = 4^2$, 解得 $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ (负值已舍). 所以 $DE = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, 所以 $CE = CD - DE = 4 - \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

当 $CE=FE$ 时, 因为 $HE=HE$, 所以 $\text{Rt}\triangle EHF \cong \text{Rt}\triangle EHC$ (HL), 所以 $FH=CH$, 故该情况同 $FH=CH$ 的情况.

当 $CH=CE$ 时, 由 (2) ② 知, $\triangle CEH$ 的周长为 8. 设 $CH=CE=x$, 则 $HE=\sqrt{2}x$. 所以 $x+x+\sqrt{2}x=8$, 解得 $x=8-4\sqrt{2}$.

当 $EF=HF$ 时, 由 (2) ① 知, $HF=AF$, 则 $AF=EF$, 而当 F 是 BD 的中点时, 才存在 $AF=EF$, 此时点 E 与点 C 重合, 不符合题意, 故该种情况不存在.

综上所述, CE 的长为 $4 - \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 或 $8 - 4\sqrt{2}$.

期末综合练 (3)

1. C

2. B 提示: 连接任意两点可得 $\frac{6 \times 5}{2} = 15$ (条) 线段, 其中 6 条线段的长度为 $\sqrt{3}$, 所以所求概率为 $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

3. C 提示: 原方程化为整式方程, 得 $2-x-m=2(x-2)$, 解得 $x=2-\frac{m}{3}$, 所以 $2-\frac{m}{3} > 0$, 解得 $m < 6$. 因为当 $x=2$ 时原方程无解, 所以 $2-\frac{m}{3} \neq 2$, 解得 $m \neq 0$. 所以 $m < 6$ 且 $m \neq 0$.

4. C 提示: 由折叠的性质, 得 $BE=EF$, 只有当 $AE=BE$ 时, $AE=EF$ 才成立, 故选项 A 错误; 由题意, 得 $AB=AD$, $\angle BAD = 150^\circ$, $AF=AB=AD$, 所以

$\angle AFB = \frac{180^\circ - \angle BAF}{2}$, $\angle AFD = \frac{180^\circ - \angle FAD}{2}$, 所以
 $\angle BFD = \angle AFB + \angle AFD = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle BAF + \angle FAD) = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle BAD = 105^\circ$, 故选项 B 错误; 由条件, 可知 AE, EF 分别平分 $\angle BAF, \angle AFB$, 根据三角形三条内角平分线交于一点, 得 BE 平分 $\angle ABF$, 所以 $\angle ABF = 2\angle ABC = 60^\circ$, 由折叠的性质, 得 $FA = AB$, 所以 $\triangle ABF$ 是等边三角形, 所以 $\angle BAF = 60^\circ$, 所以 $\angle DAF = \angle BAD - \angle BAF = 90^\circ$, 因为 $AD = AB = AF = 2$, 所以 $\triangle DAF$ 是等腰直角三角形, 所以 $FD = \sqrt{AD^2 + AF^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, 故选项 C 正确.

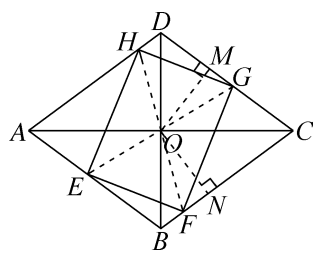
5. $\sqrt{14}$ 提示: 因为 $x = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2}$,

$$\text{所以 } \sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{y}{\sqrt{xy}} + \frac{x}{\sqrt{xy}} = \frac{x+y}{\sqrt{xy}} = \frac{\frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2}}{\sqrt{\frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2}}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{14}.$$

6. $7\sqrt{2}$ 提示: 过点 O 作 $OG \perp CE$ 于点 G , 过点 A 作 $AH \perp OG$ 于点 H , 交 BC 于点 F , 则易知 $AF \perp BC$. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 由勾股定理, 得 $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 10$. 易证四边形 $CFHG$ 为矩形, 且 $CG = \frac{1}{2}CE = \frac{1}{2}BC = 5$, 所以 $HF = CG = OG = 5$. 因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AF = \frac{1}{2}AC \cdot AB$, 所以 $AF = 4$. 8. 所以 $AH = AF + HF = 9$. 8. $HG = CF = \sqrt{AC^2 - AF^2} = 3$. 6. 所以 $OH = OG - HG = 1$. 4. 则 $AO = \sqrt{AH^2 + OH^2} = 7\sqrt{2}$.

7. $\frac{32}{15}$ 提示: 根据题意, 易得 $BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = 5$ cm. 易知 $AE = CG = t$ cm, $AH = CF = 2t$ cm. 易证 $\triangle AEH \cong \triangle CGF$, 所以 $HE = FG$. 同理可证 $GH = EF$. 所以四边形 $EFGH$ 是平行四边形. 如图, 连接 EO, GO, HO, FO . 易证 $\triangle OAE \cong \triangle OCG$, 所以 $\angle AOE = \angle COG$, 所以 $\angle COG + \angle COE = \angle AOE + \angle COE = 180^\circ$, 所以点 E, O, G 在同一条直线上. 同理, 点 H, O, F 在同一条

直线上. 过点 O 作 $OM \perp DC$ 于点 $M, ON \perp BC$ 于点 N . 因为四边形 $EFGH$ 是矩形, 所以 $EG = HF$, 所以 $OG = OF$. 因为 $S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2}OB \cdot OC = \frac{1}{2}BC \cdot ON$, 所以 $ON = \frac{12}{5}$, 所以 $BN = \sqrt{OB^2 - ON^2} = \frac{9}{5}$. 所以 $CN = \frac{16}{5}$. 同理可得 $OM = \frac{12}{5} = ON, CM = \frac{16}{5} = CN$. 在 $\text{Rt}\triangle ONF$ 和 $\text{Rt}\triangle OMG$ 中, $\begin{cases} ON = OM, \\ OF = OG, \end{cases}$ 所以 $\text{Rt}\triangle ONF \cong \text{Rt}\triangle OMG$, 所以 $MG = NF$, 即 $\frac{16}{5} - t = 2t - \frac{16}{5}$, 解得 $t = \frac{32}{15}$.



8. $\frac{6}{5} \leq DE \leq 2$ 提示: 过点 C 作 $CH \perp AB$ 于

点 H , 连接 CM . 根据勾股定理, 得 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5$. 根据等面积法, 得 $\frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot CH$, 所以 $CH = \frac{12}{5}$. 因为 D, E 分别为 CN, MN 的中点, 所以 DE 是 $\triangle MNC$ 的中位线, 所以 $DE = \frac{1}{2}CM$. 当 $CM \perp AB$, 即点 M 与点 H 重合时, CM 长取得最小值, 最小值为 $\frac{12}{5}$; 当点 M 与点 B 重合时, CM 长取得最大值, 最大值为 4. 所以 DE 长度的取值范围是 $\frac{6}{5} \leq DE \leq 2$.

9. 解: (1) $x = \pm\sqrt{39}$ 提示: 因为 $(\sqrt{x^2 + 42} + \sqrt{x^2 + 10})(\sqrt{x^2 + 42} - \sqrt{x^2 + 10}) = (\sqrt{x^2 + 42})^2 - (\sqrt{x^2 + 10})^2 = (x^2 + 42) - (x^2 + 10) = 32$. 又因为 $\sqrt{x^2 + 42} + \sqrt{x^2 + 10} = 16$, 所以 $\sqrt{x^2 + 42} - \sqrt{x^2 + 10} = 2$, 联立解得 $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 42} = 9, \\ \sqrt{x^2 + 10} = 7. \end{cases}$ 将 $\sqrt{x^2 + 42} = 9$ 两边平方可解得 $x = \pm\sqrt{39}$. 经检验, $x = \pm\sqrt{39}$ 都是原方程的解,

所以原方程的解是 $x = \pm \sqrt{39}$.

(2) 因为 $(\sqrt{4x^2+6x-5} + \sqrt{4x^2-2x-5}) \cdot (\sqrt{4x^2+6x-5} - \sqrt{4x^2-2x-5}) = (\sqrt{4x^2+6x-5})^2 - (\sqrt{4x^2-2x-5})^2 = (4x^2+6x-5) - (4x^2-2x-5) = 8x$. 又因为 $\sqrt{4x^2+6x-5} + \sqrt{4x^2-2x-5} = 4x$, 所以 $\sqrt{4x^2+6x-5} - \sqrt{4x^2-2x-5} = 2$, 所以

$$\begin{cases} \sqrt{4x^2+6x-5} = 2x+1, \\ \sqrt{4x^2-2x-5} = 2x-1. \end{cases}$$

因为 $(\sqrt{4x^2+6x-5})^2 = 4x^2+6x-5$, $(\sqrt{4x^2-2x-5})^2 = 4x^2-2x-5$, 所以 $4x^2+6x-5 = (2x+1)^2$, $4x^2-2x-5 = (2x-1)^2$, 所以 $4x^2+6x-5 = 4x^2+4x+1$, 解得 $x=3$. 经检验, $x=3$ 是原方程的解, 所以方程 $\sqrt{4x^2+6x-5} + \sqrt{4x^2-2x-5} = 4x$ 的解是 $x=3$.

10. 解: (1) B A

(2) 实践组摸到黄球的频率为 $(500 - 372) \div 500 = 0.256$.

(3) 实践组摸到黄球的频率小于创新组摸到黄球的频率(答案不唯一).

11. 解: (1) 1

(2) $EC \perp BG$. 理由如下:

如图 1, 因为四边形 $ABCD$ 和四边形 $OEFG$ 均为正方形, 所以 $OB=OC, OE=OG, \angle BOC = \angle EOG = 90^\circ$. 所以 $\angle BOC - \angle COG = \angle EOG - \angle COG$. 所以 $\angle BOG = \angle COE$, 所以 $\triangle BOG \cong \triangle COE$, 所以 $\angle OGB = \angle OEC$. 因为 $\angle EON + \angle OEC + \angle 1 = 180^\circ, \angle GHE + \angle OGB + \angle 2 = 180^\circ, \angle 1 = \angle 2$, 所以 $\angle GHE = \angle EON = 90^\circ$, 所以 $EC \perp BG$.

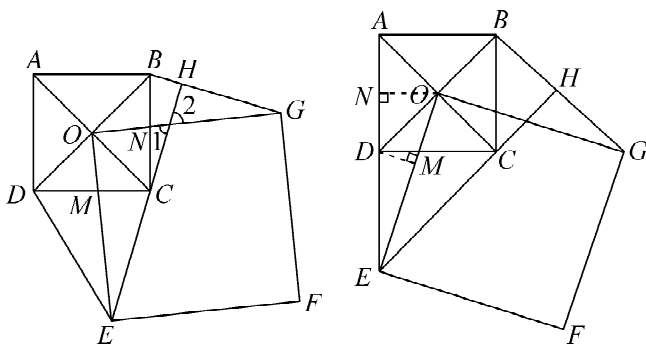


图 1

图 2

(3) 如图 2, 当四边形 $DECB$ 是平行四边形时, 易得 $OD = \sqrt{2}, DE = BC = 2$. 过点 D 作 $DM \perp OE$ 于点 M , 过点 O 作 $ON \perp AD$ 于点 N , 则 $ON = DN = \frac{1}{2}AD = 1$. 在 $\text{Rt}\triangle ONE$ 中, 由勾股定理, 得 $OE = \sqrt{ON^2 + EN^2} = \sqrt{1^2 + (1+2)^2} = \sqrt{10}$. 由等面积法, 得 $S_{\triangle OED} = \frac{1}{2}OE \cdot DM = \frac{1}{2}DE \cdot ON$, 即 $\frac{1}{2} \times \sqrt{10} DM = \frac{1}{2} \times 2 \times 1$, 所以 $DM = \frac{\sqrt{10}}{5}$, 即点 D 到 OE 的距离为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

如图 3, 当四边形 $BDCE$ 是平行四边形时, $BD \parallel CE, CE = BD = 2\sqrt{2}$. 在 $\text{Rt}\triangle OCE$ 中, 由勾股定理, 得 $OE = \sqrt{OC^2 + CE^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{10}$. 过点 D 作 $DQ \perp EO$ 交 EO 的延长线于点 Q . 由平行线间的距离处处相等可知, $\triangle ODE$ 和 $\triangle ODC$ 均以 OD 为底时, 高相等, 所以 $S_{\triangle ODE} = S_{\triangle ODC} = \frac{1}{4}S_{\text{正方形}ABCD} = 1$, 所以 $\frac{1}{2}OE \cdot DQ = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \cdot DQ = 1$, 所以 $DQ = \frac{\sqrt{10}}{5}$, 即点 D 到 OE 的距离为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

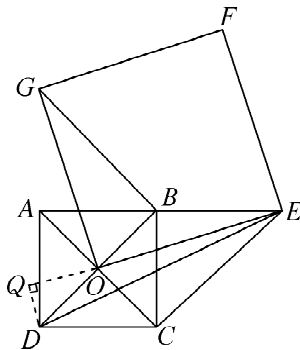


图 3

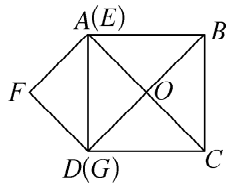


图 4

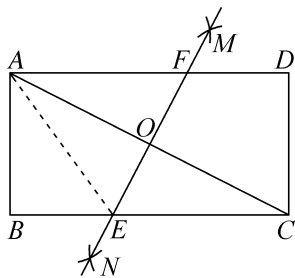
如图 4, 当四边形 $BEDC$ 是平行四边形时, 点 A 与点 E 重合, 点 D 与点 G 重合, 点 D 到 OE 的距离即为 OD 的长, 易得 $OD =$

$$\frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

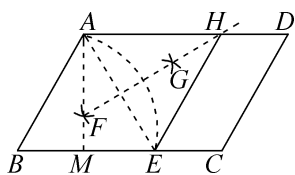
综上所述,点 D 到 OE 的距离为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$ 或 $\sqrt{2}$.

巅峰专题 1 几何作图综合

1. C 提示:如图,连接 AE . 根据作图过程,可知 MN 是 AC 的垂直平分线,所以 $AE=CE$,易证 $\triangle AFO \cong \triangle CEO(ASA)$,所以 $AF=CE$,所以 $AE=CE=AF=5$,所以 $BC=BE+CE=3+5=8$. 在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中,根据勾股定理,得 $AB=\sqrt{AE^2-BE^2}=4$,所以矩形的周长为 $2(AB+BC)=2 \times (4+8)=24$.

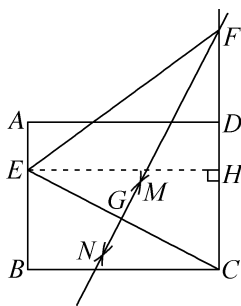


2. D 提示:如图,连接 AE ,由作图步骤①可知, $BE=AB=4$,所以 $EC=BC-BE=2$, $\triangle ABE$ 是等边三角形. 由作图步骤②③可知, FG 是 AE 的垂直平分线,所以 $AH=EH$,因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $AD \parallel BC$, $AB=CD$, $AB \parallel CD$,所以 $\angle HAE = \angle AEB = 60^\circ$,所以 $\triangle AHE$ 是等边三角形,所以 $AH=HE=AE=AB=BE$,所以四边形 $ABEH$ 是菱形,所以 $EH=AB=CD$, $EH \parallel AB \parallel CD$,所以四边形 $ECDH$ 是平行四边形. 过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M ,在等边三角形 ABE 中, $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$,所以 $S_{\text{四边形}ECDH} = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.



3. D 提示:由作图,可知 FG 垂直平分线段 EC ,所以 $FC=FE$,故①正确;所以 $\angle FEC = \angle FCE$,因

为四边形 $ABCD$ 是矩形,所以 $AB \parallel CD$, $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$, $\angle BEC = \angle FCE$,所以 $\angle FEC = \angle BEC$,所以 EC 平分 $\angle BEF$,故②正确;如图,过点 E 作 $EH \perp CD$ 于点 H ,所以 $EC = \sqrt{BE^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$,设 $CF=x$,则 $EF=x$, $FH=x-2$, $EH=4$,由勾股定理,可得 $EF^2 = EH^2 + FH^2$,即 $x^2 = 4^2 + (x-2)^2$,解得 $x=5$,所以 $CF=5$,故③正确;因为 $FG = \sqrt{CF^2 - CG^2} = \sqrt{CF^2 - \left(\frac{EC}{2}\right)^2} = 2\sqrt{5}$,所以 $FG=CE$,故④正确.



4. 123° 提示:由作图痕迹,可知所作 $\angle ABD$ 的平分线. 设 $\angle ABD$ 的平分线与 AD 的交点为 E ,则 $\angle DBE = \frac{1}{2} \angle ABD$. 结合矩形的性质,可得 $\angle A = \angle ABC = 90^\circ$, $\angle CBD = \angle ADB = 24^\circ$,所以 $\angle ABD = 66^\circ$,则 $\angle DBE = 33^\circ$,所以 $\angle 1 = 180^\circ - \angle ADB - \angle DBE = 123^\circ$.

5. $\sqrt{2}$ 提示:根据题意,得 $\angle C = 30^\circ$, $AB \parallel CD$, $BC = AD = \sqrt{3} + 1$. 由作图痕迹,可知 $\angle CBH = \angle ABH$. 过点 B 作 $BP \perp CD$ 于点 P . 易得 $BP = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $CP = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$. 因为 $AB \parallel CD$,所以 $\angle CHB = \angle ABH = \angle CBH$,所以 $CH = BC$,所以 $HP = CH - CP = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$,所以 $BH = \sqrt{BP^2 + HP^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$.

6. 4.8 提示:由已知可得, $AF=AB$, AE 平分 $\angle FAB$,所以 $\angle FAE = \angle BAE = \angle BEA$,所以 $BA = BE$,所以 $AF=BE$. 又因为 $AF \parallel BE$, $AF=AB$,所以四边形 $ABEF$ 是菱形,所以 $BO = 3$,所以 $AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$,所以 $AE = 8$. 因为 $AH \perp$

垂直平分线交 AD 于点 F , 交 BC 于点 G , 连接 EQ . 因为 EG 垂直平分 AD , $AD=BC=6$, 所以 $AF=DF=\frac{1}{2}AD=3$, $\angle AFG=\angle DFG=90^\circ$. 因为 $\angle BAD=\angle B=\angle ADC=\angle BCD=90^\circ$, 所以四边形 $ABGF$, $CDFG$ 都是矩形, 所以 $AF=DF=BG=CG=3$, $FG=AB=5$. 因为 $AE=AB=5$, 所以 $EF=\sqrt{AE^2-AF^2}=4$, 所以 $EG=EF+FG=9$. 由翻折, 得 $\triangle ABQ\cong\triangle AEQ$ (SAS), 所以 $EQ=BQ$. 设 $CQ=x$, 则 $BQ=EQ=6+x$, $GQ=3+x$, 所以 $GQ^2+EG^2=EQ^2$, 即 $(3+x)^2+81=(6+x)^2$, 解得 $x=9$, 所以 $BQ=BC+CQ=15$.

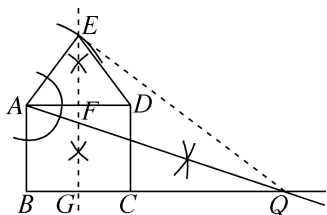


图 1

(3) 如图 2, 延长 AB, DC 至点 M, N , 使得 $AM=DN=BC$, 连接 MN , 则四边形 $AMND$ 是正方形, $BM=CN=1$, $MN=BC=6$. 延长 AQ 交 MN 于点 H , 连接 GH, MQ . 由翻折, 得 $AD=AG$, $DP=PG$. 因为 $AD=AM$, 所以 $AM=AG$. 因为 $\angle MAH=\angle GAH$, $AH=AH$, 所以 $\triangle AMH\cong\triangle AGH$ (SAS), 所以 $\angle AGH=\angle AMH=90^\circ$, 所以 P, G, H 三点共线. 当 $DP=\frac{1}{3}CD=\frac{5}{3}$ 时, $CP=\frac{10}{3}$, 所以 $PN=CP+CN=\frac{13}{3}$, 设 $MH=GH=m$, 则 $HN=6-m$, $PH=PG+GH=DP+GH=\frac{5}{3}+m$, 所以 $PH^2=HN^2+PN^2$, 即 $(m+\frac{5}{3})^2=(6-$

$m)^2+(\frac{13}{3})^2$, 解得 $m=\frac{78}{23}$, 所以 $MH=\frac{78}{23}$, 因为 $S_{\triangle AMH}=S_{\triangle AMQ}+S_{\triangle MQH}$, 所以 $\frac{1}{2}AM\cdot MH=\frac{1}{2}AM\cdot BQ+\frac{1}{2}MH\cdot BM$, 即 $\frac{1}{2}\times 6\times \frac{78}{23}=\frac{1}{2}\times 6BQ+\frac{1}{2}\times \frac{78}{23}\times 1$, 所以 $BQ=\frac{65}{23}$; 当 $DP=\frac{2}{3}CD$ 时, 如图 3, $DP=\frac{2}{3}CD=\frac{10}{3}$, $CP=\frac{5}{3}$, 所以 $PN=CP+CN=\frac{8}{3}$, 设 $MH=GH=n$, 则 $HN=6-n$, $PH=PG+GH=PD+GH=\frac{10}{3}+n$, 所以 $PH^2=HN^2+PN^2$, 即 $(n+\frac{10}{3})^2=(6-n)^2+(\frac{8}{3})^2$, 解得 $n=\frac{12}{7}$, 所以 $MH=\frac{12}{7}$, 因为 $S_{\triangle AMH}=S_{\triangle AMQ}+S_{\triangle MQH}$, 所以 $\frac{1}{2}AM\cdot MH=\frac{1}{2}AM\cdot BQ+\frac{1}{2}MH\cdot BM$, 即 $\frac{1}{2}\times 6\times \frac{12}{7}=\frac{1}{2}\times 6BQ+\frac{1}{2}\times \frac{12}{7}\times 1$, 解得 $BQ=\frac{10}{7}$. 综上所述, BQ 的长为 $\frac{65}{23}$ 或 $\frac{10}{7}$.

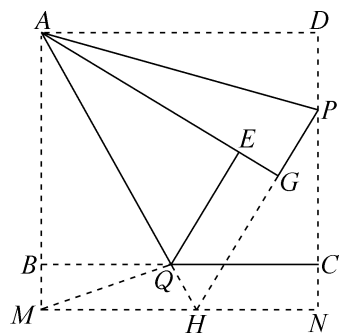


图 2

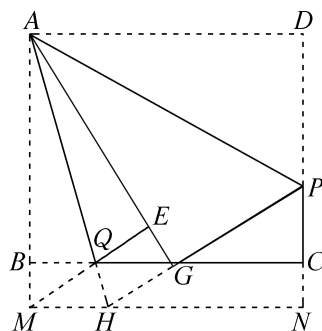


图 3

11. 解: (1) $EF=GH$

(2) 如图 1, $EF'=EF$, 但 EF' 和 GH 不垂直.

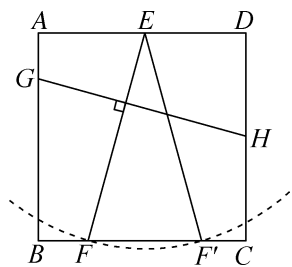


图 1

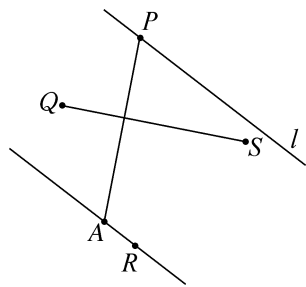


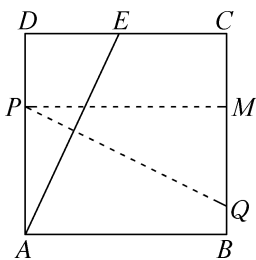
图 2

(3) ① $\sqrt{5}$

② 如图 2, 连接 QS , 作 $PA \perp QS$ 且 $PA=QS$, 作直线 AR , 过点 P 作直线 $l \parallel AR$, 则直线 l 即为所求.

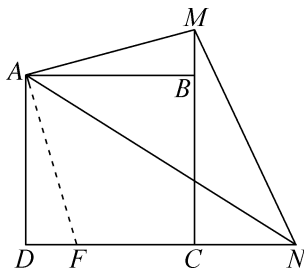
巅峰专题 2 特殊的平行四边形中的常见模型

1. A 提示: 如图, 过点 P 作 $PM \perp BC$ 于点 M . 由折叠, 得 $PQ \perp AE$, 所以 $\angle DAE + \angle APQ = 90^\circ$. 又因为 $\angle DAE + \angle AED = 90^\circ$, 所以 $\angle AED = \angle APQ$. 因为 $AD \parallel BC$, 所以 $\angle APQ = \angle PQM$, 所以 $\angle PQM = \angle AED$, 又因为 $\angle D = \angle PMQ$, $PM = AD$, 所以 $\triangle PQM \cong \triangle AED$ (AAS), 所以 $PQ = AE = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.

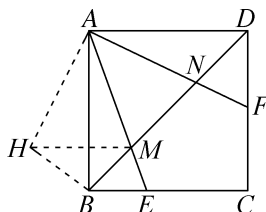


2. C 提示: 如图, 在 DC 上取一点 F , 使得 $DF=BM$, 连接 AF . 易证 $\triangle ABM \cong \triangle ADF$ (SAS), 所以 $AM=AF$, $\angle BAM = \angle DAF$. 因为 $\angle FAM = \angle FAB + \angle BAM = \angle FAB + \angle DAF = 90^\circ$, $\angle MAN = 45^\circ$, 所以 $\angle FAN = \angle MAN = 45^\circ$. 易证 $\triangle MAN \cong \triangle FAN$ (SAS), 所以 $MN=FN$. 设 $MN=FN=x$, 则 $DN=DF+FN=1+x$, $CM=BM+BC=4$, $CN=$

$DN-DC=x-2$. 在 $\text{Rt}\triangle MCN$ 中, 由勾股定理, 得 $CM^2 + CN^2 = MN^2$, 所以 $4^2 + (x-2)^2 = x^2$, 解得 $x=5$, 所以 $MN=5$.



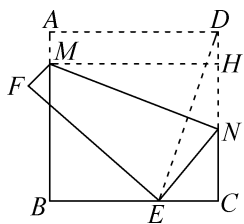
3. B 提示: 如图, 过点 A 作 $AH \perp AF$, 并截取 $AH=AN$, 连接 BH, MH . 因为 $\angle HAB = 90^\circ - \angle BAF = \angle NAD$, 所以 $\triangle HAB \cong \triangle NAD$ (SAS), 所以 $BH=DN=4$, $\angle ABH = \angle ADN = 45^\circ$, 所以 $\angle HBM = \angle ABH + \angle ABM = 90^\circ$, $HM = \sqrt{BH^2 + BM^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. 易证 $\triangle AHM \cong \triangle ANM$ (SAS), 所以 $NM=HM=5$, 所以 $BD=12$. 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, 由勾股定理, 得 $AB^2 + AD^2 = BD^2$, 所以 $2AB^2 = 12^2$, 所以 $AB^2 = 72$, 所以正方形 $ABCD$ 的面积为 72 .



4. $135^\circ - \alpha$ 提示: 取 AF 的中点 H , 连接 GH , 则 $BG=AH=FH$. 易证 $\text{Rt}\triangle GHF \cong \text{Rt}\triangle ADE$ (HL), 所以 $FH=ED$, 所以 $BG=ED$, 所以 $CG=CE$, 所以 $\angle CEG = \angle CGE = 45^\circ$. 因为 $AB \parallel CD$, 所以 $\angle AED = \angle BAE = \alpha$, 所以 $\angle AEG = 180^\circ - \angle AED - \angle CEG = 180^\circ - \alpha - 45^\circ = 135^\circ - \alpha$.

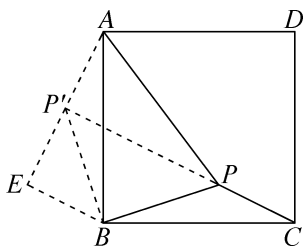
5. 3 提示: 如图, 过点 M 作 $MH \perp CD$ 于点 H . 连接 DE . 根据题意, 可知 MN 垂直平分 DE . 易证 $\angle EDC = \angle NMH$, $MH=AD=CD$, $\angle MHN = \angle C = 90^\circ$, 所以 $\triangle MHN \cong \triangle DCE$ (ASA), 所以 $DE=MN=4\sqrt{5}$. 在 $\text{Rt}\triangle DEC$ 中, $CE = \sqrt{DE^2 - DC^2} = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 - 8^2} = 4$. 设 $DN=EN=x$, 则 $CN=8-x$. 在 $\text{Rt}\triangle ENC$ 中, $EN^2 = CN^2 + CE^2$, 所以 $x^2 = (8-x)^2 + 4^2$, 解得 $x=5$,

所以 $CN = 8 - x = 3$.



6. (1) 150 150 $\sqrt{7}$

(2) 解:如图,将 $\triangle BPC$ 绕点 B 逆时针旋转 90° ,得 $\triangle BP'A$,则 $\triangle BPC \cong \triangle BP'A$,所以 $AP' = PC = 1$, $BP' = PB = \sqrt{2}$.连接 PP' .在 $\text{Rt}\triangle BP'P$ 中,因为 $PB = BP' = \sqrt{2}$, $\angle PBP' = 90^\circ$,所以 $PP' = 2$, $\angle BP'P = 45^\circ$.在 $\triangle AP'P$ 中, $AP' = 1$, $PP' = 2$, $PA = \sqrt{5}$,因为 $1^2 + 2^2 = (\sqrt{5})^2$,即 $AP'^2 + PP'^2 = PA^2$,所以 $\triangle AP'P$ 是直角三角形,即 $\angle AP'P = 90^\circ$,所以 $\angle AP'B = 135^\circ$,所以 $\angle BPC = \angle AP'B = 135^\circ$.过点 B 作 $BE \perp AP'$,交 AP' 的延长线于点 E ,则 $\triangle BEP'$ 是等腰直角三角形.又因为 $BP' = \sqrt{2}$,所以 $EP' = BE = 1$,所以 $AE = 2$.在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中,因为 $BE = 1$, $AE = 2$,所以由勾股定理,得 $AB = \sqrt{5}$.综上所述, $\angle BPC = 135^\circ$,正方形 $ABCD$ 的边长为 $\sqrt{5}$.



7. 解:(1) =

(2) 相等.证明如下:

如图1,过点 A 作 $AN \parallel GE$,交 BF 于点 H ,交 BC 于点 N ,所以 $\angle NHB = \angle EMB = 90^\circ$,所以 $\angle FBC + \angle ANB = 90^\circ$.因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以 $AD \parallel BC$, $AB = BC$,

$\angle ABN = \angle C = 90^\circ$.因为 $AN \parallel GE$,所以四边形 $ANEG$ 是平行四边形,所以 $AN = GE$.因为 $\angle C = 90^\circ$,所以 $\angle FBC + \angle BFC = 90^\circ$,所以 $\angle ANB = \angle BFC$,所以 $\triangle ABN \cong \triangle BCF$ (AAS),所以 $AN = BF$.因为 $AN = GE$,所以 $GE = BF$.

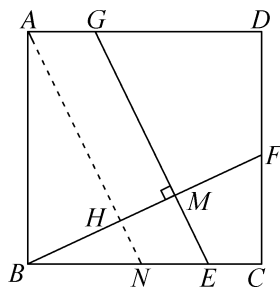


图1

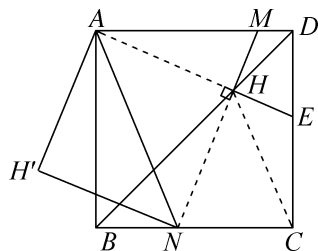


图2

(3) ①是.理由如下:

如图2,连接 CH .由(2),可知 $AE = MN$.因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以 $\angle ABD = \angle CBD = 45^\circ$, $AB = CB$.因为 $BH = BH$,所以 $\triangle ABH \cong \triangle CBH$ (SAS),所以 $\angle BAH = \angle BCH$, $AH = CH$.由折叠可知, $AH = AH'$, $NH = NH'$.因为 $\angle ABN + \angle AHN = 180^\circ$,所以 $\angle BAH + \angle BNH = 180^\circ$.因为 $\angle BNH + \angle HNC = 180^\circ$,所以 $\angle BAH = \angle HNC$,所以 $\angle HNC = \angle NCH$,所以 $NH = CH$,所以 $NH = CH = AH = AH' = NH'$,所以四边形 $AHNNH'$ 是菱形.因为 $\angle AHN = 90^\circ$,所以菱形 $AHNNH'$ 是正方形.

② $2\sqrt{17}$ 提示:如图3,过点 H' 作 $H'Q \perp BC$ 交 CB 的延长线于点 Q ,过点 H 作 $HF \perp BC$ 于点 F ,所以 $\angle H'QN = \angle NFH = 90^\circ$.由①,知四边形 $AHNNH'$ 是正方形,所以 $H'N = NH$, $\angle H'NH = 90^\circ$, $AH' = \frac{\sqrt{2}}{2}AN$,所以 $\angle H'NQ + \angle HNF = \angle HNF + \angle NHF = 90^\circ$,所以 $\angle H'NQ = \angle NHF$,所以 $\triangle H'QN \cong \triangle NFH$ (AAS),所以 $H'Q = NF$, $QN = FH$.因为 $\angle HBF = 45^\circ$, $\angle HFB = 90^\circ$,所以 $\triangle BHF$ 是等腰直角三角形,所以 $HF = BF = NF + BN$.因为 $QN = QB + BN$,所以 $NF = QB =$

QH' , 所以 $\angle H'BQ = \angle ABH' = 45^\circ$, 所以 $\angle H'BD = 90^\circ$. 作点 P 关于 BH' 的对称点 P' , 则 $PH' = P'H'$, 过点 P' 作 $PK \perp AB$ 交 AB 延长线于点 K , 则 $\triangle P'BK$ 是等腰直角三角形, 所以 $PH' + \frac{\sqrt{2}}{2}AN = PH' + AH' = P'H' + AH' \geq AP'$, 即当 A, H', P' 三点共线时, $PH' + \frac{\sqrt{2}}{2}AN$ 的值最小, 最小值为 AP' 的长. 因为 $AB=6$, 所以 $BD=6\sqrt{2}$. 因为 $BD=3BP$, 所以 $BP=BP'=2\sqrt{2}$, 所以 $P'K=BK=2$, 所以 $AK=8$, 所以 $AP'=\sqrt{2^2+8^2}=2\sqrt{17}$, 即 $PH' + \frac{\sqrt{2}}{2}AN$ 的最小值为 $2\sqrt{17}$.

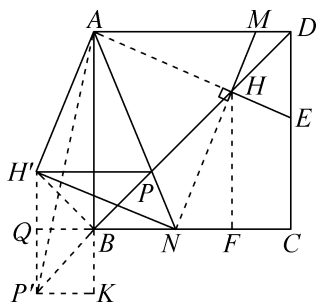


图 3

8. (1) ①5

② $a^2 + b^2 = c^2$

(2) $a^2 + ab + b^2 = c^2$ 提示: 如图 1, 将 $\triangle ADB$ 绕点 A 逆时针旋转 60° , 得到 $\triangle AFC$, 所以 $CF=BD=a$. 易证 $\angle ECF = 120^\circ$, $\triangle ADE \cong \triangle AFE$, 所以 $EF=DE=c$. 过点 F 作 $FG \perp BC$, 交 BC 的延长线于点 G , 所以 $\angle FCG = 180^\circ - \angle ECF = 60^\circ$, 所以 $CG = \frac{1}{2}CF = \frac{1}{2}a$, $FG = \frac{\sqrt{3}}{2}CF = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. 因为 $FG^2 + EG^2 = EF^2$, 所以 $(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2 + (b + \frac{1}{2}a)^2 = c^2$, 所以 $a^2 + ab + b^2 = c^2$.

(3) ① $\sqrt{13}$ 提示: 如图 2, 将 $\triangle ADB$ 绕点 A 逆时针旋转 120° , 得到 $\triangle AFC$, 连接 EF , 易证 $\angle ECF = 60^\circ$, $\triangle ADE \cong \triangle AFE$, $DE=EF$, $CF=BD=3$. 过点 F 作 $FW \perp BC$ 于点 W , 可得 $CW = \frac{1}{2}CF = \frac{3}{2}$, $FW =$

$\frac{\sqrt{3}}{2}CF = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 所以 $EW = CE - CW = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, 所以 $DE = EF = \sqrt{FW^2 + EW^2} = \sqrt{13}$.

② $a^2 - ab + b^2 = c^2$ 提示: 由 ①, 得 $FW^2 + EW^2 = DE^2$, 即 $(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2 + (b - \frac{a}{2})^2 = c^2$, 所以 $a^2 - ab + b^2 = c^2$.

(4) 如图 3, 过点 G 作 $GH \perp CE$ 于点 H , $GQ \perp CF$ 于点 Q , 过点 F 作 $FW \perp CE$ 于点 W . 易得 CG 平分 $\angle ECF$, 所以 $GH=GQ$. 因为 $S_{\triangle CEG} + S_{\triangle CFG} = S_{\triangle CEF}$, 所以 $\frac{1}{2}CE \cdot GH + \frac{1}{2}CF \cdot GQ = \frac{1}{2}CE \cdot FW$, 所以 $4GH + 3GH = 4 \times \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 所以 $GH = \frac{6\sqrt{3}}{7}$, 又因为 $\angle ACB = 30^\circ$, 所以 $CG = 2GH = \frac{12\sqrt{3}}{7}$.

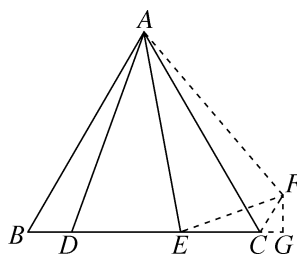


图 1

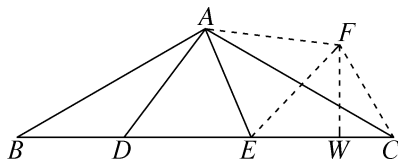


图 2

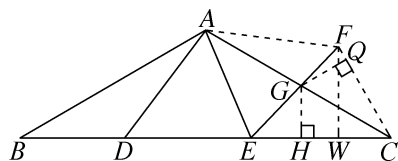


图 3

巅峰专题 3 因式分解在分式与根式中的应用

1. D 2. C

3. C 提示: 因为 $\sqrt{x}(\sqrt{x}+2\sqrt{y})=\sqrt{y}(6\sqrt{x}+5\sqrt{y})$, 所以 $x-4\sqrt{xy}-5y=0$, 所以 $(\sqrt{x}-5\sqrt{y})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y})=0$. 因为 $x>0, y>0$, 所以 $\sqrt{x}+\sqrt{y}\neq 0$, 所以 $\sqrt{x}-5\sqrt{y}=0$, 即 $x=25y$, 所以原式 $=\frac{25y+\sqrt{25y^2}-y}{50y+\sqrt{25y^2}+3y}=\frac{25y+5y-y}{50y+5y+3y}=\frac{29y}{58y}=\frac{1}{2}$.

4. $-\frac{7}{10}$ 提示: 因为 $a+b+c=2$, 所以 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=4$. 因为 $a^2+b^2+c^2=16$, 所以 $ab+bc+ac=-6$. 因为 $a+b+c=2$, 所以 $c=2-a-b$, 所以 $3c+3=9-3a-3b$, 所以 $ab+3c+3=ab+9-3a-3b=(ab-3a)-(3b-9)=a(b-3)-3(b-3)=(a-3)(b-3)$. 同理可得 $bc+3a+3=(b-3)(c-3)$, $ca+3b+3=(c-3)(a-3)$, 所以 $\frac{1}{ab+3c+3}+\frac{1}{bc+3a+3}+\frac{1}{ca+3b+3}=\frac{1}{(a-3)(b-3)}+\frac{1}{(b-3)(c-3)}+\frac{1}{(c-3)(a-3)}=\frac{c-3+a-3+b-3}{(a-3)(b-3)(c-3)}=\frac{c+a+b-9}{(ab-3a-3b+9)(c-3)}=\frac{2-9}{abc-3ab-3ac+9a-3bc+9b+9c-27}=\frac{-7}{abc-3(ab+ac+bc)+9(a+b+c)-27}=\frac{-7}{1+18+18-27}=-\frac{7}{10}$.

5. 4 提示: 因为 $\sqrt{12-x}-\sqrt{4-x}=2$, 令 $\sqrt{12-x}=a, \sqrt{4-x}=b$, 所以 $12-x=a^2, 4-x=b^2$, 所以 $a^2-b^2=8$, 所以 $(a+b)(a-b)=8$, 所以 $a+b=4$, 即 $\sqrt{12-x}+\sqrt{4-x}=4$.

6. $-\frac{1}{401}$ 提示: 因为 $m+4\sqrt{mn}-2\sqrt{m}-4\sqrt{n}+4n=3$, 所以 $(\sqrt{m}+2\sqrt{n})^2-2(\sqrt{m}+2\sqrt{n})-3=0$, 所以 $(\sqrt{m}+2\sqrt{n}-3)\cdot(\sqrt{m}+2\sqrt{n}+1)=0$, $\sqrt{m}+2\sqrt{n}=3$ 或 $\sqrt{m}+2\sqrt{n}=-1$, 而 $\sqrt{m}+2\sqrt{n}\geq 0$, 所以 $\sqrt{m}+2\sqrt{n}=3$, 所以 $\frac{\sqrt{m}+2\sqrt{n}-8}{\sqrt{m}+2\sqrt{n}+2002}=\frac{3-8}{3+2002}=-\frac{1}{401}$.

7. $2\sqrt{6}+2\sqrt{2}$ 提示: 因为 $AD=CD=4$, 所以 $\angle CAD=\angle C=15^\circ$, 所以 $\angle ADB=\angle C+\angle CAD=30^\circ$. 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, 因为 $\angle B=90^\circ$, 所以 $AB=\frac{1}{2}AD=2, BD=\sqrt{3}AB=2\sqrt{3}$, 所以 $BC=CD+BD=4+2\sqrt{3}$, 所以 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{2^2+(4+2\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+16+16\sqrt{3}+12}=\sqrt{32+16\sqrt{3}}=\sqrt{(2\sqrt{6}+2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{6}+2\sqrt{2}$.

8. $a>b, c>d$ 提示: 因为 $2a-2b=2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$, x, y, z 是三个互不相等的非零实数, 所以 $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2>0$, 所以 $a>b$. 因为 $2c-2d=\frac{2}{x^2}+\frac{2}{y^2}+\frac{2}{z^2}-\frac{2}{xy}-\frac{2}{yz}-\frac{2}{zx}=(\frac{1}{x}-\frac{1}{y})^2+(\frac{1}{y}-\frac{1}{z})^2+(\frac{1}{z}-\frac{1}{x})^2$, x, y, z 是三个互不相等的非零实数, 所以 $(\frac{1}{x}-\frac{1}{y})^2+(\frac{1}{y}-\frac{1}{z})^2+(\frac{1}{z}-\frac{1}{x})^2>0$, 所以 $c>d$.

9. 解: (1) 因为 $a+b=-1, ab=3$, 所以 $\frac{3}{a}+\frac{3}{b}=\frac{3(a+b)}{ab}=\frac{3\times(-1)}{3}=-1$.

(2) 因为 $ab=1$, 所以 $\frac{1}{1-a^2}-\frac{1}{b^2-1}=\frac{ab}{ab-a^2}-\frac{ab}{b^2-ab}=\frac{ab}{a(b-a)}-\frac{ab}{b(b-a)}=\frac{b}{b-a}-\frac{a}{b-a}=1$.

10. (1) ① $\sqrt{5}+\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}-\sqrt{6}$
提示: ① $\sqrt{11+2\sqrt{30}}=\sqrt{5+2\sqrt{30}+6}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2\sqrt{5}\times\sqrt{6}+(\sqrt{6})^2}=\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{6})^2}=\sqrt{5}+\sqrt{6}$.
 ② $\sqrt{13-2\sqrt{42}}=\sqrt{7-2\sqrt{7}\times\sqrt{6}+6}=\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{6})^2}=\sqrt{7}-\sqrt{6}$.

(2) **解:** 因为 $(m+\sqrt{5}n)^2=m^2+5n^2+2\sqrt{5}mn=a+6\sqrt{5}$, 所以 $\begin{cases} m^2+5n^2=a, \\ mn=3. \end{cases}$ 因为 $m,$

n, a 均为正整数. 所以 $\begin{cases} m=1, \\ n=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=3, \\ n=1, \end{cases}$ 所以

$a=1+45=46$ 或 $a=9+5=14$. 所以 $a=46$ 或 $a=14$.

11. (1) ①不等式的基本性质 1 ②平方差公式.

(2) 证明: 因为 $a+b>c$, 所以 $(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2>c$, 所以 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>c+2\sqrt{ab}$. 因为 $2\sqrt{ab}>0$, 所以 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>c$, 所以 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2>0$, 所以 $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})>0$. 因为 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}>0$, 所以 $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}>0$. 所以 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}$.

12. (1) $> > =$

(2) 由(1), 可得 $m+n\geq 2\sqrt{mn}$. 理由如下: 因为 $m\geq 0, n\geq 0$, 所以 $m=(\sqrt{m})^2, n=(\sqrt{n})^2$, 所以 $m+n-2\sqrt{mn}=(\sqrt{m})^2+(\sqrt{n})^2-2\sqrt{mn}=(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2\geq 0$, 所以 $m+n\geq 2\sqrt{mn}$.

(3) 40 m 提示: 设长方形花园的与墙平行的边长为 $x(x>0)$ m, 垂直于墙的边为 $y(y>0)$ m, 由题意, 得篱笆长为 $(x+2y)$ m, $xy=200$. 由(2), 可得 $x+2y\geq 2\sqrt{x\cdot 2y}$. 因为 $2\sqrt{x\cdot 2y}=2\sqrt{400}=40$, 所以 $x+2y\geq 40$, 所以所用的篱笆至少需要 40 m.

13. 解: (1) 因为 $M-N=\frac{3x+2}{x+2}-\frac{x-2}{x+2}=\frac{3x+2-x+2}{x+2}=\frac{2x+4}{x+2}=\frac{2(x+2)}{x+2}=2$, 所以 M, N 是“兄弟分式”, 所以 M 对 N 的“信度值” $k=2$.

(2) 由题意, 可分两种情况: ①若 $\frac{2x^2}{x^2-4y^2}-\frac{x}{x+2y}=3$, 则 $\frac{2x^2}{(x+2y)(x-2y)}-\frac{x(x-2y)}{(x+2y)(x-2y)}=3$, 所以 $2x^2-x(x-2y)=3(x+2y)(x-$

$2y)$, 所以 $2x^2-x^2+2xy=3x^2-12y^2$, 移项、合并同类项, 得 $x^2-xy-6y^2=0$, 所以 $(x+2y)(x-3y)=0$. 因为 $x+2y\neq 0$, 所以 $x-3y=0$, 所以 $x=3y$, 所以 $\frac{2x-y}{x+2y}=\frac{2\times 3y-y}{3y+2y}=\frac{5y}{5y}=1$.

②若 $\frac{x}{x+2y}-\frac{2x^2}{x^2-4y^2}=3$, 则 $\frac{x}{x+2y}-\frac{2x^2}{(x+2y)(x-2y)}=3$, 所以 $x(x-2y)-2x^2=3(x^2-4y^2)$, 所以 $x^2-2xy-2x^2=3x^2-12y^2$, 移项、合并同类项, 得 $2x^2+xy-6y^2=0$, 所以 $(x+2y)(2x-3y)=0$. 因为 $x+2y\neq 0$, 所以 $2x-3y=0$, 所以 $x=\frac{3}{2}y$, 所以

$\frac{2x-y}{x+2y}=\frac{2\times \frac{3}{2}y-y}{\frac{3}{2}y+2y}=\frac{2y}{\frac{7}{2}y}=\frac{4}{7}$.

综上所述, $\frac{2x-y}{x+2y}$ 的值为 1 或 $\frac{4}{7}$.

(3) ①由题意, 得 $\frac{P}{x^2-4}-\frac{2x}{x-2}=-2$, 所以 $\frac{P}{x^2-4}-\frac{2x(x+2)}{x^2-4}=-2$, 所以 $P-2x(x+2)=-2(x^2-4)$. 去括号, 得 $P-2x^2-4x=-2x^2+8$, 移项、合并同类项, 得 $P=4x+8$.

②由①, 得 $P=4x+8$, 所以 $M=\frac{4x+8}{x^2-4}=\frac{4(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{4}{x-2}$. 因为 M 的值为正整数, x 为正整数, 所以 $x-2=1$ 或 $x-2=2$ 或 $x-2=4$, 所以 $x=3$ 或 $x=4$ 或 $x=6$.

期末压轴 1

2025 年南京市玄武区期末压轴题

1. D 提示: 连接 AC, BD . 因为线段 $AB, BC,$

CD, DA 的中点分别为 M, N, P, Q , 所以 $PQ \parallel AC$, $PQ = \frac{1}{2}AC$, $MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2}AC$, $PN \parallel BD$, $PN = \frac{1}{2}BD$, $QM \parallel BD$, $QM = \frac{1}{2}BD$.

①当 $AC \parallel BD$ 时, 如图 1, 因为 $PQ \parallel AC$, 所以 $PQ \parallel BD$. 因为 $PN \parallel BD$, $QM \parallel BD$, 所以 M, N, P, Q 四点共线, 即四边形 $MNPQ$ 不存在. ②当 AC 与 BD 不平行时, 如图 2、图 3, 分两种情况, 点 B, D 位于 AC 异侧或点 B, D 位于 AC 同侧. 易知 $PQ \parallel MN$, $PQ = MN$, $QM \parallel PN$, $QM = PN$. 所以中点四边形 $MNPQ$ 是平行四边形, 且其位置随着点 D 位置的变化而变化, 故存在无数个中点四边形 $MNPQ$ 是平行四边形. ③如图 4, 当 $AC = BD$ 且 AC 与 BD 不平行时, $PQ = QM$, 所以平行四边形 $MNPQ$ 是菱形, 且同样存在无数个中点四边形 $MNPQ$ 是菱形. ④如图 5, 当 $AC \perp BD$ (点 B, D 不重合) 时, 因为 $PQ \parallel MN \parallel AC$, $QM \parallel PN \parallel BD$, $AC \perp BD$, 所以 $PQ \perp PN$, 所以平行四边形 $MNPQ$ 是矩形, 且同样存在无数个中点四边形 $MNPQ$ 是矩形. ⑤如图 6, 当 $AC \perp BD$, 且 $AC = BD$ 时, $PQ \perp PN$, 且 $PQ = PN$, 所以平行四边形 $MNPQ$ 是正方形. 当点 B, D 位于 AC 异侧或点 B, D 位于 AC 同侧时, 均存在一个中点四边形 $MNPQ$ 是正方形. 故存在两个中点四边形 $MNPQ$ 是正方形. 综上所述, 正确的有①②③④.

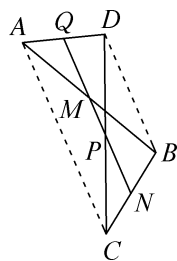


图 1

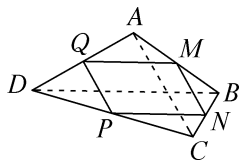


图 2

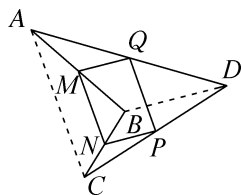


图 3

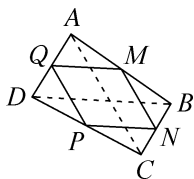


图 4

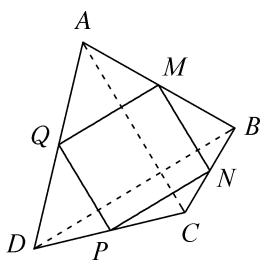


图 5

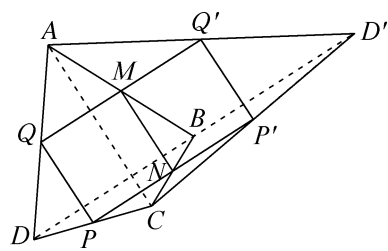
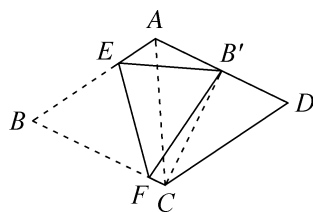


图 6

2. $\frac{1}{4}$ 提示: 如图, 连接 AC, CB' . 因为四边形

$ABCD$ 是菱形, 所以 $AB = BC = CD = AD = 2$ cm, $\angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAD = 60^\circ$, 所以 $\triangle ADC$ 是等边三角形. 又因为 B' 是边 AD 的中点, 所以 $CB' \perp AD$, 且 $AB' = DB' = 1$ cm, 所以 $CB' = \sqrt{CD^2 - DB'^2} = \sqrt{3}$ (cm). 因为 $AD \parallel BC$, 所以 $CB' \perp BC$. 设 $BF = x$ cm, 则 $CF = (2-x)$ cm. 由翻折的性质, 得 $B'F = BF = x$ cm. 在 $\text{Rt}\triangle CB'F$ 中, 由勾股定理, 得 $B'F^2 = CF^2 + CB'^2$, 即 $x^2 = (2-x)^2 + (\sqrt{3})^2$, 解得 $x = \frac{7}{4}$. 所以 $CF = 2 - x = 2 - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}$ (cm).



3. (1) ①证明: 因为 AM 是边 BC 上的高, 所以 $\angle AMB = \angle AMC = 90^\circ$. 由翻折的性质, 得 $AE = AM = AD$, $\angle BAD = \angle BAM$, $\angle CAE = \angle CAM$, $\angle E = \angle AMC = 90^\circ$, $\angle D = \angle AMB = 90^\circ$. 因为 $\angle BAC = 45^\circ$, 所以 $\angle DAE = \angle BAD + \angle BAM + \angle CAM + \angle CAE = 90^\circ$, 所以四边形 $ADFE$ 是矩形, 又因为 $AE = AD$, 所以四边形 $ADFE$ 是正方形.

②12 提示: 由①可知, $DF = EF = AD = AM = 6$. 由翻折的性质, 得 $BM = BD$, $CM = CE$, 所以 $\triangle BCF$ 的周长为 $BC + BF + CF = BM + CM + BF + CF = BD + BF + CE + CF = DF + EF = 12$.

(2) 解: ①解法 1 如图 1, 延长 CD 至点 B' , 使 $DB' = PB$, 连接 AB' , AP , 作 $\angle PAB'$ 的平分线 AQ 交 CD 于点 Q , 作直线 PQ , 则直线 PQ 就是所求作的直线 l . 理由: 因为四边形 $ABCD$ 是正方形, 所以 $AB = AD$, $\angle B = \angle ADC = \angle C = 90^\circ = \angle ADB'$, 所以 $\triangle PCQ$ 是直角三角形. 又因为 $PB = B'D$, 所以 $\triangle ABP \cong \triangle ADB'$ (SAS), 所以 $AB' = AP$. 因为 $\angle PAQ = \angle B'AQ$, $AQ = AQ$, 所以 $\triangle PAQ \cong \triangle B'AQ$ (SAS), 所以 $PQ = B'Q$, 所以 $\triangle PCQ$ 的周长为 $CQ + CP + PQ = CQ + CP + B'Q = CQ + CP + DQ + DB' = CQ + DQ + CP + PB = CD + BC$, 即 $\text{Rt}\triangle PCQ$ 的周长等于正方形 $ABCD$ 周长的一半.

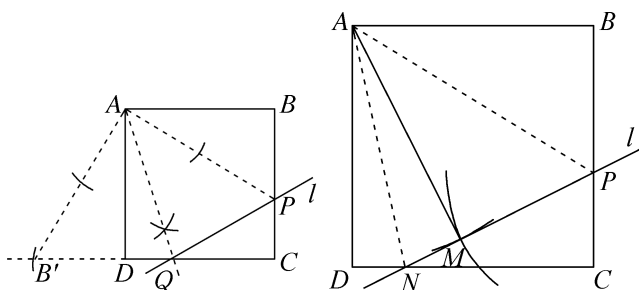


图 1

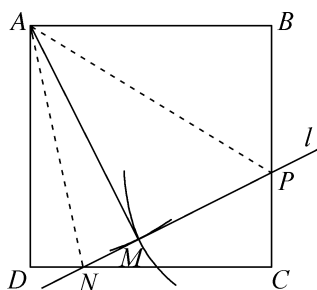


图 2

解法 2 如图 2, 以点 A 为圆心, AB 长为半径作弧, 再以点 P 为圆心, PB 长为半径作弧, 两弧交于点 M , 作直线 PM , 则直线 PM 就是所求作的直线 l . 理由: 设直线 PM 交边 CD 于点 N . 因为 $AB = AM$, $PB = PM$, $AP = AP$, 所以 $\triangle ABP \cong \triangle AMP$ (SSS), 所以 $\angle AMP = \angle B = 90^\circ$, 所以 $\angle AMN = 180^\circ - \angle AMP = 90^\circ = \angle D$. 因为 $AD = AB = AM$, $AN = AN$, 所以 $\text{Rt}\triangle ADN \cong \text{Rt}\triangle AMN$ (HL), 所以 $MN = DN$. 所以 $\triangle PCN$ 的周长为 $CN + CP + PN = CN + CP + PM + MN = CN + CP + PB + DN = CD + BC$, 即 $\text{Rt}\triangle PCN$ 的周长等于正方形 $ABCD$ 周长的一半.

②如图 3, 连接 AP , 作线段 AP 的垂直平分线交 AP 于点 O ; 以点 O 为圆心, AP 长为直径作 $\odot O$; 以点 A 为圆心, AB 长为半径作弧, 交 $\odot O$ 于点 G ; 作直线 PG , 则直线 PG 就是所求作的直线 l . 理由: 设直线 PG 交边 BC 于点 E , 交边 CD 于点 F , 连接 AE , AF . 因为 AP 为 $\odot O$ 的直径, 连接 OG , 则 $OA = OP = OG$, 所以 $\angle OAG = \angle OGA$, $\angle OPG = \angle OGP$. 由 $\triangle APG$ 的内角和, 得 $\angle OAG + \angle OPG + (\angle OGA + \angle OGP) = 180^\circ$, 所以 $\angle AGP = 90^\circ = \angle B$. 因为 $AB = AG$, $AE = AE$, 所以 $\text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle AGE$ (HL), 所以 $BE = GE$. 同理可证 $\text{Rt}\triangle ADF \cong \text{Rt}\triangle AGF$ (HL), 所以 $DF = GF$. 所以 $\triangle CEF$ 的周长为 $CE + CF + EF = CE + CF + GE + GF = CE + CF + BE + DF = CD + BC$, 即 $\text{Rt}\triangle CEF$ 的周长等于正方形 $ABCD$ 周长的一半.

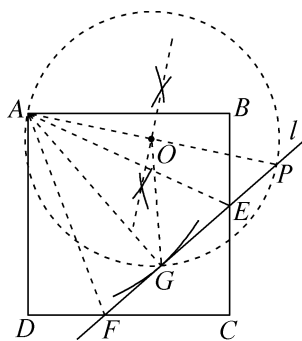


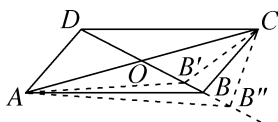
图 3

期末压轴 2

2025 年南京市秦淮区期末压轴题

1. D 提示: 由平行四边形的定义及判定定理可知, ①②, ①③, ②④, ③④, ⑤⑥ 均能判断四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 若 ① $AB \parallel CD$, 则 $\angle BCD + \angle ABC = 180^\circ$. 若 ⑦ $\angle BAD = \angle BCD$, 则 $\angle BAD + \angle ABC = 180^\circ$, 所以 $BC \parallel AD$, 所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 即 ①⑦ 能判断四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 同理, ①⑧, ②⑦, ②⑧ 也能判断四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 由四边形的内角和, 得 $\angle BAD + \angle ABC + \angle BCD +$

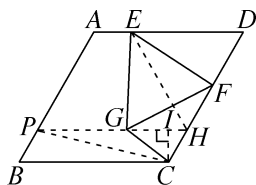
$\angle ADC = 360^\circ$. 若 ⑦ $\angle BAD = \angle BCD$, ⑧ $\angle ABC = \angle ADC$, 则 $\angle BAD + \angle ABC = 180^\circ$, $\angle BCD + \angle ABC = 180^\circ$, 所以 $BC \parallel AD$, $AB \parallel CD$, 所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 即 ⑦⑧ 能判断四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 若 ① $AB \parallel CD$, 则 $\angle OBA = \angle ODC$, $\angle OAB = \angle OCD$. 若 ⑤ $OA = OC$, 则 $\triangle ABO \cong \triangle CDO$ (AAS), 所以 $AB = CD$, 所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 即 ①⑤ 能判断四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 同理, ①⑥, ②⑤, ②⑥ 也能判断四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 若 ⑤ $OA = OC$, ⑧ $\angle ABC = \angle ADC$, 在射线 OB 上截取 $OB' = OD$, 连接 AB' , CB' , 则四边形 $AB'CD$ 为平行四边形, 所以 $\angle AB'C = \angle ADC$, 所以 $\angle ABC = \angle AB'C$, 则有点 B' 与点 B 重合, 理由: 如图, 假设两点不重合, 则由三角形外角的性质, 得 $\angle AB'O > \angle ABO > \angle AB''O$, $\angle CB'O > \angle CBO > \angle CB''O$, 所以 $\angle AB'O + \angle CB'O > \angle ABO + \angle CBO > \angle AB''O + \angle CB''O$, 即 $\angle AB'C > \angle ABC > \angle AB''C$, 此时 $\angle ADC > \angle ABC$ 或 $\angle ABC > \angle ADC$, 这与条件 $\angle ABC = \angle ADC$ 矛盾, 所以点 B' 只能与点 B 重合, 故 $OB = OD$, 所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 即 ⑤⑧ 能判断四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 同理, 由 ⑥⑦ 也能判断四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 综上所述, 可以得出“四边形 $ABCD$ 是平行四边形”这一结论的情况有 16 种.



2. $\sqrt{3} \leq d \leq 2\sqrt{21}$ 提示: 如图, 在边 CD 上截取 $DH = DE$, 连接 HG , 并延长交 AB 于点 P , 连接 EH . 因为四边形 $ABCD$ 是菱形, $AB = 10$, $\angle B = 60^\circ$, 所以 $BC = CD = AD = AB = 10$, $\angle D = \angle B = 60^\circ$, 所以 $\triangle EDH$ 是等边三角形, 所以 $EH = DH = DE = AD - AE = 8$, $\angle DEH = \angle DHE = 60^\circ$. 因为 $\triangle EFG$ 是等边三角形, 所以 $EG = EF$, $\angle FEG = 60^\circ$, 所以 $\angle HEG = \angle DEF$. 在

$$\triangle HEG \text{ 和 } \triangle DEF \text{ 中, } \begin{cases} EH = ED, \\ \angle HEG = \angle DEF, \text{ 所以 } \triangle HEG \cong \triangle DEF, \\ EG = EF, \end{cases}$$

$\triangle DEF$ (SAS), 所以 $\angle EHG = \angle D = 60^\circ$, $GH = FD$, 所以 $\angle PHC = 180^\circ - \angle EHG - \angle DHE = 60^\circ = \angle D$, 所以 $PH \parallel AD \parallel BC$, 又因为 $PB \parallel CH$, 所以四边形 $PBCH$ 是平行四边形, 所以 $PH = BC = CD = 10$. 当点 F 与点 D 重合时, 点 G 与点 H 重合; 当点 F 与点 C 重合时, 点 G 与点 P 重合. 所以点 G 的运动路径为线段 PH . 连接 PC , 过点 C 作 $CI \perp PH$ 于点 I , 则 $\angle CIH = \angle CIP = 90^\circ$. 在 $\text{Rt}\triangle CIH$ 中, $CH = CD - DH = 2$, $\angle CHI = 60^\circ$, 所以 $\angle HCI = 30^\circ$, 所以 $HI = \frac{1}{2} CH = 1$, 所以 $PI = PH - HI = 9$. 由勾股定理, 得 $CI = \sqrt{CH^2 - HI^2} = \sqrt{3}$, $PC = \sqrt{PI^2 + CI^2} = \sqrt{81 + 3} = 2\sqrt{21}$. 因为 $CI \leq CG \leq CP$, 所以 CG 的长度 d 的取值范围是 $\sqrt{3} \leq d \leq 2\sqrt{21}$.



3. 解: (1) $3\sqrt{2}$ 提示: 由 A, B, C, D 四点的坐标可知, O 为 $\square ABCD$ 对角线的交点, 所以点 O 到 BC, AD 的距离相等, 且均为 6, 点 O 到 AB, CD 的距离相等. 记 AB 与 y 轴的交点为 M , 因为 $AD = 12 = BD$, 所以 $\angle ABD = \angle BMO = 45^\circ$, 所以 $OM = OB = 6$. 在 $\text{Rt}\triangle OBM$ 中, 由勾股定理, 得 $BM = \sqrt{OB^2 + OM^2} = 6\sqrt{2}$. 设点 O 到边 AB 的距离为 h , 则 $S_{\triangle BOM} = \frac{1}{2} OB \cdot OM = \frac{1}{2} BM \cdot h$, 所以 $\frac{1}{2} \times 6 \times 6 = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} h$, 解得 $h = 3\sqrt{2}$. 因为 $3\sqrt{2} < 6$, 所以 $d(\text{点 } O, \square ABCD)$ 的值为 $3\sqrt{2}$.

(2) 如图 1. 若点 P 在 x 轴正半轴上且位于点 D 的左侧, 则点 Q 位于边 CD 上时, 点 P, Q 间距离最短. 过点 P_1 作 $P_1Q_1 \perp CD$ 于点 Q_1 . 因为 $d(\text{点 } P, \square ABCD) = 2$, 所以 $P_1Q_1 = 2$. 因为 $AB \parallel CD$, 所以 $\angle P_1DC = \angle ABD = 45^\circ$, 所以 $DQ_1 = P_1Q_1 = 2$, 在 $\text{Rt}\triangle P_1DQ_1$ 中, 由勾股定理, 得 $P_1D = \sqrt{DQ_1^2 + P_1Q_1^2} = 2\sqrt{2}$,

所以 $OP_1 = OD - P_1D = 6 - 2\sqrt{2}$, 所以点 P_1 的坐标为 $(6 - 2\sqrt{2}, 0)$. 若点 P 位于点 D 的右侧, 则点 Q 位于点 D 处时, 点 P, Q 间距离最短, 即 $P_2D = 2$. 所以 $OP_2 = OD + P_2D = 8$, 所以点 P_2 的坐标为 $(8, 0)$. 综上所述, 点 P 的坐标为 $(6 - 2\sqrt{2}, 0)$ 或 $(8, 0)$.

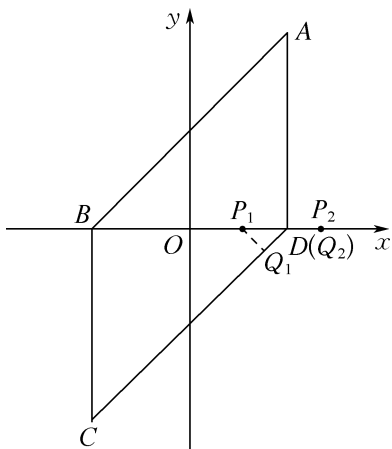


图 1

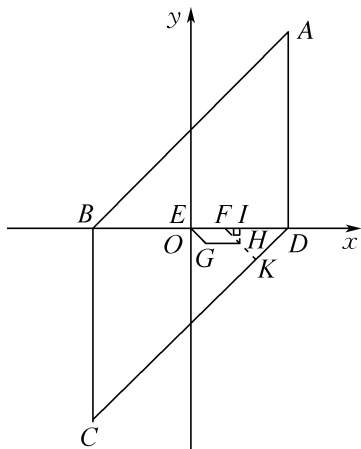


图 2

(3) ① $d(W, \square ABCD)$ 的值为 $\sqrt{2}$.

提示: 因为 $a = 0$, 所以点 $E(0, 0), F(2, 0), G(1, -1), H(3, -1)$. 如图 2, $\square EFHG$ 即为图形 W . 观察图形发现, 图形 W 上的点 H 到边 CD 的距离即为 $d(W, \square ABCD)$ 的值. 延长 FH , 交 CD 于点 K , 过点 H 作 $HI \perp BD$ 于点 I , 则 $EI = 3, HI = 1$, 所以 $FI = EI - EF = 1$, 所以 $FI = HI$, 所以 $\triangle HIF$ 是等腰直角三角形, 所以 $FH = \sqrt{FI^2 + HI^2} = \sqrt{2}$, 且 $\angle HFI = 45^\circ$. 又因为 $\angle BDC = 45^\circ$, 所以 $\angle DKF = 90^\circ, DK = FK$. 在

$\text{Rt}\triangle DFK$ 中, $DF = DE - EF = 4$. 由勾股定理, 得 $DK^2 + FK^2 = DF^2$, 即 $2FK^2 = 16$, 所以 $FK = 2\sqrt{2}$ (负值已舍). 所以 $HK = FK - FH = \sqrt{2}$, 即 $d(W, \square ABCD)$ 的值为 $\sqrt{2}$.

$$\textcircled{2} a \leq -5 - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 或 } a \geq 3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 或 } -3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \leq$$

$$a \leq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \text{提示: 由点 } E(a, -a), F(a+2, -a),$$

$G(a+1, -a-1), H(a+3, -a-1)$ 可知, 点 E, G 在直线 $y = -x$ 上, 点 F, H 在直线 $y = -x + 2$ 上, 易得四边形 $EFHG$ 为平行四边形且在平行线 EG 和 FH 间运动. 由点 $A(6, 12), B(-6, 0), C(-6, -12), D(6, 0)$ 可知, 直线 AB 的函数表达式为 $y = x + 6$, 直线 CD 的函数表达式为 $y = x - 6$. 易知 $AB \perp EG, AB \perp FH, CD \perp EG, CD \perp FH$.

分情况讨论: 如图 3, 当 $\square EFHG$ 在 $\square ABCD$ 外部左上方时, 则点 H 到边 AB 的距离为“最近距离”. 过点 H 作 $HN \parallel AB$, 交 y 轴于点 N , 设直线 AB 与 y 轴的交点为 M , 过点 M 作 $MI \perp HN$ 于点 I . 当 $d(W, \square ABCD) = 1$, 即 $HQ_1 = 1$ 时, 易知 $MI = 1, \triangle MNI$ 是等腰直角三角形, 所以 $MN = \sqrt{MI^2 + NI^2} = \sqrt{2}$, 所以直线 HN 的函数表达式为 $y = x + 6 + \sqrt{2}$, 联立, 得

$$\begin{cases} y = -x + 2, \\ y = x + 6 + \sqrt{2}, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ y = 4 + \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases} \quad \text{此时点 } H \left(-2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 4 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

即 $a + 3 = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, 解得 $a = -5 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. 观察图形, 发现当 $a \leq -5 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $d(W, \square ABCD) \geq 1$. 如图 4, 当 $\square EFHG$ 在 $\square ABCD$ 内部左上方时, 则点 E 到边 AB 的距离为“最近距离”. 当 $d(W, \square ABCD) = 1$, 即 $EQ_2 = 1$ 时, 同理, 得直线 EN 的函数表达式为 $y = x +$

$6 - \sqrt{2}$, 联立, 得

$$\begin{cases} y = -x, \\ y = x + 6 - \sqrt{2}, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x = -3 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ y = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases} \quad \text{此}$$

时点 $E\left(-3+\frac{\sqrt{2}}{2}, 3-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 即 $a = -3+\frac{\sqrt{2}}{2}$. 如图 5, 当

$\square EFHG$ 在 $\square ABCD$ 内部右下方时, 则点 H 到边 CD 的距离为“最近距离”. 当 $d(W, \square ABCD) = 1$, 即 $HQ_3 = 1$ 时, 同理, 得直线 HN 的函数表达式为 $y = x -$

$$6+\sqrt{2}, \text{ 联立, 得 } \begin{cases} y = -x + 2, \\ y = x - 6 + \sqrt{2}, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = 4 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ y = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases} \text{ 此}$$

时点 $H\left(4-\frac{\sqrt{2}}{2}, -2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 即 $a+3 = 4-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 解得 $a =$

$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 观察图形, 发现当 $-3+\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,

$d(W, \square ABCD) \geq 1$. 如图 6, 当 $\square EFHG$ 在 $\square ABCD$ 外部右下方时, 则点 E 到边 CD 的距离为“最近距离”. 当 $d(W, \square ABCD) = 1$, 即 $EQ_4 = 1$ 时, 同理, 得直线 EN 的

$$\text{函数表达式为 } y = x - 6 - \sqrt{2}, \text{ 联立, 得 } \begin{cases} y = -x, \\ y = x - 6 - \sqrt{2}, \end{cases} \text{ 解}$$

$$\text{得 } \begin{cases} x = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ y = -3 - \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases} \text{ 此时点 } E\left(3+\frac{\sqrt{2}}{2}, -3-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \text{ 即 } a =$$

$3+\frac{\sqrt{2}}{2}$. 观察图形, 发现当 $a \geq 3+\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $d(W, \square ABCD) \geq$

1. 综上所述, 当 $a \leq -5-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $a \geq 3+\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $-3+\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq$

$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $d(W, \square ABCD) \geq 1$.

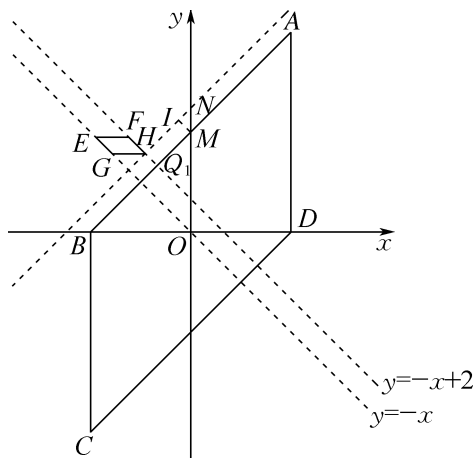


图 3

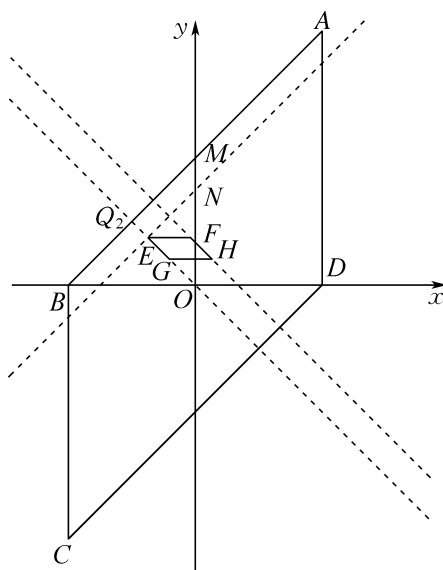


图 4

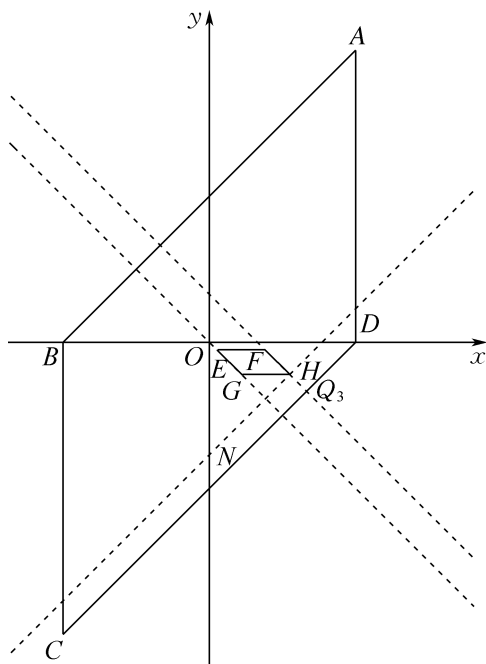


图 5

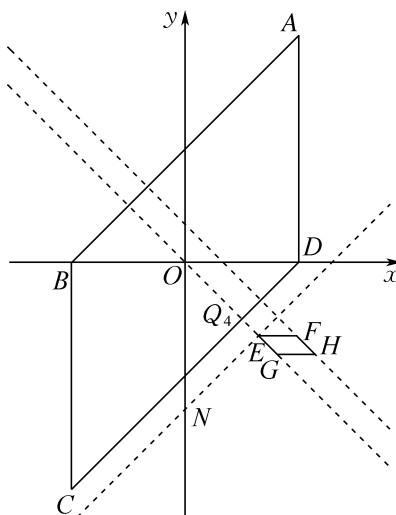
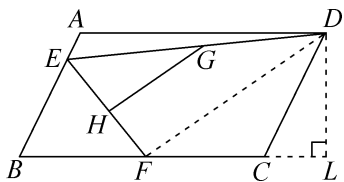


图 6

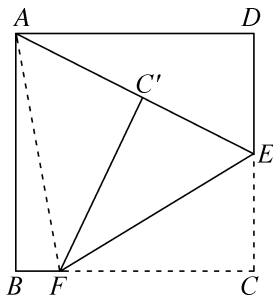
期末压轴 3

2025 年南京市联合体期末压轴题

1. C 提示:如图,连接 DF ,过点 D 作 $DL \perp BC$,交 BC 的延长线于点 L ,则 $\angle L = 90^\circ$. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $AB = 2, AD = 4, \angle A = 120^\circ$,所以 $BC = AD = 4, CD = AB = 2, \angle FCD = \angle A = 120^\circ$,所以 $\angle DCL = 180^\circ - \angle FCD = 60^\circ$,所以 $\angle CDL = 90^\circ - \angle DCL = 30^\circ$,所以 $CL = \frac{1}{2} CD = 1$,所以 $DL = \sqrt{CD^2 - CL^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. 因为 F 是边 BC 的中点,所以 $CF = BF = \frac{1}{2} BC = 2 = CD$,所以 $\angle LFD = \angle CDF = \frac{1}{2} \times (180^\circ - \angle FCD) = 30^\circ$,所以 $DL = \frac{1}{2} DF$. 因为 G, H 分别是 DE, EF 的中点,所以 $GH = \frac{1}{2} DF$,所以 $GH = DL = \sqrt{3}$.



2. $3 - \sqrt{5}$ 提示:连接 AE . 因为 $AC' + C'E \geq AE$,所以 $AC' \geq AE - C'E$. 当 A, C', E 三点依次共线时, AC' 的长最小. 如图,连接 AF . 因为四边形 $ABCD$ 为正方形,所以 $\angle D = \angle B = \angle C = 90^\circ, AD = BC = AB = CD = 4$. 因为 E 是边 CD 的中点,所以 $DE = CE = 2$,在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中,由勾股定理,得 $AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = 2\sqrt{5}$. 由翻折的性质,得 $C'E = CE = 2, C'F = CF, \angle EC'F = \angle C = 90^\circ = \angle AC'F$,所以 $AC' = AE - C'E = 2\sqrt{5} - 2$. 设 $BF = x$,则 $C'F = CF = 4 - x$. 根据勾股定理,得 $AC'^2 + C'F^2 = AF^2 = AB^2 + BF^2$,即 $(2\sqrt{5} - 2)^2 + (4 - x)^2 = 4^2 + x^2$,解得 $x = 3 - \sqrt{5}$,所以 $BF = 3 - \sqrt{5}$.



3. (1) 证明:因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以 $AB = BC = CD = AD, \angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$. 因为 $AE = BF$,所以 $AB - AE = BC - BF$,即 $BE = CF$,所以 $\triangle BEF \cong \triangle CFG$ (SAS),所以 $EF = FG$. 同理,得 $EF = FG = GH = EH$,所以四边形 $EFGH$ 是菱形. 因为 $\triangle BEF \cong \triangle CFG$,所以 $\angle BEF = \angle CFG$. 在 $\text{Rt}\triangle BEF$ 中, $\angle BEF + \angle BFE = 90^\circ$,所以 $\angle BFE + \angle CFG = 90^\circ$,所以 $\angle EFG = 90^\circ$,所以菱形 $EFGH$ 是正方形,即四边形 $EFGH$ 是四边形 $ABCD$ 的内接正方形.

(2) 解:(I) 如图1,连接 AC, BD 交于点 O ;过点 O 作 $OK \perp AD$ 于点 K ;以点 K 为圆心, OK 长为半径作圆,交直线 AD 于点 M, Q ;过点 M 作 $MN \perp BC$ 于点 N ,交边 AB 于点 E ,过点 Q 作 $QP \perp BC$ 于点 P ,交边 CD 于点 G ,则四边形 $MNPQ$ 为正方形(通过 $\angle QMN = \angle MNP = \angle NPQ = \angle PQM = 90^\circ, MQ = 2OK = MN$ 证明),且 $ME = PG$ [先通过 $\triangle OAM \cong \triangle OCP$ (SAS) 得到 $AM = CP$,再通过 $\triangle AME \cong \triangle CPG$ (ASA) 证得,或通过中心对称性证明];以点 N 为圆心, ME 长为半径作弧,交边 BC 于点 F ,以点 Q 为圆心, ME 长为半径作弧,交边 AD 于点 H ,则 $ME = NF = PG = QH$;连接 EF, FG, GH, HE ,同(1)可证,四边形 $EFGH$ 为正方形,故正方形 $EFGH$ 即为所求.

故不符合题意;矩形不满足邻边一定相等,故不符合题意.

(2) ①是.理由如下:

如图 1,过点 F 分别作 $FM \perp BC$ 于点 M , $FN \perp CD$ 于点 N , 则 $\angle FMC = \angle FNC = \angle FND = 90^\circ$. 因为四边形 $ABCD$ 为正方形, 所以 AC 平分 $\angle BCD$, $\angle BCD = 90^\circ$, 所以四边形 $CNFM$ 为矩形, 又因为 $FM \perp BC$, $FN \perp CD$, 所以 $FM = FN$, 所以矩形 $CNFM$ 为正方形, 所以 $\angle MFN = 90^\circ$, 所以 $\angle GFM + \angle NFG = 90^\circ$. 因为 $DF \perp FG$, 所以 $\angle DFN + \angle NFG = 90^\circ$, 所以 $\angle DFN = \angle GFM$, 所以 $\triangle DFN \cong \triangle GFM$ (ASA), 所以 $DF = GF$, 又因为 $\angle DFG + \angle DCG = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, 所以四边形 $CDFG$ 是“奇妙四边形”.

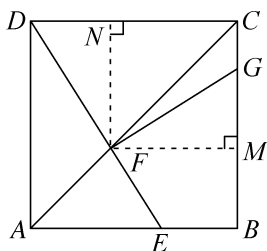


图 1

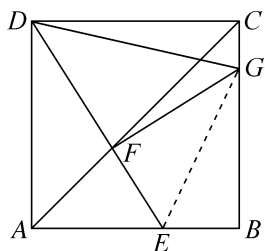


图 2

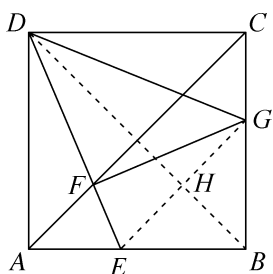


图 3

② $\triangle DFG$ 的面积为 $24 - 12\sqrt{3}$ 或 $12 - 6\sqrt{2}$.

提示: 因为 $FG \perp DE$, 所以 $\angle GFE = 90^\circ$, 所以 $\angle GFE + \angle B = 180^\circ$. 若四边形 $BGFE$ 是“奇妙四边形”, 则需要邻边相等, 分情况讨论: 若 $EF = BE$, 如图 2, 连接 EG . 因为 $EG = EG$, $EF = BE$, 所以 $\triangle EFG \cong \triangle EBG$ (HL), 所以 $FG = BG$. 由 ① 可知, $DF = FG$, 所以 $DF = FG = BG$. 设 $BG = x$, 则 $CG = 2\sqrt{3} - x$, $DF =$

$FG = x$, 所以 $DG = \sqrt{2}x$. 在 $\text{Rt}\triangle CDG$ 中, $DG^2 = CG^2 + CD^2$, 即 $(\sqrt{2}x)^2 = (2\sqrt{3} - x)^2 + (2\sqrt{3})^2$, 整理, 得 $x^2 + 4\sqrt{3}x - 24 = 0$, 配方, 得 $(x + 2\sqrt{3})^2 = 36$, 解得 $x = 6 - 2\sqrt{3}$ (负值已舍). 所以 $S_{\triangle DFG} = \frac{1}{2}x^2 = 24 - 12\sqrt{3}$. 若 $FG = GB$, 同 $EF = BE$. 若 $FG = EF$, 由 ① 可知, $DF \perp FG$, $DF = FG$, 则 $DF = FG = EF$, 所以 $\angle FDG = \angle FGD = 45^\circ$, $\angle FEG = \angle FGE = 45^\circ$, 所以 $\angle FDG = \angle FEG$, $\angle FGD + \angle FGE = 90^\circ$, 所以 $DG = EG$, 且 $\angle EGD = 90^\circ$, 所以 $DE = \sqrt{2}DG$. 因为 $DG \geq CD$, 所以 $\sqrt{2}DG \geq \sqrt{2}CD = BD$, 所以 $DE \geq BD$. 因为点 E 在边 AB 上, 且不与点 A, B 重合, 所以 $DE < BD$, 因此上述情况不存在. 若 $BE = BG$, 如图 3, 连接 EG, BD 交于点 H . 因为四边形 $ABCD$ 为正方形, 所以 $AB = BC = CD = AD = 2\sqrt{3}$, $\angle BCD = \angle ABC = \angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$, BD 平分 $\angle ADC$, 所以 $\angle ADB = 45^\circ = \angle ADE + \angle BDE$. 因为 $\angle FDG = 45^\circ = \angle BDG + \angle BDE$, 所以 $\angle ADE = \angle BDG$. 因为 $BE = BG$, BD 平分 $\angle ABC$, 所以 $BH \perp EG$, $EH = GH$. 因为 $AB = BC$, $BE = BG$, 所以 $AE = CG$. 又因为 $AD = CD$, $\angle EAD = \angle GCD = 90^\circ$, 所以 $\triangle DAE \cong \triangle DCG$ (SAS), 所以 $\angle ADE = \angle CDG$, 所以 $\angle CDG = \angle BDG$. 又因为 $\angle GCD = \angle GHD = 90^\circ$, $GD = GD$, 所以 $\triangle GCD \cong \triangle GHD$ (AAS), 所以 $CG = HG$. 设 $CG = x$, 则 $BH = HG = x$, $BG = 2\sqrt{3} - x$. 在 $\text{Rt}\triangle BHG$ 中, 由勾股定理, 得 $BG^2 = BH^2 + HG^2$, 即 $(2\sqrt{3} - x)^2 = x^2 + x^2$, 解得 $x = 2\sqrt{6} - 2\sqrt{3}$ (负值已舍). 在 $\text{Rt}\triangle CDG$ 中, 由勾股定理, 得 $DG^2 = CD^2 + CG^2 = (2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{6} - 2\sqrt{3})^2 = 48 - 24\sqrt{2}$. 所以 $S_{\triangle DFG} = \frac{1}{2}DF^2 = \frac{1}{4}DG^2 = 12 - 6\sqrt{2}$. 综上所述, $\triangle DFG$ 的面积为 $24 - 12\sqrt{3}$ 或 $12 - 6\sqrt{2}$.

期末压轴 5

2025 年无锡市期末压轴题

1. D 提示: 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 所以 $AB \parallel CD$, $AB = CD$, $DA \parallel BC$, $DA = BC$. 设点 P

到边 AB, BC, CD, DA 的距离分别是 h_1, h_2, h_3, h_4 , 点 C 到边 AB, DA 的距离分别为 h_{AB}, h_{DA} , 则 $h_{AB} = h_1 + h_3, h_{DA} = h_2 + h_4$. 因为 $S = S_{\square ABCD} = AB \cdot h_{AB} = DA \cdot h_{DA}$, 所以 $S_1 + S_3 = \frac{1}{2} AB \cdot h_1 + \frac{1}{2} CD \cdot h_3 = \frac{1}{2} AB \cdot (h_1 + h_3) = \frac{1}{2} AB \cdot h_{AB} = \frac{1}{2} S, S_2 + S_4 = \frac{1}{2} BC \cdot h_2 + \frac{1}{2} DA \cdot h_4 = \frac{1}{2} DA \cdot (h_2 + h_4) = \frac{1}{2} DA \cdot h_{DA} = \frac{1}{2} S$, 所以 $S_1 + S_3 = S_2 + S_4 = \frac{1}{2} S$, 故①正确. 因为 $S_2 = 3S_4$, 所以 $S_2 + S_4 = 4S_4 = \frac{1}{2} S$, 所以 $S = 8S_4$, 故②正确. 因为点 P 在对角线 BD 上, 所以 $S_1 : S_4 = PB : PD, S_2 : S_3 = PB : PD$, 所以 $S_1 : S_4 = S_2 : S_3$, 所以 $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$, 故③正确. 由 $S_1 - S_2 = S_3 - S_4$, 得 $S_1 + S_4 = S_2 + S_3$. 又因为 $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S$, 所以 $S_1 + S_4 = \frac{1}{2} S = S_{\triangle ABD}$, 所以点 P 一定在对角线 BD 上, 故④正确.

2. $(0, 6) \quad (2, -5)$ 或 $(2, 5)$ 或 $(-2, 7)$

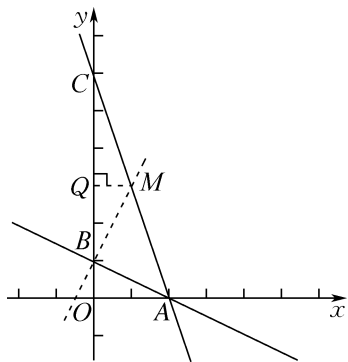
提示: 如图, 过点 B 作 $BM \perp BA$ 于点 B , 交直线 AC 于点 M , 过点 M 作 $MQ \perp y$ 轴于点 Q , 则 $\angle ABO = 90^\circ - \angle MBQ = \angle BMQ$. 由旋转的性质可知, $\angle BAM = 45^\circ$, 所以 $BA = MB$. 在 $\triangle ABO$ 和 $\triangle BMQ$ 中,

$$\begin{cases} \angle AOB = \angle BQM, \\ \angle ABO = \angle BMQ, \text{ 所以 } \triangle ABO \cong \triangle BMQ \text{ (AAS), 所以} \\ AB = BM, \end{cases}$$

$AO = BQ, BO = MQ$. 易得点 $A(2, 0), B(0, 1)$, 所以 $OA = 2, OB = 1$, 所以 $BQ = 2, MQ = 1$, 所以 $OQ = 3$, 所以点 $M(1, 3)$, 设直线 AC 的函数表达式为 $y = kx + b (k \neq 0)$, 所以

$$\begin{cases} k + b = 3, \\ 2k + b = 0, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k = -3, \\ b = 6. \end{cases} \text{ 故直线 } AC \text{ 的}$$

函数表达式为 $y = -3x + 6$, 故点 $C(0, 6)$.



设点 $P(m, n)$. 当以 P, A, B, C 为顶点的四边形是平行四边形时, 则可分以下几种情况:

①当以 AB 为对角线时, $2 + 0 = m + 0, 0 + 1 = 6 + n$, 所以 $m = 2, n = -5$, 所以点 $P(2, -5)$.

②当以 AC 为对角线时, $2 + 0 = m + 0, 0 + 6 = 1 + n$, 所以 $m = 2, n = 5$, 所以点 $P(2, 5)$.

③当以 BC 为对角线时, $0 + 0 = m + 2, 6 + 1 = 0 + n$, 所以 $m = -2, n = 7$, 所以点 $P(-2, 7)$.

综上所述, 当以 P, A, B, C 为顶点的四边形是平行四边形时, 则点 P 的坐标为 $(2, -5)$ 或 $(2, 5)$ 或 $(-2, 7)$.

3. 解: (1) 连接 HF . 因为四边形 $ABCD$ 是矩形, 所以 $\angle D = \angle B = 90^\circ, AD \parallel BC, CD = AB = 9$, 所以 $\angle DHF = \angle HFB$. 因为四边形 $EFGH$ 是平行四边形, 所以 $GH = EF, GH \parallel EF$, 所以 $\angle GHF = \angle HFE$, 所以 $\angle DHF - \angle GHF = \angle HFB - \angle HFE$, 即 $\angle DHG = \angle BFE$, 所以 $\triangle DHG \cong \triangle BFE$ (AAS), 所以 $DG = BE = 3$, 所以 $GC = CD - DG = 9 - 3 = 6$.

(2) 如图 1, 四边形 $EFGH$ 即为所求作的内接菱形. 提示: 由(1)可知, $\triangle DHG \cong \triangle BFE$, 所以 $DG = BE$, 故可作 $DG = BE$, 连接 EG , 作 EG 的垂直平分线, 交 AD, BC 于点 H, F , 则四边形 $EFGH$ 即为所求作的内接菱形 $EFGH$.

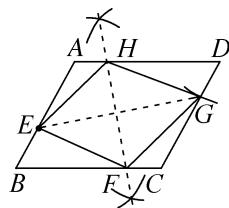


图 1

(3) 过点 E 作 $EP \perp BC$ 于点 P . 在 $\text{Rt}\triangle BEP$ 中, 因为 $\angle B = 45^\circ, BE = \sqrt{2}$, 所以 $BP = EP = 1$. 在 $\text{Rt}\triangle FEP$ 中, 由勾股定理, 得 $PF = \sqrt{EF^2 - EP^2} = \sqrt{EF^2 - 1^2}$, 所以 $BF = BP + PF = 1 + \sqrt{EF^2 - 1^2}$, 故当 EF 长最小时, BF 长最小. 因为四边形 $EFGH$ 是菱形, 所

以 $EF=EH$, 即当 EH 长最小时, BF 长最小. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 所以 $AD \parallel BC$, $\angle BAD = 180^\circ - \angle B = 135^\circ$, 所以 $EH \geq AE$. 如图 2, 当点 A 与点 H 重合时, EH 长最小, 最小值为 AE 长, 此时点 F 与点 C 重合, BF 长最小. 此时 $EC = AE = 4$, 所以 $PF = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$, 所以 $BC = BF = BP + PF = 1 + \sqrt{15}$, 即当线段 BF 最短时, BC 的长为 $1 + \sqrt{15}$.

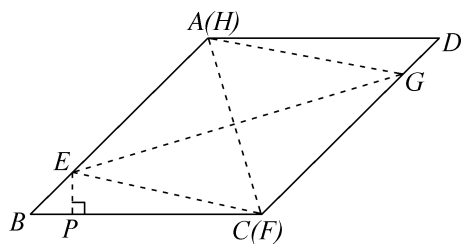


图 2

期末压轴 6

2025 年常州市期末压轴题

1. $10 \frac{10}{11}$ 提示: 因为 $\sqrt{1+1+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{1 \times 2}$, $\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{49}{36}} = \frac{7}{6} = 1 + \frac{1}{2 \times 3}$, $\sqrt{1+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{169}{144}} = \frac{13}{12} = 1 + \frac{1}{3 \times 4}$, \dots , 所以 $S_1 = 1 + \frac{1}{1 \times 2} = 1 + 1 - \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2}$, $S_2 = 1 + \frac{1}{1 \times 2} + 1 + \frac{1}{2 \times 3} = 2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 3 - \frac{1}{3}$, $S_3 = 1 + \frac{1}{1 \times 2} + 1 + \frac{1}{2 \times 3} + 1 + \frac{1}{3 \times 4} = 3 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 4 - \frac{1}{4}$, \dots , 所以 $S_{10} = 11 - \frac{1}{11} = 10 \frac{10}{11}$.

2. 解: (1) $EF=BC$. 理由如下:

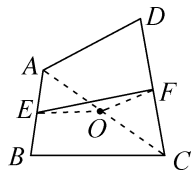
因为 $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, 所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 所以 $AB=CD$. 因为 E, F 分别是边 AB, CD 的中点, 所以 $BE =$

$\frac{1}{2}AB, CF = \frac{1}{2}CD$. 所以 $BE=CF$. 所以四边形 $EBCF$ 是平行四边形. 所以 $EF=BC$.

(2) ① 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形 $EF = \frac{1}{2}(AD+BC)$

② 因为 $AD \parallel BC$, 所以 $\angle DAF = \angle P$. 因为 F 是 CD 的中点, 所以 $DF=CF$. 在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle PCF$ 中, $\begin{cases} \angle DAF = \angle P, \\ \angle AFD = \angle PFC, \\ DF = CF, \end{cases}$ 所以 $\triangle ADF \cong \triangle PCF$ (AAS). 所以 $AF=PF, AD=PC$. 又因为 E 是 AB 的中点, 所以 $EF = \frac{1}{2}BP = \frac{1}{2}(AD+BC)$.

(3) $\frac{1}{2}(m+n)$ 提示: 如图, 连接 AC , 取 AC 中点 O , 连接 OE, OF . 因为 E 为 AB 的中点, 所以 OE 为 $\triangle ABC$ 的中位线, 所以 $OE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}n$, 同理可得 $OF = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}m$. 由图可得 $EF \leq OE + OF = \frac{1}{2}(m+n)$, 当且仅当 E, O, F 三点共线时取等号.



期末压轴 7

2025 年镇江市期末压轴题

1. (1) $\frac{2}{x-1}$ 提示: 由题意, 得 $m_5 = \frac{m_{5-1}+1}{m_{5-2}} = \frac{x+1}{x-1} + 1 = \frac{x+1+x-1}{x-1} = \frac{2x}{x-1}$.

(2) $\frac{x+1}{x-1}$ 提示: 由题可知, $m_1=1, m_2=x-1$,

$$m_3 = x, m_4 = \frac{x+1}{x-1}, m_5 = \frac{2}{x-1}, m_6 = \frac{\frac{2}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}} = 1,$$

$$m_7 = \frac{1+1}{\frac{2}{x-1}} = x-1, \dots, \text{所以 } m_n \text{ 的结果以 } 1, x-1, x,$$

$$\frac{x+1}{x-1}, \frac{2}{x-1}, 5 \text{ 个为一组进行循环. 因为 } 2\ 024 \div 5 =$$

$$404 \dots 4, \text{ 所以 } m_{2\ 024} = m_4 = \frac{x+1}{x-1}.$$

(3) 解: 由(2)可知, $m_9 = m_4 = \frac{x+1}{x-1},$

$$m_{10} = m_5 = \frac{2}{x-1}, \text{ 所以 } \frac{m_9}{m_{10}} = \frac{x+1}{2} = 2, \text{ 解得}$$

$$x=3, \text{ 所以 } m_9 = \frac{x+1}{x-1} = \frac{3+1}{3-1} = 2.$$

(4) 4 提示: 因为 $2\ 020 \div 5 = 404, 2\ 030 \div 5 =$

$$406, \text{ 所以 } m_{2\ 020} = m_{2\ 030} = m_5 = \frac{2}{x-1}, \text{ 所以 } m_{2\ 020} +$$

$$m_{2\ 030} = \frac{4}{x-1}, \text{ 随着 } x \text{ 值的增大, } x-1 \text{ 的值也增大,}$$

$$\frac{4}{x-1} \text{ 的值越来越小. 因为 } x \geq 2, \text{ 所以当 } x=2 \text{ 时, } x-$$

$$1=1, \text{ 此时 } \frac{4}{x-1} \text{ 有最大值, 最大值为 } 4.$$

2. (1) $BF = \frac{1}{3}BC$ 提示: 因为点 B' 落在线

段 BC 上, 且 $CB' = \frac{1}{3}CB$, 所以 $BB' = \frac{2}{3}BC$, 由折叠的

性质, 得 $BF = B'F$, 所以 $BF = \frac{1}{2}BB'$, 所以 $BF =$

$$\frac{1}{3}BC.$$

(2) ① $\frac{29}{10}$ 提示: 因为 $CD=4, B'$ 恰好为 CD 的

中点, 所以 $CB' = \frac{1}{2}CD = 2$. 由折叠的性质, 得 $BF =$

$B'F$. 因为 $CB=5$, 所以 $CF = CB - BF = 5 - BF$. 因为

$\angle C=90^\circ$, 所以 $CF^2 + B'C^2 = B'F^2$, 即 $(5 - BF)^2 + 2^2 =$

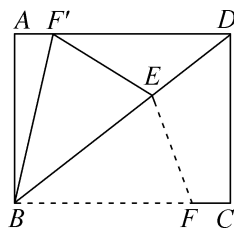
$$BF^2, \text{ 解得 } BF = \frac{29}{10}.$$

② 证明: 因为 $BC \perp CD, EB' \perp CD$, 所以

$EB' \parallel BC$, 所以 $\angle DEB' = \angle DBC$. 由折叠的性质, 知 $\angle DBC = \angle EB'F$, 所以 $\angle DEB' = \angle EB'F$, 所以 $B'F \parallel BD$, 所以四边形 $BFB'E$ 是平行四边形. 又因为 $BF = B'F$, 所以 $\square BFB'E$ 是菱形.

(3) $3 - \sqrt{3}$ 提示: 由对称的性质, 得 $B'E = BE = 2\sqrt{3}$, $\angle EB'F = \angle DBC = 30^\circ$. 因为 EB' 平分 $\angle FB'D$, 所以 $\angle DB'E = \angle EB'F = 30^\circ$. 因为四边形 $ABCD$ 为矩形, 所以 $\angle C = 90^\circ$, 所以 $\angle BDC = 90^\circ - \angle DBC = 60^\circ$, 所以 $\angle DB'E + \angle B'DE = 90^\circ$, 所以 $\angle B'ED = 90^\circ$, 所以 $B'D = 2DE$. 由勾股定理, 得 $DE^2 + B'E^2 = B'D^2$, 即 $DE^2 + (2\sqrt{3})^2 = 4DE^2$, 解得 $DE = 2$ (负值已舍), 所以 $B'D = 4$, 所以 $BD = BE + DE = 2\sqrt{3} + 2$, 所以 $CD = \frac{1}{2}BD = \sqrt{3} + 1$, 所以 $CB' = B'D - CD = 3 - \sqrt{3}$.

(4) $\frac{9}{10}$ 提示: 如图, 因为四边形 $ABCD$ 为矩形, 所以 $AD \parallel BC$, 所以 $\angle ADB = \angle CBD$. 由翻折的性质, 得 $\angle F'BD = \angle CBD$, 所以 $\angle ADB = \angle F'BD$, 所以 $BF' = DF'$. 设 $AF' = x$. 因为 $AD = CB = 5$, 所以 $BF' = DF' = 5 - x$. 因为 $\angle A = 90^\circ$, 所以 $AB^2 + AF'^2 = BF'^2$. 因为 $AB = CD = 4$, 所以 $4^2 + x^2 = (5 - x)^2$, 解得 $x = \frac{9}{10}$, 所以 $AF' = \frac{9}{10}$.



期末压轴 8

2025 年南通市期末压轴题

1. B 提示: 在 $\square ABCD$ 中, $AB = x$, 设 $BC = a$, $AC = b$, 则 $y = x + a + b, x > 0, a > 0, b > 0$. 因为 $a + b > x$, 所以 $y = x + a + b > 2x$, 所以对于任意平行四边形

ABCD, 坐标 (x, y) 位于直线 $y=2x$ 的上方, 不可能位于区域 I 中, 故①正确. 若 $\square ABCD$ 是矩形, 则 $\angle B=90^\circ$. 当 $a>x$ 时, $\angle B>\angle BAC>\angle ACB$, 所以 $b>a>x$, 所以 $x+a+b>3x$, 所以 $y>3x$, 所以对于任意矩形 ABCD, 坐标 (x, y) 位于直线 $y=3x$ 的上方, 可能位于区域 IV 中, 故②正确. 若 $\square ABCD$ 是菱形, $AB=x$, 则 $a=BC=AB=x, y=x+x+b=2x+b, x>0, b>0$. 因为 $BC+AB>AC$, 即 $b<2x$, 所以 $y<4x$, 所以对于任意菱形 ABCD, 坐标 (x, y) 位于直线 $y=4x$ 的下方, 不可能位于区域 IV 中, 故③错误. 若 $\square ABCD$ 是正方形, $AB=x$, 则 $BC=AB=x, AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{2}x$, 所以 $y=x+x+\sqrt{2}x=(2+\sqrt{2})x$. 因为 $3<2+\sqrt{2}<4, x>0$, 所以 $3x<y<4x$, 所以对于任意正方形 ABCD, 坐标 (x, y) 位于直线 $y=4x$ 的下方、直线 $y=3x$ 的上方, 一定位于区域 III 中, 故④正确.

2. (1) 证明: 因为 $FH\parallel BE$, 所以 $\angle OFH=\angle OEG, \angle FHO=\angle EGO$. 因为 O 是 EF 的中点, 所以 $OE=OF$, 所以 $\triangle FOH\cong\triangle EOG$ (AAS), 所以 $FH=EG$, 所以四边形 $EGFH$ 是平行四边形. 因为 $OG\perp EF$, 所以四边形 $EGFH$ 是菱形.

(2) 解: 小明和小华的思路能求出 DG 的长. 理由如下:

如图 1, 因为四边形 $ABCD$ 是菱形, 所以 $\angle ADC=\angle ABC=60^\circ, BC=CD=AB=3, AD\parallel BC$, 所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 所以 $\angle BAC=60^\circ$. 因为 $BE\perp AB$, 所以 $\angle ABE=90^\circ$, 所以 $\angle CBG=90^\circ-\angle ABC=30^\circ, \angle AEB=90^\circ-\angle BAC=30^\circ$. 由(1)知, 四边形 $EGFH$ 是菱形, 所以 $EG=FG$, 所以 $\angle GFE=\angle AEB=30^\circ$, 所以 $\angle BGC=\angle AEB+\angle GFE=60^\circ$, 所以 $\angle BCG=90^\circ$, 所以 $\angle AMC=\angle BCG=90^\circ$, 所以 $\angle CMD=90^\circ$. 因为 $CD=AB=3, \angle ADC=\angle ABC=60^\circ$, 所以 $\angle DCM=30^\circ, DM=\frac{1}{2}CD=$

$\frac{3}{2}$, 所以 $CM=\sqrt{CD^2-DM^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 因为 $BC=AB=3$, 可知 $2CG=BG$, 所以 $CG^2+3^2=4CG^2$, 所以 $CG=\sqrt{3}$. 因为 $GM=CM+CG=\frac{5\sqrt{3}}{2}$, 所以 $DG=\sqrt{GM^2+DM^2}=\sqrt{21}$. 所以小明的思路能求出 DG 的长. 易得 $\angle BCN=\angle ADC=60^\circ, \angle CBG=30^\circ$, 所以 $\angle BNC=90^\circ$, 所以 $\angle DNG=90^\circ$. 易得 $\angle NCG=30^\circ$, 所以 $GN=\frac{1}{2}CG=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 因为 $DN=CD+CN=3+\frac{1}{2}BC=\frac{9}{2}$, 所以 $DG=\sqrt{DN^2+GN^2}=\sqrt{21}$. 所以小华的思路能求出 DG 的长.

小红的方法:

如图 1, 连接 AG . 易证 $\triangle ACD$ 是等边三角形, 所以 $AC=CD=AB, \angle ACD=60^\circ$, 所以 $\angle ACB=\angle ABC=60^\circ$, 所以 $\angle ACG=\angle ACB+\angle BCG=150^\circ$, 所以 $\angle DCG=360^\circ-\angle ACD-\angle ACG=150^\circ$, 所以 $\angle ACG=\angle DCG$. 因为 $CG=CG$, 所以 $\triangle ACG\cong\triangle DCG$ (SAS), 所以 $DG=AG$. 因为 $BG=2CG=2\sqrt{3}$, 所以 $AG=\sqrt{AB^2+BG^2}=\sqrt{3^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{21}$, 所以 $DG=\sqrt{21}$.

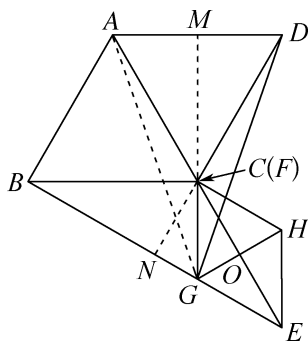


图 1

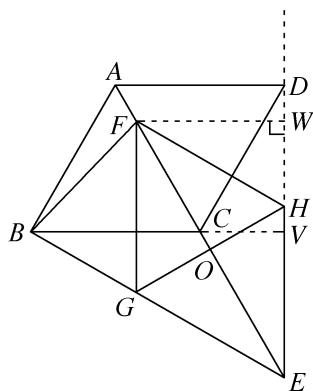


图 2

(3) 解: 存在. 如图 2, 过点 F 作 $FW\perp EH$, 交 EH 的延长线于点 W , 延长 BC , 交 EH 于点 V . 由(2)可知, $\angle FEH=\angle FEG=$

30° , 所以 $\angle BEV = 60^\circ$. 与 (2) 同理, $\angle CBG = 30^\circ$, 所以 $\angle BVE = 90^\circ$, 即 $BV \perp EH$. 在 $\text{Rt}\triangle EFW$ 中, $\angle FEW = 30^\circ$, 所以 $FW = \frac{1}{2}EF = OE$, 所以 $FB + OE = FB + FW \geq BV$, 所以当点 F 在 C 点处, $FB + OE$ 的值最小, 最小值为 BV 的长. 因为 $\angle CBE = \angle CEB$, 所以 $CE = CB = 3$, 所以 $CV = \frac{1}{2}CE = \frac{3}{2}$, 所以 $BV = BC + CV = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$, 所以 $(FB + OE)_{\text{最小值}} = \frac{9}{2}$.

期末压轴 9

2025 年盐城市期末压轴题

1. 2 提示: 过点 B 作 $BH \perp OB$ 交 CD 于点 H , 连接 OH, AH . 因为四边形 $ABCD$ 是矩形, 所以 $AB \perp AD, AB \parallel CD$, 所以 $S_{\triangle ABH} = \frac{1}{2}AB \cdot AD = \frac{1}{2}S_{\text{矩形}ABCD} = 12$. 因为 $BH \perp OB$, 所以 $BH \parallel OA$, 所以 $S_{\triangle OBH} = \frac{1}{2}OB \cdot BH = S_{\triangle ABH} = 12$. 因为点 $B(0, 4)$, 所以 $OB = 4$, 所以 $BH = 6$. 取 BH 的中点 M , 连接 CM, OM , 则 $BM = MH = 3$. 由矩形的性质, 可得 $\angle BCH = 90^\circ$, 所以 $CM = \frac{1}{2}BH = 3 = MH$, 所以 $\angle MCH = \angle MHC$. 在 $\text{Rt}\triangle OBM$ 中, 由勾股定理, 可得 $OM = \sqrt{OB^2 + BM^2} = 5$. 所以 $OM + CM = 3 + 5 = 8 = OC$, 所以 O, C, M 三点共线. 因为 $AB \parallel CD$, 所以 $\angle MCH = \angle MEB, \angle MHC = \angle MBE$, 所以 $\angle MEB = \angle MBE$, 所以 $ME = MB = 3$, 所以 $OE = OM - ME = 2$.

2. (1) ① $\frac{b}{a+n} < \frac{b}{a}$ ② $\frac{b+n}{a+n} > \frac{b}{a}$

$$\frac{b+n}{a+n} > \frac{b}{a}$$

(2) 证明: $\frac{b+n}{a+n} - \frac{b}{a} = \frac{a(b+n) - b(a+n)}{a(a+n)} =$

$\frac{n(a-b)}{a(a+n)}$. 因为 $a > b > 0, n > 0$, 所以 $a - b > 0$,

$a+n > 0$, 所以 $\frac{n(a-b)}{a(a+n)} > 0$, 所以 $\frac{b+n}{a+n} - \frac{b}{a} > 0$, 所以 $\frac{b+n}{a+n} > \frac{b}{a}$.

(3) 解: 因为 $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = k$, 所以 $b_1 = a_1k, b_2 = a_2k$, 所以 $\frac{b_1+b_2}{a_1+a_2} = \frac{a_1k+a_2k}{a_1+a_2} = \frac{k(a_1+a_2)}{a_1+a_2} = k$.

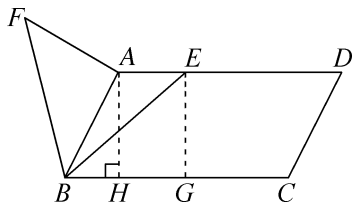
(4) 证明: 由现象 1, 得 $\frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{b+c} < \frac{2a}{a+b+c}$ ①, $\frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{a+c} < \frac{2b}{a+b+c}$ ②, $\frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{a+b} < \frac{2c}{a+b+c}$ ③. 由 ①+②+③, 得 $\frac{a+b+c}{a+b+c} < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < \frac{2(a+b+c)}{a+b+c}$, 即 $1 < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2$.

期末压轴 10

2025 年泰州市期末压轴题

1. $\frac{2\sqrt{21}}{3}$ 提示: 如图, 过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H , 在 BC 上截取 $BG = BA$, 连接 EG . 因为 BE 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到 BF , 所以 $BF = BE, \angle EBF = 60^\circ$. 因为 $\angle ABC = 60^\circ$, 所以 $\angle EBF - \angle ABE = \angle ABC - \angle ABE$, 即 $\angle ABF = \angle GBE$. 在 $\triangle BAF$ 和 $\triangle BGE$ 中, $\begin{cases} BF = BE, \\ \angle ABF = \angle GBE, \text{ 所以 } \triangle BAF \cong \triangle BGE \\ BA = BG, \end{cases}$ (SAS), 所以 $AF = GE$. 当 $GE \perp AD$ 时, GE 长最小, 即 AF 长最小, 而 AF 长的最小值为 $\sqrt{7}$, 所以 G 点到 AD 的距离为 $\sqrt{7}$. 因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 所以 $AD \parallel BC$, 所以 $AH = \sqrt{7}$. 在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 中, 因为 $\angle ABH = 60^\circ$, 所以 $\angle BAH = 30^\circ$, 所以 $AB = 2BH$. 由勾股定理, 得 $AH^2 + BH^2 = AB^2$, 即 $7 + BH^2 = 4BH^2$, 解得 $BH = \frac{\sqrt{21}}{3}$ (负值已舍), 所以 $AB = 2BH =$

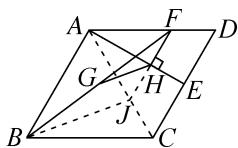
$$\frac{2\sqrt{21}}{3}.$$



2. $\frac{4\sqrt{3}}{5}$ 提示:如图,连接AC,延长FH交AC

于点J,连接BJ.因为四边形ABCD是菱形, $\angle BAD=120^\circ$,所以 $AB=BC=CD=AD$, $\angle BAC=\angle CAD=60^\circ$,所以 $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ 都是等边三角形.因为 $\angle DAE=30^\circ$,所以 $\angle CAE=\angle DAE=30^\circ$,所以 $AE \perp CD$.因为 $AE \perp FJ$,所以 $FJ \parallel CD$,所以 $\angle AJF=\angle ACD=60^\circ$, $\angle AFJ=\angle D=60^\circ$,所以 $\triangle AFJ$ 是等边三角形.又因为 $AH \perp FH$,所以 $FH=HJ$.因为G是BF的中点,所以 $GH=\frac{1}{2}BJ$.当 $BJ \perp AC$ 时,BJ的值

最小,即GH的值最小,此时 $BJ=2GH=\frac{6}{5}$.因为 $\angle BAJ=60^\circ$, $\angle BJA=90^\circ$,所以 $\angle ABJ=30^\circ$,所以 $AB=2AJ$.因为 $AB^2=AJ^2+BJ^2$,所以 $4AJ^2=AJ^2+(\frac{6}{5})^2$,所以 $AJ=\frac{2\sqrt{3}}{5}$,所以 $AB=\frac{4\sqrt{3}}{5}$.



3. (1) ①证明:由折叠的性质,得 $\angle A=\angle E$.因为 $DE \parallel BC$,所以 $\angle E=\angle ECB$,所以 $\angle A=\angle ECB$.因为 $\angle ACB=90^\circ$,所以 $\angle A+\angle B=90^\circ$,所以 $\angle ECB+\angle B=90^\circ$,所以 $\angle CFB=90^\circ$,所以 $CE \perp AB$.

②解:因为 $\angle ACB=90^\circ$, $BC=3$, $AC=4$,所以由勾股定理,得 $AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$.由①,得 $CE \perp AB$.所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC \cdot AC=\frac{1}{2}AB \cdot CF$,所以 $CF=\frac{12}{5}$,所以 $BF=$

$\sqrt{BC^2-CF^2}=\sqrt{3^2-(\frac{12}{5})^2}=\frac{9}{5}$.由折叠的性质,得 $CE=AC=4$,所以 $EF=CE-CF=4-\frac{12}{5}=\frac{8}{5}$.设 $AD=x$,则 $DE=x$,所以 $DF=AB-AD-BF=5-x-\frac{9}{5}=\frac{16}{5}-x$.在 $Rt\triangle DEF$ 中, $DF^2+EF^2=DE^2$,所以 $(\frac{16}{5}-x)^2+(\frac{8}{5})^2=x^2$,解得 $x=2$,所以 $BD=AB-AD=5-2=3$.

(2) 解:四边形CBED不可能是菱形.理由如下:

若四边形CBED为菱形,则 $DE=BC$, $DE \parallel BC$.由(1)可知,当 $DE \parallel BC$ 时, $DE=2$, $BC=3$,所以 $DE \neq BC$,这与 $DE=BC$ 矛盾,所以四边形CBED不可能是菱形.

(3) 解:如图1,点F即为所求. 提示:如图2,当 $DE \perp AB$ 时, $\angle EDF=90^\circ$,所以 $\angle DFE+\angle E=90^\circ$.由折叠的性质,得 $\angle A=\angle E$,所以 $\angle DFE+\angle A=90^\circ$.因为 $\angle A+\angle B=90^\circ$,所以 $\angle B=\angle DFE$.因为 $\angle DFE=\angle BFC$,所以 $\angle B=\angle BFC$,所以 $BC=FC$.所以以点C为圆心,BC长为半径作弧,交AB于点F,点F即为所求.

$\frac{AF}{BF}=\frac{7}{18}$. 提示:如图2,过点C作 $CG \perp AB$ 于点G.同(1)②,得 $CG=\frac{12}{5}$, $BG=\frac{9}{5}$.因为 $BC=FC$, $CG \perp AB$,所以 $BF=2BG=\frac{18}{5}$.所以 $AF=AB-BF=5-\frac{18}{5}=\frac{7}{5}$,所以 $\frac{AF}{BF}=\frac{7}{18}$.

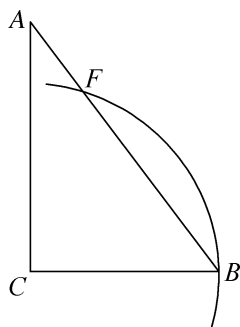


图1

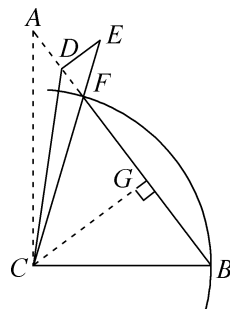


图2

期末压轴 11

2025 年扬州市邗江区、江都区期末压轴题

1. B 提示:过点 A 作 $AH \perp EF$ 于点 H. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 4$, 由勾股定理, 得 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5$. 因为四边形 ABDE 是正方形, 所以 $BD = ED = AE = AB = 5$, $\angle EDG = \angle BDG = 45^\circ$, $\angle BAE = 90^\circ$. 因为 $AH \perp EF$, $EF \perp BC$, 所以 $\angle CFH = \angle FHA = 90^\circ = \angle C$, 所以四边形 ACFH 是矩形, 所以 $\angle CAH = 90^\circ = \angle BAE$, 所以 $\angle BAH + \angle EAH = \angle BAH + \angle BAC$, 所以 $\angle EAH = \angle BAC$. 在

$$\triangle EAH \text{ 和 } \triangle BAC \text{ 中, } \begin{cases} \angle AHE = \angle C, \\ \angle EAH = \angle BAC, \text{ 所以 } \triangle EAH \cong \\ AE = AB, \end{cases}$$

$\triangle BAC$ (AAS), 所以 $EH = BC = 4$, $AH = AC = 3$, 所以矩形 ACFH 是正方形, 所以 $CF = FH = AH = 3$, 所以 $BF = BC - CF = 4 - 3 = 1$, $EF = EH + FH = 4 + 3 = 7$.

$$\text{在 } \triangle EDG \text{ 和 } \triangle BDG \text{ 中, } \begin{cases} ED = BD, \\ \angle EDG = \angle BDG, \text{ 所以 } \triangle EDG \cong \\ DG = DG, \end{cases}$$

$\triangle BDG$ (SAS), 所以 $EG = BG$, 所以 $\triangle GBF$ 的周长为 $BG + GF + BF = EG + GF + BF = EF + BF = 7 + 1 = 8$.

2. -1 提示:由 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 5$, 得 $b - a = 5ab$, 则

$$\frac{3a + 8ab - 3b}{2ab - a + b} = \frac{8ab - 3(b - a)}{2ab + (b - a)} = \frac{8ab - 3 \times 5ab}{2ab + 5ab} = \frac{-7ab}{7ab} =$$

-1.

3. 解: (1) (4, 5) (-6, -5)

(2) 因为无理数 $-\sqrt{a}$ (a 为正整数) 的“整数区间”为 $(-3, -2)$, 所以 $-3 < -\sqrt{a} < -2$, 所以 $2 < \sqrt{a} < 3$, 所以 $4 < a < 9$. 因为 $\sqrt{a+3}$ 的“整数区间”为 $(3, 4)$, 所以 $3 < \sqrt{a+3} < 4$, 所以 $9 < a+3 < 16$, 即 $6 < a < 13$, 所以 $6 < a < 9$. 因为 a 为正整数, 所以 $a = 7$ 或 $a = 8$, 所以

$$\sqrt[3]{a+1} = \sqrt[3]{7+1} = \sqrt[3]{8} = 2 \text{ 或 } \sqrt[3]{a+1} =$$

$$\sqrt[3]{8+1} = \sqrt[3]{9}.$$

(3) 因为二次根式中被开方数为非负时才有意义, 所以 $x + y - 2026 \geq 0$ 且 $2026 - x - y = 0$, 所以 $x + y = 2026$, 所以 $\sqrt{x + y - 2026} = \sqrt{2026 - x - y} = 0$, 所以 $\sqrt{2x + 3y - m} + \sqrt{3x + 4y - 2m} = 0$, 所以 $2x + 3y - m = 3x + 4y - 2m = 0$, 所以 $m = x + y = 2026$. 因为 $2025 < m < 2116$, 即 $45^2 < m < 46^2$, 所以 $45 < \sqrt{m} < 46$, 所以 m 的算术平方根的“整数区间”为 $(45, 46)$.

期末压轴 12

2025 年扬州市宝应县、高邮市期末压轴题

1. A 提示:如图 1, 过点 F 作直线 $MN \perp AD$ 于点 M, 交 BC 于点 N, 则 $\angle NMD = 90^\circ$. 因为四边形 ABCD 是正方形, 所以 $AD = CD$, $\angle ADF = 45^\circ$, $\angle ADC = \angle C = 90^\circ$, 所以 $\angle NMD = \angle ADC = \angle C = 90^\circ$, 所以四边形 CDMN 是矩形, 所以 $\angle AMF = \angle FNH = \angle FMD = 90^\circ$, $MN = CD = AD$, 所以 $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$. 因为 $FH \perp AE$, 所以 $\angle 3 + \angle 2 = 90^\circ$, 所以 $\angle 1 = \angle 3$. 因为 $\angle ADF = 45^\circ$, $\angle FMD = 90^\circ$, 所以 $\triangle MFD$ 是等腰直角三角形, 所以 $MF = MD$, 所以 $AD - MD = MN - MF$, 即 $AM = FN$. 在 $\triangle AMF$ 和

$$\triangle FNH \text{ 中, } \begin{cases} \angle AMF = \angle FNH, \\ AM = FN, \\ \angle 1 = \angle 3, \end{cases} \text{ 所以 } \triangle AMF \cong \triangle FNH$$

(ASA), 所以 $AF = FH$, 所以 $\triangle AFH$ 是等腰直角三角形, 所以 $\angle HAF = 45^\circ$, 故 ① 正确. 在 $\text{Rt}\triangle HEF$ 中, $\angle HFE = 90^\circ$, 所以 $HE > HF$. 因为 $AF = FH$, 所以 $HE > AF$, 故 ② 不正确. 如图 2, 连接 AC 交 BD 于点 O. 又因为四边形 ABCD 是正方形, 所以 $BC = AB = 3$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AC \perp BD$, $AO = \frac{1}{2}AC$. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 由勾股定理, 得 $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 3\sqrt{2}$, 所以 $AO =$

$\frac{1}{2}AC = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. 因为 $HG \perp BD, AC \perp BD$, 所以 $\angle HGF =$

$\angle FOA = 90^\circ$, 所以 $\angle OAF + \angle OFA = 90^\circ$. 因为 $FH \perp$

AE , 所以 $\angle GFH + \angle OFA = 90^\circ$, 所以 $\angle GFH =$

以 $\triangle GFH \cong \triangle OAF$ (AAS), 所以 $FG = AO = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 故③

正确. 假设 $FH = \sqrt{2}$, 则有 $AF = FH = \sqrt{2}$. 在 $\text{Rt}\triangle AFH$ 中, 由勾股定理, 得 $AH = \sqrt{AF^2 + FH^2} = 2$. 在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 中, $AB = 3, \angle ABH = 90^\circ$, 所以 $AH > AB = 3$, 这与 $AH = 2$ 矛盾, 所以 $FH \neq \sqrt{2}$, 故④不正确.

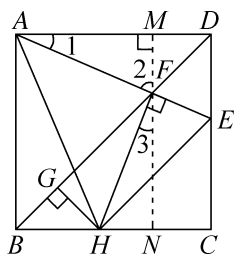


图 1

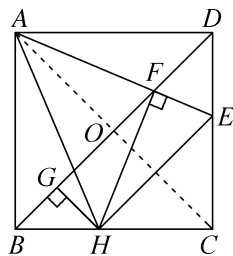


图 2

2. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 提示: 因为四边形 $ABCD$ 为正方形,

所以 $AB = AD = CD, \angle BAD = \angle CDA = 90^\circ, \angle ADG =$

$\angle CDG$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DCF$ 中, $\begin{cases} AB = DC, \\ \angle BAE = \angle CDF, \\ AE = DF, \end{cases}$ 所以

$\triangle ABE \cong \triangle DCF$ (SAS), 所以 $\angle ABE = \angle DCF$. 在

$\triangle ADG$ 和 $\triangle CDG$ 中, $\begin{cases} AD = CD, \\ \angle ADG = \angle CDG, \\ DG = DG, \end{cases}$ 所以 $\triangle ADG \cong$

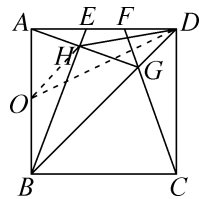
$\triangle CDG$ (SAS), 所以 $\angle DCG = \angle DAG$, 所以 $\angle ABE = \angle DAG$. 因为 $\angle BAH + \angle DAG = \angle BAD = 90^\circ$, 所以 $\angle ABE + \angle BAH = 90^\circ$, 所以 $\angle AHB = 180^\circ - (\angle ABE + \angle BAH) = 90^\circ$. 如图, 取 AB 的中点 O , 连接 OH, OD , 则

$OH = AO = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}$. 在 $\text{Rt}\triangle AOD$ 中, $OD =$

$\sqrt{AD^2 + AO^2} = \sqrt{1^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 由两点间线段最短

可知, $OH + DH \geq OD$, 即 $DH \geq OD - OH = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 当

O, H, D 三点依次共线时, DH 的长度最小, 最小值为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.



3. 解: (1) 4 $\frac{1}{21}$ 提示: 因为 $\frac{x}{x^2-x+1} = \frac{1}{3}$,

所以 $\frac{x^2-x+1}{x} = 3$, 即 $\frac{x^2}{x} - \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = 3$, 所以 $x + \frac{1}{x} = 4$.

因为 $\frac{x^4+7x^2+1}{x^2} = x^2 + 7 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 + 5 = 4^2 +$

$5 = 21$, 所以 $\frac{x^2}{x^4+7x^2+1} = \frac{1}{21}$.

(2) 原方程组化为 $\begin{cases} \frac{2m+3n}{mn} = 5, \\ \frac{3m+2n}{mn} = 3, \end{cases}$ 即

$\begin{cases} \frac{2}{n} + \frac{3}{m} = 5 \text{ ①}, \\ \frac{3}{n} + \frac{2}{m} = 3 \text{ ②}. \end{cases}$ ① $\times 3 -$ ② $\times 2$, 得 $\frac{9}{m} - \frac{4}{m} = 15 -$

6, 解得 $m = \frac{5}{9}$; ① $\times 2 -$ ② $\times 3$, 得 $\frac{4}{n} - \frac{9}{n} = 10 -$

9, 解得 $n = -5$. 经检验, $\begin{cases} m = \frac{5}{9}, \\ n = -5 \end{cases}$ 满足原分式

方程, 所以原方程组的解为 $\begin{cases} m = \frac{5}{9}, \\ n = -5. \end{cases}$

(3) 因为 $\frac{ab}{a+b} = \frac{1}{2\ 024}, \frac{bc}{b+c} = -\frac{1}{2\ 025}$,

$\frac{ac}{a+c} = \frac{1}{2\ 026}$, 所以 $\frac{a+b}{ab} = 2\ 024, \frac{b+c}{bc} =$

$-2\ 025, \frac{a+c}{ac} = 2\ 026$, 所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2\ 024,$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -2.025, \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = 2.026, \text{ 所以}$$

$$2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 2.024 - 2.025 + 2.026 = 2.025,$$

$$\text{所以 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2.025}{2}. \text{ 因为 } \frac{ab+bc+ac}{abc} =$$

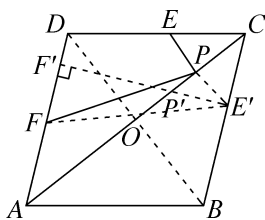
$$\frac{ab}{abc} + \frac{bc}{abc} + \frac{ac}{abc} = \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2.025}{2}, \text{ 所以}$$

$$\frac{abc}{ab+bc+ac} = \frac{2}{2.025}.$$

期末压轴 13

2025 年徐州市期末压轴题

1. B 提示:如图,作点 E 关于 AC 的对称点 E' , 过点 E' 作 $E'F' \perp AD$ 于点 F' , 交 AC 于点 P' , 连接 BD , 交 AC 于点 O , 连接 PE', FE' , 则 $PE' = PE$. 所以 $PE + PF = PE' + PF \geq E'F' \geq E'F'$, 当点 P 与点 P' 重合, 点 F 与点 F' 重合时, 等号成立, 即 $PE + PF$ 的最小值为 $E'F'$ 长. 因为四边形 $ABCD$ 为菱形, 所以 $BD = 2OB$, $OA = \frac{1}{2}AC = 4$, $AC \perp BD$. 由勾股定理, 得 $OB^2 = AB^2 - OA^2 = 5^2 - 4^2 = 9$, 解得 $OB = 3$ (负值已舍), 所以 $BD = 6$. 由等积法, 得 $S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = BC \cdot E'F'$, 即 $\frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 5E'F'$, 解得 $E'F' = 4.8$, 所以 $PE + PF$ 的最小值为 4.8 .



2. 40 提示:如图,过点 P 作 $PK \perp BC$ 于点 K , 则 $\angle PKE = \angle PKF = 90^\circ$. 设 $CN = x$, $FC = a$, $AM = y$. 因为 $DM = 5$, $DN = 4$, 所以 $AD = AM + DM = y + 5$, $CD = CN + DN = x + 4$. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形, 所以 $AB = CD = x + 4$, $BC = AD = y + 5$, $\angle A = \angle B = \angle C = 90^\circ$, 所以 $\angle PKF = \angle C = 90^\circ$, 所以 $\angle KPF +$

$\angle PFK = 90^\circ$. 因为四边形 $FNHP$ 是正方形, 所以 $PF = FN$, $\angle PFN = 90^\circ$, 所以 $\angle CFN + \angle PFK = 90^\circ$, 所以 $\angle KPF = \angle CFN$. 在 $\triangle KPF$ 和 $\triangle CFN$ 中,

$$\begin{cases} \angle PKF = \angle C, \\ \angle KPF = \angle CFN, \text{ 所以 } \triangle KPF \cong \triangle CFN \text{ (AAS), 所以} \\ PF = FN, \end{cases}$$

$PK = FC = a$, $KF = CN = x$, 同理可证 $\triangle PEK \cong \triangle EGB \cong \triangle GMA$, 所以 $GA = EB = PK = a$, $EK = GB = MA = y$, 所以 $EF = KF + EK = x + y$, $BE + FC = 2a$. 因为 $EF = BE + FC$, 所以 $x + y = 2a$, $BC = BE + FC + EF = 2EF = 2(x + y)$, 所以 $a = \frac{x + y}{2}$, 所以 $AB =$

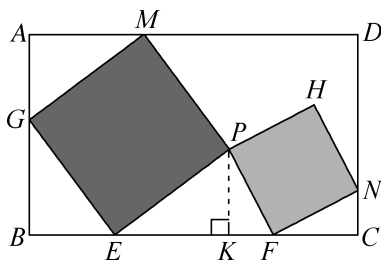
$$AG + GB = a + y = \frac{x + y}{2} + y = \frac{x + 3y}{2}. \text{ 又因为 } AB =$$

$$CD = x + 4, \text{ 所以 } \frac{x + 3y}{2} = x + 4, \text{ 整理, 得 } 3y - x = 8. \text{ 因}$$

为 $BC = AD = y + 5$, 所以 $2(x + y) = y + 5$. 整理, 得

$$2x + y = 5. \text{ 联立, 得 } \begin{cases} 3y - x = 8, \\ 2x + y = 5, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = 1, \\ y = 3. \end{cases} \text{ 所以 } AD =$$

$$y + 5 = 8, CD = 4 + x = 5, \text{ 所以矩形 } ABCD \text{ 的面积为 } AD \cdot CD = 8 \times 5 = 40.$$



3. (1) 证明:因为 $l \parallel AC$, $AE \parallel BD$, 所以四边形 $AEBO$ 是平行四边形, 所以 $AE = BO$. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 所以 $BO = OD$, 所以 $AE = OD$. 又因为 $AE \parallel BD$, 所以 $\angle AEF = \angle ODF$. 又因为 $\angle AFE = \angle OFD$, 所以 $\triangle AFE \cong \triangle OFD$ (AAS), 所以 $EF = DF$.

(2) 解: $AF + BE = CF$ 或 $AF - BE = CF$. 理由如下:

过点 E 作 $EH \parallel BD$ 交 AC 于点 H , 同(1) 可证 $\triangle HFE \cong \triangle OFD$ (AAS), 所以 $EF =$

DF. 又因为 $BO=DO$, 所以 OF 是 $\triangle DBE$ 的中位线, 所以 $BE=2OF$. 如图 1, 当点 E 在 AB 的左侧时, 因为 $AO=CO$, 所以 $AF+OF=CF-OF$, 所以 $AF+2OF=CF$, 所以 $AF+BE=CF$; 如图 2, 当点 E 在 AB 的右侧时, 因为 $AO=CO$, 所以 $AF-OF=CF+OF$, 所以 $AF-2OF=CF$, 所以 $AF-BE=CF$.

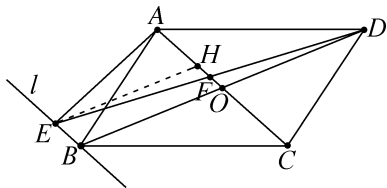


图 1

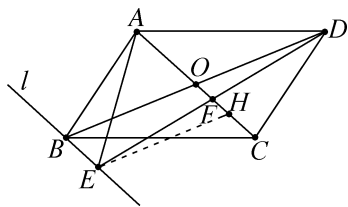


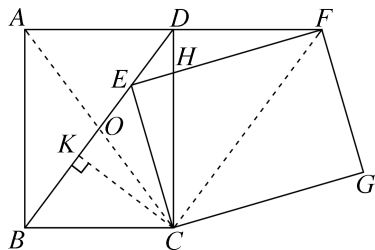
图 2

期末压轴 14

2025 年宿迁市泗阳县期末压轴题

1. D 提示: 如图, 过点 C 作 $CK \perp BD$ 于点 K , 连接 AC 交 BD 于点 O , 连接 CF . 因为四边形 $ABCD$ 为矩形, 所以 $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$, $AB \parallel CD$, $OB = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AC = OA = OC$, 所以 $\angle BAC = \angle ABO = \angle BDC$, $\angle OBC = \angle ACB$. 由勾股定理, 得 $BD = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10$. 由旋转的性质, 得 $\angle BAC = \angle EFC$, $\angle ACB = \angle FCE$, $FC = AC$, $EC = BC$. 所以 $\angle BDC = \angle EFC$, $\angle OBC = \angle BEC$, 所以 $\angle BEC = \angle FCE$, 所以 $BD \parallel FC$, 所以 $\angle BDC = \angle HCF$, 所以 $\angle HCF = \angle EFC$, 所以 $CH = FH$. 因为 $EC = BC$, $CK \perp BD$, 所以 $BK = EK$. 由等积法, 得 $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}BC \cdot CD = \frac{1}{2}BD \cdot CK$, 所以 $CK = \frac{BC \times CD}{BD} = \frac{6 \times 8}{10} = 4.8$. 在 $\text{Rt}\triangle BCK$ 中, $BK = \sqrt{BC^2 - CK^2} = \sqrt{6^2 - 4.8^2} = 3.6$. 所以 $BE =$

$2BK = 7.2$, 故选项 A 正确. 因为 $BD \parallel FC$, 且 $FC = AC = BD$, 所以四边形 $BCFD$ 为平行四边形, 所以 $DF = BC = 6$, 故选项 B 正确. 因为四边形 $BCFD$ 是平行四边形, 所以 $DF \parallel BC$, 所以 $\angle FDC = \angle BCD = 90^\circ$. 设 $DH = x$, 则 $FH = CH = CD - DH = 8 - x$. 在 $\text{Rt}\triangle DHF$ 中, $DH^2 + DF^2 = HF^2$, 即 $x^2 + 6^2 = (8-x)^2$, 解得 $x = 1.75$. 所以 $DH = 1.75$, $FH = 8 - x = 6.25$, 故选项 C 正确, 选项 D 错误.



2. $\frac{1}{2}$ 提示: 因为 $(a + \frac{1}{b})(b + \frac{1}{c})(c + \frac{1}{a}) = (ab + \frac{a}{c} + 1 + \frac{1}{bc})(c + \frac{1}{a}) = abc + a + c + \frac{1}{b} + b + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{abc} = (a + \frac{1}{b}) + (b + \frac{1}{c}) + (c + \frac{1}{a}) + (abc + \frac{1}{abc})$, 所以 $3 \times 11 \times (c + \frac{1}{a}) = 3 + 11 + (c + \frac{1}{a}) + 2$, 解得 $c + \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$.

3. 解: (1) $2 - \sqrt{3}$ $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ 提示: $\frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = 2 - \sqrt{3}$; 由题可知, $\sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$, 或者利用配方法, 可得 $\sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{2(4 - 2\sqrt{3})} = \sqrt{2} \times \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt{2} \times (\sqrt{3} - 1) = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

(2) 设 $a = \sqrt{x + 21}$, $b = \sqrt{x + 5}$, 则 $a - b = 2$, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = x + 21 - x - 5 = 16$, 所以 $a + b = 8$, 所以 $2a = 10$, 解得 $a = 5$, 所以 $\sqrt{x + 21} = 5$, 所以 $x + 21 = 25$, 解得 $x = 4$, 经检验 $x = 4$ 是原方程的根.

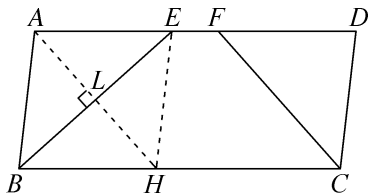
(3) 因为 $a\sqrt{3 - b^2} + b\sqrt{3 - a^2} = 3$ ①, 设

$a\sqrt{3-b^2}-b\sqrt{3-a^2}=m$ ②, 所以①+②, 得 $2a\sqrt{3-b^2}=3+m$, ①-②, 得 $2b\sqrt{3-a^2}=3-m$, 所以 $4a^2(3-b^2)=(m+3)^2$ ③, $4b^2(3-a^2)=(3-m)^2$ ④, ③-④, 得 $12a^2-4a^2b^2-12b^2+4a^2b^2=12m$, 解得 $m=a^2-b^2$, ③+④, 得 $12a^2-4a^2b^2+12b^2-4a^2b^2=2m^2+18$, 解得 $m^2=6a^2+6b^2-4a^2b^2-9$, 所以 $m^2=(a^2-b^2)^2=6a^2+6b^2-4a^2b^2-9$, 所以 $a^4+2a^2b^2+b^4-6(a^2+b^2)+9=0$, 所以 $(a^2+b^2)^2-6(a^2+b^2)+9=0$, 所以 $(a^2+b^2-3)^2=0$, 所以 $a^2+b^2=3$.

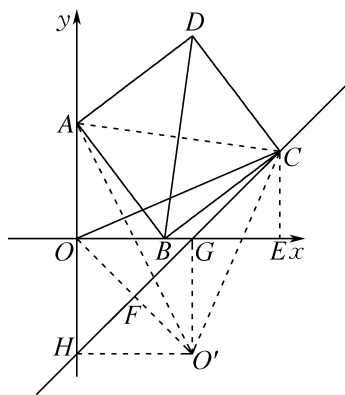
期末压轴 15

2025 年淮安市期末压轴题

1. $2\sqrt{5}$ 提示:如图,过点 E 作 $EH\parallel AB$, 交 BC 于点 H , 连接 AH 交 BE 于点 L . 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 所以 $\angle BCD=\angle BAD$, $AD\parallel BC$, 所以 $\angle AEB=\angle CBE$, $\angle DFC=\angle BCF$. 因为 $\angle ABC$, $\angle BCD$ 的平分线分别交 AD 于点 E, F , 所以 $\angle CBE=\angle ABE$, $\angle BCF=\angle DCF$, 所以 $\angle AEB=\angle ABE$, $\angle DFC=\angle DCF=\frac{1}{2}\angle DCB=\frac{1}{2}\angle BAD$, 所以 $AE=AB=3$. 因为 $EH\parallel AB$, $AD\parallel BC$, 所以四边形 $ABHE$ 是平行四边形. 又因为 $AE=AB=3$, 所以四边形 $ABHE$ 是菱形, 所以 $AH\perp BE$, $BL=EL$, $AL=HL$, $\angle EAH=\angle BAH=\frac{1}{2}\angle BAD$. 又因为 $\angle DFC=\frac{1}{2}\angle BAD$, 所以 $\angle EAH=\angle DFC$, 所以 $AH\parallel CF$, 所以四边形 $AHCF$ 是平行四边形, 所以 $AH=CF=4$, 所以 $AL=HL=\frac{1}{2}AH=2$. 在 $\text{Rt}\triangle AEL$ 中, $EL=\sqrt{AE^2-AL^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$, 所以 $BE=2EL=2\sqrt{5}$.



2. $4\sqrt{5}$ 提示:如图,过点 C 作 $CE\perp x$ 轴于点 E , 连接 AC , 则 $\angle BEC=\angle AOB=90^\circ$, 所以 $\angle CBE+\angle BCE=90^\circ$. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形, 所以 $AB=BC$, $\angle ABC=90^\circ$, $BD=AC$, 所以 $\angle CBE+\angle ABO=90^\circ$, 所以 $\angle ABO=\angle BCE$, 所以 $\triangle ABO\cong\triangle BCE$ (AAS), 所以 $BO=CE$, $AO=BE$. 因为点 A 坐标为 $(0, 4)$, 所以 $AO=4$, 所以 $BE=4$. 设 $BO=a$, 则 $CE=a$, $OE=BO+BE=a+4$, 所以点 $C(a+4, a)$, 所以点 C 在直线 $y=x-4$ 上(当点 B 位于原点或 x 轴负半轴上时, 此结论仍成立). 设直线 $y=x-4$ 交 x 轴于点 $G(4, 0)$, 交 y 轴于点 $H(0, -4)$, 过点 G 向下作 x 轴的垂线, 并在垂线上截取 $O'G=OG$, 连接 OO' 交直线 CG 于点 F , 连接 $O'A, O'H$, 则四边形 $OGO'H$ 是正方形, 点 $O'(4, -4)$, 易知直线 CG 是 OO' 的垂直平分线, 即点 O, O' 关于直线 CG 对称, 所以 $OC=O'C$, 此时 $OC+BD=O'C+AC\geq O'A$, 当 A, C, O' 三点依次共线时, 等号成立. 因为四边形 $OGO'H$ 为正方形, 所以 $OH=O'H=OG=4$, 所以 $AH=AO+OH=8$. 在 $\text{Rt}\triangle AO'H$ 中, $O'A=\sqrt{AH^2+O'H^2}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$, 所以 $OC+BD$ 的最小值为 $4\sqrt{5}$.



3. 解:(1) $DE=GF$. 理由如下:

如图 1, 连接 BD , 过点 B 作 $BH\parallel GF$, 交 AD 于点 H , 交 DE 于点 N . 因为四边形 $ABCD$ 为菱形, 所以 $AD\parallel BC$, $AB=AD$, 又因为 $\angle A=60^\circ$, 所以 $\triangle ABD$ 为等边三角形, 所以 $BD=AB=AD$, $\angle ABD=\angle ADB=60^\circ$. 因为 $BH\parallel GF$, $AD\parallel BC$, 所以四边形 $BGFH$ 为平

(3) 解:如图 2,连接 BD 交 MN 于点 O ,
 由题意可知, $AM = CN$, $OM = ON = \frac{1}{2}MN$,
 取 AB 中点 Q ,连接 OQ ,交 AP 于点 H ,延长
 AP 交 BC 于点 T ,则 $AQ = \frac{1}{2}AB = 40$ m. 因为
 Q, O 分别为 AB, BD 的中点,所以 $OQ \parallel AD$,
 $OQ = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC = 50$ m,所以 $\angle AQQ =$
 90° . 因为点 P 到 AD, AB 的距离相等,所以
 $\angle BAT = \frac{1}{2}\angle BAD = 45^\circ$,所以 $QH = AQ =$
 40 m, $BT = AB = 80$ m. 在 $\text{Rt}\triangle AQH$ 中,由勾
 股定理,得 $AH = \sqrt{AQ^2 + QH^2} = \sqrt{40^2 + 40^2} =$
 $40\sqrt{2}$ (m),在 $\text{Rt}\triangle ABT$ 中, $AT = \sqrt{AB^2 + BT^2} =$
 $\sqrt{80^2 + 80^2} = 80\sqrt{2}$ (m),所以 $AH = \frac{1}{2}AT$. 因

为 $OQ \parallel AD, BC \parallel AD$,所以 $OQ \parallel BC$,所以
 $\angle OHP = \angle NTP, \angle HOP = \angle TNP$. 因为
 $PM = 3PN$,所以 $PN = \frac{1}{4}MN$. 因为 $ON =$
 $\frac{1}{2}MN$,所以 $OP = \frac{1}{4}MN = PN$,所以 $\triangle OPH \cong$
 $\triangle NPT$ (AAS),所以 $PH = PT, NT = OH =$
 $OQ - QH = 50 - 40 = 10$ (m),所以 $BN =$
 $BT - NT = 80 - 10 = 70$ (m),所以 $AM =$
 $CN = BC - BN = 100 - 70 = 30$ (m).

$2\ 400\ \text{m}^2$ 提示:因为 $AH = \frac{1}{2}AT$,所以 $AH =$
 HT . 因为 $PH = PT$,所以 $AP = 3PT$,所以 $AP = \frac{3}{4}AT$,
 所以 $S_{\triangle ABP} = \frac{3}{4}S_{\triangle ABT} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times 80 \times 80 = 2\ 400$ (m²),
 所以 $\triangle ABP$ 的面积为 $2\ 400\ \text{m}^2$.