初中数学

小题狂做®

恩波教育研究中心　编

提优版

八年级下

·苏科版·

本册主编　康叶红　朱奎祥　渠东剑
编　　委　许丽婷　陈敏婕　杭正弘
康叶红　何姝晴　吴文涛
朱松林　张寿彬　李　波
吴小波　杨　平

江苏凤凰科学技术出版社 · 南京

Contents 目录

Index 索引

第 6 章　数据的收集、整理与描述

第 7 章　认识概率

第 8 章　四　边　形

第 9 章　因式分解

第 10 章　分　式

第 11 章　二次根式

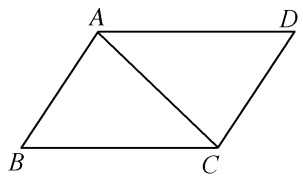
第 8 章　四边形

课时训练 13　平行四边形(1)

(时间:20 min)

基础巩固

1. 如图,在▱$ABCD$ 中,$AC=4$ cm.若△ACD 的周长为 13 cm,则▱$ABCD$ 的周长为 (　　)



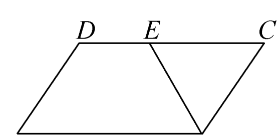
A. 26 cm　　B. 24 cm
C. 20 cm　　D. 18 cm

2. 在▱$ABCD$ 中,$\angle A$ 与 $\angle B$ 的度数之比为 $7:2$,则平行四边形中最大角的度数为 (　　)

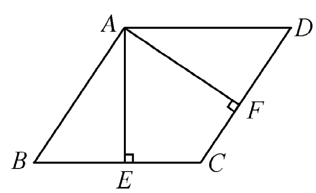
A. $20°$　B. $40°$　C. $70°$　D. $140°$

3. (2025 淮安市盱眙县期末)如图,在▱$ABCD$ 中,$\angle ABC$ 的平分线 BE 与边 CD 相交于点 E.若 $\angle A=44°$,则 $\angle BEC$ 的度数为 (　　)

A. $68°$　B. $44°$　C. $56°$　D. $88°$



(第 3 题)

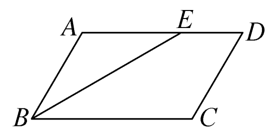


(第 4 题)

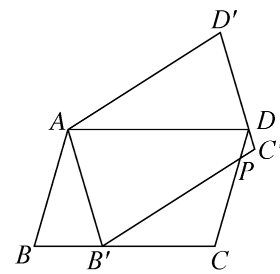
4. 如图,在▱$ABCD$ 中,$AE\perp BC$ 于点 E,$AF\perp CD$ 于点 F.若 $\angle EAF=56°$,则 $\angle B=$________.

5. 在平面直角坐标系 xOy 中,▱$OABC$ 的三个顶点分别为 $O(0,0)$,$A(3,0)$,$B(4,2)$,则该平行四边形第四个顶点的坐标是________.

6. (2025 镇江市丹阳市期末)如图,在▱$ABCD$ 中,BE 平分 $\angle ABC$,$AB=3$,$BC=5$,则 $DE=$________.



(第 6 题)



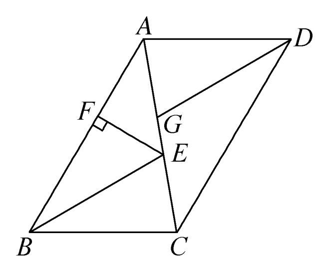
(第 7 题)

7. (2025 宿迁市宿城区期末)如图,▱$ABCD$ 绕点 A 逆时针旋转 $32°$,得到▱$AB'C'D'$,点 B' 恰好落在边 BC 上,$B'C'$ 和 CD 交于点 P,则 $\angle B'PC$ 的度数是________.

8. 如图,在▱$ABCD$ 中,BE,DG 分别平分 $\angle ABC$,$\angle ADC$,交 AC 于点 E,G.

(1) 求证:$BE/\!/DG$,$BE=DG$.

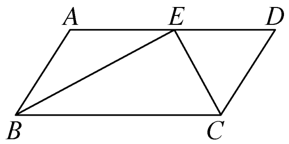
(2) 过点 E 作 $EF\perp AB$,垂足为 F,若▱$ABCD$ 的周长为 56,$EF=6$,求△ABC 的面积.



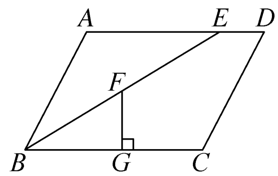
拓展提优

1. 如图，在▱$ABCD$ 中，$AB=3$，$\angle ABC$ 与 $\angle BCD$ 的平分线交于点 E. 若点 E 恰好在边 AD 上，则 CE^2+BE^2 的值为　(　　)

A. 12　　B. 16　　C. 24　　D. 36



(第 1 题)



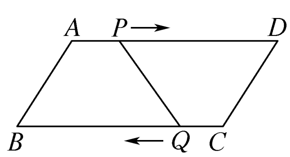
(第 2 题)

2. 如图，在▱$ABCD$ 中，$\angle ABC$ 的平分线交线段 AD 于点 E，$DE=1$，F 是 BE 的中点，过点 F 作 $FG\perp BC$，垂足为 G. 设 $AB=x$. 若▱$ABCD$ 的面积为 8，GF 的长为整数，则正整数 x 的值为　(　　)

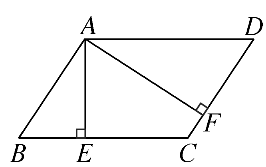
A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 2 或 3

3. 如图，在▱$ABCD$ 中，$\angle B=60°$，$AB=6$ cm，$BC=12$ cm. 点 P 从点 A 出发，以 1 cm/s 的速度沿 $A\to D$ 运动，同时点 Q 从点 C 出发，以 3 cm/s 的速度沿 $C\to B\to C\to\cdots$往复运动，当点 P 到达端点 D 时，点 Q 随之停止运动. 在此运动过程中，线段 $PQ=CD$ 出现的次数是　(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6



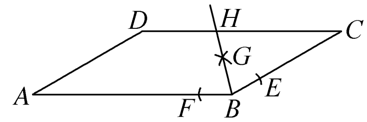
(第 3 题)



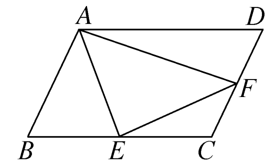
(第 4 题)

4. (2025 泰州市海陵区期末)如图，在▱$ABCD$ 中，$AE\perp BC$ 于点 E，$AF\perp CD$ 于点 F. 若 $\angle C=120°$，$BE=3$，$DF=4$，则▱$ABCD$ 的面积为________.

5. 如图，在▱$ABCD$ 中，$\angle ABC=150°$. 利用尺规在边 BC，BA 上分别截取 BE，BF，使得 $BE=BF$；分别以点 E，F 为圆心，大于 $\frac{1}{2}EF$ 的长为半径作弧，两弧在 $\angle CBA$ 内交于点 G；作射线 BG 交 DC 于点 H. 若 $AD=\sqrt{3}+1$，则 BH 的长为________.



(第 5 题)



(第 6 题)

6. (2025 苏州市苏州工业园区期末)如图，在▱$ABCD$ 中，E 是边 BC 的中点，F 是边 CD 的中点. 若 $\triangle CEF$ 的面积是 3，则 $\triangle AEF$ 的面积是________.

7. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle BAC=36°$. 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转 α 得到 $\triangle ADE$，点 B，C 的对应点分别是 D，E.

(1) 如图 1，若点 E 恰好与点 B 重合，$DF\perp AB$，垂足为 F，求 $\angle BDF$ 的大小.

(2) 如图 2，若 $\alpha=108°$，连接 EC 交 AB 于点 G，则四边形 $ADEG$ 是平行四边形吗？请说明理由.

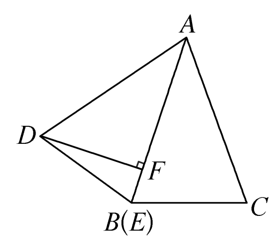


图 1

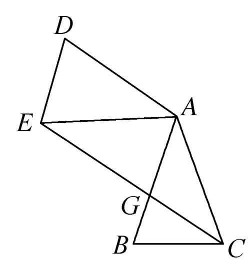


图 2

课时训练 17　特殊的平行四边形(1)

(时间:20 min)

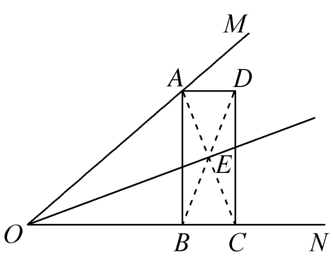
基础巩固

1. 矩形的一内角平分线把矩形的一条边分成长度分别为 3 和 5 两段,则该矩形的周长为　(　　)

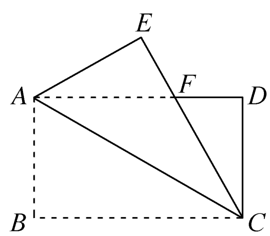
A. 16　B. 22　C. 26　D. 22 或 26

2. 如图,矩形 $ABCD$ 的顶点 A,B,C 分别落在$\angle MON$ 的边 OM,ON 上,且 $OA=OC$,要求只用无刻度的直尺作$\angle MON$ 的平分线.小明的作法如下:连接 AC,BD 交于点 E,作射线 OE,则射线 OE 平分$\angle MON$.有以下几条几何性质:①矩形的四个角都是直角;②矩形的对角线互相平分;③等腰三角形的"三线合一".则小明的作法依据是　(　　)

A. ①②　B. ①③　C. ②③　D. ①②③



(第 2 题)

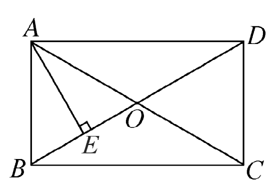


(第 3 题)

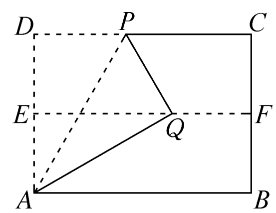
3. 如图,将矩形纸片 $ABCD$ 沿对角线 AC 对折,使得点 B 落在点 E 处,CE 交 AD 于点 F.若 CE 平分$\angle ACD$,$AF=3$,则 EF 的长是　(　　)

A. $\frac{3}{2}$　B. $\sqrt{3}$　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　D. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

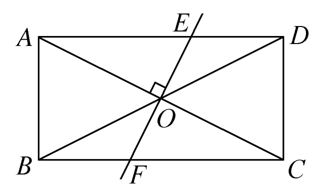
4. 如图,在矩形 $ABCD$ 中,对角线 AC 与 BD 相交于点 O,$AE\perp BD$,垂足为 E.若 $ED=3BE$,则$\angle AOB$ 的度数为________.



5. (2025 连云港市海州区期末)如图,对折矩形纸片 $ABCD$,使 AB 与 CD 重合,得到折痕 EF,将纸片展平,再次折叠纸片,使点 D 落在折痕 EF 上的点 Q 处,并使折痕经过点 A,得到折痕 AP,再展平纸片,连接 AQ,PQ,则$\angle AQE$ 的度数为________.



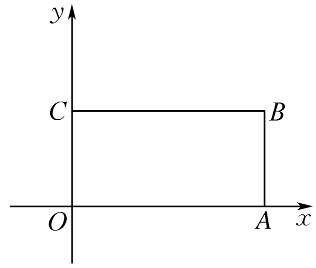
(第 5 题)



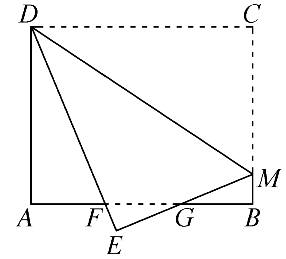
(第 6 题)

6. 如图,在矩形 $ABCD$ 中,对角线 AC,BD 交于点 O,过点 O 作 $EF\perp AC$ 交 AD 于点 E,交 BC 于点 F.已知 $AB=4$,$\triangle AOE$ 的面积为 5,则 DE 的长为________.

7. 如图,在平面直角坐标系中,矩形 $OABC$ 的边 OA,OC 在坐标轴上,且 $OA=4$,$OC=2$.若直线 $y=kx+4$ 把矩形 $OABC$ 的周长分成相等的两部分,则 $k=$________.



(第 7 题)



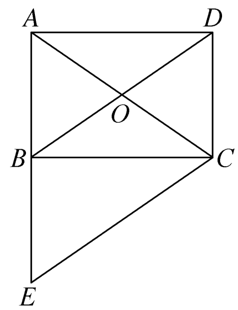
(第 8 题)

8. (2025 南京市秦淮区期末)如图,在长方形纸片 $ABCD$ 中,$AD=8$,$AB=10$,M 为边 BC 上一点,将$\triangle CDM$ 沿 DM 翻折至$\triangle EDM$,EM 交 AB 于点 G,ED 交 AB 于点 F,且 $BG=EG$,则 CM 的长度是________.

9.（2025 苏州市相城区期末）如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，$CE /\!/ DB$，交 AB 的延长线于点 E.

(1) 求证：$AC=EC$.

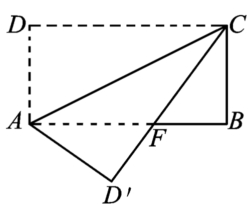
(2) 若$\angle AOD=120°$，$AB=2.5$ cm，求矩形的面积.



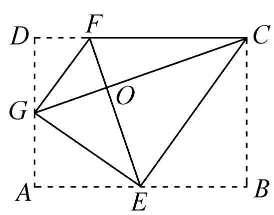
拓展提优

1. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=8$，$BC=4$，将矩形沿 AC 折叠，则重叠部分$\triangle AFC$ 的面积为　（　　）

A. 12　　B. 10　　C. 8　　D. 6



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，将矩形 $ABCD$ 沿着 GE，EC，GF 翻折，使得点 A，B，D 恰好都落在点 O 处. 小炜同学得出以下结论：①$GF /\!/ EC$；②$AB=\frac{4\sqrt{3}}{5}AD$；③$GE=\sqrt{6}DF$；④$OC=2\sqrt{2}OF$.

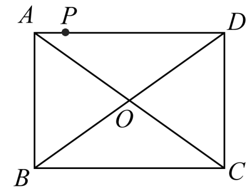
其中结论正确的是　（　　）

A. ①②③　　B. ①③④

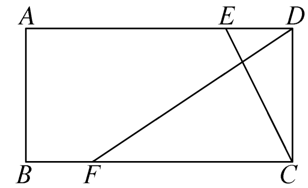
C. ①②④　　D. ②③④

3. 如图，P 是矩形 $ABCD$ 的边 AD 上一动点，矩形的两条边 AB，BC 的长分别是 6 和 8，则点 P 到矩形的两条对角线 AC 和 BD 的距离之和是　（　　）

A. 4.8　　B. 5　　C. 6　　D. 7.2



（第 3 题）



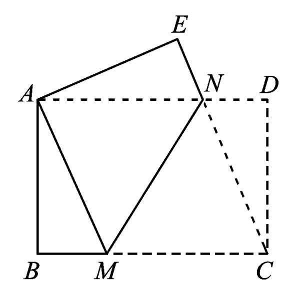
（第 4 题）

4. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$AD=8$，点 E 在边 AD 上，点 F 在边 BC 上，且 $BF=DE$，连接 CE，DF，则 $CE+DF$ 的最小值为________.

5. 如图，将一张矩形纸片 $ABCD$ 沿直线 MN 折叠，使点 C 落在点 A 处，点 D 落在点 E 处，直线 MN 交 BC 于点 M，交 AD 于点 N，连接 CN.

(1) 求证：$MC=NC$.

(2) 若$\triangle CMN$ 的面积与$\triangle CDN$ 的面积之比为 3∶1，求 $\frac{MN}{DN}$ 的值.



课时训练 19 特殊的平行四边形(3)

(时间:20 min)

基础巩固

1. 已知菱形的周长为 40 cm,两条对角线的长度之比是 3∶4,则两条对角线的长分别为 ( )

A. 6 cm,8 cm　　B. 3 cm,4 cm

C. 12 cm,16 cm　　D. 24 cm,32 cm

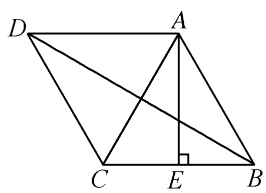
2. 如图,菱形 $ABCD$ 的周长为 8,高 AE 的长为 $\sqrt{3}$,则对角线 AC 与 BD 的长度之比为 ( )

A. 1∶2

B. 1∶3

C. 1∶$\sqrt{2}$

D. 1∶$\sqrt{3}$

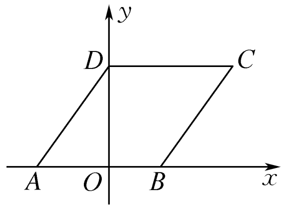


3. 菱形 $ABCD$ 的边长为 2,$\angle A=60°$,将该菱形绕顶点 A 在平面内旋转 30°,则旋转后的图形与原图形重叠部分的面积为 ( )

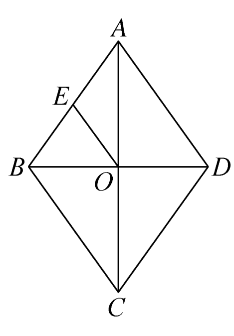
A. $3-\sqrt{3}$　　B. $2-\sqrt{3}$

C. $\sqrt{3}-1$　　D. $2\sqrt{3}-2$

4. 如图,在平面直角坐标系中,菱形 $ABCD$ 的顶点 D 在 y 轴上,边 AB 在 x 轴上.若点 C 的坐标为(5,4),则点 B 的坐标为________.



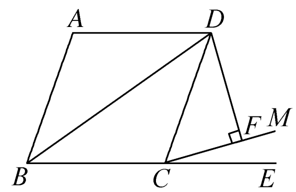
(第 4 题)



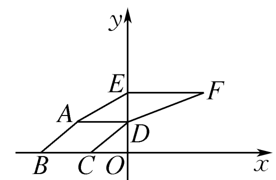
(第 5 题)

5. (2025 苏州市相城区期末)如图,菱形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 相交于 O,E 是边 AB 的中点,连接 OE.若 $OE=2.5$,$DB=6$,则 AC 的长为________.

6. 如图,四边形 $ABCD$ 为菱形,$\angle ABC=70°$,延长 BC 到点 E,在$\angle DCE$ 内作射线 CM,使得$\angle ECM=15°$,过点 D 作 $DF\perp CM$,垂足为 F.若 $DF=\sqrt{5}$,则对角线 BD 的长为________(结果保留根号).



(第 6 题)



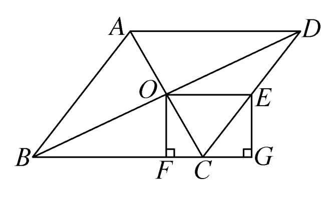
(第 7 题)

7. 如图,菱形 $ABCD$ 的边 BC 在 x 轴上,点 C 的坐标为(−4,0),点 D 的坐标为(0,3),点 E 在 y 轴上,线段 $EF\parallel x$ 轴,且点 F 的坐标为(8,6).若菱形 $ABCD$ 沿 x 轴左右运动,连接 AE,DF,则在运动过程中,四边形 $ADFE$ 周长的最小值是________.

8. (2025 南京市联合体期末)如图,菱形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 相交于点 O,E 是边 CD 的中点,连接 OE.过点 O,E 作直线 BC 的垂线,垂足分别为 F,G.

(1) 求证:四边形 $OEGF$ 是矩形.

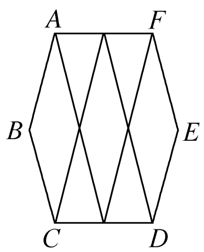
(2) 若 $AC=6$,$BD=8$,则矩形 $OEGF$ 的面积为________.



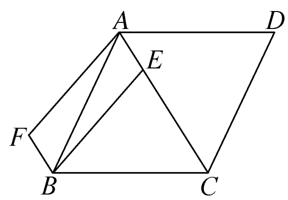
拓展提优

1. 如图，3 个全等的菱形按如图所示的方式拼接在一起，恰好得到一个边长相等的六边形，则菱形较长的对角线与较短对角线的长度的比值为　（　　）

A. $\sqrt{15}$　B. $\sqrt{10}$　C. $2\sqrt{3}$　D. $\sqrt{3}$



（第 1 题）



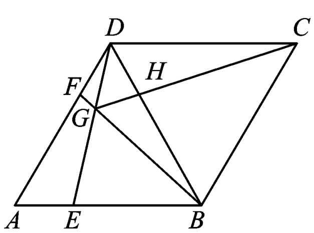
（第 2 题）

2. （2025 南通市启东市期末）如图，E 为菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 上的动点，以 EA，EB 为邻边作▱$AFBE$. 若 $AB=10$，$AC=12$，则 EF 长的最小值为　（　　）

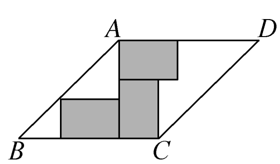
A. 12　B. 10　C. 8　D. 6

3. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=BD$，E，F 分别是 AB，AD 上任意的点（不与端点重合），且 $AE=DF$，连接 BF 与 DE 相交于点 G，连接 CG 与 BD 相交于点 H. 给出如下结论：①$\triangle AED\cong\triangle DFB$；② $S_{\text{四边形}BCDG}=\frac{\sqrt{3}}{2}CG^2$；③$CG$ 与 BD 一定不垂直；④$\angle BGE$ 的大小为定值. 其中正确的结论有　（　　）

A. 4 个　B. 3 个　C. 2 个　D. 1 个



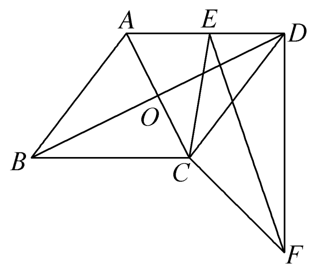
（第 3 题）



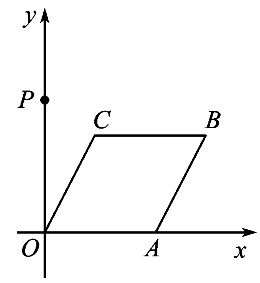
（第 4 题）

4. （2025 南通市启东市期末）如图，把 3 个相同的矩形填充到菱形 $ABCD$ 中，如果测得每个矩形的周长为 $4\sqrt{2}$ cm，那么菱形 $ABCD$ 的周长为________cm.

5. 如图，菱形 $ABCD$ 的边长为 $2\sqrt{3}$，$\angle ABC=60°$，对角线 AC，BD 交于点 O，E 为直线 AD 上的一个动点，连接 CE. 将线段 EC 绕点 C 顺时针旋转$\angle BCD$ 的角度后得到对应的线段 FC，连接 EF，DF，则 DF 长的最小值为________.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，已知点 A 从点(1,0)出发，以每秒 1 个单位长度的速度沿 x 轴正方向运动，以 O，A 为顶点作菱形 $OABC$，使点 B，C 在第一象限内，且$\angle AOC=60°$，点 P 的坐标为(0,3). 设点 A 运动了 t s，则在点 A 的运动过程中，当 $t=$____________时，$\triangle OCP$ 为等腰三角形.

7. 如图 1，菱形 $ABCD$ 的边长为 2，E 是边 AB 的中点，且 $DE\perp AB$.

(1) 求证：$\triangle ABD$ 是等边三角形.

(2) 如图 2，将$\triangle ADE$ 绕点 D 逆时针旋转，使得点 A 和点 C 重合，得到$\triangle CDF$，连接 BF，求线段 BF 的长.

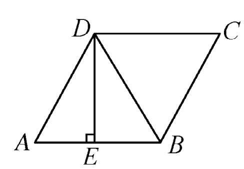


图 1

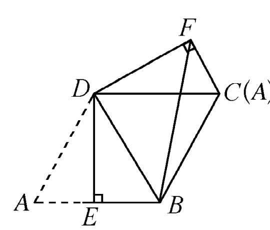


图 2

课时训练 21 特殊的平行四边形(5)

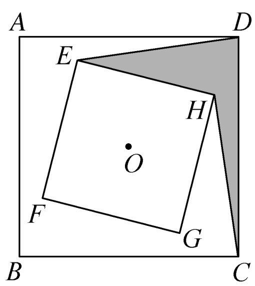
(时间:20 min)

基础巩固

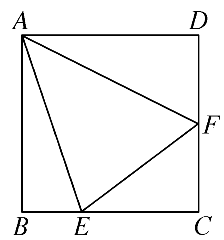
1. 如图,正方形 $ABCD$ 和正方形 $EFGH$ 的对称中心都是点 O,其边长分别是 3 和 2,则图中阴影部分的面积是 ( )

A. $\sqrt{2}$　　B. 1.25

C. 1.5　　D. 无法确定



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图,在正方形 $ABCD$ 中,点 E,F 分别在边 BC,CD 上,连接 AE,AF,EF,$\angle EAF=45°$. 若$\angle FEC=\alpha$,则$\angle BAE$ 一定等于 ( )

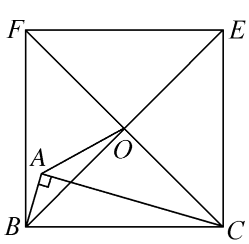
A. $\frac{\alpha}{2}$　　B. $90°-\frac{\alpha}{2}$

C. $45°-\frac{\alpha}{2}$　　D. $90°-\alpha$

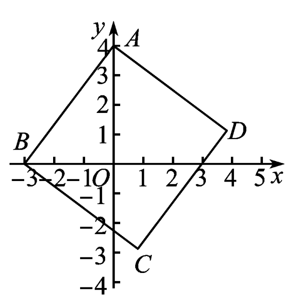
3. 如图,以 Rt$\triangle ABC$ 的斜边 BC 为边,在$\triangle ABC$ 的同侧作正方形 $BCEF$,设正方形的中心为 O,连接 AO. 若 $AB=2$,$AO=3\sqrt{2}$,则 AC 的长为 ( )

A. $12\sqrt{2}$　　B. 8

C. $4+3\sqrt{2}$　　D. $2+3\sqrt{2}$



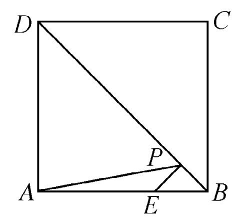
(第 3 题)



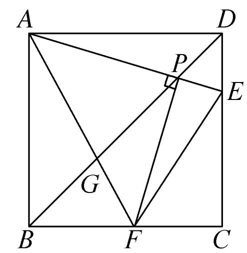
(第 4 题)

4. 正方形 $ABCD$ 在平面直角坐标系中的位置如图所示,已知点 A 的坐标为(0,4),点 B 的坐标为(−3,0),则点 C 的坐标为________.

5. 如图,正方形 $ABCD$ 的边长为 3,点 E 在边 AB 上,且 $BE=1$. 若点 P 在对角线 BD 上移动,则 $PA+PE$ 的最小值为________.



(第 5 题)



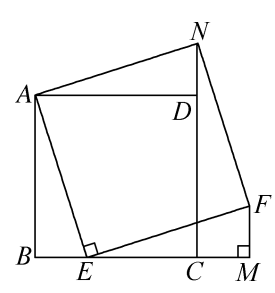
(第 6 题)

6. (2025 连云港市海州区期末)如图,在正方形 $ABCD$ 中,P 是对角线 BD 上一点(点 P 不与点 B,D 重合),连接 AP 并延长交 CD 于点 E,过点 P 作 $PF\perp AP$ 交 BC 于点 F,连接 AF,EF,AF 交 BD 于点 G. 若 $AB=5$,$DP=\sqrt{2}$,则 $BF=$________.

7. 如图,点 E 在正方形 $ABCD$ 的边 BC 上,$\angle AEF=90°$ 且 $EF=AE$,过点 F 作 $FM\perp BC$,垂足为 M.

(1) 求证:$BE=CM$.

(2) 延长 CD 至点 N,使得 $DN=BE$,连接 AN,FN. 求证:四边形 $AEFN$ 是正方形.

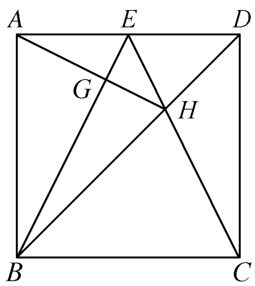


拓展提优

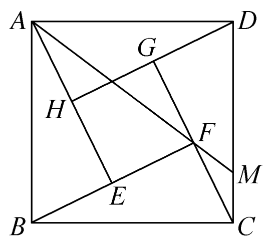
1. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，E 是边 AD 的中点，BD，CE 交于点 H，BE，AH 交于点 G. 给出下列结论：① $\angle ABE=\angle DCE$；② $AG\perp BE$；③ $S_{\triangle BHE}=S_{\triangle CHD}$；④ $\angle AHB=\angle EHD$. 其中正确结论的序号是　(　　)

A. ①③　　B. ①②③④

C. ①②③　　D. ①③④



（第 1 题）

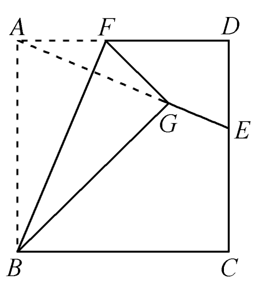


（第 2 题）

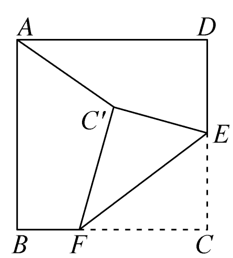
2. 如图，边长为 5 的大正方形 $ABCD$ 是由四个全等的直角三角形和一个小正方形 $EFGH$ 组成，连接 AF 并延长交 CD 于点 M. 若 $AH=GH$，则 CM 的长为(　　)

A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{3}{4}$　C. 1　D. $\frac{5}{4}$

3. 如图，正方形纸片 $ABCD$ 的边长为 12，E 是边 CD 上一点，连接 AE. 折叠该纸片，使点 A 落在 AE 上的点 G 处，并使折痕经过点 B，得到折痕 BF，点 F 在边 AD 上. 若 $DE=5$，则 GE 的长为________.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. (2025 南京市联合体期末)如图，正方形纸片 $ABCD$ 的边长为 4，E 是边 CD 的中点，F 是边 BC 上一动点. 将正方形纸片沿 EF 折叠，点 C 落在点 C' 处，连接 AC'. 当 AC' 的长最小时，BF 的长为________.

5. 【知识再现】

如图 1，四边形 $ABCD$ 是正方形，点 M，N 分别在边 BC，CD 上，连接 AM，AN，MN，$\angle MAN=45°$，延长 CB 至点 G，使 $BG=DN$，连接 AG. 根据全等三角形的知识，我们可以证明 $MN=BM+DN$.

【知识探究】

(1) 如图 1，作 $AH\perp MN$，垂足为 H，猜想 AH 与 AB 有怎样的数量关系，并给出证明.

【知识应用】

(2) 如图 2，已知 $\angle BAC=45°$，$AD\perp BC$ 于点 D，且 $BD=2$，$AD=6$，则 CD 的长为________.

【知识拓展】

(3) 如图 3，四边形 $ABCD$ 是正方形，E 是边 BC 的中点，F 是边 CD 上一点，$\angle FEC=2\angle BAE$，$AB=24$，求 DF 的长.

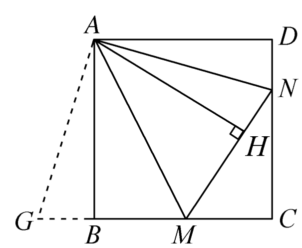


图 1

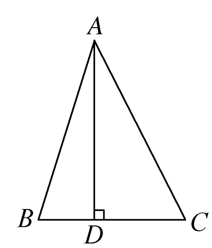


图 2

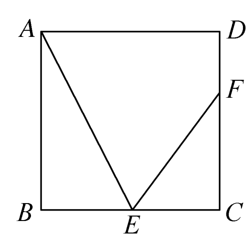


图 3

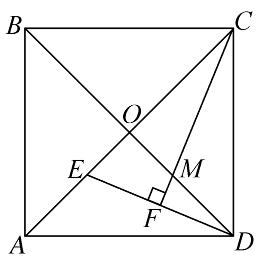
提优专题2　正方形中的常见模型

（时间:20 min）

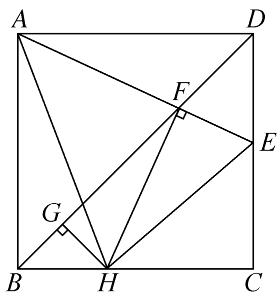
1. (2025宿迁市宿城区期末)如图,在正方形 $ABCD$ 中,E 是边 AC 上一点,连接 ED,过点 C 作 ED 的垂线交对角线 BD 于点 M,垂足为 F. 若 $CE=CD=2$,则 DM 的长为（　　）

A. 1　　B. $2\sqrt{2}-2$

C. $2-\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{2}$



（第1题）



（第2题）

2. (2025扬州市宝应县期末)如图,在正方形 $ABCD$ 中,$AB=3$,E 为边 CD 上一动点,AE 交 BD 于点 F,过点 F 作 $FH\perp AE$ 交 BC 于点 H,过点 H 作 $HG\perp BD$ 于点 G,连接 AH. 现有下列四个结论:①$\angle HAE=45°$;②$AF=HE$;③$FG=\frac{3\sqrt{2}}{2}$;④$FH=\sqrt{2}$. 其中,正确的结论有（　　）

A. ①③　B. ③④　C. ②③　D. ②④

3. 数学活动:探究正方形中的十字架

(1) 猜想:如图1,在正方形 $ABCD$ 中,点 E,F 分别在边 CD,AD 上,且 $BF\perp AE$,猜想线段 AE 与 BF 之间的数量关系:________.

(2) 探究:如图2,在正方形 $ABCD$ 中,点 E,F,G,H 分别在边 AB,BC,CD,AD 上,且 $EG\perp HF$,此时线段 HF 与 EG 相等吗? 如果相等,请给出证明;如果不相等,请说明理由.

(3) 应用:如图3,将边长为4的正方形纸片 $ABCD$ 折叠,使点 A 落在边 CD 的中点 E 处,点 B 落在点 F 处,折痕为 MN,则线段 MN 的长为________.

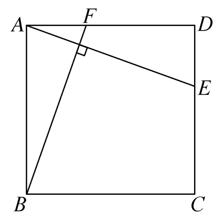


图1

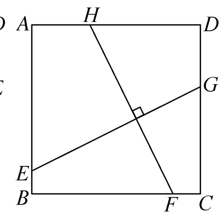


图2

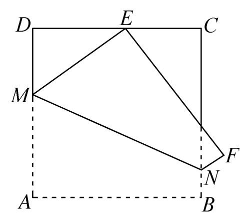
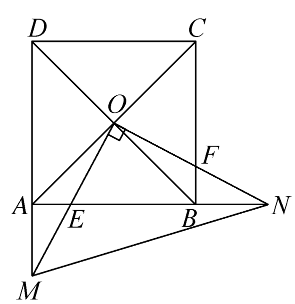


图3

4. 如图,正方形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O,点 E,F 分别在边 AB,BC 上($AE<BE$),且 $\angle EOF=90°$,OE 与 DA 的延长线交于点 M,OF 与 AB 的延长线交于点 N,连接 MN.

(1) 求证:$OM=ON$.

(2) 若正方形 $ABCD$ 的边长为4,E 为 OM 的中点,求 MN 的长.



5. 如图 1，在正方形 $ABCD$ 中，E，F 分别为边 DC，BC 上的点，且满足 $\angle EAF=45°$，连接 EF，求证：$DE+BF=EF$.

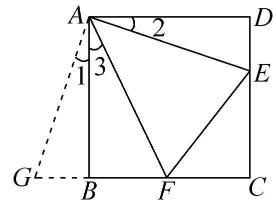


图 1

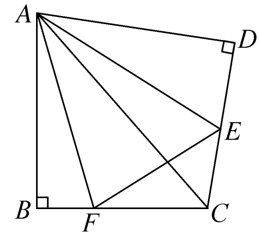


图 2

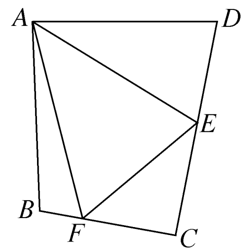


图 3

【方法感悟】

(1) 感悟解题方法，并完成下列填空：

将 $\triangle ADE$ 绕点 A 顺时针旋转 $90°$ 得到 $\triangle ABG$，此时 AB 与 AD 重合，由旋转可得 $AB=AD$，$BG=DE$，$\angle 1=\angle 2$，$\angle ABG=\angle D=90°$，

所以 $\angle ABG+\angle ABF=90°+90°=180°$，

因此，点 G，B，F 在同一条直线上.

因为 $\angle EAF=45°$，

所以 $\angle 2+\angle 3=\angle BAD-\angle EAF=45°$.

因为 $\angle 1=\angle 2$，

所以 $\angle 1+\angle 3=45°$，

即 $\angle GAF=\angle$________.

又因为 $AG=AE$，$AF=AF$，

所以 $\triangle GAF\cong$________.

所以________$=EF$，故 $DE+BF=EF$.

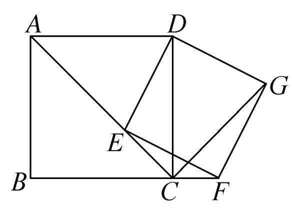
【方法迁移】

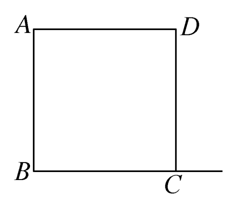
(2) 如图 2，将 $\text{Rt}\triangle ABC$ 沿斜边 AC 翻折得到 $\triangle ADC$，E，F 分别为边 DC，BC 上的点，且 $\angle EAF=\frac{1}{2}\angle DAB$. 试猜想 DE，BF，EF 之间有何数量关系，并证明你的猜想.

【问题拓展】

(3) 如图 3，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，E，F 分别为边 DC，BC 上的点，满足 $\angle EAF=\frac{1}{2}\angle DAB$，试猜想当 $\angle B$ 与 $\angle D$ 满足什么关系时，可使得 $DE+BF=EF$. 请直接写出你的猜想（不必说明理由）.

6. 如图，四边形 $ABCD$ 为正方形，$AB=3$，E 为对角线 AC 上一点，连接 DE，过点 E 作 $EF\perp DE$，交射线 BC 于点 F，以 DE，EF 为邻边作矩形 $DEFG$，连接 CG.





（备用图）

(1) AC 的长为________，$\angle ACB=$________°.

(2) 如图，当点 F 在线段 BC 的延长线上时，

①求证：矩形 $DEFG$ 是正方形；

②若 $CG=2\sqrt{2}$，求正方形 $DEFG$ 的边长.

(3) 当线段 DE 与正方形 $ABCD$ 的某条边的夹角是 35° 时，请直接写出 $\angle EFC$ 的度数.

7. (2025 淮安市盱眙县期末)综合与探究.

【问题情境】

数学活动课上，小明同学对正方形作如下探究：如图 1，在正方形 $ABCD$ 中，E，F 分别是边 AB，BC 上的点，连接 DE，过点 F 作 DE 的垂线，交边 AD 于点 G. 小明发现 DE，GF 之间存在着一定的数量关系. 小明将 GF 沿 AD 方向平移到 DH，连接 CH. 根据平移的性质，可判断四边形 $DGFH$ 是平行四边形，再证明 $\triangle ADE \cong \triangle CDH$，得到 $DE = DH$，继而得到 $DE = GF$.

【尝试初探】

(1) 老师提出该问题的变式问题：将正方形 $ABCD$ 改为菱形 $ABCD$，$\angle A = 60^\circ$，如图 2，E，F，G 分别是边 AB，AD，BC 上的点，连接 FG 与 DE 交于点 M. 若 $\angle EMG = 60^\circ$，猜想 DE 与 FG 之间的数量关系，并说明理由.

【迁移应用】

(2) 如图 3，在正形 $ABCD$ 中，点 E 在边 AB 上，点 M，N 分别在边 AD，BC 上，连接 DE，MN. 若 $\angle EON = 45^\circ$，$AB = 4$，$MN = \sqrt{17}$，求线段 DE 的长.

【拓展探究】

(3) 如图 4，在正方形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别在边 BC，AB 上，过点 F 作 $FH \perp AE$ 于点 H，交边 CD 于点 G，连接 EF，AG. 若 $AB = 6$，$CE = 2BE$，请直接写出 $AG + EF$ 的最小值.

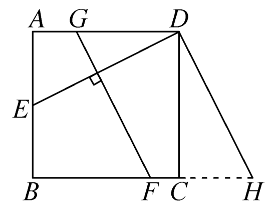


图 1

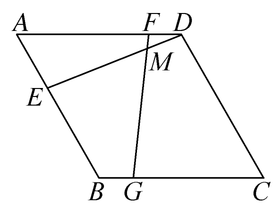


图 2

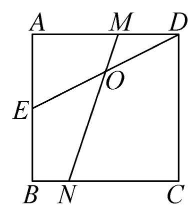


图 3

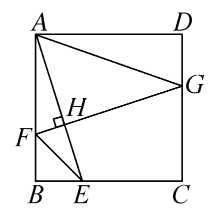


图 4

课时训练 22　三角形的中位线

（时间：20 min）

基础巩固

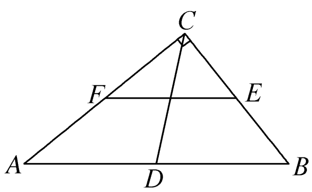
1. 顺次连接四边形 $ABCD$ 四边的中点所得的四边形为菱形，则四边形 $ABCD$ 一定满足的条件是　（　　）

A. $AC\perp BD$　　B. $AB=BC$

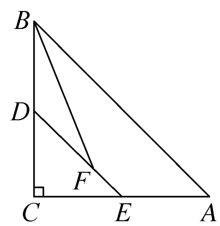
C. $AC=BD$　　D. $AB\perp BC$

2. 如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，D，E，F 分别是边 AB，BC，CA 的中点．若 $CD=6$ cm，则 EF 的长为　（　　）

A. 6 cm　B. 4 cm　C. 5 cm　D. 4.8 cm



（第 2 题）



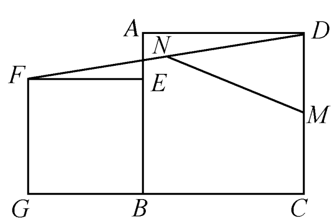
（第 3 题）

3. （2025 南通市海安市期末）如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=BC=4$，D，E 分别是边 BC，AC 的中点，BF 平分 $\angle ABC$，交 DE 于点 F，则 EF 的长是　（　　）

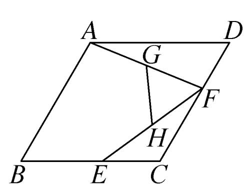
A. 2　　B. $2\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{2}-2$　　D. $\frac{4}{3}\sqrt{2}$

4. 如图，已知点 E 在正方形 $ABCD$ 的边 AB 上，以 BE 为边向正方形 $ABCD$ 外部作正方形 $BEFG$，连接 DF，M，N 分别是 DC，DF 的中点，连接 MN．若 $AB=7$，$BE=5$，则 $MN=$________．



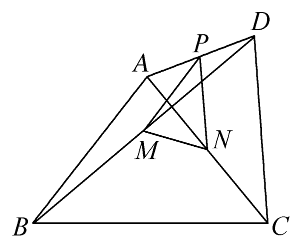
（第 4 题）



（第 5 题）

5. （2025 常州市期末）如图，在菱形 $ABCD$ 中，E，F 分别是边 BC，CD 上的动点（点 E，F 均不与点 C 重合），连接 AF，EF，G，H 分别是 AF，EF 的中点，连接 GH．若 $\angle B=60^\circ$，$AD=4\sqrt{3}$，则 GH 长的最小值是________．

6. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=CD=4$，且 AB 与 CD 不平行，P，M，N 分别是 AD，BD，AC 的中点．设 $\triangle PMN$ 的面积为 S，则 S 的取值范围是________．



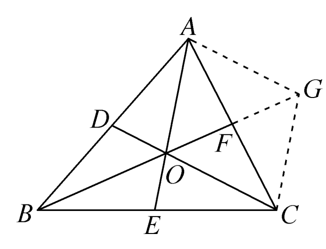
7. 证明：三角形的三条中线交于一点．

已知：如图，AE，CD 是 $\triangle ABC$ 的中线，AE，CD 交于点 O，连接 BO 并延长交 AC 于点 F．

求证：BF 是 $\triangle ABC$ 的中线．

小明进行了以下思考，证明：延长 BF 至点 G，使得 $OG=BO$，连接 AG，CG……

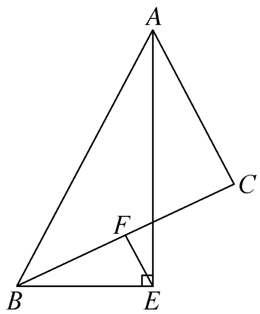
（请沿着小明的思考，将证明过程补充完整）



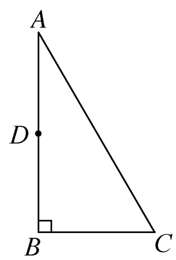
拓展提优

1. 如图，在$\triangle ABC$中，AE平分$\angle BAC$，$BE\perp AE$于点E，F是BC的中点. 若$AB=10$，$AC=6$，则EF的长为（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5



（第1题）



（第2题）

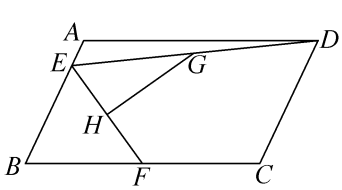
2. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle B=90^\circ$，$\angle A=30^\circ$，$BC=2$，D为AB的中点. 若点E在边AC上，且$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{DE}{BC}$，则$AE$的长为（　　）

A. 1　　B. 2

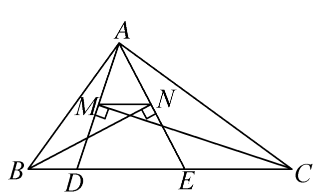
C. 1或$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 1或2

3. （2025南京市联合体期末）如图，E是$\square ABCD$的边AB上的动点，F，G，H分别是BC，DE，EF的中点，连接GH. 若$AB=2$，$AD=4$，$\angle A=120^\circ$，则GH的长为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. 1.5　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2



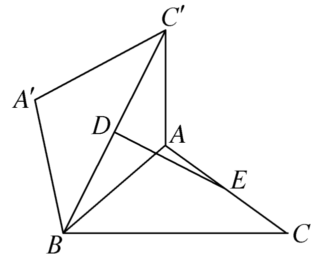
（第3题）



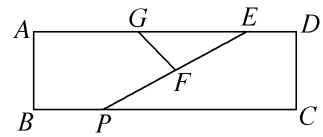
（第4题）

4. 如图，$\triangle ABC$的周长为19，点D，E在边BC上，$\angle ABC$的平分线垂直于AE，垂足为N，$\angle ACB$的平分线垂直于AD，垂足为M. 若$BC=7$，则MN的长为________.

5. 如图，在$\triangle ABC$中，$BC=24$，将$\triangle ABC$绕点B逆时针旋转，得到$\triangle A'BC'$，且$C'A\perp BC$，D，E分别为边BC'，AC的中点，连接DE. 若$C'A=10$，则DE的长为________.



（第5题）



（第6题）

6. 如图，在矩形$ABCD$中，$AB=3$，$AD=10$，点E在边AD上且$DE=2$. G为AE的中点，P为边BC上的一个动点，F为EP的中点，则$GF+EF$的最小值为________.

7. 已知四边形$ABCD$是菱形.

(1) 如图1，E，F，G，H分别是AB，BC，CD，DA的中点，求证：四边形$EFGH$是矩形.

(2) 在图2中，仅用无刻度的直尺作矩形$EFGH$，使其顶点E，F，G，H分别在边AB，BC，CD，DA上.

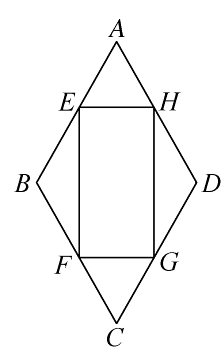


图1

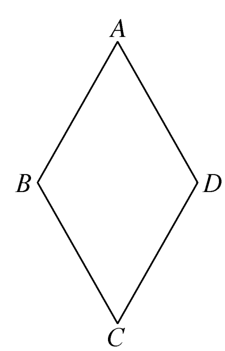


图2

课时训练 23　梯形

（时间：20 min）

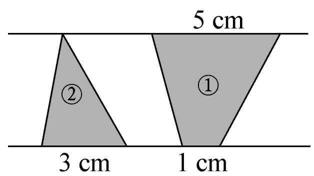
基础巩固

1. 顺次连接等腰梯形四边的中点所得的四边形是 (　　)

A. 平行四边形　　B. 矩形

C. 菱形　　D. 正方形

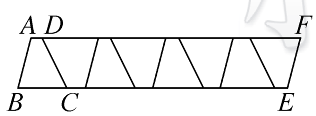
2. 如图，平行线之间有两个图形，阴影部分面积的关系是 (　　)



A. 无法比较　　B. ①与②相等

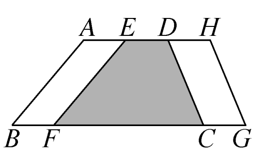
C. ①是②的 2 倍　　D. ①是②的 3 倍

3. 如图，四边形 $ABEF$ 是由 8 个全等的梯形拼接而成，其中 $AD=2$，$BC=4$，则 AF 的长为 (　　)



A. 12　　B. 20　　C. 24　　D. 36

4. 如图，梯形 $ABCD$ 沿上底 AD 方向向右平移到梯形 $EFGH$，$AD=6$，$BC=8$. 若阴影部分面积是四边形 $ABGH$ 面积的 $\frac{1}{3}$，则平移的距离为________.



5. 在梯形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，$AB=8$ cm，$CD=7$ cm，$AD=5$ cm，$\angle B=60°$，则 BC 的长为________cm.

6. 如图 1，在四边形 $ABCD$ 中，$AB /\!/ CD$，$\angle ADC=90°$，点 P 从点 A 出发，以每秒 2 个单位长度的速度，按 $A \to B \to C \to D$ 的顺序在边上匀速运动，设点 P 的运动时间为 t s，$\triangle PAD$ 的面积为 S，S 关于 t 的函数图象如图 2 所示. 当点 P 运动到 BC 的中点时，$\triangle PAD$ 的面积为________.

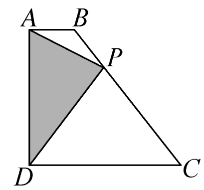


图 1

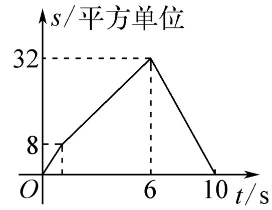
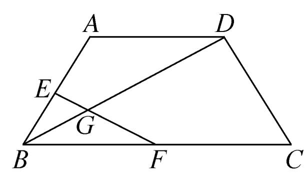


图 2

7. 如图，在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，$BC=2AD$，E，F 分别是边 AB，BC 的中点，BD 与 EF 相交于点 G.

(1) 求证：$BG=GF$.

(2) 连接 AG，AF，当 $AG=GF$ 时，求证：四边形 $AFCD$ 是菱形.



拓展提优

1. 已知在四边形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，对角线 AC，BD 交于点 O，且 $AC=BD$，下列四个命题中是真命题是 (　　)

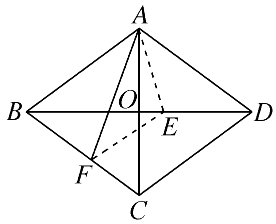
A. 若 $AB=CD$，则四边形 $ABCD$ 一定是等腰梯形

B. 若 $\angle DBC=\angle ACB$，则四边形 $ABCD$ 一定是等腰梯形

C. 若 $\frac{AO}{OB}=\frac{CO}{OD}$，则四边形 $ABCD$ 一定是矩形

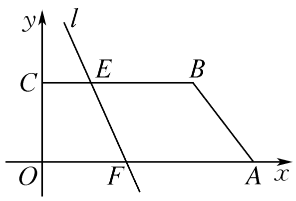
D. 若 $AC \perp BD$ 且 $AO=OD$，则四边形 $ABCD$ 一定是正方形

2. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=5$，$BD=8$，AC 与 BD 相交于点 O，E 为 OD 上一点，将△ADE 沿着 AE 翻折得到△AFE，使点 F 落在边 BC 上，则 DE 的长为　（　　）

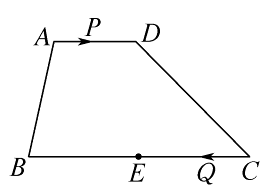


A. $\frac{12}{5}$　　B. 2.5　　C. 3　　D. $\frac{25}{8}$

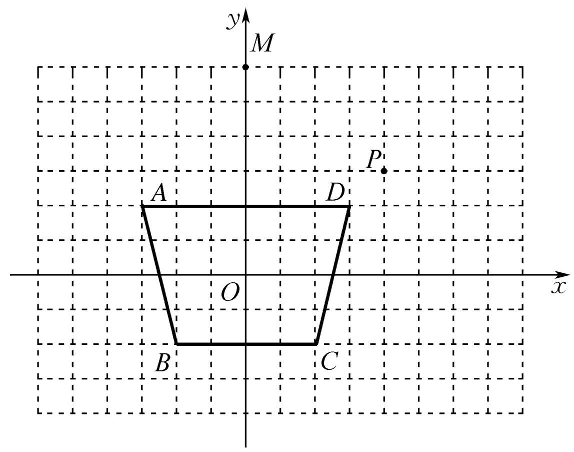
3. 如图，在平面直角坐标系中，点 $O(0,0)$，$A(7,0)$，$B(5,2)$，$C(0,2)$，一条动直线 l 分别与 BC，OA 交于点 E，F，且将四边形 $OABC$ 分为面积相等的两部分，则点 C 到动直线 l 的距离的最大值为________.



4. 如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AD=6$，$BC=16$，E 是 BC 的中点. 点 P 以每秒 1 个单位长度的速度从点 A 出发，沿 AD 向点 D 运动；点 Q 同时以每秒 3 个单位长度的速度从点 C 出发，沿 CB 向点 B 运动. 点 Q 停止运动时，点 P 也随之停止运动，当运动时间 $t=$________s 时，以 P，Q，E，D 为顶点的四边形是平行四边形.



5. 在平面直角坐标系 xOy 中，我们把横、纵坐标都是整数的点称为整点；把两个端点均为整点且长度为整数的线段称为整点线段. 如图，梯形 $ABCD$ 的四个顶点均为整点，点 $P(4,3)$，直线 l 过定点 $M(0,6)$，作点 P 关于直线 l 的对称点 P'，点 Q 为梯形 $ABCD$ 内一点（包含边界），连接 $P'Q$. 当点 P' 恰好落在梯形 $ABCD$ 内（包含界），且 $P'Q$ 是长度为 5 的整点线段时，这样的点 Q 共有________个.



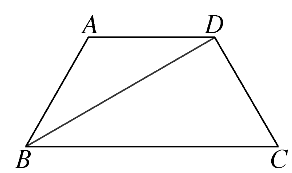
6. 如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，BD 平分∠ABC，$BD\perp DC$.

(1) 求证：$BC=2AD$.

(2) 作 $DE\perp BC$ 于点 E，$BE=6$.

①设 $DE=m$，请用含 m 的代数式表示梯形 $ABCD$ 的面积.

②F 为 BD 的中点，连接 EF 并延长，交边 AB 于点 G. 请你想一想，△BGF 能否成为直角三角形，如果能，请求出此时线段 AD 的长；如果不能，请说明理由.



提优专题 3　中点四边形的探究

（时间：20 min）

1. （2025 宿迁市宿城区期末）如果顺次连接一个四边形各边的中点所得到的四边形是矩形，那么这个四边形一定是　　（　　）

A. 矩形

B. 菱形

C. 对角线垂直的四边形

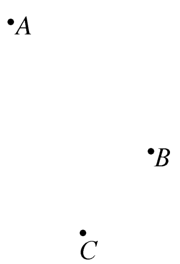
D. 对角线相等的四边形

2. （2025 南京市玄武区期末）如图，已知不共线的三点 A，B，C，D 是平面内的动点，线段 AB，BC，CD，DA 的中点分别为 M，N，P，Q. 下列关于四边形 $MNPQ$ 的说法正确的是　　（　　）

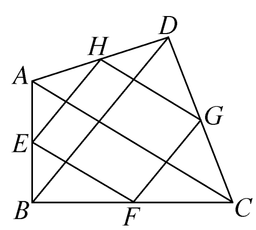
①存在无数个▱$MNPQ$；②存在无数个菱形 $MNPQ$；③存在无数个矩形 $MNPQ$；④存在两个正方形 $MNPQ$.

A. ①　　　B. ①②③

C. ①③④　　　D. ①②③④



（第 2 题）



（第 3 题）

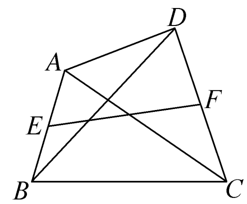
3. （2025 盐城市期末）如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AC=BD=8$，E，F，G，H 分别是各边的中点，则四边形 $EFGH$ 的周长是________.

4. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别为 AB，CD 的中点.

求证：

(1) $EF<\frac{1}{2}(AC+BD)$.

(2) $EF<\frac{1}{2}(AD+BC)$.



5. 顺次连接任意一个四边形的中点得到一个新四边形，我们称这个新四边形为原四边形的中点四边形. 数学兴趣小组通过作图、测量，得到猜想：原四边形的对角线对中点四边形的形状有着决定性作用. 以下从对角线的数量关系和位置关系两个方面展开探究.

【探究一】

(1) 如图 1，在四边形 $ABCD$ 中，E，F，G，H 分别是各边的中点，求证：中点四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

【探究二】

(2) 如图 2，从作图、测量结果得出猜想一：当原四边形的对角线相等时，中点四边形是________.

【探究三】

(3) 如图 3，从作图、测量结果得出猜想二：当原四边形对角线________时，中点四边形是________.

【探究四】

(4) 结合图 2、图 3，得出猜想三：当原四边形对角线________________时，中点四边形是正方形.

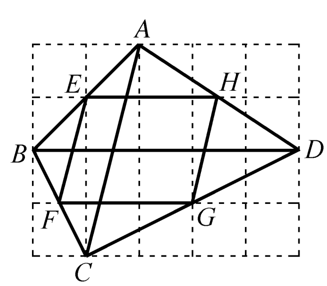


图 1

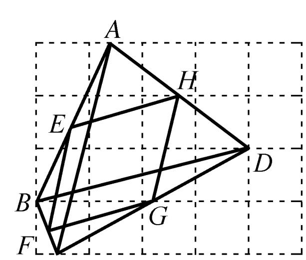


图 2

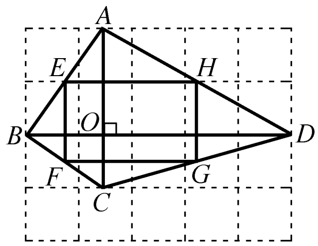


图 3

6. 如图 1,在四边形 $ABCD$ 中,E,F,G,H 分别是边 AB,BC,CD,DA 的中点,顺次连接 E,F,G,H,得到的四边形 $EFGH$ 是平行四边形. 这个▱$EFGH$ 被称为瓦里尼翁平行四边形. 瓦里尼翁平行四边形与原四边形关系密切:

①当原四边形的对角线满足一定关系时,瓦里尼翁平行四边形可能是菱形、矩形或正方形;

②瓦里尼翁平行四边形的周长与原四边形对角线的长度也有一定关系;

③瓦里尼翁平行四边形的面积等于原四边形面积的一半. 此结论可借助图 2 证明如下:

如图 2,连接 AC,分别交 EH,FG 于点 P,Q,过点 D 作 $DM\perp AC$ 于点 M,交 HG 于点 N. 因为 H,G 分别为 AD,CD 的中点,所以 $HG/\!/AC$,$HG=\frac{1}{2}AC$(依据 1). 过点 G 作 $GK\perp AC$ 于点 K. 易证 $\triangle DNG\cong\triangle GKC$,四边形 $MNGK$ 是矩形,所以 $DN=GK$,$GK=MN$,所以 $DN=MN=\frac{1}{2}DM$. 因为四边形 $EFGH$ 是瓦里尼翁平行四边形,所以 $HE/\!/GF$,即 $HP/\!/GQ$. 因为 $HG/\!/AC$,即 $HG/\!/PQ$,所以四边形 $HPQG$ 是平行四边形(依据 2). 所以 $S_{▱HPQG}=HG\cdot MN=\frac{1}{2}HG\cdot DM$. 因为 $S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}AC\cdot DM=HG\cdot DM$,所以 $S_{▱HPQG}=\frac{1}{2}S_{\triangle ADC}$. 同理……

(1) 材料中的依据 1 是:____________________. 依据 2 是:____________________.

(2) 请用刻度尺、三角板等工具,画一个四边形 $ABCD$ 及它的瓦里尼翁平行四边形 $EFGH$,使得四边形 $EFGH$ 为矩形(要求同时画出四边形 $ABCD$ 的对角线).

(3) 在图 1 中,分别连接 AC,BD 得到图 3,请猜想瓦里尼翁平行四边形 $EFGH$ 的周长与对角线 AC,BD 长度的关系,并证明你的结论.

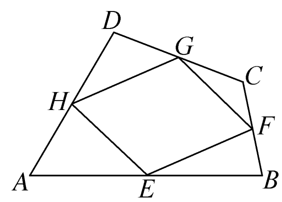


图 1

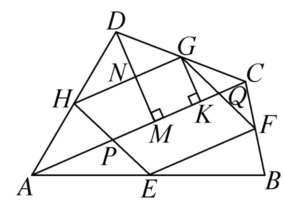


图 2

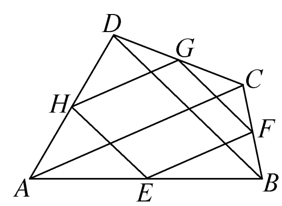


图 3