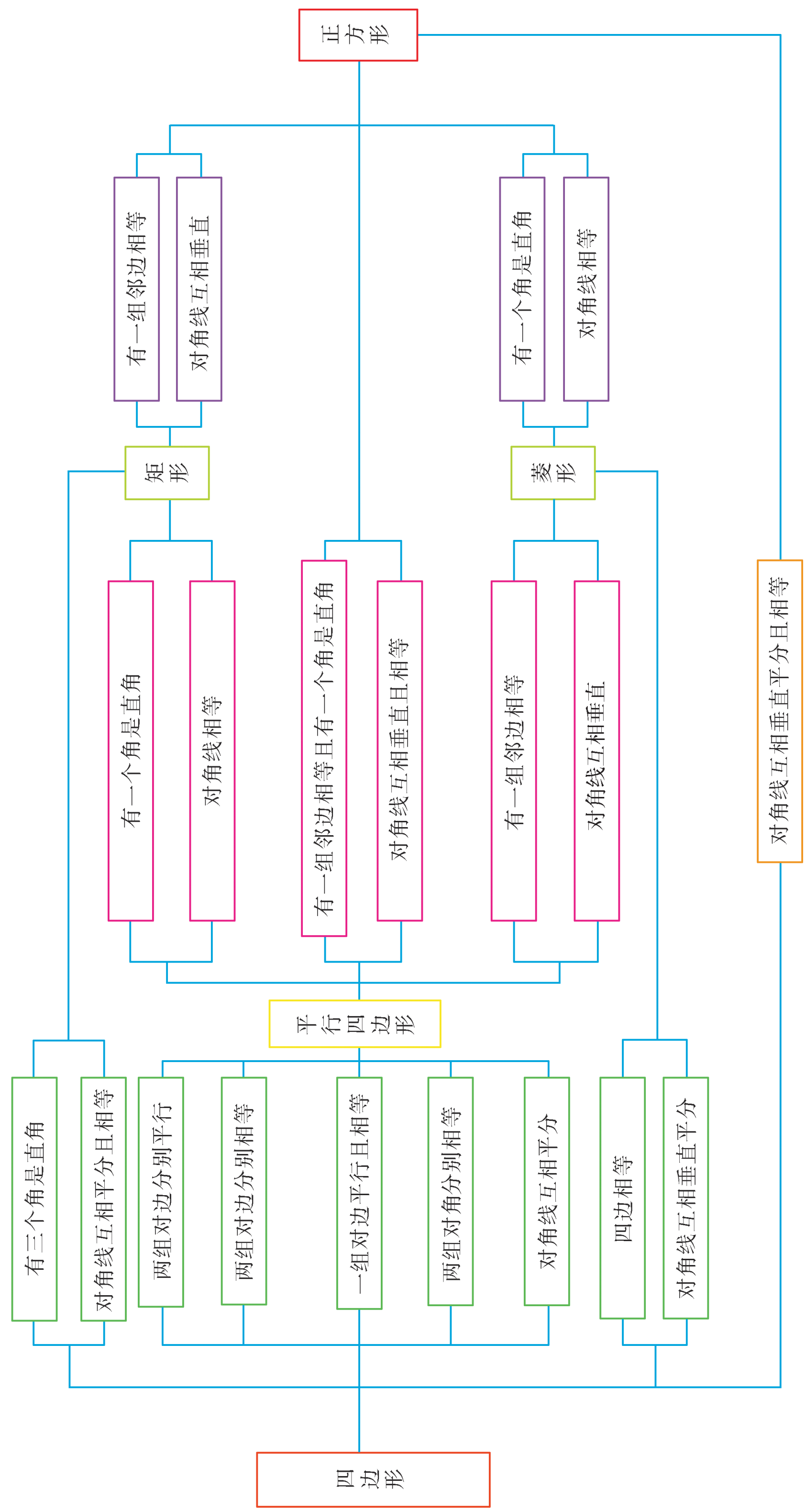
第 8 章　四边形

知识回放

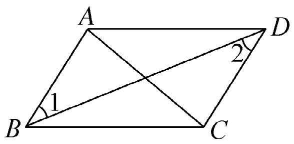
平行四边形及特殊的平行四边形关系图



名师精讲

考点一　平行四边形的性质

例1　如图，已知四边形 $ABCD$ 为平行四边形，下列结论错误的是　　(　　)



A. $\angle 1=\angle 2$　　　　B. $\angle BAD=\angle BCD$

C. $AB=CD$　　　　D. $AC\perp BD$

提示　根据平行四边形的性质：平行四边形对边平行且相等，以及对角相等，分别判断即可. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AB/\!/CD$，所以$\angle 1=\angle 2$，故选项 A 正确，不合题意；因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $\angle BAD=\angle BCD$，$AB=CD$，故选项 B，C 正确，不合题意；无法得出 $AC\perp BD$，故选项 D 错误，符合题意.

答案　D

关键提示

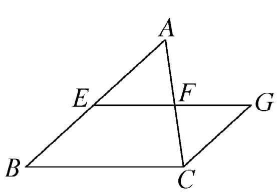
平行四边形具有对边平行且相等、对角相等且邻角互补、对角线互相平分等性质. 全面、系统、有条理地掌握平行四边形的性质是解题关键.

考点二　平行四边形的判定

例2　(南京市高淳区期末)如图，在$\triangle ABC$ 中，点 E，F 分别在边 AB，AC 上，$EF/\!/BC$，且 $EF=\frac{1}{2}BC$. 延长 EF 到点 G，使得 $FG=EF$，连接 CG.

(1) 求证：四边形 $BCGE$ 是平行四边形；

(2) 求证：E，F 分别是边 AB，AC 的中点.



提示　(1) 条件中已有 $EF/\!/BC$，只需要再证明 $EG=BC$ 或 $BE/\!/GC$ 即可；

(2) 由四边形 $BCGE$ 是平行四边形，可得 $AB/\!/GC$，$\angle A=\angle FCG$，易证得$\triangle AEF\cong\triangle CGF$，则有 $AF=CF$，$AE=CG$，结合 $BE=GC$，则有 $AE=BE$.

答案　(1) 因为 $EF=\frac{1}{2}BC$，$FG=EF$，$EG=EF+FG$，所以 $EG=BC$. 又因为 $EF/\!/BC$，所以四边形 $BCGE$ 是平行四边形.

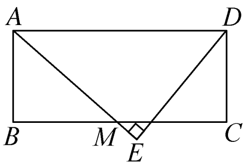
方法与技巧

平行四边形的判定可分别从边、角、对角线、对称性等角度去证明，证明时要结合已有条件，联系判定方法，进行逆向思维，可迅速明确思路，提高解题效率.

(2) 因为四边形 $BCGE$ 是平行四边形，所以 $BE=CG$，$AB/\!/GC$，所以 $\angle A=\angle FCG$. 又因为 $\angle AFE=\angle CFG$，$FG=FE$，所以 $\triangle AEF\cong\triangle CGF$，所以 $AF=CF$，$AE=CG$. 又因为 $BE=CG$，所以 $AE=BE$，即 E，F 分别是边 AB，AC 的中点.

考点三　矩形的性质与判定

例3 （苏州市吴中区期末）如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$BC=\frac{5}{2}$，M 为边 BC 的中点，连接 AM，过点 D 作 $DE\perp AM$ 交 AM 的延长线于点 E，则 DE 的长度为　(　　)



A. 1　　B. $\frac{3\sqrt{13}}{13}$　　C. $\frac{10\sqrt{41}}{41}$　　D. $\frac{\sqrt{41}}{10}$

提示 连接 DM. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$BC=\frac{5}{2}$，所以 $S_{矩形ABCD}=AB\cdot BC=1\times\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$. 因为 M 为边 BC 的中点，所以 $BM=\frac{1}{2}BC=\frac{5}{4}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABM$ 中，$AB=1$，$BM=\frac{5}{4}$，根据勾股定理，得 $AM=\sqrt{AB^2+BM^2}=\frac{\sqrt{41}}{4}$. 因为 $S_{\triangle ADM}=\frac{1}{2}S_{矩形ABCD}=\frac{5}{4}$，所以 $S_{\triangle ADM}=\frac{1}{2}AM\cdot DE=\frac{5}{4}$，所以 $DE=\frac{\frac{5}{4}\times 2}{\frac{\sqrt{41}}{4}}=\frac{10\sqrt{41}}{41}$.

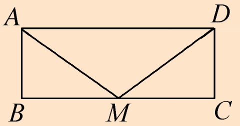
答案 C

关键提示

在 $\mathrm{Rt}\triangle AED$ 中，已知 AD 无法直接计算 DE. 考虑到 $DE\perp AE$，故将 AM 放到 $\mathrm{Rt}\triangle ABM$ 中，借助勾股定理求出其长度. 最后利用等积法，求出 DE 的长度.

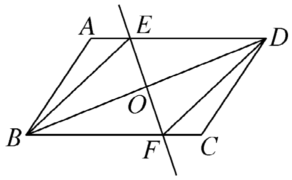
知识链接

如图，已知 M 为矩形 $ABCD$ 的边 BC 上任意一点，则有 $S_{\triangle ADM}=\frac{1}{2}AD\cdot AB=\frac{1}{2}S_{矩形ABCD}$.



考点四　菱形的性质与判定

例4 （淮安市外国语学校期末）如图，在▱$ABCD$ 中，O 为对角线 BD 的中点，过点 O 的直线 EF 分别交边 AD，BC 于 E，F 两点，连接 BE，DF.



(1) 求证：$\triangle DOE\cong\triangle BOF$.

(2) 当 $\angle DOE$ 等于多少度时，四边形 $BFDE$ 为菱形？请说明理由.

提示 (1) 利用平行四边形的性质以及全等三角形的判定方法可得出 $\triangle DOE\cong\triangle BOF$；

(2) 首先利用“一组对边平行且相等的四边形是平行四边形”，得出四边形 $BFDE$ 是平行四边形，进而利用“对角线互相垂直的平行四边形是菱形”，即可得出答案.

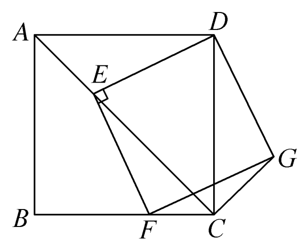
答案　(1) 因为在▱$ABCD$ 中，O 为对角线 BD 的中点，所以 $BO=DO$，$AD\parallel BC$，所以 $\angle EDB=\angle FBD$. 又因为 $\angle DOE=\angle BOF$，所以 $\triangle DOE\cong\triangle BOF$.

(2) 当 $\angle DOE=90^\circ$ 时，四边形 $BFDE$ 为菱形. 理由如下：

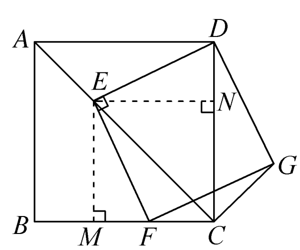
因为 $\triangle DOE\cong\triangle BOF$，所以 $BF=DE$. 又因为 $BF\parallel DE$，所以四边形 $BFDE$ 是平行四边形. 因为 $\angle DOE=90^\circ$，所以 $EF\perp BD$，所以▱$BFDE$ 为菱形.

考点五　正方形的性质与判定

例 5　(无锡市江阴市期中) 如图，已知四边形 $ABCD$ 为正方形，$AB=3$，E 为对角线 AC 上一动点，连接 DE，过点 E 作 $EF\perp DE$，交 BC 于点 F，以 DE，EF 为邻边作矩形 $DEFG$，连接 CG. 给出下列说法：①$\triangle ADE\cong\triangle CDG$；②四边形 $DEFG$ 是正方形；③$\angle ACG$ 的大小随着点 E 的运动不断改变；④$CE+CG$ 的值是定值. 其中正确的有________(填序号).



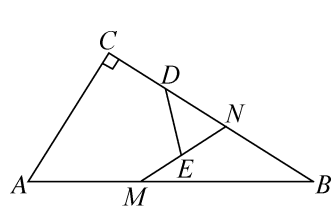
提示　如图，过点 E 分别作 $EM\perp BC$ 于点 M，$EN\perp CD$ 于点 N，易证 $\triangle DEN\cong\triangle FEM$(ASA)，所以 $EF=ED$，因为四边形 $DEFG$ 是矩形，所以矩形 $DEFG$ 是正方形，故②正确；所以 $DE=DG$，$\angle EDG=\angle ADC=90^\circ$，所以 $\angle ADE=\angle CDG$，因为 $AD=CD$，所以 $\triangle ADE\cong\triangle CDG$(SAS)，故①正确；所以 $\angle DCG=\angle DAE=45^\circ$，因为 $\angle ACD=45^\circ$，所以 $\angle ACG=90^\circ$ 是定值，故③错误；因为 $\triangle ADE\cong\triangle CDG$，所以 $AE=CG$，所以 $CE+CG=CE+AE=AC=\sqrt{2}AB=3\sqrt{2}$ 是定值，故④正确.



答案　①②④

考点六　中位线定理

例 6　(盐城市东台市期中) 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=6$，$BC=8$，N 是边 BC 上一点. M 为边 AB 上的动点(不与点 B 重合)，D，E 分别为 CN，MN 的中点，则 DE 长的取值范围为　(　　)



方法与技巧

当某四边形为平行四边形时，进而证其为菱形，可以从边或对角线两个角度考虑，即由“邻边相等的平行四边形是菱形”或“对角线互相垂直的平行四边形是菱形”等判定定理证之. 同理，欲证某平行四边形为矩形时，可由“有一个角为直角的平行四边形是矩形”或“对角线相等的平行四边形为矩形”等判定定理证之.

知识链接

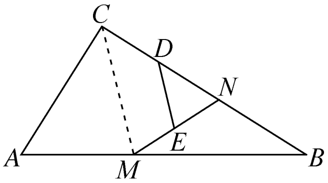
正方形既是轴对称图形，又是中心对称图形，其性质包括：①边：对边平行，四边相等；②角：每个角都是直角；③对角线：相等、互相平分、互相垂直，每条对角线平分一组对角.

关键提示

本题的关键是能否发现 $EF=DE$. ①可以从特殊位置入手，当点 E 在点 A 或 AC 的中点处，显然 $EF=DE$；②证明 $EF=DE$，可以采用本例提示的方法，也可以连接 BE，易证 $\triangle ADE\cong\triangle ABE$(SAS)，得 $DE=BE$，$\angle ADE=\angle ABE$，所以 $\angle CDE=\angle EBF$，在四边形 $CDEF$ 中，$\angle CDE+\angle CFE=180^\circ$，得 $\angle CDE=\angle EFB$，所以 $\angle EBF=\angle EFB$，所以 $EF=BE$，所以 $EF=DE$.

A. $3<DE<4$　　B. $3\leqslant DE<4$

C. $3\leqslant DE\leqslant 4$　　D. $\frac{12}{5}\leqslant DE<4$



提示 如图,连接 CM. 则 $DE=\frac{1}{2}CM$,所以当 $CM\perp AB$ 时,CM 的长取得最小值,故 DE 的长也取得最小值. 在 Rt$\triangle ABC$ 中,易得 $AB=10$. 当 $CM\perp AB$ 时,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot CM$,即 $6\times 8=10CM$,所以 $CM=\frac{24}{5}$. 所以 DE 长的最小值为 $\frac{12}{5}$. 因为 $CM<BC=8$,所以 $DE<4$,所以 $\frac{12}{5}\leqslant DE<4$.

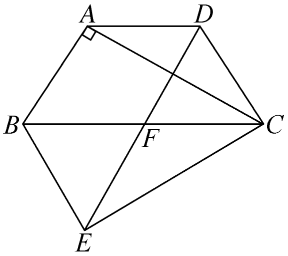
答案 D

方法与技巧

中位线是三角形中的特殊线段,它的性质"平行于第三边且等于第三边的一半"在计算与证明中有广泛的应用,且中位线是几何题中常见的辅助线.

考点七　梯形

例 7 如图,已知在梯形 $ABCD$ 中,$AD\parallel BC$,$AB=CD$,AC 是梯形 $ABCD$ 的一条对角线,$\angle BAC=90°$,将 $\triangle ABC$ 沿 BC 翻折后得到 $\triangle EBC$,连接 ED 交 BC 于点 F.



(1) 求证:$BC=ED$;

(2) 如果 $ED\parallel AB$,求证:四边形 $ABED$ 是等腰梯形.

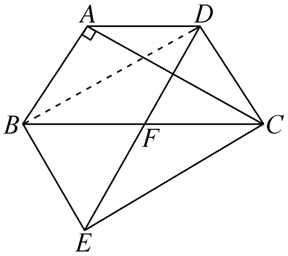
提示 (1) 连接 BD,根据翻折的性质以及题目条件可证四边形 $BECD$ 是平行四边形,再根据 $\angle BEC=\angle BAC=90°$,可得四边形 $BECD$ 是矩形,从而有 $BC=ED$;

(2) 可证 $\angle DAB+\angle ABE\neq 180°$,所以 AD 与 EB 不平行,又因为 $ED\parallel AB$,从而根据梯形的定义可以得到四边形 $ABED$ 是梯形,再通过证明四边形 $ABFD$ 是菱形,得到 $AD=AB$,从而有 $AD=EB$,即可证明梯形 $ABED$ 是等腰梯形.

方法与技巧

从等腰梯形的概念出发,即"两腰相等的梯形叫作等腰梯形"是说明这个四边形是等腰梯形的关键.

答案 (1) 连接 BD. 因为 $AD\parallel BC$,$AB=CD$,所以梯形 $ABCD$ 是等腰梯形,所以 $\angle ABC=\angle DCB$. 因为将 $\triangle ABC$ 沿 BC 翻折后得到 $\triangle EBC$,所以 $EB=AB$,$\angle EBC=\angle ABC$. 所以 $EB=CD$,$\angle EBC=\angle DCB$,所以 $EB\parallel CD$,所以四边形 $BECD$ 是平行四边形. 又因为 $\angle BEC=\angle BAC=90°$,所以 $\square BECD$ 是矩形,所以 $BC=ED$.



(2) 因为 $AD\parallel BC$,所以 $\angle DAB+\angle ABC=180°$. 因为 $\angle ABE=2\angle ABC$,所以 $\angle DAB+\angle ABE\neq 180°$,所以 AD 与 EB 不平行. 因为 $ED\parallel AB$,所以四边

形 $ABED$ 是梯形. 因为 $AD // BF$，$DF // AB$，所以四边形 $ABFD$ 是平行四边形. 由(1)可知四边形 $BECD$ 是矩形，所以 $BF=CF=\frac{1}{2}BC$，$DF=EF=\frac{1}{2}ED$，$BC=ED$，所以 $BF=DF$. 所以 $\square ABFD$ 是菱形，所以 $AD=AB$. 因为 $EB=AB$，所以 $AD=EB$，所以梯形 $ABED$ 是等腰梯形.

抢分必做

必会题

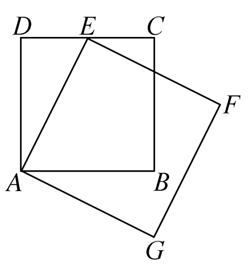
1. (2025 无锡市期末)菱形具有而平行四边形不一定具有的性质是　(　　)

A. 对边相等　　B. 对角线相等

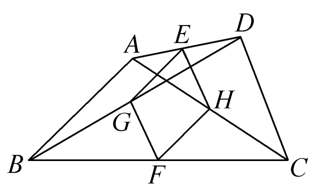
C. 对角线互相平分　　D. 对角线互相垂直

2. (镇江市丹阳市期末)如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，E 是边 CD 的中点，以 AE 为边在 AE 的右侧作正方形 $AEFG$，则点 D 与点 F 之间的距离为　(　　)

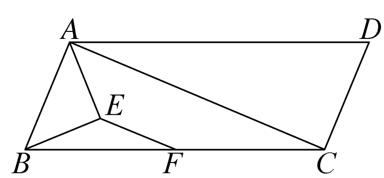
A. $6\sqrt{2}$　　B. $4+2\sqrt{2}$　　C. $4\sqrt{5}$　　D. $2\sqrt{10}$



(第 2 题)



(第 3 题)



(第 4 题)

3. (南京市鼓楼区期末)如图，在四边形 $ABCD$ 中，E，F，G，H 分别是 AD，BC，BD，AC 的中点. 给出下列结论：①四边形 $EGFH$ 是平行四边形；②当 $AB=CD$ 时，四边形 $EGFH$ 是菱形；③当 $AC \perp BD$ 时，四边形 $EGFH$ 是矩形. 其中所有正确结论的序号是　(　　)

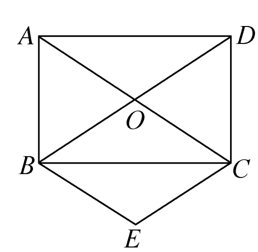
A. ①②　　B. ①③　　C. ②③　　D. ①②③

4. (南京市鼓楼区期中)如图，在 $\square ABCD$ 中，$BC=13$，$AC=12$，AE 平分 $\angle BAC$，$BA \perp AC$，$BE \perp AE$，F 是 BC 的中点，则 $EF=$________.

5. (苏州市高新区期末)如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，$BE // AC$，$CE // DB$.

(1) 求证：四边形 $OBEC$ 是菱形；

(2) 若 $AD=4$，$AB=2$，求菱形 $OBEC$ 的面积.

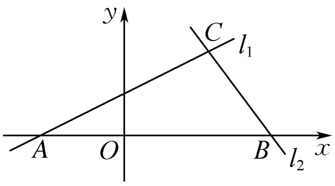


6. (常州市金坛区期中)如图,在平面直角坐标系 xOy 中,一次函数 $y=\frac{1}{2}x+4$ 的图象 l_1 与 x 轴交于点 A,一次函数 $y=-\frac{4}{3}x+\frac{56}{3}$ 的图象 l_2 与 x 轴交于点 B,与 l_1 交于点 C. P 是 y 轴上一点,Q 是直线 l_1 上一点.

(1) 求△ABC 的面积;

(2) 若点 P 在 y 轴的负半轴上,且△PBC 是轴对称图形,求点 P 的坐标;

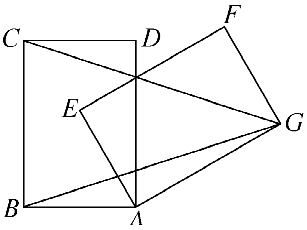
(3) 若以 P,Q,B,C 为顶点的四边形是平行四边形,请直接写出点 Q 的坐标.



易错题

7. (2025徐州市期末)在▱$ABCD$ 中,$AB=5$,∠BAD 的平分线交直线 BC 于点 E. 若 $CE=3$,则▱$ABCD$ 的周长为________.

8. (扬州市江都区期末)如图,在矩形 $ABCD$ 中,已知 $AB=6$,$AD=8$,将矩形 $ABCD$ 绕点 A 顺时针旋转 θ($0°<\theta<360°$)得到矩形 $AEFG$. 当 $\theta=$________时,$GB=GC$.



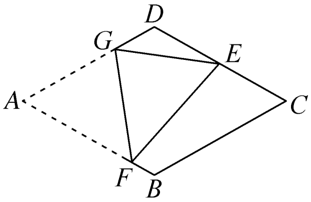
热点题

9. (泰州市靖江市期末)在四边形 $ABCD$ 中,对角线 AC,BD 相交于点 O. 给出下列四组条件:①$AB/\!/CD,AD/\!/BC$;②$AB=CD,AD=BC$;③$AO=CO,BO=DO$;④$AB/\!/CD,AD=BC$. 其中一定能判定这个四边形是平行四边形的条件有 ( )

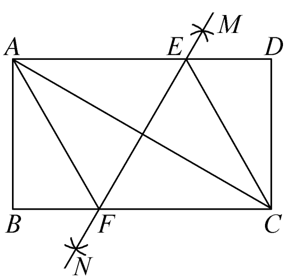
A. 4组　　B. 3组　　C. 2组　　D. 1组

10. (无锡市新吴区期末)如图,在菱形纸片 $ABCD$ 中,$AB=4$,∠$A=60°$,将菱形纸片翻折,使点 A 落在边 CD 的中点 E 处,折痕为 FG,点 F,G 分别在边 AB,AD 上,则 EF 的长为 ( )

A. $\frac{7}{2}$　　B. $\frac{9}{4}$　　C. $\frac{19}{6}$　　D. $\frac{7}{3}\sqrt{3}$



(第10题)



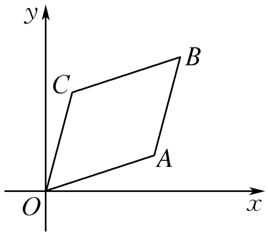
(第11题)

11. (2025苏州市高新区期末)如图,在矩形 $ABCD$ 中,$AB=3$,分别以点 A,C 为圆心,大于 $\frac{1}{2}AC$的长为半径画弧,两弧相交于 M,N 两点;作直线 MN,分别交 AD,BC 于点 E,F,连

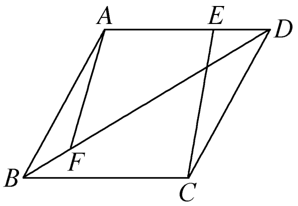
接 AF 和 CE. 若 $EF=BF+DE$,则边 BC 的长为　　(　　)

A. $2\sqrt{3}$　　B. $3\sqrt{3}$　　C. $6\sqrt{3}$　　D. $\frac{9}{2}\sqrt{3}$

12. (南京市秦淮区期末)如图,在平面直角坐标系中,菱形 $OABC$ 的顶点 A 的坐标是(3,1). 若顶点 B 在第一象限的角平分线上,则点 B 的坐标是________.



(第 12 题)



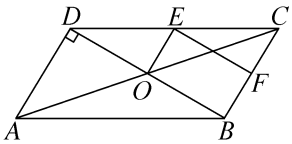
(第 13 题)

13. (宿迁市宿城区期末)如图,在边长为 2 的菱形 $ABCD$ 中,$\angle ABC=60°$,E,F 分别是 AD,BD 上的动点,$DE=BF$,连接 AF,CE,则 $AF+CE$ 的最小值为________.

14. (2025 扬州市邗江区期末)如图,在▱$ABCD$ 中,对角线 AC,BD 相交于点 O,$AD\perp BD$,E 是边 CD 的中点,过点 E 作 $EF/\!/BD$,交 BC 于点 F.

(1) 求证:四边形 $OEFB$ 是矩形;

(2) 若 $AD=4$,$DC=6$,求四边形 $OEFB$ 的面积.

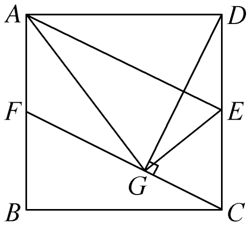


15. (南京市联合体期末)如图,四边形 $ABCD$ 为正方形,E,F 分别是边 CD,AB 的中点,$DG\perp CF$ 于点 G.

(1) 求证:$AE/\!/CF$;

(2) 求证:$\angle AGE=90°$;

(3) 若正方形的边长为 2,则线段 CG 的长度为________.



16. (无锡市江阴市期中)如图 1,E 是正方形 $ABCD$ 的边 CD 上一动点(点 E 不与点 C,D 重合),连接 BE,将$\triangle BCE$ 沿 BE 翻折,使点 C 落在点 F 处.

(1) 当 DF 的长最小时,$DE:CE$ 的值为________.

(2) 如图 2,连接 AF 并延长,交 BE 的延长线于点G,在点 E 的运动过程中,$\angle BGA$ 的大小是否变化?若变化,请说明理由;若不变,请求$\angle BGA$ 的值.

(3) 如图 3,在(2)的条件下,连接 DG,试探索 BG,DG,AG 之间的数量关系,并说明理由.

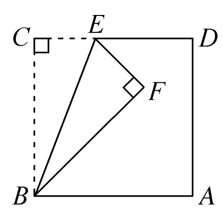


图 1

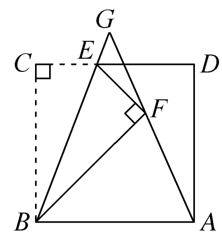


图 2

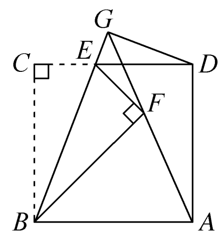


图 3

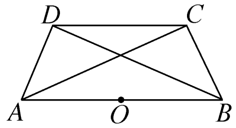
拓展题

17. (2025 扬州市仪征市期末)我们规定:如果一个四边形的对角线长度相等,则称该四边形为“等角线四边形”.

(1) 下列一定是“等角线四边形”的有________(填序号).

①平行四边形;②矩形;③菱形;④正方形.

(2) 如图,四边形 $ABCD$ 为“等角线四边形”,O 是边 AB 的中点,若它的对角线 AC 可绕点 O 旋转至与对角线 BD 重合,求证:$\angle ACB=90°$.



临门一脚

本章的考点主要是平行四边形、矩形、菱形、正方形的性质与判定.题目的难度较大,解决的关键就是分析清楚条件,本着缺什么找什么的原则解决问题,在学习过程中一定要重视理论的记忆,熟记各种性质和判定定理.

折线统计图表示的是增长率，2020年至2025年的增长率都是正数，所以该公司2020年至2025年销往国外的产品量是逐渐增加的，故不同意小明的说法.

14. C **提示:**统计调查一般分为以下几步：收集数据、整理数据、描述数据、分析数据.

第7章　认识概率

1. C　**2.** D

3. (1) 0.6　(2) 30　(3) 10　10

4. D

5. (1) 小　(2) 小　(3) ①小　②大

6. A　**7.** D　**8.** C　**9.** D

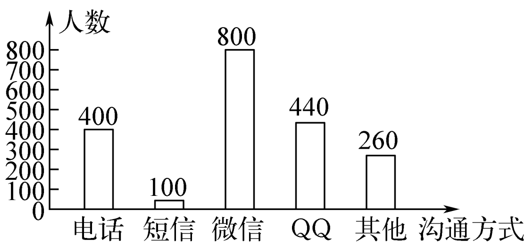
10. $\frac{4}{5}$　**11.** ③

12. **解:**(1) 三次传球所有可能的情况如下：(乙、甲、乙)，(乙、甲、丙)，(乙、丙、甲)，(乙、丙、乙)，(丙、甲、乙)，(丙、甲、丙)，(丙、乙、甲)，(丙、乙、丙).

(2) 由(1)知三次传球后，球回到甲脚下的概率为$\frac{2}{8}$，即$\frac{1}{4}$；球传到乙脚下的概率为$\frac{3}{8}$. 因为$\frac{3}{8}>\frac{2}{8}$，所以球传到乙脚下的概率大.

13. **解:**(1) 2 000　144°

(2) 最喜欢用"短信"进行沟通的人数为$2\ 000\times5\%=100$，最喜欢用"微信"进行沟通的人数为$2\ 000-(400+440+260+100)=800$. 补全条形统计图如图所示.



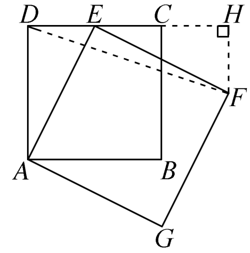
(3) ①估计该校最喜欢用"微信"进行沟通的人数为$3\ 600\times\frac{800}{2\ 000}=1\ 440$.

②$\frac{11}{50}$

第8章　四边形

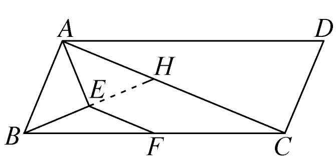
1. D

2. D **提示:**如图，连接DF，过点F作$FH\perp CD$，交DC的延长线于点H. 因为正方形$ABCD$的边长为4，E是边CD的中点，所以$DE=\frac{1}{2}CD=2$，$\angle ADE=90^\circ=\angle EHF$. 因为四边形$AEFG$是正方形，所以$AE=EF$，$\angle AEF=90^\circ$. 所以$\angle DAE=90^\circ-\angle DEA=\angle HEF$，所以$\triangle ADE\cong\triangle EHF$，所以$EH=AD=4$，$HF=DE=2$，所以$DH=DE+EH=2+4=6$. 在$Rt\triangle DFH$中，$DF=\sqrt{DH^2+HF^2}=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$.



3. A

4. 3.5 **提示:**如图，延长BE交AC于点H. 在$Rt\triangle ABC$中，$AB=\sqrt{BC^2-AC^2}=5$. 因为AE平分$\angle BAC$，所以$\angle BAE=\angle HAE$. 因为$BE\perp AE$，所以$\angle AEB=\angle AEH=90^\circ$. 又因为$AE=AE$，所以$\triangle BAE\cong\triangle HAE$，所以$AH=AB=5$，$BE=EH$，所以$HC=AC-AH=7$. 又因为$BF=FC$，所以$EF$是$\triangle BCH$的中位线，所以$EF=\frac{1}{2}HC=3.5$.



5. (1) **证明:**因为$BE/\!/AC$，$CE/\!/DB$，所以四边形$OBEC$是平行四边形. 因为四边形$ABCD$是矩形，所以$OC=\frac{1}{2}AC$，$OB=\frac{1}{2}BD$，$AC=BD$，所以$OB=OC$，所以▱$OBEC$是菱形.

(2) **解:**因为$AD=4$，$AB=2$，所以$S_{矩形ABCD}=4\times2=8$，所以$S_{\triangle OBC}=\frac{1}{4}S_{矩形ABCD}=2$，所以菱形$OBEC$的面积为$2S_{\triangle OBC}=4$.

6. **解:**(1) 由条件可知,点 A 的坐标为 $(-8,0)$,点 B 的坐标为 $(14,0)$,所以 $AB=14-(-8)=22$. 联立 $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+4, \\ y=-\frac{4}{3}x+\frac{56}{3}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=8, \\ y=8. \end{cases}$ 所以点 C 的坐标为 $(8,8)$. 所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 22\times 8=88$.

(2) 设点 P 的坐标为 $(0,m)(m<0)$. 因为 $\triangle PBC$ 是轴对称图形,所以 $CP=CB$ 或 $PB=PC$ 或 $BP=BC$. 当 $CP=CB$ 时,$8^2+(8-m)^2=(14-8)^2+(0-8)^2$,解得 $m=14$(舍去)或 $m=2$(舍去);当 $PB=PC$ 时,$14^2+m^2=8^2+(8-m)^2$,解得 $m=-\frac{17}{4}$;当 $BP=BC$ 时,$14^2+m^2=(14-8)^2+(0-8)^2$,该方程无解. 综上所述,点 $P\left(0,-\frac{17}{4}\right)$.

(3) 点 Q 的坐标为 $(-6,1)$ 或 $(6,7)$ 或 $(22,15)$. **提示:**设点 Q 的坐标为 (x_Q,y_Q). ①当 BC 为平行四边形的一条边,CQ 为另外一条边时,因为 $BP\parallel CQ$,所以设直线 BP 的函数表达式为 $y=\frac{1}{2}x+b$,因为点 B 的坐标为 $(14,0)$,所以直线 BP 的函数表达式为 $y=\frac{1}{2}x-7$,所以点 P 的坐标为 $(0,-7)$,由 $QP\parallel BC$ 且 $QP=BC$,得 $x_Q-0=8-14$,$y_Q-(-7)=8-0$,所以 $x_Q=-6$,$y_Q=1$,所以点 Q 的坐标为 $(-6,1)$;②当 BC 为平行四边形的一条边,CQ 为对角线时,设点 P 的坐标为 $(0,n)$,因为 $PQ\parallel BC$,$PQ=BC$,所以 $0-x_Q=8-14$,所以 $x_Q=6$,把 $x_Q=6$ 代入 $y=\frac{1}{2}x+4$,得 $y_Q=\frac{1}{2}\times 6+4=7$,所以点 Q 的坐标为 $(6,7)$;③当 BC 为对角线时,因为 BC 的中点坐标为 $(11,4)$,所以由四边形 $CPBQ$ 为平行四边形可知,PQ 的中点坐标为 $(11,4)$,因为点 P 在 y 轴上,所以点 Q 的横坐标为 22,把 $x_Q=22$ 代入 $y=\frac{1}{2}x+4$,得 $y_Q=15$,所以点 Q 的坐标为 $(22,15)$. 综上所述,点 Q 的坐标为 $(-6,1)$ 或 $(6,7)$ 或 $(22,15)$.

7. 14 或 26 **提示:**①如图 1,当 $\angle BAD$ 的平分线交线段 BC 于点 E. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $AD\parallel BC$,所以 $\angle DAE=\angle BEA$. 因为 AE 平分 $\angle BAD$,所以 $\angle DAE=\angle BAE$. 所以 $\angle BEA=\angle BAE$,所以 $BE=AB=5$. 所以 $BC=BE+CE=5+3=8$,所以▱$ABCD$ 的周长为 $(5+8)\times 2=26$. ②如图 2,当 $\angle BAD$ 的平分线交 BC 的延长线于点 E. 同理可得 $BE=AB=5$,所以 $BC=BE-CE=5-3=2$,所以▱$ABCD$ 的周长为 $(5+2)\times 2=14$. 综上所述,▱$ABCD$ 的周长为 14 或 26.

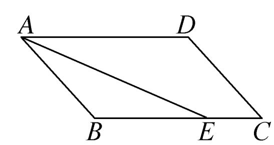


图 1

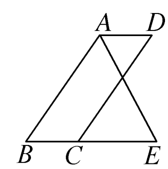


图 2

8. 60° 或 300° **提示:**若 $GB=GC$,则点 G 在 BC 的垂直平分线上. 分 2 种情况讨论:如图 1,当点 G 在 AD 的右侧时,取 BC 的中点 H,连接 GD,GH,其中 GH 交 AD 于点 M. 因为 $GB=GC$,所以 $GH\perp BC$. 易证四边形 $ABHM$ 是矩形,所以 $AM=BH=\frac{1}{2}AD$,$GM\perp AD$,所以 GM 垂直平分 AD. 由旋转,可知 $AG=AD$,所以 $GD=AG=AD$,所以 $\triangle ADG$ 是等边三角形,所以 $\angle DAG=60^\circ$,所以旋转角 $\theta=60^\circ$. 如图 2,当点 G 在 AD 的左侧时,取 BC 的中点 H,连接并延长 GH 交 AD 于点 M,连接 GD. 同理,可得 $\triangle ADG$ 是等边三角形,所以 $\angle DAG=60^\circ$,所以旋转角 $\theta=360^\circ-60^\circ=300^\circ$. 综上所述,当 $\theta=60^\circ$ 或 $\theta=300^\circ$ 时,$GB=GC$.

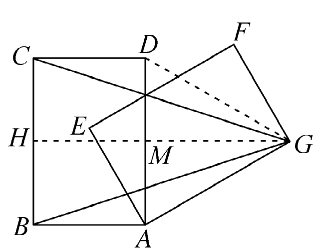


图 1

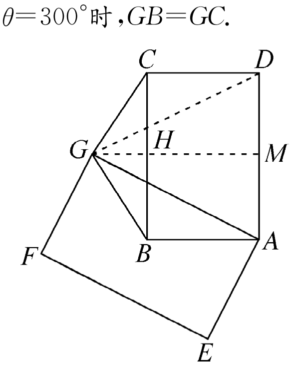


图 2

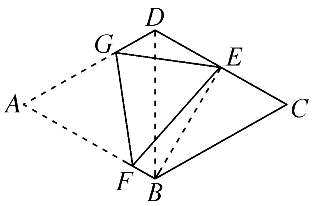
易错分析

点 G 相对于 AD 有两种位置,必须分类讨论.

9. B **提示:**一定能判定这个四边形是平行四边形的条件有①$AB\parallel CD$,$AD\parallel BC$;②$AB=CD$,

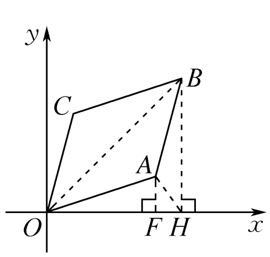
$AD=BC$；③$AO=CO$，$BO=DO$. 当$AB//CD$，$AD=BC$时，四边形$ABCD$可能是等腰梯形，所以④不能判定这个四边形是平行四边形.

10. A **提示：**如图，连接BE，BD. 因为四边形$ABCD$为菱形，$\angle A=60°$，所以$BC=CD=AB=4$，$\angle C=\angle A=60°$，所以$\triangle BCD$是等边三角形. 因为E是边CD的中点，所以$DE=CE=2$，$BE\perp CD$，所以$\angle EBC=30°$，所以$BE=\sqrt{3}CE=2\sqrt{3}$. 因为$CD//AB$，所以$\angle ABE=\angle CEB=90°$. 由折叠可得$AF=EF$. 因为$EF^2=BE^2+BF^2$，所以$EF^2=12+(4-EF)^2$，所以$EF=\frac{7}{2}$.

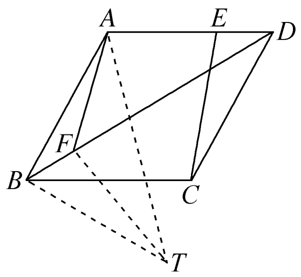


11. B **提示：**令AC交EF于点O. 由作图可得MN垂直平分AC，所以$AF=CF$，$AO=CO$，$AE=CE$，$\angle AOF=90°$. 因为四边形$ABCD$为矩形，所以$AD//BC$，$AD=BC$，$\angle B=90°$，所以$\angle EAO=\angle FCO$. 因为$\angle EOA=\angle FOC$，所以$\triangle AOE\cong\triangle COF$，所以$CF=AE$，$OE=OF$，所以$AF=CF=AE=CE$，$DE=BF$. 因为$EF=BF+DE$，所以$OE=OF=BF=DE$. 因为$AF=AF$，所以$Rt\triangle ABF\cong Rt\triangle AOF$，所以$AO=AB=3$. 所以$CO=AO=3$，所以$AC=6$，所以$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=3\sqrt{3}$.

12. $(4,4)$ **提示：**如图，过点B作$BH\perp x$轴于点H，过点A作$AF\perp OH$于点F，连接AH. 由“SSS”可证$\triangle AHB\cong\triangle AHO$，所以$OH=BH$，$\angle AHO=\angle AHB=45°$. 因为$AF\perp OH$，所以$FH=AF=1$，所以$BH=OH=OF+FH=4$，所以点$B(4,4)$.



13. $2\sqrt{2}$ **提示：**如图，作$\angle FBT=\angle EDC=60°$，使$BT=CD=2$，连接$TF$，$AT$. 又因为$DE=BF$，所以$\triangle EDC\cong\triangle FBT(SAS)$，所以$CE=TF$. 因为四边形$ABCD$为菱形，所以$BD$平分$\angle ABC$，所以$\angle ABD=\frac{1}{2}\angle ABC=30°$，所以$\angle ABT=\angle ABD+\angle FBT=90°$. 在$Rt\triangle ABT$中，由勾股定理，得$AT=\sqrt{AB^2+TB^2}=2\sqrt{2}$，所以$AF+CE=AF+TF\geqslant AT=2\sqrt{2}$，所以$AF+CE$的最小值为$2\sqrt{2}$.



14. (1) **证明：**因为四边形$ABCD$是平行四边形，所以$BO=DO=\frac{1}{2}BD$，$AD//BC$. 又因为E是CD的中点，所以EO是$\triangle BCD$的中位线，所以$OE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD$，$OE//BC$. 因为$EF//BD$，所以四边形$OEFB$是平行四边形. 因为$AD\perp BD$，即$\angle ADB=90°$，因为$AD//BC$，所以$\angle CBD=\angle ADB=90°$，所以四边形$OEFB$是矩形.

(2) **解：**因为$AD=4$，所以$OE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD=2$. 因为四边形$ABCD$是平行四边形，$DC=6$，所以$AB=DC=6$. 在$Rt\triangle ABD$中，$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$，所以$BO=\frac{1}{2}BD=\sqrt{5}$，所以四边形$OEFB$的面积为$OE\cdot OB=2\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$.

15. (1) **证明：**因为四边形$ABCD$是正方形，所以$AB=CD$，$AB//CD$. 所以$AF//CE$. 因为E，F分别是CD，AB的中点，所以$AF=CE$，所以四边形$AFCE$是平行四边形，所以$AE//CF$.

(2) **证明：**设AE和DG交于点H. 因为$CF//AE$，$DG\perp CF$，所以$DG\perp AE$. 因为E是CD的中点，所以$EG=ED$，所以$\triangle DGE$是等

腰三角形,所以 H 是 DG 的中点,所以 AH 垂直平分 DG,所以 $AG=AD$. 易证$\triangle ADE\cong\triangle AGE$,所以$\angle AGE=\angle ADE=90°$.

(3) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **提示:**因为 $AG=AD=2$,$DE=1$,所以 $AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$. 又因为$GH\perp AE$,所以$\frac{1}{2}AG\cdot GE=\frac{1}{2}AE\cdot GH$,即$\frac{1}{2}\times2\times1=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}GH$,所以 $GH=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 由(2)可知 $DG=2GH=\frac{4\sqrt{5}}{5}$,所以 $CG=\sqrt{CD^2-DG^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

16. 解:(1) $\sqrt{2}$ **提示:**因为 $DF\geqslant BD-BF$,所以当 B,F,D 三点共线时,DF 的长有最小值,如图 1. 因为将$\triangle BCE$ 沿 BE 翻折,所以 $CE=EF$,$\angle EFB=\angle C=90°$. 设 $CE=EF=x$. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以$\angle BDC=45°$,所以 $DE=\sqrt{2}EF=\sqrt{2}x$,所以 $DE:CE=\sqrt{2}$.

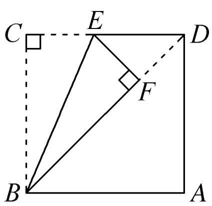


图 1

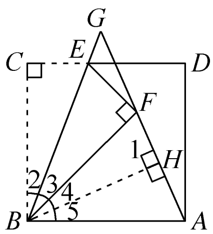


图 2

(2) $\angle BGA$ 的大小不变. 如图 2,过点 B 作 $BH\perp AG$ 于点 H,则$\angle 1=90°$. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以$AB=BC$,$\angle ABC=90°$. 由翻折的性质,可知$\angle 2=\angle 3$,$BC=BF$,所以 $BF=BA$. 又因为$BH\perp AG$,所以$\angle 4=\angle 5$. 又因为$\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5=\angle ABC=90°$,所以$2\angle 3+2\angle 4=90°$,所以$\angle 3+\angle 4=45°$,即$\angle HBG=45°$. 又因为$\angle 1=90°$,所以$\angle BGA=45°$.

(3) $BG+DG=\sqrt{2}AG$. 理由如下:

如图 3,过点 A 作$AQ\perp AG$,交 GB 的延长线于点 Q,则$\angle QAG=90°$. 因为$\angle QGA=45°$,所以$\angle GQA=\angle QGA=45°$,所以 $QA=GA$. 因为$\angle QAG=\angle BAD=90°$,所以$\angle QAG-\angle BAG=\angle BAD-\angle BAG$,即$\angle QAB=\angle GAD$. 又因为 $AB=AD$,所以$\triangle QAB\cong\triangle GAD$(SAS),所以 $DG=BQ$. 所以 $GQ=BG+BQ=BG+DG$. 又因为在 $\mathrm{Rt}\triangle AGQ$ 中,$GQ=\sqrt{2}AG$,所以 $BG+DG=\sqrt{2}AG$.

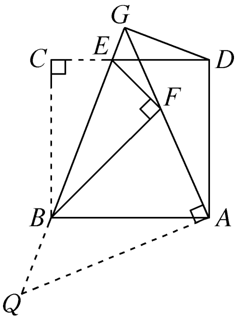
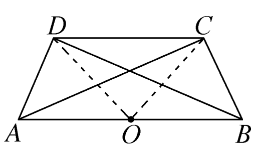


图 3

17. (1) ②④

(2) **证明:**如图,连接 OD,OC. 因为四边形 $ABCD$ 为“等角线四边形”,所以 $AC=BD$. 因为 O 是边 AB 的中点,所以 $OA=OB$. 因为四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 可绕点 O 旋转至与对角线 BD 重合,所以 $OA=OD$,$OC=OB$. 所以 $OC=OA=OB$,所以$\angle OCA=\angle OAC$,$\angle OCB=\angle OBC$. 因为$\angle OCA+\angle OAC+\angle OCB+\angle OBC=180°$,所以$\angle OCA+\angle OCB=90°$,所以$\angle ACB=90°$.



第 9 章 因式分解

1. B **2.** C **3.** 4

4. 解:(1) 原式$=(x-y)(2a-b)$.

(2) 原式$=(x+4y^2-4xy)\cdot(x+4y^2+4xy)=(x-2y)^2(x+2y)^2$.

5. D

6. B **提示:**$4m^2+12m+9=(2m+3)^2$;$4m^2-12m+9=(2m-3)^2$;$\frac{4}{9}m^4+4m^2+9=(\frac{2}{3}m^2+3)^2$,共 3 个.

7. 3 **提示:**设另一个因式为$(mx+k)$,则$(x-1)\cdot(mx+k)=mx^2+kx-mx-k=mx^2+(k-m)x-k=ax^2-6x+3$,所以$-k=3$,$k-m=-6$,解得 $k=$