# 课时训练篇

## 第 6 章　数据的收集、整理与描述

### 课时训练 1　普查与抽样调查(1)

**【基础巩固】**

**1.** D　**2.** D　**3.** D　**4.** D　**5.** 1 500

**6.** 抽样调查　**7.** 简单随机抽样　具有

**8.** (1) 该校 4 000 名学生每天的起床方式

(2) 不同年级不同班级抽取的 400 名学生每天的起床方式

(3) 400

(4) 该校每名学生每天的起床方式

**9.** 不可信　抽样不具有广泛性

**10.** **解**:不合适. 理由如下:

因为小强他们四个人坐在教室最后面,所以他们的身高平均数会大于全班同学的身高平均数,这样的样本不具有代表性.

**【拓展提优】**

**1.** C　**2.** D　**3.** D　**4.** C　**5.** 没有

**6.** **解**:丙方案比较合适. 理由如下:

甲方案所选取的样本太特殊;乙方案所选取的样本与调查对象无关;丙方案选取的样本比甲方案、乙方案更具有代表性和科学性.

### 课时训练 2　普查与抽样调查(2)

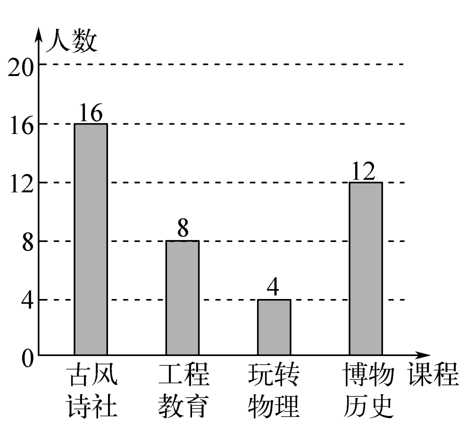
**【基础巩固】**

**1.** C　**2.** C

**3.** **解**:(1) ②④①③

(2) D

(3) ①选择工程教育的人数为 $40-16-4-12=8$. 补全条形统计图如下:




②根据调查结果,40 名学生中选择“古风诗社”的学生人数最多(答案不唯一,言之有理即可).

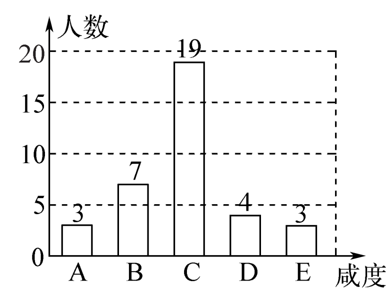
**【拓展提优】**

**1.** B　**2.** D

**3.** **解**:(1) 填表如下:

| 咸度 | 划记 | 人数 |
|---|---|---|
| A | 下 | 3 |
| B | 正丅 | 7 |
| C | 正正正止 | 19 |
| D | 止 | 4 |
| E | 下 | 3 |

画出条形统计图如下:




(2) 由上表和条形图可以看出,大多数顾客会评价这种新点心的咸度适中.

### 课时训练 3　统计图(1)

**【基础巩固】**

**1.** C　**2.** D　**3.** C　**4.** D　**5.** 288　**6.** 120

**7.** 36°

**8.** **解**:根据表格数据得出选 A 所占圆心角的度数为 $\frac{15}{120}\times360^\circ=45^\circ$;选 B 所占圆心角的度数为 $\frac{5}{120}\times360^\circ=15^\circ$;选 C 所占圆心角的度数为 $\frac{90}{120}\times360^\circ=270^\circ$;选 D 所占圆心角的度数为 $\frac{10}{120}\times360^\circ=30^\circ$. 画出扇形统计图略.

**【拓展提优】**

**1.** B　**2.** 36　**3.** 35.9%

**4.** **解**:(1) 200　30

(2) $200-50-30-40=60$(人),$360°\times\frac{60}{200}=108°$.

答:"剪纸"兴趣活动所对应扇形的圆心角的度数为 108°.

(3) 不能.理由如下:

因为喜爱"剪纸"兴趣活动的学生的人数 $1\ 200\times\frac{60}{200}=360>300$,所以这样的设立计划不能满足所有有意向参加兴趣活动的学生同时参加活动的需求.

## 课时训练 4　统计图(2)

**【基础巩固】**

**1.** C　**2.** C　**3.** C　**4.** C　**5.** 条形

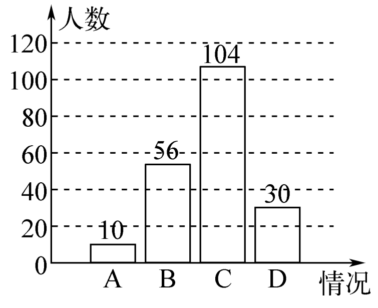
**6.** 2 019　2 018　**提示**:根据题条形统计图可知,该市 2016—2019 年私人汽车拥有量的年净增量分别为 $120-100=20$(万辆),$150-120=30$(万辆),$183-150=33$(万辆).所以 2019 年私人汽车拥有量的年净增量最多.根据题折线统计图可知,2018 年私人汽车拥有量的年增长率最大.

**【拓展提优】**

**1.** D　**2.** D　**3.** 扇形　条形　折线

**4.** **解**:(1) 200

(2) B 情况的人数有 $200\times28\%=56$,C 情况的人数有 $200\times52\%=104$,A 情况的人数有 $200-56-104-30=10$.补全条形统计图如下:




(3) $46\times(1-28\%-52\%-15\%)=2.3$(万人).

答:每天都用公共自行车的市民约有 2.3 万人.

## 课时训练 5　统计案例:货比三家

**【基础巩固】**

**1.** B　**2.** 丁　**3.** 甲公司

**4.** **解**:(1) $a=20$,$m=960$.　**提示**:$a=100-10-30-40=20$.设总利润为 $x$ 万元,则 $\frac{1\ 200}{x}=40\%$,解得 $x=3\ 000$,所以 $m=3\ 000-1\ 200-560-280=960$(万元).

(2) $\frac{960}{20\times30\%}=160$(万元);$\frac{560}{20\times20\%}=140$(万元).

答:网购软件的人均利润为 160 万元;视频软件的人均利润为 140 万元.

(3) 能.设从视频软件的研发人员中安排 $x$ 人去从事网购软件的研发.则有 $960+560+60=160\times(6+x)+140\times(4-x)$,解得 $x=3$.又因为 $20\times20\%=4$(人),$3<4$,所以符合题意.所以从研发与维护视频软件的人中调 3 个人到研发与维护网购软件,可使总利润增加 60 万元.

**【拓展提优】**

**1.** B　**提示**:这栋居民楼共有居民 $3+10+15+22+30+25+20=125$(人),故①错误;由图可知每周使用手机支付次数为 28～35 的人数最多,故②正确;每周使用手机支付的次数在 35～42 的人数占总人数的比例为 $\frac{25}{125}=\frac{1}{5}$,故③正确;每周使用手机支付不超过 21 次的居民有 $3+10+15=28$(人),故④错误.

**2.** ③④⑤

**3.** **解**:(1) 800　7 200

(2) 12 月份"每天阅读时间不少于 1 h"的七年级学生人数约为 $8\ 000\times(1-5\%)=7\ 600$,所以增长率为 $\frac{7\ 600-7\ 200}{7\ 200}\times100\%\approx5.56\%$,故该地区 2023 年 12 月份"每天阅读时间不少于 1 h"的七年级学生人数相对于 9 月份的增长率约为 5.56%.

(3) 该地区出台相关激励措施的做法收到了良好的效果,"每天阅读时间少于 1 h"的比例由 9 月份的 10%减少到 12 月份的 5%,"每天阅读时间不少于 2 h"的比例也有大幅度上升.

## 课时训练 6 频数和频率

**【基础巩固】**

**1.** D **2.** D **3.** B **4.** 0.5 **5.** 6 **6.** 0.3

**7.** 0.25 **8.** 0.3 **9.** 9 **10.** 0.35 **11.** 5

**12.** **解**:(1) 依题意,这次调查的总人数为 $6\div(36\div360)=60$.

(2) 依题意,$a=60\times0.5=30$;$b=12\div60=0.2$;$c=6\div60=0.1$;$d=0.2\times60=12$.

**【拓展提优】**

**1.** C **2.** B **3.** 20

**4.** 2 **提示**:课外书的总数为 $816\div0.34=2\ 400$(本),全校学生总数为 $408\div(1-28\%-38\%)=1\ 200$(人),所以全校学生平均每人阅读课外书的本数是 $2\ 400\div1\ 200=2$.

**5.** $a+b-1$

**6.** **解**:(1) 参加这次演讲比赛的学生有 $4+8+6+7=25$(人).

(2) 优秀率为 $\frac{7}{25}\times100\%=28\%$.

**7.** **解**:(1) 填表如下:

| 分组 | 500~900 | 900~1 100 | 1 100~1 300 | 1 300~1 500 | 1 500~1 700 | 1 700 以上 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 频数 | 48 | 121 | 208 | 223 | 193 | 207 |
| 频率 | 0.048 | 0.121 | 0.208 | 0.223 | 0.193 | 0.207 |

(2) 由(1)可得 $0.048+0.121+0.208+0.223=0.6$,所以灯管使用寿命不足 1 500 h 的频率为 0.6.

## 课时训练 7 频数分布表和频数分布直方图

**【基础巩固】**

**1.** B **2.** A **3.** D **4.** B **5.** 9 0.40

**6.** 5 8 **7.** 24

**【拓展提优】**

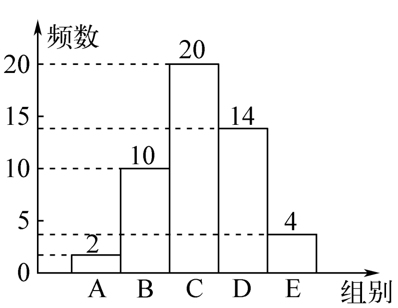
**1.** A

**2.** 32 **提示**:因为中间一个长方形的面积等于其他 10 个小长方形的面积和的 $\frac{1}{4}$,所以中间一个长方形的面积等于总面积的 $\frac{1}{1+4}=0.2$.又因为样本容量是 160,所以中间一组的频数为 $160\times0.2=32$.

**3.** 7 28

**4.** **解**:(1) 2 50

(2) A 组的频数是 2,C 组的频数是 $50\times40\%=20$,D 组的频数是 $50\times28\%=14$,E 组的频数是 $50\times8\%=4$.补全频数分布直方图如图所示.




(3) 估计月信息消费额不少于 200 元的户数是 $3\ 000\times(40\%+28\%+8\%)=2\ 280$.

## 课时训练 8 中学生的视力情况调查

**【基础巩固】**

**1.** D **2.** D **3.** 72 800 **4.** 7 200

**5.** **解**:(1) 60 108° **提示**:$24\div40\%=60$(名);$\frac{18}{60}\times360°=108°$.

(2) 选择 A 选项的学生人数为 $60\times25\%=15$.补全条形统计图略.

(3) $1\ 200\times\frac{3}{60}=60$(人).

答:估计该校选择"不了解"的学生人数约为 60.

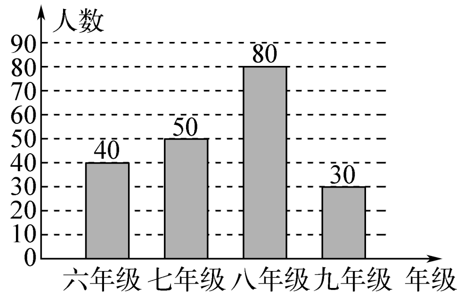
**【拓展提优】**

**1.** B **2.** C **3.** 120

**4.** (1) 16 12.5 (2) 10 500

**5.** **解**:(1) 200 144 补全条形统计图如下:

各年级被抽取人数条形统计图




(2) 根据题意，得不关注的学生所占的百分比为$\frac{90}{200}\times100\%=45\%$，所以全校关注足球赛的学生大约有$2\ 400\times(1-45\%)=1\ 320$(人).

(3) ①根据以上所求可得出：只有55%的学生关注足球，有45%的学生不关注，可以看出仍有部分学生忽略了对足球的关注，希望学校做好教育与引导工作，加大对足球进校园的宣传力度，让校园足球得到更多的关注和支持，推动校园足球的发展.

②考虑到样本具有的随机性、代表性、广泛性，如果要了解中小学生对足球的关注情况，抽样时应针对不同的年级、不同性别、不同年龄段的学生进行随机抽样.

## 提优专题1 统计图表的综合

**1.** D **2.** C **3.** $L_2$

**4.** **解**：(1) $200\times90\%\times25\%=45$(人).

答：本次调查的200人中使用最多的AI大模型为“豆包”的有45人.

(2) 由题图可知Kimi所占百分比为$\frac{18}{200\times90\%}\times100\%=10\%$，则通义千问所占百分比为$1-50\%-25\%-10\%-10\%=5\%$，所以$2\ 000\times90\%\times5\%=90$(人).

答：估计该校使用最多的AI大模型为“通义千问”的学生人数为90.

**5.** **解**：(1) B D

(2) 6.2 小于 **提示**：在2021年的调查样本中，男、女生的比例约为1∶1，则2021年该市学生体测优秀率为$\frac{9.0\%\times1+3.4\%\times1}{1+1}=6.2\%$. 若在2024年男、女生的比例约为1∶1，则2024年该市学生体测优秀率为$\frac{11.1\%\times1+6.2\%\times1}{1+1}=8.65\%$，而2024年该市学生体测优秀率为8.50%. 因为8.65%>8.50%，而男生优秀率为11.1%，女生优秀率为6.2%，所以男生人数小于女生人数.

# 第7章 认识概率

## 课时训练9 随机事件

**【基础巩固】**

**1.** B **2.** D **3.** A **4.** D **5.** 随机 **6.** 1

**7.** 必然 **8.** ②⑤

**9.** **解**：不可能事件：(2)(4).

必然事件：(1).

随机事件：(3)(5).

**10.** **解**：(1) 随机事件.

(2) 必然事件.

(3) 不可能事件.

(4) 因为题图中黑色正方形地板的块数比白色正方形地板的块数多，所以小猫踩在黑色正方形地板上的可能性较大.

**【拓展提优】**

**1.** D **2.** B **3.** A **4.** ①② ③ ④

**5.** 1 **提示**：若小明第一次取走1根，小丽也取走1根，小明第二次取走2根，则接下来小丽不论取走1根还是2根，小明都将取走最后一根；若小明第一次取走1根，小丽取走2根，小明第二次取走1根，则接下来小丽不论取走1根还是2根，小明都将取走最后一根. 所以若由小明先取，且小明获胜是必然事件，则小明第一次应该取走火柴棒的根数是1.

**6.** **解**：(1) 至多2个红球.

(2)至少8个红球.

(3)至少2个黄球，至多8个黄球.

(4)至多1个红球或至多1个黄球.

## 课时训练10 概率

**【基础巩固】**

**1.** A **2.** A **3.** D **4.** B **5.** 错误

6. ①③②　7. $<$　8. 大于

9. 解：(1) 黄

(2) 放入 5 个红球和 2 个黄球才能让摸到红球和黄球的概率相同.

(3) 1　提示：根据题意可知，当摸到所有的白球和红球时，“摸到白球”是必然事件，所以 $x=5-1-3=1$.

【拓展提优】

1. D　2. C　3. ②①③　4. $m+n=8$　5. C

6. 解：(1) 完成表格如下：

| 事件 A | 必然事件 | 随机事件 |
|---|---|---|
| $m$ 的值 | 4 | 2 或 3 |

(2) 根据题意，得 $\frac{6+x}{10+x}=\frac{4}{5}$，解得 $x=10$.

所以 $x$ 的值为 10.

(3) 设其中红球有 $n$ 个. 根据题意，得 $\frac{4+n}{10+6}=\frac{6-n+6}{10+6}$，解得 $n=4$.

答：其中红球有 4 个.

## 课时训练 11　频率与概率(1)

【基础巩固】

1. D　2. D　3. 15　4. 15

【拓展提优】

1. B　提示：摸出白球的频率将稳定在 $1-20\%-50\%=30\%$，故①正确；因为摸出黑球的频率稳定在 50%，大于其他频率，所以从布袋中任意摸出 1 个球，该球是黑球的概率最大，故②正确；若再摸球 100 次，不一定有 20 次摸出的是红球，故③错误.

2. 1

3. 解：(1) 0.94　950

(2) 0.95

## 课时训练 12　频率与概率(2)

【基础巩固】

1. B　2. A　3. C　4. 240

5. 解：(1) $\frac{1}{4}$

(2) 公平. 理由如下：

一共有 12 种情况：(0,1)，(0,−2)，(0,3)，(1,0)，(1,−2)，(1,3)，(−2,0)，(−2,1)，(−2,3)，(3,0)，(3,1)，(3,−2)，其结果分别为 −1，2，−3，1，3，−2，−2，−3，−5，3，2，5，所以结果为非负数的概率为 $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$，结果为负数的概率为 $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$，所以游戏规则公平.

【拓展提优】

1. B　2. B　3. C　4. $\frac{1}{3}$　5. 黑

6. 解：(1) 折线统计图

(2) ①0.6　②0.4

(3) 设布袋中有 $x$ 个红球，则 $\frac{x}{50}=0.6$，解得 $x=30$，所以估计布袋中红球的个数为 30.

# 第 8 章　四 边 形

## 课时训练 13　平行四边形(1)

【基础巩固】

1. D　2. D

3. A　提示：因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AD/\!/CB$，$AB/\!/CD$. 所以 $\angle ABC=180^\circ-\angle A=136^\circ$，$\angle BEC=\angle ABE$. 因为 $BE$ 平分 $\angle ABC$，所以 $\angle ABE=\frac{1}{2}\angle ABC=68^\circ$，所以 $\angle BEC=\angle ABE=68^\circ$.

4. $56^\circ$　5. (1,2)

6. 2　提示：因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AD/\!/BC$，$AD=BC=5$，所以 $\angle AEB=\angle CBE$. 因为 $BE$ 平分 $\angle ABC$，所以 $\angle ABE=\angle CBE$，所以 $\angle AEB=\angle ABE$，所以 $AE=AB=3$，所以 $DE=AD-AE=2$.

7. $42^\circ$　提示：由题意，可得 $AB=AB'$，$\angle BAB'=32^\circ$，$\angle AB'C'=\angle B$，所以 $\angle AB'C'=\angle B=\angle AB'B=74^\circ$，所以 $\angle CB'P=32^\circ$. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $\angle C=180^\circ-\angle B=106^\circ$，所以 $\angle B'PC=180^\circ-\angle C-\angle CB'P=42^\circ$.

8. (1) 证明：在 $\square ABCD$ 中，因为 $AB/\!/CD$，所以 $\angle BAE=\angle DCG$. 因为 $BE$，$DG$ 分别

平分$\angle ABC$，$\angle ADC$，$\angle ABC=\angle ADC$，所以$\angle ABE=\angle CDG$. 在$\triangle ABE$和$\triangle CDG$中，$\begin{cases}\angle BAE=\angle DCG,\\ AB=CD,\\ \angle ABE=\angle CDG,\end{cases}$ 所以$\triangle ABE\cong\triangle CDG$，所以$BE=DG$，$\angle AEB=\angle CGD$，所以$BE/\!/DG$.

(2) **解**：过点$E$作$EQ\perp BC$于点$Q$. 因为$▱ABCD$的周长为56，所以$AB+BC=28$. 因为$BE$平分$\angle ABC$，所以$EQ=EF=6$. 所以$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABE}+S_{\triangle EBC}=\frac{1}{2}AB\cdot EF+\frac{1}{2}BC\cdot EQ=3(AB+BC)=84$.

**【拓展提优】**

**1.** D　**提示**：由$AD/\!/BC$，得$\angle AEB=\angle CBE$. 由$BE$平分$\angle ABC$，得$\angle ABE=\angle CBE$，所以$\angle AEB=\angle ABE$，所以$AE=AB=3$. 同理可得$DE=CD=3$，所以$BC=AD=6$. 由$AB/\!/CD$，得$\angle ABC+\angle DCB=180^\circ$，又因为$\angle CBE=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle BCE=\frac{1}{2}\angle DCB$，所以$\angle CBE+\angle BCE=90^\circ$，所以$\angle BEC=90^\circ$，所以$CE^2+BE^2=BC^2=36$.

**2.** C　**提示**：延长$GF$交$AD$于点$H$. 易证$\triangle HFE\cong\triangle GFB$，所以$HF=GF$. 因为$AD/\!/BC$，所以$HG$是$▱ABCD$边$AD$上的高. 因为$BE$平分$\angle ABC$，所以$\angle ABE=\angle EBC=\angle AEB$，所以$AE=AB=x$. 因为$DE=1$，所以$AD=x+1$. 因为$▱ABCD$的面积为8，$GF$的长为整数，$x$的值为正整数，所以$(x+1)\cdot 2GF=8$，所以$x$的值为1或3. 当$x=1$时，$AB=1<HG=4$，这种情况不可能存在，舍去. 所以$x=3$.

**3.** B　**提示**：如图1，当四边形$CQPD$是平行四边形时，$PQ=CD$，$PD=CQ$，所以$AP+CQ=12$；如图2，当四边形$CQPD$是等腰梯形时，过点$Q$作$QH\perp AD$于点$H$，过点$C$作$CG\perp AD$于点$G$，易得线段$PH=DG=3$，$GH=CQ$，所以$AP+PH+CQ+GD=AP+3+CQ+3=12$. 点$P$从点$A$到点$D$需12 s，点$Q$从点$C$到点$B$(或从点$B$到点$C$)需4 s. 设点$P$，$Q$的运动时间为$t$ s，分三种情况讨论：①当$0\leqslant t\leqslant 4$时，若四边形$CQPD$是平行四边形，可得$t+3t=12$，解得$t=3$；若四边形$CQPD$是等腰梯形，可得$t+3+3t+3=12$，解得$t=1.5$. ②当$4<t\leqslant 8$时，若四边形$CQPD$是平行四边形，可得$t+3(8-t)=12$，解得$t=6$；若四边形$CQPD$是等腰梯形，可得$t+3+3(8-t)+3=12$，解得$t=9$，不符合题意，舍去. ③当$8<t\leqslant 12$时，若四边形$CQPD$是平行四边形，可得$t+3(t-8)=12$，解得$t=9$，若四边形$CQPD$是等腰梯形，可得$t+3+3(t-8)+3=12$，解得$t=7.5$，不符合题意，舍去. 综上所述，$t$的值为1.5或3或6或9时，$PQ=CD$.

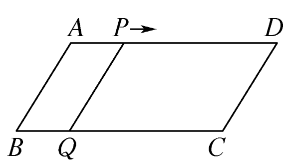



**图1**

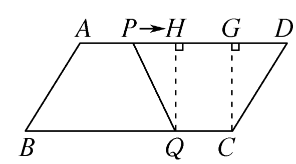


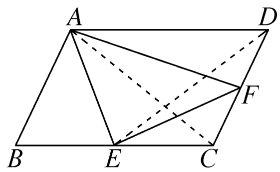

**图2**

**4.** $24\sqrt{3}$　**提示**：因为四边形$ABCD$是平行四边形，所以$AD/\!/BC$，$AB/\!/CD$，所以$\angle B=\angle D=180^\circ-\angle C=60^\circ$. 因为$AE\perp BC$，$AF\perp CD$，所以$\angle AEB=\angle AFD=90^\circ$，所以$\angle BAE=\angle DAF=30^\circ$. 所以$AB=2BE=6$，$AD=2DF=8$，所以$CD=AB=6$，$AF=\sqrt{AD^2-DF^2}=4\sqrt{3}$. 所以$▱ABCD$的面积为$CD\cdot AF=6\times 4\sqrt{3}=24\sqrt{3}$.

**5.** $\sqrt{2}$　**提示**：过点$H$作$HM\perp BC$于点$M$. 由作图方法可知，$BH$平分$\angle ABC$，所以$\angle ABH=\angle CBH$. 因为四边形$ABCD$是平行四边形，所以$BC=AD=\sqrt{3}+1$，$AB/\!/CD$，所以$\angle CHB=\angle ABH$，$\angle C=180^\circ-\angle ABC=30^\circ$. 所以$\angle CBH=\angle CHB$，所以$CH=BC=\sqrt{3}+1$. 所以$HM=\frac{1}{2}CH=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$，所以$CM=\sqrt{CH^2-HM^2}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$，所以$BM=BC-CM=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，所以$BH=\sqrt{HM^2+BM^2}=\sqrt{2}$.

**6.** 9　**提示**：如图，连接$DE$，$AC$. 因为$F$是边$CD$的中点，所以$S_{\triangle AFC}=S_{\triangle AFD}$，$S_{\triangle DFE}=S_{\triangle CEF}=3$，所以$S_{\triangle ECD}=6$. 因为四边形$ABCD$是平行四边形，所以$AD/\!/BC$. 因为$E$是边$BC$的中点，所以$S_{\triangle AEC}=S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ECD}=6$. 所以$S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle ABE}=12$.

因为 $S_{\triangle ACD}=2S_{\triangle AFC}$，所以 $S_{\triangle AFC}=6$，所以 $S_{\triangle AEF}=S_{\triangle AEC}+S_{\triangle AFC}-S_{\triangle CEF}=6+6-3=9$.




**7.** **解**：(1) 因为 $AB=AC$，$\angle BAC=36°$，所以 $\angle ABC=\angle ACB=\frac{1}{2}(180°-\angle BAC)=72°$. 因为点 $E$ 恰好与点 $B$ 重合，所以由旋转可知，$\angle ABD=\angle ACB=72°$. 因为 $DF\perp AB$，所以 $\angle BDF=90°-\angle ABD=18°$.

(2) 四边形 $ADEG$ 是平行四边形. 理由如下：因为 $\alpha=108°$，所以 $\angle DAG=\angle EAC=108°$. 由题意，得 $\angle DAE=36°$，$\angle D=72°$，所以 $\angle D+\angle DAG=180°$，所以 $DE/\!/AB$. 因为 $AE=AC$，所以 $\angle AEC=\angle ACE=\frac{1}{2}(180°-\angle EAC)=36°$. 所以 $\angle AEG=\angle DAE=36°$，所以 $AD/\!/EG$. 所以四边形 $ADEG$ 是平行四边形.

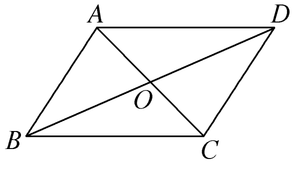
## 课时训练 14　平行四边形(2)

**【基础巩固】**

**1.** C

**2.** C　**提示**：因为在 $\square ABCD$ 中，$S_{\triangle AOB}=S_{\triangle COB}=S_{\triangle AOD}=S_{\triangle COD}$，所以 $\triangle BOC$ 的面积占 $\square ABCD$ 面积的 $\frac{1}{4}$，所以点落在 $\triangle BOC$ 内的概率为 $\frac{1}{4}$.

**3.** B　**提示**：如图，因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$AC=6$，$BD=8$，所以 $OA=OC=3$，$OB=OD=5$，所以在 $\triangle AOB$ 中，$OB-OA<x<OB+OA$，即 $2<x<8$.




**4.** 9　**提示**：因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AO=CO$，$CD=AB=4$，$AD=BC=5$. 又因为 $OE\perp AC$，所以 $OE$ 是线段 $AC$ 的垂直平分线，所以 $AE=CE$，所以 $\triangle CDE$ 的周长为 $CD+DE+CE=CD+DE+AE=CD+AD=4+5=9$.

**5.** $(2,-1)$

**6.** 13　**提示**：因为在 $\square ABCD$ 中，$BC=6$，所以 $AD=BC=6$，且 $OA=OC$，$OB=OD$. 因为 $AC+BD=14$，所以 $OA+OD=\frac{AC+BD}{2}=7$，所以 $\triangle AOD$ 的周长为 $OA+OD+AD=7+6=13$.

**7.** $\sqrt{5}$　**提示**：因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AB=CD$，$OC=\frac{1}{2}AC=3$，$OD=\frac{1}{2}BD=2$. 因为 $BD\perp CD$，所以 $\triangle CDO$ 是直角三角形，所以 $CD=\sqrt{OC^2-OD^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$，所以 $AB=\sqrt{5}$.

**8.** (1) **证明**：因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $OD=OB$，$CD/\!/AB$，所以 $\angle FDO=\angle EBO$. 又因为 $\angle DOF=\angle BOE$，所以 $\triangle DOF\cong\triangle BOE$，所以 $DF=BE$.

(2) **解**：因为 $BD\perp AD$，$\angle BAD=45°$，所以 $\angle ABD=45°$，所以 $\triangle ADB$ 是等腰直角三角形. 由勾股定理可得 $AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{2}BD$. 因为 $CD/\!/AB$，所以 $\angle FDO=\angle ABD=45°$. 因为 $EF\perp CD$，所以 $\angle FOD=45°$，所以 $FO=DF=1$. 由勾股定理，得 $OD=\sqrt{DF^2+OF^2}=\sqrt{2}$，所以 $BD=2OD=2\sqrt{2}$，所以 $AB=\sqrt{2}BD=4$.

**【拓展提优】**

**1.** B　**提示**：因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AB=CD$，$AD=CB$，$AD/\!/CB$，$OA=OC$，所以 $\angle OAE=\angle OCF$. 又因为 $\angle AOE=\angle COF$，所以 $\triangle AOE\cong\triangle COF$，所以 $OF=OE=5$，$AE=CF$，所以 $EF=10$，$AE+BF=CF+BF=CB$. 因为 $\square ABCD$ 的周长为 30，所以 $AB+CB=15$，所以 $AB+AE+BF+EF=AB+CB+EF=25$. 故四边形 $ABFE$ 的周长为 25.

**2.** D　**提示**：因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$\angle ABC=120°$. 所以 $AD/\!/BC$，$\angle ADC=\angle ABC=120°$，$OB=OD$，$AO=CO$，$AB=CD$，$AD=BC$，所以 $\angle BAD=\angle BCD=60°$. 因为 $DE$ 平分 $\angle ADC$，所以 $\angle ADE=\angle CDE=60°$，所以 $\angle DEC=$

$\angle ADE=60^\circ=\angle CDE=\angle DCE$,所以$\triangle DCE$为等边三角形,故①正确.所以$DE=CE=CD$,因为$CD=AB=\frac{1}{2}BC$,$CD=CE$,所以$CE=\frac{1}{2}BC$,所以$BE=CE=DE$,所以$\angle EBD=\angle EDB$.因为$\angle EBD+\angle EDB=\angle DEC=60^\circ$,所以$\angle EBD=\angle EDB=30^\circ$,所以$\angle BDC=60^\circ+30^\circ=90^\circ$,所以$BD\perp CD$,所以$S_{\square ABCD}=CD\cdot BD$,故②正确.因为$BE=CE$,所以$S_{\triangle BDE}=S_{\triangle DEC}$.因为$OB=OD$,所以$S_{\triangle BDE}=2S_{\triangle ODE}$,所以$S_{\triangle DEC}=2S_{\triangle ODE}$,故③正确.

3. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　**提示**:在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中,由条件,得$BC=2AB=2$.由勾股定理,得$AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{3}$.设$AC$与$PQ$交于点$O$.因为四边形$PAQC$是平行四边形,所以$O$既是$AC$的中点也是$PQ$的中点,所以$O$是定点,且$OC=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$PQ=2OP$.因为$P$为边$BC$上的点,所以当$OP\perp BC$时,$OP$的长最小,即$PQ$的长最小.此时在$\mathrm{Rt}\triangle POC$中,$OP=\frac{1}{2}OC$.所以$PQ$长的最小值为$2OP=OC=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. 5　**提示**:连接$AC$,设点$A(1,a)$,$C(4,c)$,$AC$的中点为$G$.因为$\square OABC$的对角线互相平分,所以$AC$的中点$G$的坐标为$\left(\frac{5}{2},\frac{a+c}{2}\right)$.由$OB=2OG=2\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{a+c}{2}\right)^2}$可知,当$a+c=0$时,$OB$的长取得最小值,最小值为5.

5. **解**:因为四边形$ABCD$是平行四边形,所以$AB=CD$,$AD=BC$,$OB=OD$.因为$\square ABCD$的周长为$2(BC+CD)=28$,所以$BC+CD=14$.因为$OE\perp BD$,所以$OE$垂直平分$BD$,所以$DE=BE$.因为$\triangle BCE$的周长为$BC+CE+BE=BC+CE+CE+CD=BC+CD+2CE$,即$14+2CE=18$,所以$CE=2$.

6. (1) **证明**:因为四边形$ABCD$是平行四边形,所以$AB/\!/CD$,$OB=OD$,所以$\angle OBE=\angle ODF$.又因为$\angle BOE=\angle DOF$,所以$\triangle OBE\cong\triangle ODF$,所以$OE=OF$.

(2) **解**:①因为四边形$ABCD$是平行四边形,所以$AB=CD$,$OB=OD=\frac{1}{2}BD=1$,$OA=OC=\frac{1}{2}AC=\sqrt{2}$,所以$AD^2+OD^2=2=OA^2$,$AD=OD$,所以$\triangle AOD$是等腰直角三角形,$\angle ADO=90^\circ$,所以$\angle AOD=45^\circ$.因为$EF\perp AC$,所以$\angle\alpha=90^\circ-\angle AOD=45^\circ$.故当$\angle\alpha=45^\circ$时,$EF\perp AC$.

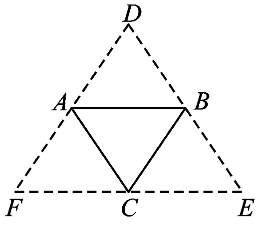
②由①可知,$\angle ADO=90^\circ$.由勾股定理,得$AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{5}$,所以$CD=\sqrt{5}$.因为$EF\perp AC$,$OA=OC$,所以$EF$是$AC$的垂直平分线,所以$AF=CF$.所以$\triangle ADF$的周长为$AD+DF+AF=AD+DF+CF=AD+CD=1+\sqrt{5}$.

## 课时训练15　平行四边形(3)

**【基础巩固】**

1. B　2. D　3. C

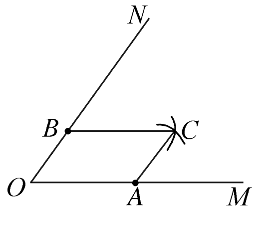
4. A　**提示**:当$A$,$B$,$C$三点共线时,不能作出平行四边形;当$A$,$B$,$C$三点不共线时,连接$AB$,$BC$,$CA$,分别以$AB$,$BC$,$CA$为平行四边形的对角线,另外两边为边,可构成如图所示的3个平行四边形:$\square ACBD$,$\square ACEB$,$\square ABCF$.




5. 两组对边分别相等的四边形是平行四边形

6. 5　8

7. **解**:如图,四边形$OACB$即为所求.



**8.** (1) **证明**:因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $AD=CB$,$AD/\!/BC$,所以 $\angle ADE=\angle CBF$. 又因为 $BF=DE$,所以 $\triangle AED\cong\triangle CFB$(SAS),所以 $AE=CF$,$\angle AED=\angle CFB$,所以 $\angle AEF=\angle CFE$,所以 $AE/\!/CF$,所以四边形 $AFCE$ 是平行四边形.

(2) **解**:因为四边形 $AFCE$ 是平行四边形,所以 $AE=CF=5$. 因为 $AF\perp BD$,所以 $EF=\sqrt{AE^2-AF^2}=3$. 因为 $BE=6$,所以 $DE=BF=BE-EF=3$,所以 $BD=BE+DE=9$,所以 $S_{\square ABCD}=2S_{\triangle ABD}=2\times\frac{1}{2}\times 9\times 4=36$.

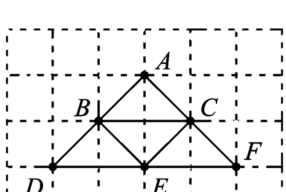
**【拓展提优】**

**1.** A　**提示**:因为按两个全等三角形的三组对应边分别重合一次,共有三种情况,通过翻转后又有三种情况,其中必有三种情况是平行四边形.

**2.** D　**提示**:①②组合可证明 $\triangle ABO\cong\triangle CDO$,进而得到 $AB=CD$,可根据一组对边平行且相等的四边形是平行四边形判定出四边形 $ABCD$ 为平行四边形;①④组合可证明 $AD/\!/BC$,进而根据两组对边平行的四边形是平行四边形判定出四边形 $ABCD$ 为平行四边形. 所以有 2 种情况可得出四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

**3.** A　**提示**:由五边形 $ABCDE$ 的边长均相等,得 $\angle ABE=\angle AEB$,$\angle CBD=\angle CDB$. 又因为 $\angle DBE=\angle ABE+\angle CBD=\angle AEB+\angle CDB$,且 $\triangle BED$ 的内角和为 $180^\circ$,所以 $\angle AED+\angle CDE=180^\circ$,所以 $AE/\!/CD$. 又因为 $AE=CD$,所以四边形 $AEDC$ 为平行四边形,所以 $DE=AC=1$. 所以 $BC=CD=DE=1$,所以 $BD<BC+CD=2$.

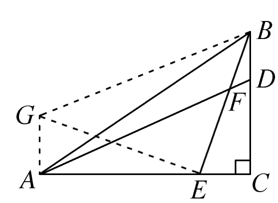
**4.** 3　**提示**:如图,可以画出 3 个平行四边形,它们分别为 $\square ABEC$,$\square BCFE$,$\square BCED$.




**5.** ①②　**提示**:根据作图可得 $AD=BC$,$BD=AC$,则四边形 $ACBD$ 是平行四边形,所以 $OA=OB$,$AD/\!/BC$,故①②正确;$AC$,$AD$ 不一定相等,所以 $\angle ACD=\angle ADC$ 不一定成立,即③不一定正确.

**6.** $(4,2)$ 或 $(-2,2)$ 或 $(2,-2)$　**提示**:因为以 $A,B,C,D$ 为顶点的四边形是平行四边形,所以可以分以下几种情况讨论:①当 $AD=BC$ 时,因为点 $A(1,2)$,$B(0,0)$,$C(3,0)$,所以 $BC=3$,所以 $AD=3$,所以点 $D$ 的坐标为 $(4,2)$ 或 $(-2,2)$;②当 $BD=AC$ 时,点 $D$ 的坐标为 $(2,-2)$ 或 $(-2,2)$;③当 $CD=AB$ 时,点 $D$ 的坐标为 $(4,2)$ 或 $(2,-2)$.

**7.** $45^\circ$　**提示**:如图,过点 $B$ 作 $BG/\!/AD$,且 $BG=AD$,连接 $GE$,$AG$. 所以四边形 $ADBG$ 是平行四边形,所以 $AG=BD=CE$,$AG/\!/BD$,所以 $\angle GAE+\angle C=180^\circ$. 因为 $\angle C=90^\circ$,所以 $\angle GAE=\angle C=90^\circ$. 因为 $AE=BC$,所以 $\triangle AGE\cong\triangle CEB$(SAS),所以 $GE=EB$,$\angle AEG=\angle CBE$. 因为 $\angle BEC+\angle CBE=90^\circ$,所以 $\angle BEC+\angle AEG=90^\circ$,即 $\angle BEG=90^\circ$,所以 $\triangle BEG$ 是等腰直角三角形,所以 $\angle GBE=45^\circ$. 因为 $BG/\!/AD$,所以 $\angle AFE=\angle GBE=45^\circ$.




**8.** **解**:(1) $\frac{9}{5}$　**提示**:因为 $\angle BAC=90^\circ$,$\angle ABC=60^\circ$,$AB=6$ cm,点 $P$ 以 1 cm/s 的速度运动,点 $Q$ 以 4 cm/s 的速度运动,所以 $AP=t$ cm,$CQ=4t$ cm,$\angle ACB=180^\circ-\angle BAC-\angle ABC=30^\circ$,所以 $BC=2AB=12$ cm,所以 $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=6\sqrt{3}$ cm. 当 $PQ\perp BC$ 时,设 $PQ$ 与 $AC$ 交于点 $O$,如图 1. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $AD/\!/BC$,$PQ\perp AD$,$\angle PAO=\angle OCQ=30^\circ$. 设 $OC=2x$ cm,$OA=2y$ cm,则 $OQ=x$ cm,$OP=y$ cm,所以 $4x^2-x^2=16t^2$,$4y^2-y^2=t^2$,解得 $x=\frac{4\sqrt{3}}{3}t$,$y=\frac{\sqrt{3}}{3}t$,所以 $AC=OC+OA=\frac{8\sqrt{3}}{3}t+\frac{2\sqrt{3}}{3}t=\frac{10\sqrt{3}}{3}t$. 所以 $\frac{10\sqrt{3}}{3}t=6\sqrt{3}$,解得 $t=\frac{9}{5}$.

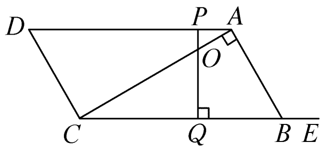



图 1

(2) 存在.

当点 $Q$ 在点 $B$ 的左侧时，$0\leqslant t<3$. 如图 2，根据题意，得 $AP=t$ cm，$CQ=4t$ cm，$QB=(12-4t)$cm. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AP/\!/QB$，所以当 $AP=QB$ 时，四边形 $ABQP$ 是平行四边形，故 $t=12-4t$，解得 $t=\frac{12}{5}$.

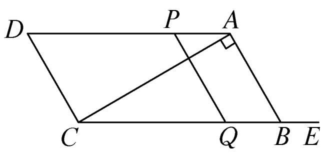



图 2

当点 $Q$ 在点 $B$ 的右侧时，$3<t\leqslant 12$. 如图 3，根据题意，得 $AP=t$ cm，$CQ=4t$ cm，$QB=(4t-12)$cm. 同理，$t=4t-12$，解得 $t=4$.

综上所述，当 $t=\frac{12}{5}$ 或 $t=4$ 时，以 $A$，$B$，$P$，$Q$ 为顶点的四边形是平行四边形.

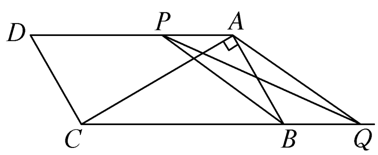



图 3

(3) 如图 4，当对称点 $M$ 落在线段 $AB$ 上时，根据题意，得 $AQ$ 平分$\angle BAD$. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\angle ABC=60°$，所以 $AD/\!/BC$，所以 $\angle BAD=180°-\angle ABC=120°$. 所以$\angle PAQ=\angle BAQ=\frac{1}{2}\angle BAD=60°$，所以$\triangle AQB$ 是等边三角形，所以 $AQ=QB=AB=6$ cm. 所以 $CQ=BC-QB=6$ cm，所以 $4t=6$，解得 $t=\frac{3}{2}$.

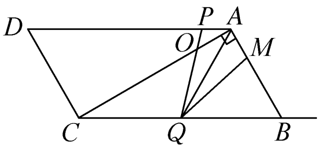



图 4

如图 5，当对称点 $M$ 落在线段 $BA$ 的延长线上时，根据题意，得 $AQ$ 的反向延长线 $AH$ 平分$\angle PAM$. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\angle ABC=60°$，所以 $AD/\!/BC$，所以 $\angle DAM=60°$，所以 $\angle BAQ=\angle MAH=\angle PAH=30°$. 因为$\angle CBA=\angle BAQ+\angle AQB$，所以$\angle AQB=30°$，所以 $QB=AB=6$ cm，所以 $CQ=BC+QB=18$ cm，所以 $4t=18$，解得 $t=\frac{9}{2}$.

综上所述，若点 $P$ 关于直线 $AQ$ 对称的点恰好落在直线 $AB$ 上，则 $t$ 的值为$\frac{3}{2}$或$\frac{9}{2}$.

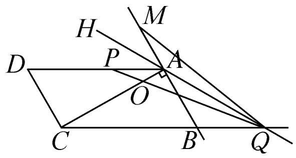



图 5

## 课时训练 16　平行四边形(4)

**【基础巩固】**

1. D　2. C

3. B　提示：由题意，可得 $OA=OC$，若 $AE=CF$，则 $OE=OF$，因为 $OB=OD$，所以四边形 $DEBF$ 是平行四边形，故①正确；由“$DE=BF$”无法证明四边形 $DEBF$ 是平行四边形，故②错误；若$\angle ADE=\angle CBF$，则可先证得$\triangle ADE\cong\triangle CBF$，从而可判定四边形 $DEBF$ 是平行四边形，故③正确；若$\angle ABE=\angle CDF$，则可先证得$\triangle ABE\cong\triangle CDF$，从而可判定四边形 $DEBF$ 是平行四边形，故④正确.

4. 对角线互相平分的四边形是平行四边形

5. 6

6. 24　提示：在 Rt$\triangle BCE$ 中，由勾股定理，得 $CE=5$. 又因为 $AC=10$，所以 $AE=CE=5$. 又因为 $BE=DE=3$，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 所以四边形 $ABCD$ 的面积为 $BC\cdot BD=4\times(3+3)=24$.

7. (1) **证明**:连接 $AC$ 交 $BD$ 于点 $O$. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $OA=OC$,$OB=OD$. 因为 $M$,$N$ 是对角线 $BD$ 的三等分点,所以 $BM=DN$. 所以 $OB-BM=OD-DN$,即 $OM=ON$. 所以四边形 $AMCN$ 是平行四边形.

(2) **解**:因为 $BD=6$,$M$,$N$ 是对角线 $BD$ 的三等分点,所以 $DM=4$,$MN=DN=2$. 因为 $AM\perp BD$,所以 $\angle AMD=90^\circ$,所以 $AM=\sqrt{AD^2-DM^2}=3$,所以 $AN=\sqrt{AM^2+MN^2}=\sqrt{13}$. 由(1)可知,四边形 $AMCN$ 是平行四边形,所以 $CN=AM=3$,$CM=AN=\sqrt{13}$,所以▱$AMCN$ 的周长为 $2(AM+AN)=6+2\sqrt{13}$.

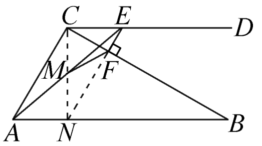
**【拓展提优】**

1. C　**提示**:因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $AB/\!/CD$,$AD/\!/BC$. 因为 $HG/\!/AB$,$MN/\!/AD$,所以 $AB/\!/HG/\!/CD$,$AD/\!/MN/\!/BC$,所以四边形 $AMPG$,$CNPH$,$BHPM$,$PNDG$,$AMND$,$BCNM$,$ABHG$,$CDGH$ 均是平行四边形,所以 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADC}$,$S_{\triangle APM}=S_{\triangle APG}$,$S_{\triangle CPH}=S_{\triangle CPN}$,所以 $S_{\square BHPM}=S_{\square PNDG}$,所以 $S_{\square ABHG}=S_{\square AMND}$,$S_{\square BCNM}=S_{\square CDGH}$,即题图中面积相等的平行四边形有 3 对.

2. D

3. 3　(0,−4)或(−6,4)或(6,4)　**提示**:以三角形两边为边,则另一边为对角线,共有三种情况,即可作出 3 个平行四边形. ①以 $AB$,$AC$ 为边作平行四边形,第四个顶点的坐标为(0,−4);②以 $CA$,$CB$ 为边作平行四边形,第四个顶点的坐标为(−6,4);③以 $BA$,$BC$ 为边作平行四边形,第四个顶点的坐标为(6,4).

4. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　**提示**:延长 $EF$ 交 $AB$ 于点 $N$,连接 $CM$,$MN$. 因为 $EF\perp BC$,所以 $\angle CFE=90^\circ$. 因为 $\angle ACB=90^\circ$,所以 $AC/\!/EN$. 因为 $CD/\!/AB$,所以四边形 $ANEC$ 是平行四边形. 因为 $M$ 为 $AE$ 的中点,所以 $C$,$M$,$N$ 三点共线. 因为 $\angle CFN=90^\circ$,所以 $MF=\frac{1}{2}CN$. 当 $CN\perp CD$ 时,$CN$ 的长取得最小值,即 $MF$ 的长取得最小值. 此时,在 Rt$\triangle ACB$ 中,$\angle B=30^\circ$,$AB=4$,所以 $AC=\frac{1}{2}AB=2$,$\angle BAC=60^\circ$. 因为 $\angle NCD=90^\circ$,$CD/\!/AB$,所以 $\angle CNA=90^\circ$,所以 $\angle ACN=30^\circ$,所以 $AN=\frac{1}{2}AC=1$. 所以 $CN=\sqrt{AC^2-AN^2}=\sqrt{3}$,所以 $MF=\frac{1}{2}CN=\frac{\sqrt{3}}{2}$,即 $MF$ 长的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.




5. ①②　**提示**:①易证 $\triangle AMQ\cong\triangle CPN$,$\triangle DQP\cong\triangle BNM$,可得 $MQ=PN$,$MN=PQ$,根据两组对边分别相等的四边形是平行四边形,即可判定四边形 $MNPQ$ 是平行四边形;②易证 $\triangle AOQ\cong\triangle CON$,$\triangle DOP\cong\triangle BOM$,可得 $OQ=ON$,$OM=OP$,根据对角线互相平分的四边形是平行四边形,即可判定四边形 $MNPQ$ 是平行四边形;③根据已知条件不能判定四边形 $MNPQ$ 是平行四边形.

6. (1) **证明**:因为 $\triangle ABC$ 为等边三角形,所以 $\angle A=60^\circ$,$AB=AC$. 因为 $MA$ 绕点 $M$ 逆时针旋转 $120^\circ$ 得到 $MD$,所以 $DM=AM$,$\angle AMD=120^\circ$,所以 $\angle DMB=60^\circ$. 因为 $AN=MB$,$\angle DMB=\angle A=60^\circ$,所以 $\triangle ANM\cong\triangle MBD$(SAS),所以 $MN=DB$.

(2) **解**:四边形 $AFBD$ 为平行四边形.

理由如下:因为 $AB=AC$,$\angle BAC=90^\circ$,所以 $\angle ABC=45^\circ$. 因为 $MA$ 绕点 $M$ 逆时针旋转 $90^\circ$ 得到 $MD$,所以 $MA=MD$,$\angle DMA=\angle DMB=90^\circ$,所以 $\angle MAD=\angle MDA=45^\circ$,所以 $\angle MAD=\angle ABF=45^\circ$,所以 $AD/\!/BF$. 同(1)可证 $\triangle ANM\cong\triangle MBD$(SAS),所以 $\angle AMN=\angle MDB$. 因为 $AE\perp MN$,所以 $\angle AMN+\angle MAE=90^\circ$. 因为 $\angle MDB+\angle MBD=90^\circ$,所以 $\angle MBD=\angle MAE$,所以 $DB/\!/AF$,所以四边形 $AFBD$ 为平行四边形.

## 课时训练 17　特殊的平行四边形(1)

**【基础巩固】**

**1.** D　**2.** C

**3.** A　**提示**:因为四边形 $ABCD$ 为矩形,所以 $\angle D=\angle BCD=90°$,$AD=BC$,$AD\parallel BC$,所以 $\angle DAC=\angle ACB$.由折叠的性质,可知 $EC=BC$,$\angle ACB=\angle ACE$,所以 $AD=EC$,$\angle CAF=\angle ACF$,所以 $CF=AF=3$.又因为 $CE$ 平分 $\angle ACD$,所以 $\angle ACB=\angle ACF=\angle FCD=30°$,所以 $DF=\frac{1}{2}CF=\frac{3}{2}$,所以 $EF=EC-CF=AD-AF=DF=\frac{3}{2}$.

**4.** $60°$

**5.** $30°$　**提示**:令 $EQ$ 与 $AP$ 的交点为 $G$.由第二次折叠可得 $\angle DAP=\angle QAP$,$\angle AQP=\angle ADP=90°$.由第一次折叠可得 $AE=DE$.过点 $G$ 作 $GH\perp CD$ 于点 $H$.易证 $\triangle AEG\cong\triangle GHP$,所以 $AG=GP$,所以 $AG=\frac{1}{2}AP$.因为 $\angle PQA=90°$,所以 $QG=\frac{1}{2}AP$.所以 $QG=AG$,所以 $\angle GAQ=\angle GQA$.因为 $EF\parallel AB$,所以 $\angle GQA=\angle QAB$,所以 $\angle DAP=\angle QAP=\angle GQA=\angle QAB$.因为 $\angle DAP+\angle QAP+\angle QAB=90°$,所以 $\angle DAP=\angle QAP=\angle QAB=30°$,所以 $\angle AQE=30°$.

**6.** 3　**提示**:连接 $CE$.由题意,可得 $OE$ 所在直线为对角线 $AC$ 的垂直平分线,所以 $AE=CE$,$S_{\triangle COE}=S_{\triangle AOE}=5$,所以 $S_{\triangle ACE}=2S_{\triangle COE}=10$.所以 $\frac{1}{2}AE\cdot CD=10$.因为 $CD=AB=4$,所以 $EC=AE=5$.在 $\mathrm{Rt}\triangle CDE$ 中,由勾股定理,得 $DE=\sqrt{EC^2-CD^2}=3$.

**7.** $-\frac{3}{2}$　**提示**:连接 $AC$,$OB$ 交于点 $D$.易知点 $A(4,0)$,$C(0,2)$,所以点 $D(2,1)$.因为直线 $y=kx+4$ 把矩形 $OABC$ 的周长分成相等的两部分,所以该直线经过点 $D$,所以 $1=2k+4$,解得 $k=-\frac{3}{2}$.

**8.** $\frac{20}{3}$　**提示**:设 $CM=x$,则 $BM=8-x$.由题意,得 $DE=CD=AB=10$,$\angle E=\angle C=90°$.在 $\triangle GMB$ 和 $\triangle GFE$ 中,$\begin{cases}\angle E=\angle B=90°,\\ \angle FGE=\angle MGB,\\ EG=BG,\end{cases}$ 所以 $\triangle GMB\cong\triangle GFE(\mathrm{AAS})$,所以 $MG=GF$,$EF=BM=8-x$.所以 $MG+EG=GF+BG$,所以 $EM=BF$,所以 $CM=EM=BF=x$,所以 $AF=AB-BF=10-x$,$DF=DE-EF=2+x$.在 $\mathrm{Rt}\triangle ADF$ 中,$AD^2+AF^2=DF^2$,即 $8^2+(10-x)^2=(2+x)^2$,解得 $x=\frac{20}{3}$.

**9.** (1) **证明**:因为四边形 $ABCD$ 是矩形,所以 $AC=BD$,$AB\parallel CD$,所以 $BE\parallel CD$.又因为 $CE\parallel DB$,所以四边形 $BDCE$ 是平行四边形,所以 $CE=BD$,所以 $AC=EC$.

(2) **解**:因为四边形 $ABCD$ 是矩形,所以 $OA=OB=\frac{1}{2}AC$,$\angle ABC=90°$.因为 $\angle AOD=120°$,所以 $\angle AOB=180°-\angle AOD=60°$,所以 $\triangle AOB$ 是等边三角形,所以 $OA=AB=2.5$ cm,所以 $AC=5$ cm,所以 $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm,所以 $S_{矩形ABCD}=AB\cdot BC=\frac{5}{2}\times\frac{5\sqrt{3}}{2}=\frac{25\sqrt{3}}{4}$ $\mathrm{cm}^2$.

**【拓展提优】**

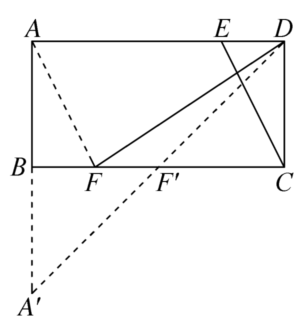
**1.** B　**提示**:易证 $\triangle AD'F\cong\triangle CBF$,所以 $AF=CF$.设 $BF=x$,则 $CF=AF=8-x$.在 $\mathrm{Rt}\triangle BFC$ 中,由勾股定理,得 $(8-x)^2=x^2+4^2$,解得 $x=3$,所以 $AF=5$.所以 $\triangle AFC$ 的面积为 $\frac{1}{2}AF\cdot BC=\frac{1}{2}\times5\times4=10$.

**2.** B　**提示**:根据折叠的性质,知 $\angle DGF=\angle OGF$,$\angle AGE=\angle OGE$,所以 $\angle FGE=\angle OGF+\angle OGE=\frac{1}{2}(\angle DGO+\angle AGO)=90°$,同理 $\angle GEC=90°$,所以 $GF\parallel EC$,故①正确;根据折叠的性质,知 $DG=GO$,$GA=GO$,所以 $DG=GO=GA$,即 $G$ 为 $AD$ 的中点,同理可得 $E$ 为 $AB$ 的中点,设 $AD=BC=2a$,$AB=CD=2b$,则 $DG=GO=GA=a$,$OC=BC=$

$2a$，$AE=BE=OE=b$，所以 $GC=3a$，在 Rt$\triangle CDG$ 中，$CG^2=DG^2+CD^2$，即 $(3a)^2=a^2+(2b)^2$，所以 $b=\sqrt{2}a$，所以 $AB=2\sqrt{2}a=\sqrt{2}AD$，故②不正确；设 $DF=OF=x$，则 $FC=2b-x$，在 Rt$\triangle COF$ 中，$FC^2=OF^2+OC^2$，即 $(2b-x)^2=x^2+(2a)^2$，所以 $x=\frac{b^2-a^2}{b}=\frac{a}{\sqrt{2}}$，即 $DF=OF=\frac{a}{\sqrt{2}}$，又因为 $GE=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3}a$，所以 $\frac{GE}{DF}=\frac{\sqrt{3}a}{\frac{a}{\sqrt{2}}}=\sqrt{6}$，即 $GE=\sqrt{6}DF$，故③正确；$\frac{OC}{OF}=\frac{2a}{\frac{a}{\sqrt{2}}}=2\sqrt{2}$，即 $OC=2\sqrt{2}OF$，故④正确．

**3.** A　**提示：**连接 $OP$，过点 $P$ 作 $PE\perp AC$，$PF\perp BD$，垂足分别为 $E$，$F$．根据题意，得 $AB=6$，$BC=8$，所以 $S_{矩形ABCD}=AB\cdot BC=48$，$OA=OC$，$OB=OD$，$BD=AC=10$，所以 $OA=OD=5$，所以 $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}S_{矩形ABCD}=24$，所以 $S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ACD}=12$．因为 $S_{\triangle AOD}=S_{\triangle AOP}+S_{\triangle DOP}=\frac{1}{2}OA\cdot PE+\frac{1}{2}OD\cdot PF=\frac{1}{2}\times5\cdot PE+\frac{1}{2}\times5\cdot PF=\frac{5}{2}(PE+PF)=12$，所以 $PE+PF=4.8$．

**4.** $8\sqrt{2}$　**提示：**连接 $AF$．因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $AB=CD$，$\angle ABF=\angle CDE=90°$．因为 $BF=DE$，所以 $\triangle ABF\cong\triangle CDE$(SAS)，所以 $AF=CE$，所以 $CE+DF=AF+DF$．作点 $A$ 关于 $BC$ 的对称点 $A'$，连接 $A'D$，则 $A'D$ 的长即为 $CE+DF$ 的最小值．因为 $AB=4$，$AD=8$，所以 $AA'=8$，所以 $A'D=\sqrt{AA'^2+AD^2}=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}$．




**5.** (1) **证明：**由折叠的性质，可得 $EN=DN$，$AE=CD$，$\angle E=\angle D=90°$，$\angle ENM=\angle DNM$，所以 $\triangle AEN\cong\triangle CDN$，所以 $\angle ENA=\angle DNC$．又因为 $\angle ENM=\angle ENA+\angle ANM$，$\angle DNM=\angle DNC+\angle CNM$，所以 $\angle ANM=\angle CNM$．因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $AD\parallel BC$，所以 $\angle ANM=\angle CMN$，所以 $\angle CMN=\angle CNM$，所以 $MC=NC$．

(2) **解：**过点 $N$ 作 $NH\perp BC$ 于点 $H$，则四边形 $NHCD$ 是矩形，所以 $HC=DN$，$NH=DC$．因为 $\triangle CMN$ 的面积与 $\triangle CDN$ 的面积之比为 $3:1$，所以 $\frac{S_{\triangle CMN}}{S_{\triangle CDN}}=\frac{\frac{1}{2}MC\cdot NH}{\frac{1}{2}DN\cdot NH}=\frac{MC}{DN}=3$，所以 $MC=3DN=3HC$，所以 $MH=2HC$．设 $DN=x$，则 $HC=x$，$MH=2x$，$NC=MC=3x$．在 Rt$\triangle CDN$ 中，$DC=\sqrt{NC^2-DN^2}=2\sqrt{2}x$，所以 $NH=2\sqrt{2}x$．在 Rt$\triangle MNH$ 中，$MN=\sqrt{MH^2+NH^2}=2\sqrt{3}x$．所以 $\frac{MN}{DN}=\frac{2\sqrt{3}x}{x}=2\sqrt{3}$．

## 课时训练 18　特殊的平行四边形(2)

**【基础巩固】**

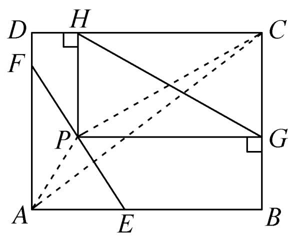
**1.** A

**2.** B　**提示：**由题图可知 $\angle ABC=90°$，$AO=OC=5$，所以 $OB=AO=OC=5$．若 $OD=5$，则 $OA=OC=OB=OD=5$，且 $AC=BD=10$，所以四边形 $ABCD$ 为矩形．其他条件不能推出四边形 $ABCD$ 是矩形．

**3.** A　**提示：**连接 $AD$．由勾股定理，得 $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=10$．由 $\angle BAC=90°$，$DM\perp AB$，$DN\perp AC$，可得四边形 $DMAN$ 是矩形，所以 $MN=AD$．当 $AD\perp BC$ 时，$AD$ 的长最小，即 $MN$ 的长最小．此时，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}BC\cdot AD$，所以 $AD=\frac{AB\cdot AC}{BC}=\frac{6\times8}{10}=4.8$，所以 $MN$ 长的最小值为 $4.8$．

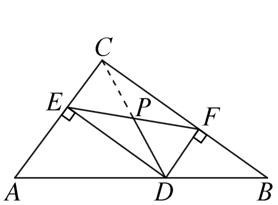
**4.** 6.5　**提示：**如图，连接 $AC$，$AP$，$CP$．因为四边形

$ABCD$ 是矩形，所以 $BC=AD=6$，$\angle BAD=\angle B=\angle BCD=90^\circ$，所以 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=10$. 因为 $P$ 是线段 $EF$ 的中点，$\angle EAF=90^\circ$，所以 $AP=\frac{1}{2}EF=3.5$. 因为 $PG\perp BC$，$PH\perp CD$，所以 $\angle PGC=\angle PHC=90^\circ$，所以四边形 $PGCH$ 是矩形，所以 $GH=CP$. 当 $A$，$P$，$C$ 三点共线时，$CP$ 的长最小，最小值为 $AC-AP=10-3.5=6.5$，所以 $GH$ 长的最小值是 6.5.




**5.** 16　**提示**：过点 $P$ 作 $PM\perp AD$ 于点 $M$，并反向延长交 $BC$ 于点 $N$，则四边形 $AEPM$，$DFPM$，$CFPN$，$BEPN$ 都是矩形. 所以 $S_{\triangle ADC}=S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle AMP}=S_{\triangle AEP}$，$S_{\triangle PBE}=S_{\triangle PBN}$，$S_{\triangle PFD}=S_{\triangle PMD}$，$S_{\triangle PFC}=S_{\triangle PNC}$，所以 $S_{\triangle PFD}=S_{\triangle PBE}=\frac{1}{2}DF\cdot PF=\frac{1}{2}AE\cdot PF=8$. 所以阴影部分的面积为 16.

**6.** 2.4　**提示**：因为在 $\triangle ABC$ 中，$AC=6$，$BC=8$，$AB=10$，所以 $AC^2+BC^2=AB^2$，所以 $\angle ACB=90^\circ$. 连接 $CD$. 因为 $DE\perp AC$，$DF\perp BC$，所以四边形 $EDFC$ 是矩形，所以 $EF=CD$，$\angle EDF=90^\circ$. 因为 $P$ 是 $EF$ 的中点，$DP=\frac{1}{2}EF=\frac{1}{2}CD$. 当 $CD$ 的长最小时，则 $DP$ 的长最小. 根据垂线段最短可知，当 $CD\perp AB$ 时，$CD$ 的长最小，此时 $DP=\frac{1}{2}EF=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}\times\frac{6\times8}{10}=2.4$.




**7.** (1) **证明**：因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $DF/\!/EB$，$AB=CD$. 又因为 $CF=AE$，所以 $DF=BE$，所以四边形 $BFDE$ 是平行四边形. 因为 $DE\perp AB$，所以 $\angle DEB=90^\circ$，所以▱$BFDE$ 是矩形.

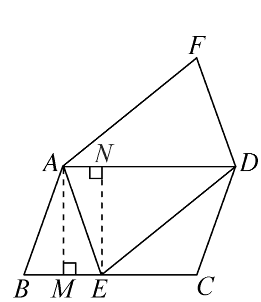
(2) **解**：因为 $AF$ 平分 $\angle DAB$，$DC/\!/AB$，所以 $\angle DAF=\angle FAB$，$\angle DFA=\angle FAB$，所以 $\angle DAF=\angle DFA$. 因为 $DF=5$，所以 $AD=DF=5$. 因为 $AE=CF=3$，$DE\perp AB$，所以 $DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=4$，所以矩形 $BFDE$ 的面积为 $DF\cdot DE=5\times4=20$.

**【拓展提优】**

**1.** B

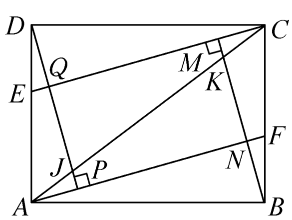
**2.** D　**提示**：由条件，得 $OA=9$，$OC=3$. 由勾股定理，得 $AC=\sqrt{OC^2+OA^2}=\sqrt{3^2+9^2}=3\sqrt{10}$. 过点 $F$ 作 $FG\perp OA$ 于点 $G$. 易知四边形 $OCFG$，$ABFG$ 是矩形，所以 $FG=OC=3$，$OE=BF=AG=4$，所以 $EG=OA-OE-AG=9-4-4=1$. 所以 $EF=\sqrt{FG^2+EG^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$. 所以 $AC\cdot EF=30$.

**3.** C　**提示**：如图，过点 $A$ 作 $AM\perp BC$ 于点 $M$，过点 $E$ 作 $EN\perp AD$ 于点 $N$. 易得四边形 $AMEN$ 是矩形. 所以 $AM=EN$，$AN=ME$. 因为将▱$ABCD$ 绕点 $A$ 逆时针旋转到▱$AEDF$ 的位置，所以 $AB=AE$，$DE=BC=AD=b$，所以 $\angle ABE=\angle AEB$. 因为 $AM\perp BE$，所以 $BM=ME$. 设 $BM=ME=x$，则 $AN=x$，所以 $DN=AD-AN=b-x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABM$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle EDN$ 中，$AM^2=AB^2-BM^2$，$NE^2=DE^2-DN^2$. 因为 $AM=EN$，所以 $a^2-x^2=b^2-(b-x)^2$，所以 $x=\frac{a^2}{2b}$. 当 $a=1$，$b=\sqrt{2}$ 时，$x=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，即 $BE=2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$CE=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ECD}$，故选项 A，B 错误. 当 $a=2$，$b=2\sqrt{2}$ 时，$x=\frac{4}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $BE=2x=\sqrt{2}$，$CE=2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$，所以 $S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ECD}$，故选项 C 正确，选项 D 错误.




**4.** ①③④　**提示**：①因为四边形 $ABCD$ 为矩形，$AB=4$，$BC=AD=3$，所以 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=$

$\sqrt{4^2+3^2}=5$，故①正确；②若 $DQ=CM$，则有 $\triangle CQD\cong\triangle BMC$，推出 $CD=BC$，与已知矛盾，故②错误；③因为 $AF/\!/CE$，$DP\perp AF$，$BM\perp CE$，所以 $\angle PQM=\angle QMN=\angle MNP=\angle NPQ=90°$，所以四边形 $PQMN$ 是矩形，故③正确；④如图，设 $PQ$，$MN$ 分别交 $AC$ 于点 $J$，$K$，易证 $\triangle APD\cong\triangle CMB$，所以 $AP=CM$，从而可证 $\triangle APJ\cong\triangle CMK$，所以 $PJ=MK$，因为四边形 $PQMN$ 是矩形，所以 $PQ=MN$，$PN=QM$，所以 $AC$ 平分四边形 $PQMN$ 的周长，故④正确.




5. $\frac{3}{4}$或$\frac{13}{4}$　**提示**：设经过 $t$ s时，四边形 $BEDF$ 是矩形. 由题意，得 $AE=CF=2t$. 因为 $AC=8$，所以点 $E$ 从点 $A$ 运动到点 $C$ 所需时间为 4 s. 当点 $E$，$F$ 相遇时，$2t+2t=8$，解得 $t=2$. 此时点 $E$，$F$ 在点 $O$ 相遇. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$AC=8$，$BD=5$，所以 $OA=OC=\frac{1}{2}AC=4$，$OB=OD=\frac{1}{2}BD=\frac{5}{2}$.

①如图 1，在点 $E$，$F$ 相遇前，即 $0<t<2$ 时，$OA-AE=4-2t=OC-CF$，即 $OE=OF=\frac{1}{2}EF$. 又因为 $OB=OD$，所以四边形 $BEDF$ 是平行四边形，要使▱$BEDF$ 是矩形，则需 $EF=BD$，即 $OE=OB$，所以 $4-2t=\frac{5}{2}$，解得 $t=\frac{3}{4}$，符合题意.

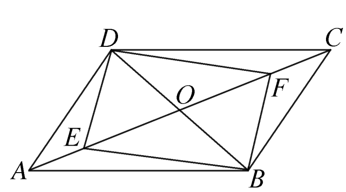



图 1

②如图 2，在点 $E$，$F$ 相遇后，即 $2<t<4$ 时，$AE-OA=2t-4=CF-OC$，即 $OE=OF=\frac{1}{2}EF$. 又因为 $OB=OD$，所以四边形 $BEDF$ 是平行四边形，要使▱$BEDF$ 是矩形，则需 $EF=BD$，即 $OE=OB$，所以 $2t-4=\frac{5}{2}$，解得 $t=\frac{13}{4}$，符合题意. 综上所述，经过$\frac{3}{4}$ s或$\frac{13}{4}$ s时，四边形 $BEDF$ 是矩形.

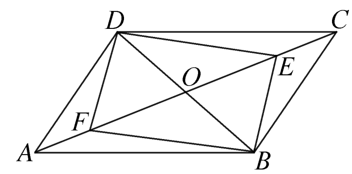



图 2

6. **解**：(1) 如图 1，四边形 $EFGH$ 即为所求.

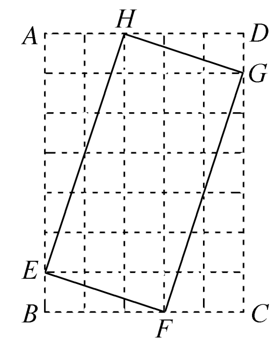



图 1

(2) ①如图 2，在 $CD$ 上截取 $DG=BE$，连接 $EG$，作 $EG$ 的垂直平分线，以 $EG$ 为直径画圆，交 $BC$ 于点 $F$，交 $AD$ 于点 $H$，则四边形 $EFGH$ 即为所求.

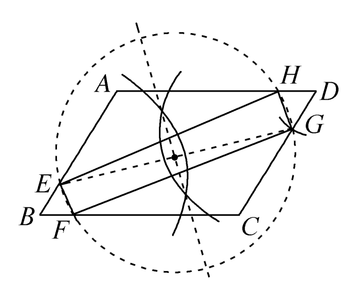



图 2

②$\frac{5\sqrt{3}}{2}$　**提示**：根据矩形的性质，得 $EG=HF$. 过点 $C$ 作 $CM\perp AD$，垂足为 $M$. 根据“垂线段最短”得，当点 $A$，$H$ 都与点 $M$ 重合时，$HF$ 最短，也就是 $EG$ 最短，如图 3 所示. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$AB=5$，$\angle B=60°$，所以 $\angle ACB=90°$，所以 $\angle BAC=30°$，所以 $BC=\frac{1}{2}AB=\frac{5}{2}$，$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$. 所以 $EG$ 长的最小值为$\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

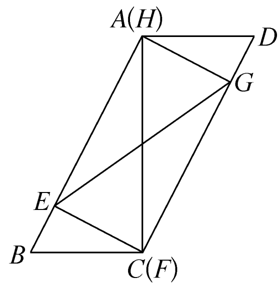



**图 3**

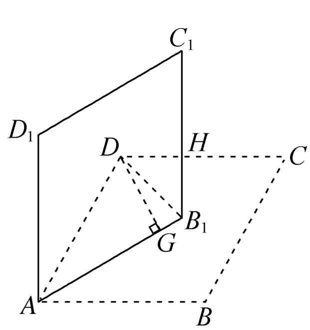
## 课时训练 19　特殊的平行四边形(3)

**【基础巩固】**

**1.** C

**2.** D　**提示**:设 $AC$ 与 $BD$ 相交于点 $O$.因为菱形 $ABCD$ 的周长为 8,所以 $AB=BC=2$.因为高 $AE=\sqrt{3}$,所以 $BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=1$.所以 $CE=BC-BE=1$,所以 $AC=\sqrt{AE^2+CE^2}=2$.因为 $OA=\frac{1}{2}AC=1$,$AC\perp BD$,所以 $OB=\sqrt{AB^2-OA^2}=\sqrt{3}$,所以 $BD=2OB=2\sqrt{3}$.所以 $AC:BD=1:\sqrt{3}$.

**3.** A　**提示**:如图,四边形 $AB_1C_1D_1$ 是旋转后的菱形,则 $\angle B_1AD=30°$,$AB_1=AD=2$.连接 $DB_1$,过点 $D$ 作 $DG\perp AB_1$ 于点 $G$,则 $DG=\frac{1}{2}AD=1$,$AG=\sqrt{AD^2-DG^2}=\sqrt{3}$.所以 $S_{\triangle AB_1D}=\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$,$B_1D^2=DG^2+B_1G^2=1^2+(2-\sqrt{3})^2=8-4\sqrt{3}$.设 $B_1C_1$ 交 $CD$ 于点 $H$,则重叠部分为四边形 $ADHB_1$.因为 $\angle ADB_1=\angle AB_1D=(180°-30°)\div 2=75°$,所以 $\angle HB_1D=\angle HDB_1=120°-75°=45°$.所以 $\triangle B_1DH$ 为等腰直角三角形,所以 $B_1H^2+DH^2=B_1D^2$,即 $2B_1H^2=B_1D^2$,所以 $S_{\triangle B_1DH}=\frac{1}{2}B_1H^2=\frac{1}{4}B_1D^2=2-\sqrt{3}$.所以重叠部分的面积为 $S_{\triangle AB_1D}+S_{\triangle B_1DH}=3-\sqrt{3}$.




**4.** (2,0)　**提示**:由题意可知,点 $D(0,4)$,菱形的边长为 5.所以 $AO=\sqrt{AD^2-OD^2}=3$,即点 $A(-3,0)$.因为 $AB=5$,所以点 $B(2,0)$.

**5.** 8　**提示**:因为菱形 $ABCD$ 的对角线 $AC,BD$ 相交于点 $O$,所以 $AC=2OA$,$OB=\frac{1}{2}BD=3$,$AC\perp BD$.因为 $E$ 是边 $AB$ 的中点,所以 $AB=2OE=5$,所以 $OA=\sqrt{AB^2-OB^2}=4$,所以 $AC=2OA=8$.

**6.** $2\sqrt{5}$　**提示**:连接 $AC$ 交 $BD$ 于点 $O$.由菱形的性质可知,$AC\perp BD$,$BD=2DO$.所以 $\angle DOC=\angle DFC=90°$.因为 $AB\parallel DC$,所以 $\angle DCE=\angle ABC=70°$,$\angle BCD=110°$.因为 $\angle ECM=15°$,所以 $\angle DCF=55°$.又由菱形的性质可知,$\angle DCO=\frac{1}{2}\angle BCD=55°$,所以 $\angle DCO=\angle DCF$.所以可证 $\triangle DCO\cong\triangle DCF$.所以 $DO=DF=\sqrt{5}$,所以对角线 $BD$ 的长为 $2\sqrt{5}$.

**7.** $13+3\sqrt{5}$　**提示**:由题意,得 $OC=4$,$OD=3$,所以 $CD=\sqrt{OC^2+OD^2}=5$.因为四边形 $ABCD$ 是菱形,所以 $AD=CD=5$.因为点 $F$ 的坐标为(8,6),点 $E$ 在 $y$ 轴上,线段 $EF\parallel x$ 轴,所以 $EF=8$.连接 $OA$,过点 $A$ 作 $AF_1\parallel DF$ 交 $EF$ 于点 $F_1$,连接 $OF_1$,则四边形 $ADFF_1$ 是平行四边形,所以 $AF_1=DF$,$FF_1=AD=5$,所以 $EF_1=3$.易得 $DE=OD=3$,所以点 $E,O$ 关于 $AD$ 对称,所以 $OA=AE$,所以 $AE+DF=OA+AF_1$.当 $O,A,F_1$ 三点共线时,$OA+AF_1$ 取得最小值,即 $AE+DF$ 取得最小值,最小值为 $OF_1$ 的长.在 $\mathrm{Rt}\triangle OEF_1$ 中,$OF_1=\sqrt{OE^2+EF_1^2}=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$.所以四边形 $ADFE$ 周长的最小值为 $AD+EF+AE+DF=AD+EF+OF_1=5+8+3\sqrt{5}=13+3\sqrt{5}$.

**8.** (1) **证明**:因为 $OF\perp BC$,$EG\perp BC$,所以 $OF\parallel EG$,$\angle OFG=90°$.因为四边形 $ABCD$ 是菱形,所以 $\angle DCA=\angle BCA$,$AC\perp BD$.因为 $E$ 是边 $CD$ 的中点,所以 $OE=DE=CE$,所以 $\angle EOC=\angle DCA$,所以 $\angle EOC=\angle BCA$,所以 $OE\parallel FG$,所以四边形 $OEGF$ 是平行四边形.因为 $\angle OFG=90°$,所以▱$OEGF$ 是矩形.

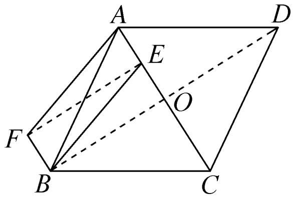
(2) 6　**提示**:因为四边形 $ABCD$ 是菱形,$AC=6$,

$BD=8$,所以 $AC\perp BD$,所以 $\angle BOC=\angle COD=90^\circ$,$OB=OD=\frac{1}{2}BD=4$,$OC=\frac{1}{2}AC=3$,所以 $CD=BC=\sqrt{4^2+3^2}=5$.因为 $E$ 是边 $CD$ 的中点,所以 $OE=\frac{1}{2}CD=\frac{5}{2}$.因为 $OF\perp BC$,所以 $S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}BC\cdot OF=\frac{1}{2}OB\cdot OC$,所以 $OF=\frac{OB\cdot OC}{BC}=\frac{4\times3}{5}=\frac{12}{5}$,所以矩形 $OEGF$ 的面积为 $OE\cdot OF=\frac{5}{2}\times\frac{12}{5}=6$.

**【拓展提优】**

**1.** A　**提示**:设左侧第一个菱形的另一个顶点为 $M$,连接 $AC$,$BM$,交于点 $O$.由拼接方式易知,$AB=AF=2BM$(可由等底等高证平行,得平行四边形,从而可得).因为四边形 $ABCM$ 是菱形,所以 $AC\perp BM$,$OB=\frac{1}{2}BM$,$OA=\frac{1}{2}AC$,所以 $AB=4OB$,所以 $OA=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{15}\,OB$,所以 $AC=2OA=2\sqrt{15}OB=\sqrt{15}\,BM$,所以 $AC:BM=\sqrt{15}:1$,即菱形较长的对角线与较短对角线的长度的比值为 $\sqrt{15}$.

**2.** C　**提示**:如图,连接 $EF$,$BD$,$BD$ 与 $AC$ 相交于点 $O$.由题意,得 $AO=\frac{1}{2}AC=6$,$AC\perp BD$,所以 $\angle AOB=90^\circ$,所以 $OB=\sqrt{AB^2-AO^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$.因为四边形 $AFBE$ 是平行四边形,所以 $AC/\!/BF$.所以当 $EF\perp AC$,即 $EF=OB$ 时,$EF$ 的长最小,此时,$EF$ 长的最小值为 8.




**3.** C　**提示**:因为四边形 $ABCD$ 为菱形,所以 $AB=AD$.又因为 $AB=BD$,所以 $\triangle ABD$ 为等边三角形,所以 $AD=BD$,$\angle A=\angle BDF=60^\circ$.又因为 $AE=DF$,所以 $\triangle AED\cong\triangle DFB$,故①正确.如图 1,作 $\angle BCM=\angle DCG$,交 $GB$ 的延长线于点 $M$,则 $\angle GCM=\angle BCM+\angle GCB=\angle DCG+\angle GCB=\angle DCB=60^\circ$.因为 $\triangle AED\cong\triangle DFB$,所以 $\angle ADE=\angle DBF$.因为 $\angle A=60^\circ$,所以 $\angle ADC=120^\circ$,所以 $\angle CDG=120^\circ-\angle ADE$.因为 $\angle CBM=180^\circ-\angle DBF-\angle DBC=180^\circ-60^\circ-\angle DBF=120^\circ-\angle DBF$,所以 $\angle CDG=\angle CBM$.因为 $DC=BC$,$\angle DCG=\angle BCM$,所以 $\triangle CDG\cong\triangle CBM$,所以 $CG=CM$.因为 $\angle GCM=60^\circ$,所以 $\triangle CGM$ 为等边三角形.过点 $C$ 作 $CK\perp GB$ 于点 $K$.因为 $\angle CGM=60^\circ$,所以 $\angle GCK=30^\circ$,所以 $GK=\frac{1}{2}CG$,所以 $CK=\frac{\sqrt{3}}{2}CG$,所以 $S_{\text{四边形}BCDG}=S_{\triangle CGM}=2S_{\triangle CKG}=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}CG\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}CG=\frac{\sqrt{3}}{4}CG^2$,故②错误.如图 2,当 $E$,$F$ 分别是 $AB$,$AD$ 的中点时,由①知,$\triangle ABD$,$\triangle BDC$ 均为等边三角形,所以 $\angle BDE=\angle DBG=30^\circ$,所以 $GD=GB$.因为 $CD=CB$,所以 $CG$ 垂直平分 $BD$,故③错误.易得 $\angle BGE=\angle BDG+\angle DBF=\angle BDG+\angle ADE=\angle ADB=60^\circ$,故④正确.

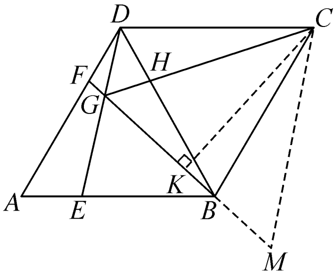


图 1

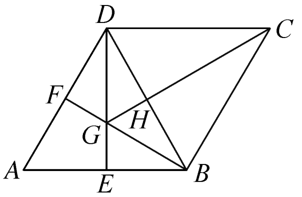
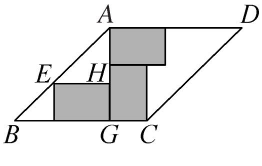


图 2

**4.** 16　**提示**:如图,由题意可知 $A$,$H$,$G$ 三点共线,$\angle AHE=\angle AGB=90^\circ$.因为 3 个矩形相同,所以 $AG=EH+HG$,所以 $AH=AG-HG=EH+HG-HG=EH$,所以 $\angle HAE=\angle HEA=45^\circ$,所以 $\angle B=45^\circ$,所以 $GA=GB$.因为每个矩形的周长为 $4\sqrt{2}$ cm,所以 $GB=GA=EH+HG=2\sqrt{2}$ cm,所以 $AB=\sqrt{GB^2+AG^2}=\sqrt{8+8}=4$(cm).因为四边形 $ABCD$ 是菱形,所以 $BC=AD=CD=AB=4$ cm,所以菱形 $ABCD$ 的周长为 16 cm.




**5.** 3　**提示**:连接 $BE$,过点 $B$ 作 $BH\perp AD$ 交 $DA$ 的延长线于点 $H$.因为四边形 $ABCD$ 是菱形,所以 $BC=DC$,$AD/\!/BC$.所以 $\angle BAH=\angle ABC=60^\circ$.因为 $\angle BCD=\angle ECF$,所以 $\angle BCE=\angle DCF$.由旋转

可得 $EC=FC$，所以 $\triangle DCF\cong\triangle BCE$，所以 $DF=BE$. 根据“垂线段最短”可知，当 $BE\perp AD$，即点 $E$ 与点 $H$ 重合时，$BE$ 的长取得最小值. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AHB$ 中，因为 $\angle BAH=60°$，所以 $\angle ABH=30°$. 又因为 $AB=2\sqrt{3}$，所以 $AH=\sqrt{3}$，所以 $BH=3$. 所以 $BE$ 长的最小值是 3，所以 $DF$ 长的最小值为 3.

**6.** $\sqrt{3}-1$ 或 2 或 $3\sqrt{3}-1$　**提示**：过点 $C$ 作 $CH\perp x$ 轴于点 $H$. 根据题意，得 $OA=1+t$. 因为四边形 $OABC$ 是菱形，所以 $OC=OA=1+t$. 因为 $\angle AOC=60°$，所以 $\angle OCH=30°$，所以 $OH=\frac{1}{2}OC=\frac{1+t}{2}$，所以 $CH=\frac{\sqrt{3}(1+t)}{2}$，所以点 $C$ 的坐标为 $\left(\frac{1+t}{2},\frac{\sqrt{3}(1+t)}{2}\right)$. 分以下几种情况讨论：①当 $O$ 为等腰三角形的顶点时，$OC=OP$，即 $1+t=3$，解得 $t=2$. ②当 $C$ 为等腰三角形的顶点时，$PC=OC$，则易得 $CH=\frac{1}{2}OP=\frac{3}{2}$，即 $\frac{\sqrt{3}(1+t)}{2}=\frac{3}{2}$，解得 $t=\sqrt{3}-1$. ③当 $P$ 为等腰三角形的顶点时，$OP=PC$，$\angle POC=30°$. 过点 $C$ 作 $CQ\perp y$ 轴于点 $Q$，则点 $Q\left(0,\frac{\sqrt{3}(1+t)}{2}\right)$，所以 $PQ=\frac{\sqrt{3}(1+t)}{2}-3$. 因为 $\angle CPQ=\angle POC+\angle PCO=60°$，所以 $\angle PCQ=30°$. 所以 $OP=PC=2PQ$，即 $\sqrt{3}(1+t)-6=3$，解得 $t=3\sqrt{3}-1$. 综上所述，当 $t=2$ 或 $t=\sqrt{3}-1$ 或 $t=3\sqrt{3}-1$ 时，$\triangle OCP$ 为等腰三角形.

**7.** (1) **证明**：因为 $E$ 是边 $AB$ 的中点，且 $DE\perp AB$，所以 $AD=BD$. 因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $AD=AB$. 所以 $AD=BD=AB$，所以 $\triangle ABD$ 是等边三角形.

(2) **解**：由(1)得 $\triangle ABD$ 是等边三角形，$\angle EDA=\angle EDB$. 因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $AB/\!/DC$. 因为 $DE\perp AB$，所以 $DE\perp DC$，所以 $\angle EDC=90°$，所以 $\angle BDF=\angle FDC+\angle CDB=\angle EDA+\angle CDB=\angle EDB+\angle CDB=90°$. 因为 $\triangle ADE$ 绕点 $D$ 逆时针旋转得到 $\triangle CDF$，所以 $DF=DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$. 所以 $BF=\sqrt{DF^2+BD^2}=\sqrt{7}$.

## 课时训练 20　特殊的平行四边形(4)

**【基础巩固】**

**1.** C　**2.** A　**3.** B

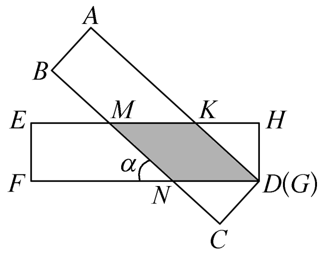
**4.** B　**提示**：因为 $CE/\!/BD$，$DE/\!/AC$，所以四边形 $DOCE$ 是平行四边形. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $OC=\frac{1}{2}AC=2$，$OD=\frac{1}{2}BD$，$AC=BD$，所以 $OD=OC=2$，所以四边形 $CODE$ 是菱形，所以 $DE=CE=OC=OD=2$，所以四边形 $DOCE$ 的周长为 $2\times4=8$.

**5.** ③

**6.** 24　**提示**：设 $AB$ 与 $MN$ 交于点 $O$. 由作图可知 $AN=AM=BM=BN=5$，所以四边形 $AMBN$ 是菱形，所以 $AB\perp MN$. 因为 $AM=5$，$OA=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times6=3$，所以 $OM=\sqrt{AM^2-OA^2}=4$，所以 $MN=2OM=8$，所以菱形 $AMBN$ 的面积为 $\frac{1}{2}AB\cdot MN=\frac{1}{2}\times6\times8=24$.

**7.** 6　**提示**：设菱形中的直角三角形较长的直角边为 $a$，较短的直角边为 $b$. 由题意，得 $\begin{cases}a^2+b^2=7,\\(a-b)^2=1.\end{cases}$ 整理，得 $ab=3$. 所以菱形的面积为 $\frac{1}{2}\cdot2a\cdot2b=2ab=6$.

**8.** $\frac{17}{2}$　**提示**：设 $AD$ 交 $EH$ 于点 $K$，$BC$ 分别交 $EH$，$FG$ 于点 $M$，$N$. 易证 $\triangle CDN\cong\triangle HDK$，所以 $ND=DK$. 又因为四边形 $DNMK$ 是平行四边形，所以 $\square DNMK$ 是菱形. 易知当点 $B$ 与点 $E$ 重合时，两张纸片交叉所成的角 $\alpha$ 最小. 此时，设 $DK=MK=x$ cm，则 $HK=(8-x)$ cm. 在 $\mathrm{Rt}\triangle DHK$ 中，由勾股定理，得 $DK^2=DH^2+HK^2$，所以 $x^2=2^2+(8-x)^2$，解得 $x=\frac{17}{4}$. 所以 $MK=DK=\frac{17}{4}$ cm，所以重叠部分的面积为 $MK\cdot DH=\frac{17}{4}\times2=\frac{17}{2}(\mathrm{cm}^2)$.

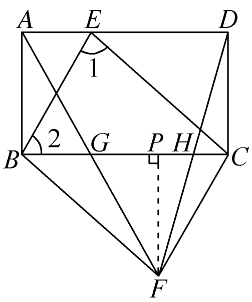



**9.** (1) **证明**:因为在四边形 $ABCD$ 中,$AB /\!/ CD$,所以$\angle DCA=\angle BAC$.因为 $AC$ 平分$\angle BAD$,所以 $\angle DAC=\angle BAC$. 所以$\angle DCA=\angle DAC$,所以 $AD=CD$.因为$AB=AD$,所以 $AB=CD$,所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形.又因为 $AB=AD$,所以▱$ABCD$ 是菱形.

(2) **解**:因为四边形 $ABCD$ 是菱形,对角线 $AC$,$BD$ 交于点 $O$,所以 $AO=CO$,$\angle AOB=90°$.因为 $CE\perp AB$,$OE=4$,所以 $AO=CO=OE=4$,所以 $AC=8$.因为 $BD=6$,所以 $BO=DO=\frac{1}{2}BD=3$,所以 $AB=\sqrt{AO^2+BO^2}=5$.因为菱形 $ABCD$ 的面积为$\frac{1}{2}AC\cdot BD=AB\cdot CE$,所以 $\frac{1}{2}\times6\times8=5CE$,所以 $CE=\frac{24}{5}$.

**【拓展提优】**

**1.** ①③⑤ **提示**:如图,在矩形 $ABCD$ 中,$AD/\!/BC$,所以$\angle CED+\angle1+\angle2=180°$.在▱$BECF$ 中,$CE/\!/BF$,所以 $\angle CBF+\angle2+\angle1=180°$,所以$\angle CED=\angle CBF$,故①正确.因为四边形 $BECF$ 是平行四边形,所以 $S_{\triangle EBC}=S_{\triangle FBC}$,所以 $S_{▱BECF}=2S_{\triangle EBC}$.因为 $S_{矩形ABCD}=BC\cdot AB$,$S_{\triangle EBC}=\frac{1}{2}BC\cdot AB$,所以 $S_{矩形ABCD}=2S_{\triangle EBC}$,所以 $S_{▱BECF}=S_{矩形ABCD}$,故②错误.如图,过点 $F$ 作 $FP\perp BC$ 于点 $P$.所以$\angle FPB=\angle FPC=90°$.因为 $S_{\triangle EBC}=\frac{1}{2}BC\cdot AB$,$S_{\triangle FBC}=\frac{1}{2}BC\cdot FP$,$S_{\triangle EBC}=S_{\triangle FBC}$,所以 $AB=FP$.在矩形 $ABCD$ 中,$AB=CD$,$\angle ABG=\angle DCH=90°$,所以 $CD=AB=FP$,$\angle ABG=\angle DCH=\angle FPG=\angle FPH=90°$.又因为$\angle AGB=\angle FGP$,所以$\triangle ABG\cong\triangle FPG$(AAS),所以 $BG=PG$.同理可得$\triangle DCH\cong\triangle FPH$(AAS),所以 $CH=PH$,所以 $GH=PG+PH=BG+CH$,故③正确.连接 $EF$ 交 $BC$ 于点 $O$.因为▱$BECF$ 是矩形,所以 $OE=OF=OB=OC$,根据已知条件无法判定 $OE=AB$,所以无法判定 $BC=2AB$,故④错误.若 $E$ 是 $AD$ 的中点,则 $AE=DE$.在矩形 $ABCD$ 中,$\angle BAE=\angle CDE=90°$,$AB=DC$,所以$\triangle ABE\cong\triangle DCE$(SAS),所以 $BE=CE$,所以▱$BECF$ 是菱形,故⑤正确.



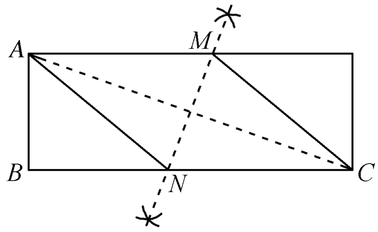

**2.** 菱形

**3.** $\frac{5}{2}$ **提示**:过点 $D$ 作 $DE\perp BC$ 于点 $E$.由题图象可知,点 $F$ 由点 $A$ 运动到点 $D$ 用时 $a$ s,此过程中$\triangle FBC$ 的面积恒为 $a$ cm$^2$,所以 $AD=a$ cm,$\frac{1}{2}DE\cdot AD=a$,所以 $DE=2$ cm.当点 $F$ 从点 $D$ 运动到点 $B$ 时,用时$\sqrt{5}$ s,所以 $BD=\sqrt{5}$ cm.在 Rt$\triangle DBE$ 中,由勾股定理,得 $BE=\sqrt{BD^2-DE^2}=1$ cm.因为四边形 $ABCD$ 是菱形,所以 $EC=(a-1)$cm,$DC=a$ cm.在 Rt$\triangle DEC$ 中,由勾股定理,得 $DC^2=DE^2+EC^2$,即 $a^2=2^2+(a-1)^2$,解得 $a=\frac{5}{2}$.

**4.** (1) **证明**:因为四边形 $ABCD$ 是矩形,所以 $AD/\!/BC$,所以$\angle AEF=\angle EFP$.因为 $EF$ 垂直平分 $AP$,所以 $AF=PF$,$AE=PE$.易证$\triangle AFE\cong\triangle PFE$,所以$\angle EFP=\angle EFA$.所以$\angle AEF=\angle EFA$,所以 $AE=AF$.所以 $AF=PF=AE=PE$,所以四边形 $AFPE$ 是菱形.

(2) **解**:如图,以矩形的一条对角线和这条对角线的垂直平分线被矩形两边所截的线

段作菱形的对角线，连接各点，所得菱形即为矩形 $ABCD$ 内面积最大的菱形，菱形 $AMCN$ 即为所求. 设该菱形的边长为 $x$. 根据勾股定理，得 $1^2+(3-x)^2=x^2$，解得 $x=\frac{5}{3}$. 所以该菱形的边长为 $\frac{5}{3}$.

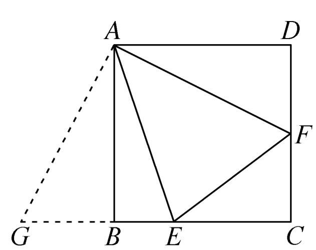



## 课时训练 21　特殊的平行四边形（5）

### 【基础巩固】

**1.** B　**提示：**连接 $AF$，$BG$，则由中心对称的性质可知 $S_{阴影}=\frac{1}{4}\times(3^2-2^2)=1.25$.

**2.** A　**提示：**如图，延长 $CB$ 至点 $G$，使 $BG=DF$，连接 $AG$. 则 $\triangle ADF\cong\triangle ABG$（SAS），所以 $AF=AG$，$\angle DAF=\angle BAG$. 易得 $\angle EAG=\angle BAE+\angle BAG=\angle BAE+\angle DAF=90°-\angle EAF=45°=\angle EAF$. 易证 $\triangle AEG\cong\triangle AEF$（SAS），所以 $\angle AEG=\angle AEF$. 因为 $\angle AEF+\angle AEG+\angle FEC=180°$，所以 $\angle AEG=\frac{1}{2}(180°-\angle FEC)=90°-\frac{\alpha}{2}$，所以 $\angle BAE=90°-\angle AEG=\frac{\alpha}{2}$.

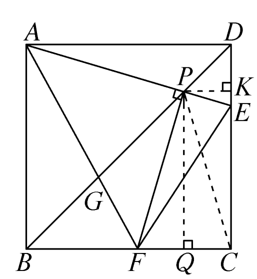



**3.** B　**提示：**过点 $O$ 作 $OD\perp OA$ 交 $AC$ 于点 $D$. 因为四边形 $BCEF$ 是正方形，$O$ 是该正方形的中心，所以 $\angle BOC=90°$，$OB=OC$. 所以 $\angle AOB+\angle BOD=90°=\angle DOC+\angle BOD$，所以 $\angle AOB=\angle DOC$. 因为 $\angle ODC=\angle OAC+\angle AOD$，$\angle OAB=\angle OAC+\angle BAC$，$\angle AOD=\angle BAC=90°$，所以 $\angle OAB=\angle ODC$. 所以 $\triangle DCO\cong\triangle ABO$，所以 $OD=OA=3\sqrt{2}$，$CD=AB=2$. 所以 $\triangle OAD$ 是等腰直角三角形，所以 $AD=\sqrt{2}OA=6$. 所以 $AC=AD+CD=8$.

**4.** $(1,-3)$　**提示：**过点 $C$ 作 $CE\perp x$ 轴，垂足为 $E$. 易证 $\triangle BCE\cong\triangle ABO$，所以 $CE=BO=3$，$BE=AO=4$. 所以点 $C$ 的坐标为 $(1,-3)$.

**5.** $\sqrt{10}$　**提示：**连接 $PC$，$CE$. 易证 $\triangle ABP\cong\triangle CBP$，所以 $PA=PC$. 所以 $PA+PE=PC+PE$. 当 $E$，$P$，$C$ 三点共线时，$PA+PE$ 的值最小，最小值为 $CE$ 的长. 在 $\mathrm{Rt}\triangle CBE$ 中，由勾股定理，得 $CE=\sqrt{BC^2+BE^2}=\sqrt{10}$. 所以 $PA+PE$ 的最小值为 $\sqrt{10}$.

**6.** 3　**提示：**如图，连接 $PC$，过点 $P$ 作 $PQ\perp BC$ 于点 $Q$，$PK\perp CD$ 于点 $K$，则四边形 $PQCK$ 为矩形. 所以 $PK=CQ$，$\angle PKD=90°$，所以 $\triangle PDK$ 是等腰直角三角形. 因为 $DP=\sqrt{2}$，$DP=\sqrt{PK^2+DK^2}=\sqrt{2}PK$，所以 $DK=PK=1$，所以 $CQ=1$. 因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $AD=CB=CD=AB$，$\angle ABP=\angle CBP=45°$. 易证 $\triangle ABP\cong\triangle CBP$（SAS），所以 $PA=PC$，$\angle BAP=\angle BCP$. 因为 $PF\perp AP$，所以 $\angle APF=90°$，所以 $\angle BAP+\angle BFP=360°-\angle APF-\angle ABF=180°$. 因为 $\angle BFP+\angle CFP=180°$，所以 $\angle BAP=\angle CFP$，所以 $\angle BCP=\angle CFP$. 因为 $\angle PQF=\angle PQC=90°$，$PQ=PQ$，所以 $\triangle PFQ\cong\triangle PCQ$（AAS）. 所以 $FQ=CQ=1$，所以 $CF=2$，所以 $BF=BC-CF=3$.




**7.** **证明：**(1) 因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $\angle B=90°$，$AB=BC$，所以 $\angle BAE+\angle BEA=90°$. 因为 $\angle AEF=90°$，所以 $\angle BEA+\angle FEM=90°$，所以 $\angle BAE=\angle FEM$. 因为 $EF=AE$，所以 $\triangle ABE\cong\triangle EMF$（AAS），所以 $AB=EM$，所以 $BC=EM$，所以 $BC-EC=EM-EC$，即 $BE=CM$.

(2) 因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $\angle B=\angle ADN=90°$，$AB=AD$. 因为

$DN=BE$，所以$\triangle ABE\cong\triangle ADN$(SAS)，所以$AE=AN$，$\angle BAE=\angle DAN$. 因为$AE=EF$，所以$EF=AN$. 因为$\angle DAN+\angle EAD=\angle BAE+\angle EAD=90^\circ$，所以$\angle EAN=\angle AEF=90^\circ$. 所以$AN\parallel EF$，所以四边形$AEFN$是平行四边形. 因为$AE=EF$，所以四边形$AEFN$是菱形. 因为$\angle AEF=90^\circ$，所以四边形$AEFN$是正方形.

**【拓展提优】**

**1.** B　**提示**：根据题意，易证$\triangle BAE\cong\triangle CDE$，所以$\angle ABE=\angle DCE$，故①正确. 易证$\triangle ADH\cong\triangle CDH$，所以$\angle HAD=\angle HCD$. 所以$\angle ABE=\angle HAD$，所以$\angle ABE+\angle HAB=\angle HAD+\angle HAB=\angle BAD=90^\circ$，所以$\angle AGB=90^\circ$，所以$AG\perp BE$，故②正确. 因为$AD\parallel BC$，所以$S_{\triangle BDE}=S_{\triangle CDE}$，所以$S_{\triangle BDE}-S_{\triangle DEH}=S_{\triangle CDE}-S_{\triangle DEH}$，即$S_{\triangle BHE}=S_{\triangle CHD}$，故③正确. 因为$\triangle ADH\cong\triangle CDH$，所以$\angle AHD=\angle CHD$，所以$\angle AHB=\angle CHB$. 因为$\angle CHB=\angle EHD$，所以$\angle AHB=\angle EHD$，故④正确.

**2.** D　**提示**：由$\text{Rt}\triangle ABE\cong\text{Rt}\triangle BCF\cong\text{Rt}\triangle DAH\cong\text{Rt}\triangle CDG$，得$BE=CF=AH=DG$. 由四边形$EFGH$是正方形，得$HE=HG=GF=EF$. 因为$AH=GH$，所以$BE=EF$. 易证$\text{Rt}\triangle ABE\cong\text{Rt}\triangle AFE$，所以$AF=AB=5$，$\angle BAE=\angle FAE$. 因为$AE\parallel CG$，所以$\angle CFM=\angle EAF$. 又因为$\angle BAE=\angle DCG$，所以$\angle CFM=\angle DCG$，所以$MF=MC$. 设$MF=MC=x$，则$AM=5+x$，$DM=5-x$. 在$\text{Rt}\triangle ADM$中，由勾股定理，得$AD^2+DM^2=AM^2$，即$5^2+(5-x)^2=(5+x)^2$，解得$x=\frac{5}{4}$，所以$CM=\frac{5}{4}$.

**3.** $\frac{49}{13}$　**提示**：设$AE$与$BF$的交点为$H$. 因为四边形$ABCD$为正方形，所以$AB=AD=12$，$\angle BAD=\angle D=90^\circ$. 根据折叠的性质，得$\triangle ABF\cong\triangle GBF$，$BF$垂直平分$AG$，所以$BF\perp AE$，$AH=GH$，所以$\angle BAH+\angle ABH=90^\circ$. 又因为$\angle FAH+\angle BAH=90^\circ$，所以$\angle ABH=\angle FAH$. 所以$\triangle ABF\cong\triangle DAE$，所以$AF=DE=5$. 在$\text{Rt}\triangle ABF$中，根据勾股定理，得$BF=\sqrt{AB^2+AF^2}=13$. 根据等面积法，得$AH=\frac{AB\cdot AF}{BF}=\frac{60}{13}$，所以$AG=2AH=\frac{120}{13}$. 因为$AE=BF=13$，所以$GE=AE-AG=13-\frac{120}{13}=\frac{49}{13}$.

**4.** $3-\sqrt{5}$　**提示**：如图1，在$\triangle AC'E$中，$AC'\geqslant AE-C'E$，所以当$A$，$C'$，$E$三点共线时，$AC'$的长最小. 如图2，因为四边形$ABCD$是正方形，且$E$是边$CD$的中点，所以$AD=BC=CD=4$，$DE=CE=2$，$\angle ADE=\angle B=90^\circ$. 根据勾股定理，得$AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=2\sqrt{5}$. 根据折叠可得$C'E=CE=2$，$C'F=CF$，$\angle EC'F=\angle C=90^\circ=\angle AC'F$，所以$AC'=AE-C'E=AE-CE=2\sqrt{5}-2$. 设$BF=x$，可知$C'F=CF=4-x$. 根据勾股定理，可得$AC'^2+C'F^2=AF^2=AB^2+BF^2$，即$(2\sqrt{5}-2)^2+(4-x)^2=4^2+x^2$，解得$x=3-\sqrt{5}$，所以$BF=3-\sqrt{5}$.

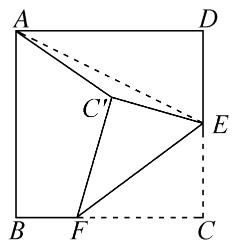


图 1

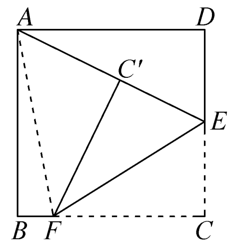
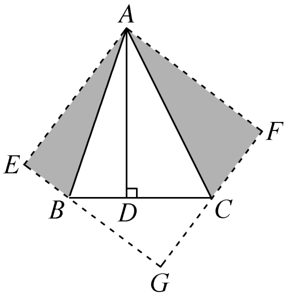


图 2

**5.** **解**：(1) $AH=AB$. 证明如下：因为四边形$ABCD$是正方形，所以$\angle ABC=\angle D=90^\circ$，所以$\angle ABG=90^\circ$. 易证$\triangle ABG\cong\triangle ADN$，所以$\angle BAG=\angle DAN$，$AG=AN$. 因为$\angle BAD=90^\circ$，$\angle MAN=45^\circ$，所以$\angle DAN+\angle BAM=45^\circ$. 所以$\angle BAG+\angle BAM=45^\circ$，即$\angle GAM=45^\circ$. 在$\triangle GAM$和$\triangle NAM$中，$\begin{cases}AG=AN,\\ \angle GAM=\angle NAM,\\ AM=AM,\end{cases}$所以$\triangle GAM\cong\triangle NAM$，所以$\angle AMG=\angle AMN$，易证$\triangle ABM\cong\triangle AHM$，所以$AH=AB$.

(2) 3　**提示**：如图，作$\triangle ABD$关于直线$AB$的对称图形$\triangle ABE$，作$\triangle ACD$关于直线$AC$的对称图形

$\triangle ACF$. 因为 $AD$ 是 $\triangle ABC$ 的高，所以 $\angle ADB=\angle ADC=90°$，所以 $\angle E=\angle F=90°$. 因为 $\angle BAC=45°$，所以 $\angle EAF=90°$. 延长 $EB$，$FC$ 交于点 $G$，则四边形 $AEGF$ 是矩形. 又因为 $AE=AD=AF$，所以四边形 $AEGF$ 是正方形. 由(1)可知 $BE=BD=2$，$FG=EG=AE=AD=6$，所以 $BG=4$. 设 $CD=CF=x$，则 $CG=6-x$，$BC=x+2$. 在 $Rt\triangle BGC$ 中，$BG^2+CG^2=BC^2$，即 $4^2+(6-x)^2=(x+2)^2$，解得 $x=3$，故 $CD$ 的长为 3.

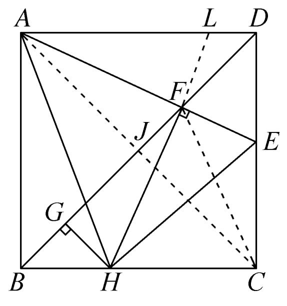



(3) 连接 $AF$，过点 $A$ 作 $AM\perp EF$ 于点 $M$. 因为 $\angle AEB=90°-\angle BAE$，$\angle FEC=2\angle BAE$，$\angle AEM=180°-\angle AEB-\angle FEC=90°-\angle BAE$，所以 $\angle AEB=\angle AEM$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle AME$ 中，$\begin{cases}\angle ABE=\angle AME,\\ \angle AEB=\angle AEM,\\ AE=AE,\end{cases}$ 所以 $\triangle ABE\cong\triangle AME$，所以 $ME=BE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AB=12$，$AD=AB=AM$. 易证 $Rt\triangle ADF\cong Rt\triangle AMF$，所以 $DF=MF$. 设 $DF=MF=x$，则 $EF=12+x$，$FC=24-x$. 在 $Rt\triangle EFC$ 中，$EC^2+FC^2=EF^2$，即 $12^2+(24-x)^2=(x+12)^2$，解得 $x=8$，故 $DF$ 的长为 8.

## 提优专题 2　正方形中的常见模型

**1.** B　**提示**：因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $OC=OD$，$AC\perp BD$，所以 $\angle COM=\angle DOE=90°$. 因为 $CF\perp DE$，所以 $\angle CFE=90°$，所以 $\angle ECF+\angle CEF=90°$. 因为 $\angle ODE+\angle CEF=90°$，所以 $\angle ODE=\angle OCM$，所以 $\triangle CMO\cong\triangle DEO$(ASA). 因为 $OC^2+OD^2=CD^2=2^2=4$，所以 $OC=OD=\sqrt{2}$，所以 $OM=OE=CE-OC=2-\sqrt{2}$. 所以 $DM=OD-OM=\sqrt{2}-(2-\sqrt{2})=2\sqrt{2}-2$.

**2.** A　**提示**：如图，连接 $FC$，延长 $HF$ 交 $AD$ 于点 $L$. 因为 $BD$ 为正方形 $ABCD$ 的对角线，所以 $\angle ADF=\angle CDF=45°$. 因为 $AD=CD$，$DF=DF$，所以 $\triangle ADF\cong\triangle CDF$，所以 $FC=AF$，$\angle DCF=\angle DAF$. 因为 $FH\perp AE$，所以 $\angle ALH+\angle DAF=90°$. 因为 $AD\parallel BC$，所以 $\angle ALH=\angle LHC$，所以 $\angle LHC+\angle DAF=90°$，因为 $\angle DCF+\angle FCH=90°$，$\angle DCF=\angle DAF$，所以 $\angle FHC=\angle FCH$，所以 $FH=FC$，所以 $FH=AF$. 因为 $FH\perp AE$，所以 $\angle HAE=45°$，故①正确. 因为 $FH<HE$，所以 $AF\neq HE$，故②错误. 连接 $AC$ 交 $BD$ 于点 $J$. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形，$AB=3$，所以 $AJ\perp BD$，所以 $AJ=BJ=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 因为 $AF=FH$，$AF\perp FH$，所以 $\angle FAJ+\angle AFG=90°=\angle AFJ+\angle HFG$，所以 $\angle FAJ=\angle HFG$. 因为 $GH\perp BD$，所以 $\angle AJF=\angle HGF=90°$，所以 $\triangle AFJ\cong\triangle FHG$，所以 $FG=AJ=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，故③正确. 因为 $E$ 是动点，所以 $F$ 也是动点，所以 $AF$ 的长度是变化的，所以 $FH$ 的长度也是变化的，故④错误.



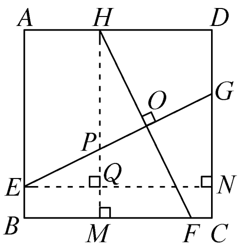

**3.** **解**：(1) $AE=BF$

(2) 相等. 证明如下：

如图，设 $HF$ 与 $EG$ 交于点 $O$，过点 $H$ 作 $HM\perp BC$ 于点 $M$，交 $EG$ 于点 $P$，过点 $E$ 作 $EN\perp CD$ 于点 $N$，交 $HM$ 于点 $Q$. 易得 $HM\perp EN$，$HM=EN$，所以 $\angle HOP=\angle EQP=90°$. 因为 $\angle HPO=\angle EPQ$，所以 $\angle MHF=\angle NEG$. 又因为 $\angle HMF=\angle ENG$，所以 $\triangle HMF\cong\triangle ENG$(ASA)，所以 $HF=EG$.

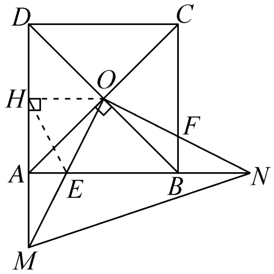
(3) $2\sqrt{5}$　**提示**：连接 $AE$. 由折叠的性质，得

$AE\perp MN$，由(2)可得 $AE=MN$. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形，$E$ 是边 $CD$ 的中点，所以 $DE=\frac{1}{2}DC=2$，$AD=4$，$\angle D=90^\circ$，所以 $AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=2\sqrt{5}$，所以 $MN=2\sqrt{5}$.




**4.** (1) **证明**：因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $\angle OAB=\angle OBA=45^\circ$，$\angle AOB=90^\circ$，$\angle DAB=\angle ABC=90^\circ$，$OA=OB$. 因为 $\angle EOF=90^\circ$，所以 $\angle AOM=90^\circ-\angle MOB=\angle BON$，$\angle OAM=\angle OAB+\angle BAM=45^\circ+90^\circ=135^\circ=180^\circ-\angle OBA=\angle OBN$. 所以 $\triangle AOM\cong\triangle BON$(ASA)，所以 $OM=ON$.

(2) **解**：如图，过点 $O$ 作 $OH\perp AD$ 于点 $H$. 因为正方形的边长为 4，所以 $OH=HA=2$. 连接 $EH$. 因为 $OH\perp DA$，$E$ 为 $OM$ 的中点，所以 $EH=EM=OE$. 因为 $\angle DAB=90^\circ$，所以 $AM=HA=2$，所以 $HM=4$，所以 $OM=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，所以 $MN^2=2OM^2=2\times(2\sqrt{5})^2=40$，所以 $MN=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$.




**5.** **解**：(1) $EAF$　$\triangle EAF$　$GF$

(2) $DE+BF=EF$. 证明如下：

假设 $\angle BAD$ 的度数为 $m^\circ$. 如图 1，将 $\triangle ADE$ 绕点 $A$ 顺时针旋转 $m^\circ$ 得到 $\triangle ABG$，此时 $AB$ 与 $AD$ 重合. 由旋转可得 $AB=AD$，$BG=DE$，$AG=AE$，$\angle 1=\angle 2$，$\angle ABG=\angle D=90^\circ$，所以 $\angle ABG+\angle ABF=90^\circ+90^\circ=180^\circ$. 因此，点 $G$，$B$，$F$ 在同一条直线上. 因为 $\angle EAF=\frac{1}{2}m^\circ$，所以 $\angle 2+\angle 3=\angle BAD-\angle EAF=m^\circ-\frac{1}{2}m^\circ=\frac{1}{2}m^\circ$. 因为 $\angle 1=\angle 2$，所以 $\angle 1+\angle 3=\frac{1}{2}m^\circ$. 即 $\angle GAF=\angle EAF$. 又因为 $AG=AE$，$AF=AF$，所以 $\triangle GAF\cong\triangle EAF$. 所以 $GF=EF$. 又因为 $GF=BG+BF=DE+BF$，所以 $DE+BF=EF$.

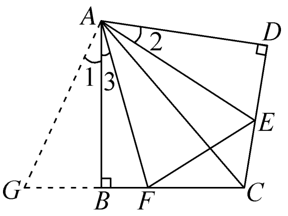



图 1

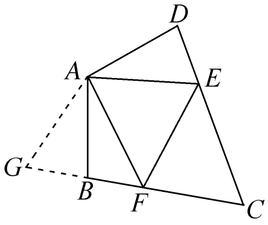
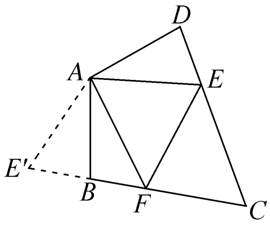



图 2

(3) 当 $\angle B$ 与 $\angle D$ 互补时，可使得 $DE+BF=EF$.　**提示**：如图，将 $\triangle AEF$ 沿 $AF$ 翻折得到 $\triangle AE'F$，连接 $BE'$，所以 $EF'=EF$，$AE'=AE$，$\angle E'AF=\angle EAF$. 因为 $\angle EAF=\frac{1}{2}\angle DAB$，所以 $\angle EAF=\angle BAF+\angle EAD$. 因为 $\angle E'AF=\angle BAF+\angle E'AB$，所以 $\angle E'AB=\angle EAD$. 又因为 $AB=AD$，所以 $\triangle E'AB\cong\triangle EAD$，所以 $\angle ABE'=\angle D$，$BE'=DE$，所以 $EF'=EF=DE+BF=BE'+BF$，所以点 $E'$，$B$，$F$ 在同一条直线上，所以 $\angle ABE'+\angle ABF=180^\circ$，所以 $\angle D+\angle ABF=180^\circ$.




**6.** (1) $3\sqrt{2}$　45

(2) ①**证明**：如图 1，过点 $E$ 作 $EM\perp BC$ 于点 $M$，$EN\perp CD$ 于点 $N$，则四边形 $EMCN$ 为矩形. 因为 $\angle ACB=45^\circ$，所以 $\triangle EMC$ 为等腰直角三角形，所以 $EM=CM$，所以矩

形 $EMCN$ 为正方形，所以 $EM=EN$，$\angle EMF=\angle END=\angle MEN=90^\circ$，所以 $\angle MEF+\angle FEN=90^\circ$. 因为四边形 $DEFG$ 为矩形，所以 $\angle DEF=90^\circ$，所以 $\angle NED+\angle FEN=90^\circ$，所以 $\angle MEF=\angle NED$，所以 $\triangle MEF\cong\triangle NED$（ASA），所以 $EF=ED$，所以矩形 $DEFG$ 是正方形.

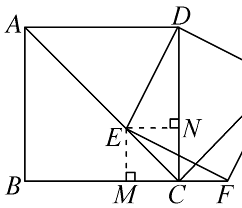


**图 1**

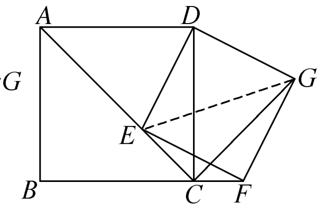


**图 2**

②**解**：如图 2，连接 $EG$. 因为四边形 $ABCD$ 和四边形 $DEFG$ 都是正方形，所以 $AD=CD$，$DE=DG$，$\angle ADC=\angle EDG=90^\circ$，$\angle DAE=\angle ACD=45^\circ$，所以 $\angle ADE+\angle EDC=90^\circ=\angle EDC+\angle CDG$，所以 $\angle ADE=\angle CDG$，所以 $\triangle ADE\cong\triangle CDG$（SAS），所以 $AE=CG=2\sqrt{2}$，$\angle DCG=\angle DAE=45^\circ$，所以 $\angle ECG=\angle ACD+\angle DCG=90^\circ$. 因为 $AC=3\sqrt{2}$，所以 $EC=AC-AE=\sqrt{2}$. 在 Rt$\triangle ECG$ 中，由勾股定理，得 $EG=\sqrt{EC^2+CG^2}=\sqrt{10}$. 在 Rt$\triangle DEG$ 中，由勾股定理，得 $DE^2+DE^2=EG^2$，所以 $DE=\sqrt{5}$.

(3) **解**：$\angle EFC$ 的度数为 $35^\circ$或 $125^\circ$.

**提示**：①如图 3，当 $\angle ADE=35^\circ$时，此时点 $F$ 在线段 $BC$ 上. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $\angle DAE=\angle ECF=45^\circ$，所以 $\angle DEC=\angle DAE+\angle ADE=80^\circ$. 因为 $EF\perp DE$，所以 $\angle DEF=90^\circ$，所以 $\angle CEF=10^\circ$，所以 $\angle EFC=180^\circ-\angle ECF-\angle CEF=125^\circ$. ②如图 4，当 $\angle CDE=35^\circ$时，此时点 $F$ 在 $BC$ 的延长线上. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $\angle DCE=45^\circ$，$\angle DCF=90^\circ$，所以 $\angle DEC=180^\circ-\angle CDE-\angle DCE=100^\circ$，$\angle ECF=\angle DCE+\angle DCF=135^\circ$. 因为 $EF\perp DE$，所以 $\angle DEF=90^\circ$，所以 $\angle CEF=10^\circ$，所以 $\angle EFC=180^\circ-\angle CEF-\angle ECF=35^\circ$. 综上所述 $\angle EFC$ 的度数为 $125^\circ$或 $35^\circ$.

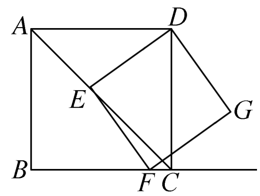


**图 3**

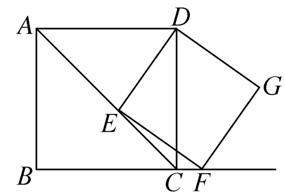


**图 4**

**7. 解**：(1) $DE=FG$. 理由如下：

如图 1，将线段 $FG$ 沿 $DA$ 方向平移得到线段 $HB$，点 $F$，$G$ 分别与点 $H$，$B$ 对应，连接 $BD$，则 $FG=HB$，$HB/\!/FG$. 设 $DE$ 与 $HB$ 交于点 $K$. 所以 $\angle EKB=\angle EMG=60^\circ$. 所以 $\angle EDB+\angle DBH=60^\circ$. 因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $AB=AD$. 因为 $\angle A=60^\circ$，所以 $\triangle ABD$ 为等边三角形. 所以 $\angle A=\angle ADB=60^\circ$，$AD=DB$. 所以 $\angle EDB+\angle ADE=60^\circ$. 所以 $\angle ADE=\angle DBH$. 又因为 $AD=DB$，$\angle A=\angle BDH$，所以 $\triangle ADE\cong\triangle DBH$（ASA）. 所以 $DE=BH$. 所以 $DE=FG$.

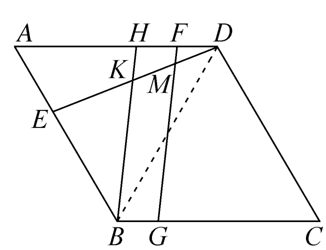


**图 1**

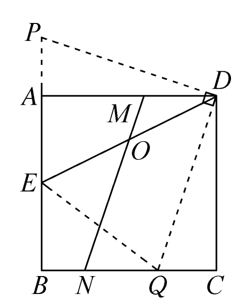


**图 2**

(2) 如图 2，过 $D$ 作 $DQ/\!/MN$ 交 $BC$ 于点 $Q$，连接 $QE$，过点 $D$ 作 $DP\perp DQ$ 交 $BA$ 的延长线于点 $P$. 因为 $DQ/\!/MN$，所以 $\angle EDQ=\angle EON=45^\circ$. 因为 $DP\perp DQ$，所以 $\angle PDQ=90^\circ$，所以 $\angle PDE=\angle EDQ=45^\circ$，$\angle ADP+\angle ADQ=90^\circ$. 因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $AD=CD=AB=4$，$\angle DAP=\angle C=\angle ADC=90^\circ$，所以 $\angle CDQ+\angle ADQ=90^\circ$，所以

$\angle CDQ=\angle ADP$，所以$\triangle CDQ\cong\triangle ADP$(ASA)，所以$DQ=DP$，$CQ=AP$. 所以$\triangle QDE\cong\triangle PDE$(SAS)，所以$EP=EQ$. 因为$AD\parallel BC$，$MN\parallel DQ$，所以四边形$MDQN$是平行四边形，所以$DQ=MN=\sqrt{17}$. 在$Rt\triangle DQC$中，$CQ=\sqrt{DQ^2-CD^2}=1$，所以$AP=CQ=1$，$BQ=BC-CQ=3$. 设$AE=x$，则$EQ=EP=AE+AP=x+1$，$BE=AB-AE=4-x$. 在$Rt\triangle BEQ$中，由勾股定理，得$BE^2+BQ^2=EQ^2$，即$(4-x)^2+3^2=(x+1)^2$，解得$x=\frac{12}{5}$，即$AE=\frac{12}{5}$. 在$Rt\triangle ADE$中，由勾股定理，得$DE=\sqrt{AE^2+AD^2}=\frac{4\sqrt{34}}{5}$.

(3) $AG+EF$的最小值为$4\sqrt{5}$. **提示**：如图3，线段$FG$沿$FE$方向平移得到线段$EP$，则$EF=PG$，$FG=EP$，连接$AP$交$CD$于点$G'$，则$AG+PG\geqslant AP$，即$AG+EF\geqslant AP$. 当$A,G,P$三点共线时(即点$G$在点$G'$的位置时)，$AG+EF$取得最小值. 过点$P$作$BC$的垂线，分别交$BC$，$AD$的延长线于点$Q,N$. 因为$FG\perp AE$，$EP\parallel FG$，所以$EP\perp AE$. 由【问题情境】可得$FG=AE$，所以$AE=FG=EP$. 因为$BC=AB=6$，$CE=2BE$，所以$BE=2$，$CE=4$. 由勾股定理，得$AE=2\sqrt{10}$. 因为$AE=EP$，$EP\perp AE$，所以$\triangle AEP$是等腰直角三角形. 所以$AP=\sqrt{2}AE=4\sqrt{5}$. 所以$AG+EF$的最小值为$4\sqrt{5}$.

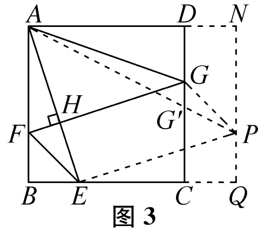


图3

## 课时训练22　三角形的中位线

**【基础巩固】**

**1.** C　**2.** A

**3.** C　**提示**：因为$Rt\triangle ABC$中，$AC=BC=4$，所以$\triangle ABC$是等腰直角三角形，所以$AB=\sqrt{2}AC=4\sqrt{2}$. 因为$D,E$分别是边$BC,AC$的中点，所以$DE$是$\triangle ABC$的中位线，所以$DE=\frac{1}{2}AB=2\sqrt{2}$，$DE\parallel AB$，所以$\angle DFB=\angle ABF$. 因为$BF$平分$\angle ABC$，所以$\angle DBF=\angle ABF$，所以$\angle DBF=\angle DFB$，所以$DF=DB$. 因为$BD=\frac{1}{2}BC=2$，所以$DF=2$. 所以$EF=DE-DF=2\sqrt{2}-2$.

**4.** $\frac{13}{2}$

**5.** 3　**提示**：连接$AE$. 因为四边形$ABCD$为菱形，所以$AB=AD=4\sqrt{3}$. 因为$G,H$分别是$AF,EF$的中点，所以$GH$是$\triangle AEF$的中位线，所以$GH=\frac{1}{2}AE$. 当$AE\perp BC$时，$AE$的长最小，即$GH$的长最小. 此时$\angle AEB=90^\circ$. 因为$\angle B=60^\circ$，所以$\angle BAE=30^\circ$，所以$BE=\frac{1}{2}AB=2\sqrt{3}$，所以$AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=6$，所以$GH=\frac{1}{2}AE=3$，所以$GH$长的最小值是3.

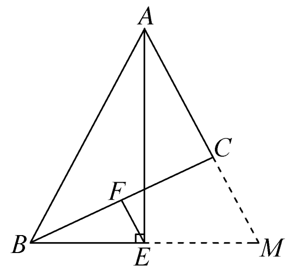
**6.** $0<S\leqslant 2$　**提示**：过点$N$作$NH\perp PM$于点$H$. 由条件可知，$PM\parallel AB$，$PN\parallel CD$，$PN=\frac{1}{2}CD=2$，$PM=\frac{1}{2}AB=2$. 因为$NH\perp PM$，$AB$与$CD$不平行，所以$0<NH\leqslant PN$，即$0<NH\leqslant 2$. 因为$S=\frac{1}{2}PM\cdot NH=NH$，所以$0<S\leqslant 2$.

**7.** **证明**：延长$BF$至点$G$，使得$OG=BO$，连接$AG,CG$. 因为$AE$是$\triangle ABC$的中线，所以$E$是$BC$的中点. 因为$OG=BO$，所以$OE$是$\triangle BCG$的中位线，所以$OE\parallel CG$，即$OA\parallel CG$. 同理可证，$OC\parallel AG$，所以四边形$OAGC$是平行四边形，所以$AF=CF$，所以$BF$是$\triangle ABC$的中线.

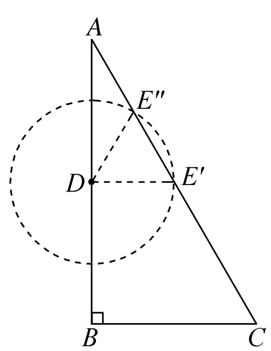
**【拓展提优】**

**1.** A　**提示**：如图，延长$AC,BE$交于点$M$. 由$AE$平分$\angle CAB$，$AE\perp BE$，得$\angle ABE=\angle AME$，所以$AM=AB=10$，$BE=EM$. 又因为$F$是$BC$的中点，所以$EF$为$\triangle BCM$的中位线，所以$EF=\frac{1}{2}CM=$

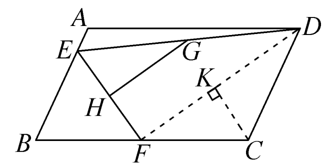
$\frac{1}{2}(AM-AC)=2$.




**2.** D　**提示**:由条件,得 $AC=4$,$AB=2\sqrt{3}$,$AD=\sqrt{3}$. 因为$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$,所以$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{DE}{2}$,所以 $DE=1$. 因为点 $D$ 到边 $AC$ 的距离为$\frac{1}{2}AD=\frac{\sqrt{3}}{2}$,而$\frac{\sqrt{3}}{2}<1$,所以以点 $D$ 为圆心,$DE$ 的长为半径画圆,该圆与边 $AC$ 有两个交点,即点 $E$ 的位置有两个. 如图,由三角形中位线的性质可知,其中一个点 $E$(记为点 $E'$)的位置为 $AC$ 的中点,此时 $AE'=2$;由画的圆可知,另一个点 $E$(记为点 $E''$)的位置在 $AC$ 中点(点 $E'$)的上方,因为 $\angle DE'A=\angle C=60°$,$DE'=DE''$,所以 $\triangle DE'E''$为等边三角形,所以 $E'E''=DE'=1$,所以 $AE''=AE'-E'E''=1$. 综上所述,$AE$ 的长为 1 或 2.

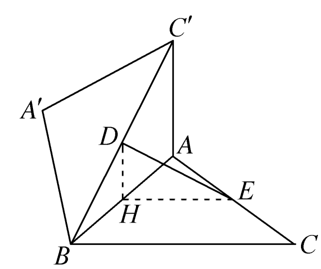



**3.** C　**提示**:如图,连接 $DF$,过点 $C$ 作 $CK\perp DF$ 于点 $K$. 因为 $G$,$H$ 分别是 $DE$,$EF$ 的中点,所以 $GH=\frac{1}{2}DF$. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以$\angle FCD=\angle A=120°$,$BC=AD=4$,$CD=AB=2$. 因为 $F$ 是$BC$ 的中点,所以 $CF=\frac{1}{2}BC=2=CD$. 因为 $CK\perp DF$,所以$\angle FCK=\angle DCK=\frac{1}{2}\angle FCD=60°$,$DF=2FK$,所以 $\angle CFK=30°$,所以 $CK=\frac{1}{2}CF=1$. 在 Rt$\triangle CFK$ 中,$FK=\sqrt{CF^2-CK^2}=\sqrt{3}$,所以 $DF=2FK=2\sqrt{3}$,所以 $GH=\frac{1}{2}DF=\sqrt{3}$.

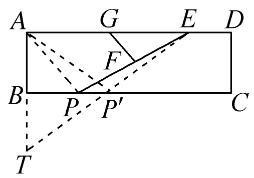



**4.** $\frac{5}{2}$　**提示**:因为 $BN$ 平分$\angle ABC$,$BN\perp AE$,所以$\angle NBA=\angle NBE$,$\angle BNA=\angle BNE=90°$. 所以$\triangle BNA\cong\triangle BNE$,所以 $BA=BE$,$AN=EN$. 同理可得 $AC=DC$,$AM=DM$. 所以 $MN$ 是$\triangle ADE$ 的中位线,所以 $MN=\frac{1}{2}DE$. 因为 $BE+CD=AB+AC=19-BC=19-7=12$,所以 $DE=BE+CD-BC=12-7=5$. 所以 $MN=\frac{1}{2}DE=\frac{5}{2}$.

**5.** 13　**提示**:如图,取 $AB$ 的中点 $H$,连接 $DH$,$EH$,则 $DH$,$EH$ 分别为$\triangle ABC'$,$\triangle ABC$ 的中位线,所以 $DH\parallel C'A$,$EH\parallel BC$,$DH=\frac{1}{2}C'A=5$,$EH=\frac{1}{2}BC=12$. 由 $C'A\perp BC$,得 $DH\perp HE$,所以 $DE=\sqrt{DH^2+EH^2}=13$.



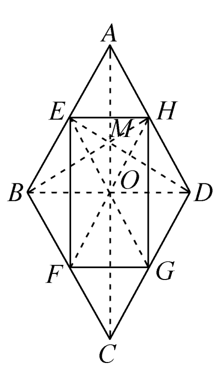

**6.** 5　**提示**:如图,连接 $PA$. 由题意,得 $AG=EG$,$EF=FP$,所以 $GF=\frac{1}{2}PA$. 所以 $GF+EF=\frac{1}{2}(PA+PE)$. 作点 $A$ 关于 $BC$ 的对称点 $T$,连接 $ET$ 交 $BC$ 于点 $P'$. 当点 $P$ 与点 $P'$重合时,$PA+PE$ 的值最小,最小值为 $ET$ 的长. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形,所以$\angle EAT=90°$. 因为 $BT=AB=3$,所以 $AT=6$. 因为 $AD=10$,$DE=2$,所以 $AE=8$. 所以 $ET=\sqrt{AE^2+AT^2}=10$,所以 $GF+EF$ 的最小值为$\frac{1}{2}ET=\frac{1}{2}\times10=5$.




**7.** (1) **证明**:连接 $AC$,$BD$. 由条件可知,$EH$ 是 $\triangle ABD$ 的中位线,所以 $EH\parallel BD$,$EH=\frac{1}{2}BD$. 同理,$FG\parallel BD$,$FG=\frac{1}{2}BD$. 所以 $EH\parallel FG$,$EH=FG$,所以四边形 $EFGH$ 是平行四边形. 因为四边形 $ABCD$ 是菱形,所以 $AC\perp BD$. 因为 $EF\parallel AC$,$EH\parallel BD$,所以 $EF\perp EH$,所以▱$EFGH$ 是矩形.

(2) **解**:如图,四边形 $EFGH$ 即为所求.

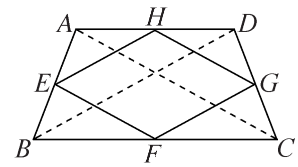
**提示**:菱形中内接矩形,整个图形既是一个轴对称图形也是一个中心对称图形,对称中心为菱形对角线的交点,也是矩形对角线的交点,且该点在对称轴上. 连接 $AC$,$BD$ 交于点 $O$,以直线 $AC$ 为对称轴,在 $AO$ 上任取一点 $M$,作射线 $BM$,$DM$,分别交 $AD$ 于点 $H$,交 $AB$ 于点 $E$,作射线 $HO$,$EO$,分别交 $BC$ 于点 $F$,交 $CD$ 于点 $G$,连接 $EH$,$HG$,$GF$,$FE$,则四边形 $EFGH$ 即为所求.




## 课时训练 23 梯形

**【基础巩固】**

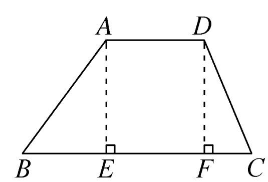
**1.** C **提示**:如图,在等腰梯形 $ABCD$ 中,$AD\parallel BC$,$AB=CD$,$E$,$F$,$G$,$H$ 分别是各边的中点,连接 $AC$,$BD$,所以 $EF=\frac{1}{2}AC$,$FG=\frac{1}{2}BD$,$GH=\frac{1}{2}AC$,$EH=\frac{1}{2}BD$. 易证 $\triangle ADC\cong\triangle DAB$,所以 $AC=BD$,所以 $EF=FG=GH=EH$,所以四边形 $EFGH$ 是菱形.




**2.** C **3.** C

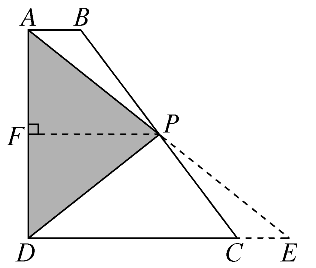
**4.** 3.5 **提示**:设平移的距离为 $x$,梯形的高为 $h$,则 $AE=DH=BF=CG=x$. 根据题意,得 $\frac{1}{2}(ED+FC)\cdot h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(AH+BG)\cdot h$,所以 $6-x+8-x=\frac{1}{3}(6+x+8+x)$,解得 $x=3.5$.

**5.** 10 或 8 **提示**:如图,过点 $A$ 作 $AE\perp BC$ 于点 $E$,过点 $D$ 作 $DF\perp BC$ 于点 $F$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中,因为 $\angle B=60^\circ$,所以 $\angle BAE=30^\circ$,所以 $BE=\frac{1}{2}AB=4$ cm,所以 $AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=4\sqrt{3}$ cm. 易证四边形 $AEFD$ 是矩形,所以 $EF=AD=5$ cm,$DF=AE=4\sqrt{3}$ cm. 在 $\mathrm{Rt}\triangle CDF$ 中,根据勾股定理,得 $CF=\sqrt{CD^2-DF^2}=1$ cm. 当 $\angle C$ 为锐角时,$BC=4+5+1=10$(cm);当 $\angle C$ 为钝角时,$BC=4+5-1=8$(cm). 所以 $BC$ 的长为 10 cm 或 8 cm.



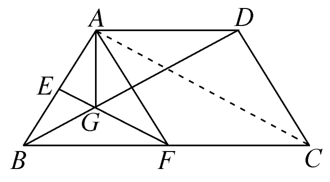

**6.** 20 **提示**:由题图象可知,$AB+BC=12$,$AB+BC+CD=20$,所以 $CD=8$. 根据题意可知,当点 $P$ 运动到点 $C$ 时,$\triangle PAD$ 的面积最大,$S_{\triangle PAD}=\frac{1}{2}AD\cdot DC=32$. 由题图象可得 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD=8$,所以 $\dfrac{\frac{1}{2}AD\cdot DC}{\frac{1}{2}AD\cdot AB}=\frac{32}{8}=4$,所以 $DC=4AB$. 所以 $AB=2$,所以 $AD=8$. 所以当点 $P$ 运动到 $BC$ 的中点时,如图,延长 $AP$,$DC$,交于点 $E$,过点 $P$ 作 $PF\perp AD$ 于点 $F$. 易证 $\triangle ABP\cong\triangle ECP$,所以 $S_{梯形ABCD}=S_{\triangle ADE}$,$AP=EP$,所以 $S_{\triangle ADE}=2S_{\triangle ADP}$. 所以 $S_{\triangle ADP}=\frac{1}{2}S_{梯形ABCD}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(AB+CD)\cdot AD=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(2+$

8)×8=20.




**7. 证明:**(1) 如图,连接 $AC$. 因为四边形 $ABCD$ 为等腰梯形,所以 $AB=DC$,$\angle ABC=\angle DCB$,$BC=CB$,所以$\triangle ABC\cong\triangle DCB$(SAS),所以$\angle ACB=\angle DBC$. 因为 $E$,$F$ 分别是边 $AB$,$BC$ 的中点,所以 $EF$ 是$\triangle ABC$ 的中位线,所以 $EF/\!/AC$,所以$\angle EFB=\angle ACB$,所以$\angle DBC=\angle EFB$,所以 $BG=GF$.

(2) 因为 $F$ 是边 $BC$ 的中点,所以 $BC=2FC$. 因为 $BC=2AD$,所以 $AD=FC$. 因为 $AD/\!/FC$,所以四边形 $AFCD$ 是平行四边形. 因为 $AG=GF$,$BG=GF$,所以 $AG=BG$. 因为 $E$ 是边 $AB$ 的中点,所以 $EF\perp AB$,所以 $EF$ 是 $AB$ 的垂直平分线,所以 $AF=BF=FC$,所以▱$AFCD$ 是菱形.

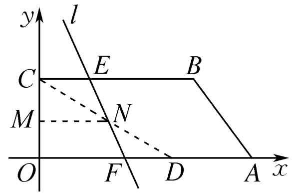



**【拓展提优】**

**1.** C **提示:**若 $AB=CD$,则四边形 $ABCD$ 可能是矩形,故选项 A 错误;若$\angle DBC=\angle ACB$,则四边形 $ABCD$ 可能是正方形,故选项 B 错误;若$\frac{AO}{OB}=\frac{CO}{OD}$,则四边形 $ABCD$ 一定是矩形,故选项 C 正确;若 $AC\perp BD$ 且 $AO=OD$,则四边形 $ABCD$ 可能是等腰梯形,故选项 D 错误.

**2.** D **提示:**因为四边形 $ABCD$ 是菱形,所以 $CD=AD=AB=5$,$BC/\!/AD$,$\angle ADB=\angle BDC$,$AC\perp BD$,$OB=OD=\frac{1}{2}BD=4$,所以 $OA=3$. 由翻折的性质,可知 $AF=AD$,$\angle DAE=\angle EAF$,所以 $AF=CD$,所以四边形 $AFCD$ 是等腰梯形,所以$\angle CDA=\angle FAD$,所以$\angle EAD=\frac{1}{2}\angle FAD=\frac{1}{2}\angle CDA=\angle EDA$,所以 $EA=ED$. 设 $EA=ED=x$,则 $OE=4-x$. 在 Rt$\triangle AOE$ 中,$EA^2=OA^2+OE^2$,即 $x^2=3^2+(4-x)^2$,解得 $x=\frac{25}{8}$,所以 $DE$ 的长为$\frac{25}{8}$.

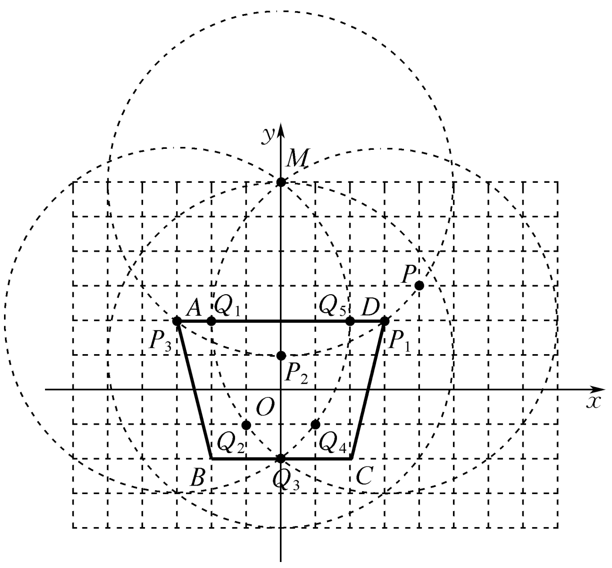
**3.** $\sqrt{10}$ **提示:**如图,设 $M$,$N$ 分别是 $OC$,$EF$ 的中点. 因为点 $O(0,0)$,$A(7,0)$,$B(5,2)$,$C(0,2)$,所以 $OA=7$,$OC=2$,$BC=5$,所以 $S_{梯形ABCO}=\frac{1}{2}(BC+AO)\cdot OC=\frac{1}{2}\times(5+7)\times2=12$. 若动直线 $l$ 将梯形 $ABCO$ 分为面积相等的两部分,则 $S_{梯形OCEF}=\frac{1}{2}S_{梯形ADCO}=6$,所以$\frac{1}{2}(CE+OF)\cdot OC=6$,所以 $CE+OF=6$. 连接 $CN$ 并延长交 $OA$ 于点 $D$. 易证$\triangle CEN\cong\triangle DFN$,所以 $MN=\frac{1}{2}OD=\frac{1}{2}(OF+FD)=\frac{1}{2}(OF+CE)=3$. 所以 $N$ 是一个定点. 若要点 $C$ 到动直线 $l$ 的距离最大,则 $CN\perp$ 直线 $l$. 此时点 $C$ 到动直线 $l$ 的距离的最大值就是 $CN$ 的长. 在 Rt$\triangle CMN$ 中,$CM=1$,$MN=3$,$CN=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.




**4.** 1 或 3.5 **提示:**因为四边形 $ABCD$ 是梯形,所以 $PD/\!/EQ$,所以当 $PD=EQ$ 时,以 $P$,$Q$,$E$,$D$ 为顶点的四边形是平行四边形. 设运动时间为 $t$,则 $AP=t$,$PD=6-t$. 当点 $Q$ 运动到点 $E$ 和点 $C$ 之间,则 $EQ=\frac{16}{2}-3t$,所以$\frac{16}{2}-3t=6-t$,解得 $t=1$. 当点 $Q$ 运动到点 $E$ 和点 $B$ 之间,$EQ=3t-\frac{16}{2}$,所以 $3t-\frac{16}{2}=6-t$,解得 $t=3.5$.

**5.** 5 **提示:**因为点 $P(4,3)$,直线 $l$ 过定点 $M(0,6)$,所以 $PM=\sqrt{4^2+(3-6)^2}=5$. 依题意可知,对称点 $P'$的轨迹在以点 $M$ 为圆心,$MP$ 为半径的圆上,如

图. 因为点 $P'$ 恰好落在梯形 $ABCD$ 内(包含边界),所以满足题意的对称点 $P'$ 有三个,分别为图中的点 $P_1$, $P_2$, $P_3$. 因为 $P'Q$ 是长度为 5 的整点线段,且点 $Q$ 为梯形 $ABCD$ 内一点(包含边界),所以分别以点 $P_1$, $P_2$, $P_3$ 为圆心,5 为半径画圆,与梯形 $ABCD$ 内(包括边界)相交于整点,即为图中点 $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, $Q_4$, $Q_5$. 所以当点 $P'$ 恰好落在梯形 $ABCD$ 内(包含边界),且 $P'Q$ 是长度为 5 的整点线段时,这样的点 $Q$ 共有 5 个.




**6.** (1) **证明**:过点 $D$ 作 $DM /\!/ AB$,交 $BC$ 于点 $M$. 因为四边形 $ABCD$ 是梯形,所以 $AD /\!/ BM$,所以四边形 $ABMD$ 是平行四边形,所以 $\angle ABD=\angle BDM$. 因为 $BD$ 平分 $\angle ABC$,所以 $\angle ABD=\angle CBD$. 所以 $\angle BDM=\angle CBD$,所以 $BM=MD$. 所以四边形 $ABMD$ 是菱形,所以 $AD=BM=DM$. 因为 $DB\perp CD$,所以 $\angle BDC=90°$,所以 $\angle BDM+\angle MDC=90°=\angle CBD+\angle C$,所以 $\angle MDC=\angle C$,所以 $DM=MC$,所以 $BM=MC$,所以 $BC=2BM=2AD$.

(2) **解**:①由(1)可知四边形 $ABMD$ 是菱形. 设 $AD=BM=DM=x$,则 $ME=BE-BM=6-x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle MDE$ 中,$DE^2+ME^2=DM^2$,即 $m^2+(6-x)^2=x^2$,所以 $x=\dfrac{m^2}{12}+3$,所以 $AD=\dfrac{m^2}{12}+3$,$BC=2AD=\dfrac{m^2}{6}+6$,所以 $S_{梯形ABCD}=\dfrac{1}{2}(AD+BC)\cdot DE=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m^2}{12}+3+\dfrac{m^2}{6}+6\right)\cdot m=\dfrac{m^3}{8}+\dfrac{9}{2}m$,所以梯形的面积是 $\dfrac{m^3}{8}+\dfrac{9}{2}m$.

②$\triangle BGF$ 能成为直角三角形. 理由如下:因为 $\angle BDC=90°$,所以 $\angle ABD=\angle DBC<90°$. 如图 1,当 $\angle BGF=90°$ 时,因为 $F$ 是 $BD$ 的中点,$\angle DEB=90°$,所以 $EF=DF=BF$,所以 $\angle FBE=\angle FEB$,所以 $\angle GFB=\angle FBE+\angle FEB=2\angle FBE=2\angle ABD$. 因为 $\angle ABD+\angle GFB=90°$,所以 $3\angle ABD=90°$,所以 $\angle ABD=30°$,所以 $\angle BDM=\angle DBC=\angle ABD=30°$. 因为 $\angle DME=\angle BDM+\angle DBC=60°$,所以 $\angle MDE=30°$,所以 $DM=2ME$,所以 $BM=2ME$. 因为 $BE=6$,所以 $3ME=6$,所以 $ME=2$,所以 $AD=BM=4$. 如图 2,当 $\angle GFB=90°$ 时,因为 $F$ 是 $DB$ 的中点,且 $DB$ 是菱形 $ABMD$ 的对角线,所以此时 $GE$ 与 $AM$ 重合,所以 $AD=BE=6$. 综上所述,$AD$ 的长是 4 或 6.

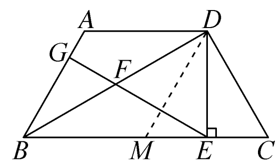



**图 1**

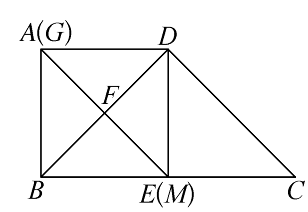
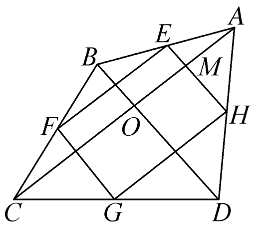



**图 2**

## 提优专题 3　中点四边形的探究

**1.** C　**提示**:如图,当 $AC\perp BD$ 时,因为 $E$, $F$, $G$, $H$ 分别是 $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ 的中点,所以 $EH /\!/ BD$,$FG /\!/ BD$,所以 $EH /\!/ FG$. 同理可得 $EF /\!/ HG$,所以四边形 $EFGH$ 是平行四边形. 因为 $AC\perp BD$,所以 $EH\perp EF$,所以四边形 $EFGH$ 是矩形. 所以顺次连接对角线垂直的四边形各边的中点所得到的四边形是矩形.




**2.** D　**提示**:连接 $AC$,$BD$.因为线段 $AB$,$BC$,$CD$,$DA$ 的中点分别为 $M$,$N$,$P$,$Q$,所以 $PQ/\!/AC$,$PQ=\frac{1}{2}AC$,$MN/\!/AC$,$MN=\frac{1}{2}AC$,$PN/\!/BD$,$PN=\frac{1}{2}BD$,$QM/\!/BD$,$QM=\frac{1}{2}BD$.

①当 $AC/\!/BD$ 时,如图1,因为 $PQ/\!/AC$,所以 $PQ/\!/BD$.因为 $PN/\!/BD$,$QM/\!/BD$,所以 $M$,$N$,$P$,$Q$ 四点共线,即四边形 $MNPQ$ 不存在.②当 $AC$ 与 $BD$ 不平行时,如图2、图3,分两种情况,点 $B$,$D$ 位于 $AC$ 异侧或点 $B$,$D$ 位于 $AC$ 同侧.易知 $PQ/\!/MN$,$PQ=MN$,$QM/\!/PN$,$QM=PN$.所以中点四边形 $MNPQ$ 是平行四边形,且其位置随着点 $D$ 位置的变化而变化,故存在无数个中点四边形 $MNPQ$ 是平行四边形.③如图4,当 $AC=BD$,且 $AC$ 与 $BD$ 不平行时,$PQ=QM$,所以▱$MNPQ$ 是菱形,且同样存在无数个中点四边形 $MNPQ$ 是菱形.④如图5,当 $AC\perp BD$(点 $B$,$D$ 不重合)时,因为 $PQ/\!/MN/\!/AC$,$QM/\!/PN/\!/BD$,$AC\perp BD$,所以 $PQ\perp PN$,所以▱$MNPQ$ 是矩形,且同样存在无数个中点四边形 $MNPQ$ 是矩形.⑤如图6,当 $AC\perp BD$,且 $AC=BD$ 时,$PQ\perp PN$,且 $PQ=PN$,所以▱$MNPQ$ 是正方形.当点 $B$,$D$ 位于 $AC$ 异侧或点 $B$,$D$ 位于 $AC$ 同侧时,均存在一个中点四边形 $MNPQ$ 是正方形.故存在两个中点四边形 $MNPQ$ 是正方形.综上所述,正确的有①②③④.

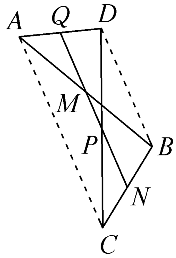



**图1**

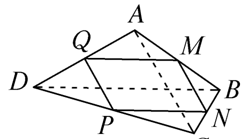



**图2**

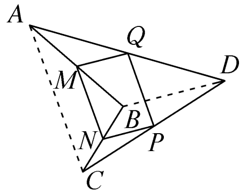



**图3**

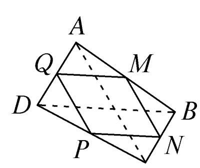



**图4**

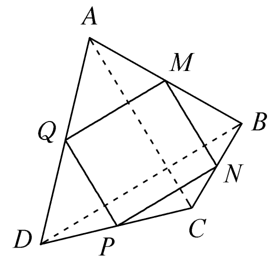



**图5**

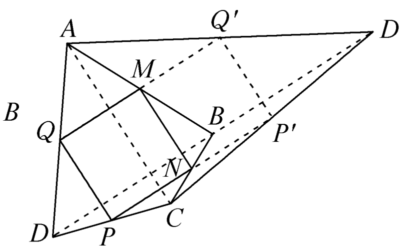



**图6**

**3.** 16　**提示**:因为在四边形 $ABCD$ 中,$E$,$F$,$G$,$H$ 分别是边 $AB$,$BC$,$CD$,$DA$ 的中点,所以 $EH=FG=\frac{1}{2}BD$,$EF=HG=\frac{1}{2}AC$.因为 $AC=8$,$BD=8$,所以四边形 $EFGH$ 的周长为 $(EH+FG)+(EF+HG)=BD+AC=8+8=16$.

**4.** **证明**:(1) 如图1,取 $AD$ 的中点 $G$,连接 $EG$,$FG$.因为 $E$,$F$ 分别为 $AB$,$CD$ 的中点,所以 $EG$,$FG$ 分别是△$ABD$ 与△$ACD$ 的中位线,所以 $EG=\frac{1}{2}BD$,$FG=\frac{1}{2}AC$,所以 $EG+FG=\frac{1}{2}(BD+AC)$.在△$EFG$ 中,因为 $EF<EG+FG$,所以 $EF<\frac{1}{2}(AC+BD)$.

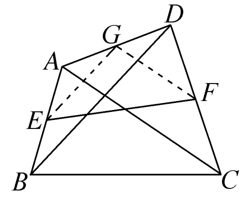



**图1**

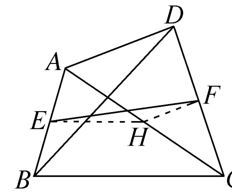



**图2**

(2) 如图2,取 $AC$ 的中点 $H$,连接 $EH$,$FH$.因为 $E$,$F$ 分别为 $AB$,$CD$ 的中点,所以 $EH$,$FH$ 分别是△$ACB$ 与△$ACD$ 的中位线,所以 $EH=\frac{1}{2}BC$,$FH=\frac{1}{2}AD$,所以 $EH+FH=\frac{1}{2}(BC+AD)$.在△$EFH$ 中,因为 $EF<EH+FH$,所以 $EF<\frac{1}{2}(AD+BC)$.

**5.** (1) **证明**:因为 $E$,$F$,$G$,$H$ 分别是 $AB$,$BC$,$CD$,$DA$ 的中点,所以 $EF$,$GH$ 分别

是$\triangle ABC$和$\triangle ACD$的中位线. 所以$EF=\frac{1}{2}AC$,$GH=\frac{1}{2}AC$,所以$EF=GH$. 同理可得$EH=FG$,所以中点四边形$EFGH$是平行四边形.

(2) 菱形　**提示:** 由(1)可知四边形$EFGH$是平行四边形. 又因为$AC=BD$,所以$EF=FG$,所以中点四边形$EFGH$是菱形.

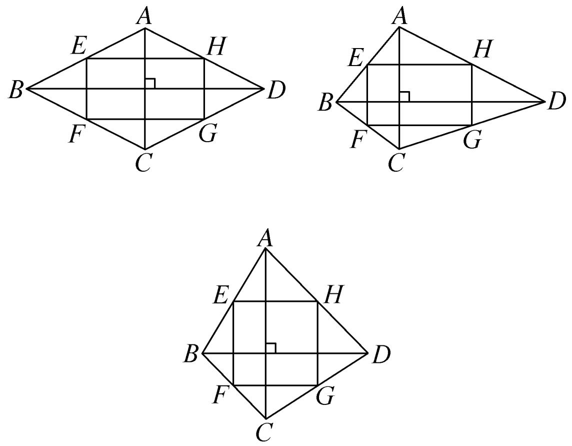
(3) 互相垂直　矩形　**提示:** 由(1)可知四边形$EFGH$是平行四边形. 又因为$AC\perp BD$,$EF/\!/AC$,$FG/\!/BD$,所以$EF\perp FG$,所以中点四边形$EFGH$是矩形.

(4) 相等且互相垂直　**提示:** 由(1)可知四边形$EFGH$是平行四边形. 因为$AC=BD$,所以$EF=FG$,所以$\square EFGH$是菱形. 又因为$AC\perp BD$,$EF/\!/AC$,$FG/\!/BD$,所以$EF\perp FG$,所以中点四边形$EFGH$是正方形.

**6. 解:**(1) 三角形中位线定理(或三角形的中位线平行于第三边,并且等于第三边的一半)

两组对边分别平行的四边形是平行四边形

(2) 如图,即为所求.(答案不唯一,只要是对角线互相垂直的四边形均可,它的瓦里尼翁平行四边形即为矩形.




(3) 瓦里尼翁平行四边形$EFGH$的周长等于四边形$ABCD$的两条对角线$AC$与$BD$长度的和,证明如下:因为点$E$,$F$,$G$,$H$分别是边$AB$,$BC$,$CD$,$DA$的中点,所以$EF=\frac{1}{2}AC$,$GH=\frac{1}{2}AC$. 所以$EF+GH=AC$. 同理$EH+FG=BD$. 所以四边形$EFGH$的周长为$EF+GH+EH+FG=AC+BD$. 即瓦里尼翁平行四边形$EFGH$的周长等于对角线$AC$与$BD$的长度之和.

# 第9章　因式分解

## 课时训练24　因式分解的概念

**【基础巩固】**

**1.** C　**2.** B　**3.** $x^2+6x+8=(x+2)(x+4)$

**4. 解:** $x^2-11x+18=x^2+(-9-2)x+(-9)\times(-2)=(x-9)(x-2)$.

**【拓展提优】**

**1.** D　**2.** ③④　**3.** 35

**4. 解:** 设另一个因式为$(x+a)$,得$2x^2+3x-k=(2x-5)(x+a)$,则$2x^2+3x-k=2x^2+(2a-5)x-5a$,所以$\begin{cases}2a-5=3,\\-5a=-k.\end{cases}$解得$a=4$,$k=20$. 故另一个因式为$(x+4)$,$k$的值为20.

## 课时训练25　提公因式法

**【基础巩固】**

**1.** B　**2.** D

**3.** D　**提示:** $(m+1)(m-1)+m-1=(m-1)(m+1+1)=(m-1)(m+2)$. 故余下的部分是$m+2$.

**4.** C

**5.** B　**提示:** $2^{2\,024}-(-2)^{2\,023}=2^{2\,024}+2^{2\,023}=2^{2\,023}\times(2+1)=3\times2^{2\,023}$.

**6.** $y^2(x-y)$　**7.** $2x+4$(答案不唯一)

**8.** $(2+a)$　**9.** 30

**10. 解:**(1) 原式$=3pq(q^2+5p^2)$.

(2) 原式$=2(a-b)(a-b-1)$.

(3) 原式$=(x-y)(2a-b)$.

(4) 原式$=2m(n-m)^2-2(n-m)^3=2(n-m)^2(m-n+m)=2(m-n)^2(2m-n)$.

**【拓展提优】**

**1.** D　**2.** D　**3.** B

**4.** C　提示：设原两位数十位上的数字为 $a$，个位上的数字为 $b$，则原两位数是 $10a+b$，交换后所得的新两位数为 $10b+a$，所以两数的和为 $11a+11b=11(a+b)$，所以所得的和一定是 11 的倍数.

**5.** $b(a-2)(b-1)$

**6.** (1) 510　(2) 428　提示：(1) 原式 $=51\times43-17\times3\times33=51\times43-51\times33=51\times(43-33)=51\times10=510$.　(2) 原式 $=4.28\times31+4.28\times29+4.28\times40=4.28\times(31+29+40)=4.28\times100=428$.

**7.** $-972$

**8.** 解：(1) 原式 $=16ab(b-3a)$.

(2) 原式 $=(a-1)(b-1)$.

(3) 原式 $=(m-n-3)(m-n)^2$.

**9.** 解：$2^{n+4}-2^n=2^n(2^4-1)=15\times2^n$. 因为 15 能被 5 整除，$2^n$ 是正整数，所以 $2^{n+4}-2^n$ 能被 5 整除.

**10.** 解：(1) $(1+x)^4$　$(1+x)^5$　$(1+x)^{n+1}$

(2) 原式 $=-(x-1)(x-1)+x(x-1)^2-x(x-1)^3+x(x-1)^4=-(x-1)^2+x(x-1)^2-x(x-1)^3+x(x-1)^4=(x-1)^2(x-1)-x(x-1)^3+x(x-1)^4=(x-1)^3-x(x-1)^3+x(x-1)^4=-(x-1)(x-1)^3+x(x-1)^4=(x-1)^4(x-1)=(x-1)^5$.

## 课时训练 26　公式法(1)

**【基础巩固】**

**1.** C　**2.** C　**3.** C　**4.** D　**5.** D　**6.** 3

**7.** (1) $9b^2$　(2) $-4a^2$　**8.** $(a+b-c)$

**9.** $\pm\frac{5}{2}$　提示：因为 $4x^2-25y^2=(2x-5y)\cdot(2x+5y)=0$，所以 $2x=5y$ 或 $2x=-5y$，所以 $\frac{x}{y}=\pm\frac{5}{2}$.

**10.** 解：(1) 原式 $=4(a+2b)(a-2b)$.

(2) 原式 $=(a+b+2)(a+b-2)$.

(3) 原式 $=[2(x+y)]^2-[3(x-y)]^2=(2x+2y+3x-3y)(2x+2y-3x+3y)=(5x-y)(5y-x)$.

(4) 原式 $=(a+b+c+a+b-c)(a+b+c-a-b+c)=2c(2a+2b)=4c(a+b)$.

**【拓展提优】**

**1.** B

**2.** B　提示：原等式应为 $x^4-16=(x^2+4)(x+2)(x-2)$，所以式子中“■”“▲”对应的数字是 16，2.

**3.** C　提示：原式 $=(3a+5+2)(3a+5-2)=3(3a+7)(a+1)$，所以对于任意整数 $a$，多项式 $(3a+5)^2-4$ 都能被 $a+1$ 整除.

**4.** $\frac{3}{4}$　提示：由题意，得 $\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(a-\frac{1}{2}\right)=a^2-\frac{1}{4}=a^2-\frac{1}{3}k$，所以 $\frac{1}{3}k=\frac{1}{4}$，解得 $k=\frac{3}{4}$.

**5.** 4　提示：$x^2-y^2-4y=(x+y)(x-y)-4y=2(x+y)-4y=2x-2y=2(x-y)=4$.

**6.** ③④

**7.** (1) 500　(2) 3.16　提示：(1) $\frac{1\ 000^2}{252^2-248^2}=\frac{1\ 000\times1\ 000}{(252+248)(252-248)}=\frac{1\ 000\times1\ 000}{500\times4}=500$.

(2) 原式 $=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times4.16^2-2^2\times0.54^2=\left(\frac{1}{2}\times4.16\right)^2-(2\times0.54)^2=2.08^2-1.08^2=(2.08+1.08)\times(2.08-1.08)=3.16$.

**8.** 4

**9.** 解：(1) $(2n+1)^2-1=(2n+1+1)(2n+1-1)=(2n+2)\cdot2n=4n(n+1)$.

(2) 所有“白银数”的最大公约数是 8. 理由如下：因为 $n$ 是正整数，所以 $n$ 与 $n+1$ 必有一个为偶数，所以 $n(n+1)$ 必是 2 的倍数，所以 $4n(n+1)$ 必是 8 的倍数，所以所有“白银数”的最大公约数是 8.

**10.** 解：(1) ①$x^2-xy+4x-4y=(x^2-xy)+(4x-4y)=x(x-y)+4(x-y)=(x-y)(x+4)$.

②$x^2-y^2+4y-4=x^2-(y^2-4y+4)=x^2-(y-2)^2=(x+y-2)(x-y+2)$.

(2) $\triangle ABC$ 是等腰三角形. 理由如下：

因为 $a^2-ac-b^2+bc=(a^2-b^2)-(ac-bc)=(a+b)(a-b)-c(a-b)=(a-b)\cdot(a+b-c)=0$,而由三角形的三边关系可知 $a+b>c$,即 $a+b-c\neq0$,所以 $a-b=0$,即 $a=b$.所以△$ABC$ 是等腰三角形.

## 课时训练 27　公式法(2)

**【基础巩固】**

**1.** D　**2.** B　**3.** B

**4.** A　**提示:**由 $a+b=3$,得 $2a^2+4ab+2b^2-6=2(a^2+2ab+b^2)-6=2(a+b)^2-6=2\times3^2-6=12$.

**5.** C　**提示:**$125^2-50\times125+25^2=(125-25)^2=10\ 000$.

**6.** D

**7.** (1) $-30ab$　(2) $-y^2$　$2x-y$

**8.** $(a+b)^2$　**9.** $3a+2b$

**10.** **解:**(1) 原式 $=(m-2n)^2$.

(2) 原式 $=(x+1)^2$.

(3) 原式 $=(m-n-2)^2$.

(4) 原式 $=[2(a+1)+5(b-1)]^2=(2a+5b-3)^2$.

**【拓展提优】**

**1.** C

**2.** B　**提示:**$-a^2+2a-1=-(a-1)^2\leqslant0$.

**3.** D　**提示:**因为 $M-N=3x^2-5x+2-(2x^2-3x+1)=x^2-2x+1=(x-1)^2\geqslant0$,所以 $M\geqslant N$.

**4.** A　**提示:**设 $BC=a$,$CG=b$,由题意,得 $S_1=a^2$,$S_2=b^2$,所以 $a^2+b^2=20$,又因为 $BG=BC+CG=a+b=6$,所以 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=36$,所以 $ab=8$,所以 $S_{阴影}=\frac{1}{2}ab=4$.

**5.** 27　**提示:**因为 $2a^2+b^2-2ab-6a\leqslant-9$ 可化为 $(a^2+b^2-2ab)+(a^2-6a+9)\leqslant0$,即 $(a-b)^2+(a-3)^2\leqslant0$,而 $(a-b)^2\geqslant0$,$(a-3)^2\geqslant0$,所以 $a-b=0$,$a-3=0$,所以 $a=b=3$.所以 $a^b=3^3=27$.

**6.** (1) $4\times10^6$　(2) 100　**提示:**(1) 原式 $=2\ 023^2-2\times2\ 023\times23+23^2=(2\ 023-23)^2=2\ 000^2=4\times10^6$.(2) 原式 $=\left(7\frac{3}{4}+2\frac{1}{4}\right)^2=10^2=100$.

**7.** (1) 2　**提示:**先将原式分解因式,再把 $x-y=1$,$xy=2$ 代入,得原式 $=xy(x-y)^2=2\times1^2=2$.

(2) 2　**提示:**原式 $=\frac{1}{2}(a-b)^2=2$.

**8.** **解:**原式 $=a^2+2a+1-a^2+2a-1+a^2-9-a^2-2a=2a-9$.因为 $a^2-14a+49=25$,所以 $(a-7)^2=25$,所以 $a-7=\pm5$,解得 $a=12$ 或 $a=2$.当 $a=12$ 时,原式 $=2\times12-9=15$;当 $a=2$ 时,原式 $=2\times2-9=-5$.

**9.** **解:**(1) ①原式 $=a^2-12a+36-36+20=(a-6)^2-4^2=(a-10)(a-2)$.

②原式 $=(a-1)^2-8(a-1)+16-16+7=(a-5)^2-3^2=(a-8)(a-2)$.

③原式 $=a^2-6ab+9b^2-9b^2+5b^2=(a-3b)^2-4b^2=(a-5b)(a-b)$.

(2) ①易知 $a^2-12a+20=a^2-12a+36-36+20=(a-6)^2-16$.因为无论 $a$ 取何值,$(a-6)^2\geqslant0$,所以 $(a-6)^2-16\geqslant-16$,所以代数式 $a^2-12a+20$ 的最小值为 $-16$.

②因为无论 $a$ 取何值,$-(a+1)^2\leqslant0$,$-(a+1)^2+8\leqslant8$,所以代数式 $-(a+1)^2+8$ 的最大值为 8.

易知 $-a^2+12a-8=-(a^2-12a+8)=-(a^2-12a+36-36+8)=-(a-6)^2+28$.因为无论 $a$ 取何值,$-(a-6)^2\leqslant0$,所以 $-(a-6)^2+28\leqslant28$,所以代数式 $-a^2+12a-8$ 的最大值为 28.

## 课时训练 28　公式法(3)

**【基础巩固】**

**1.** C　**2.** D　**3.** C　**4.** A　**5.** A

**6.** $n(m-5n)^2$　**7.** 1

8. 0　提示：由 $x-2y+2=0$，得 $\frac{1}{2}x-y=-1$，所以原式 $=\left(\frac{1}{2}x-y\right)^2-1=(-1)^2-1=0$.

9. 5　提示：$x^9-x=x(x^8-1)=x(x^4+1)(x^4-1)=x(x^4+1)(x^2+1)(x^2-1)=x(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)$.

10. 解：若选择 $a^2+b^2$，$3a^2-4ab$，则 $(a^2+b^2)+(3a^2-4ab)=a^2+b^2+3a^2-4ab=4a^2-4ab+b^2=(2a-b)^2$.（答案不唯一）

11. 解：(1) 原式 $=(y-2)(x+2)(x-2)$.

(2) 原式 $=(y^2-1)^2-6(y^2-1)+9=(y^2-1-3)^2=(y^2-4)^2=(y+2)^2(y-2)^2$.

(3) 原式 $=(a-1)(a+1)^3$.

(4) 原式 $=(m+3)^2(m-3)^2$.

【拓展提优】

1. C　提示：$80^3-80=80\times(80^2-1)=80\times(80+1)\times(80-1)=80\times81\times79$.

2. A　提示：由题意，得 $a+c>b$，$a<b+c$，即 $a-b+c>0$，$a-b-c<0$，所以原式 $=(a-b)^2-c^2=(a-b+c)(a-b-c)<0$.

3. C　提示：原式 $=x^2-4xy+4y^2+4x^2+12x+9+16=(x-2y)^2+(2x+3)^2+16$. 因为 $(x-2y)^2\geqslant0$，$(2x+3)^2\geqslant0$，所以原式的最小值为 16.

4. 11　提示：设较小的自然数为 $x$，则较大的自然数为 $x+1$. 根据题意，得 $(x+1)^2-x^2=23$，即 $(x+1+x)(x+1-x)=23$，解得 $x=11$.

5. $-5$　提示：$m^2+n^2-6n+4m+13=(m^2+4m+4)+(n^2-6n+9)=0$，所以 $(m+2)^2+(n-3)^2=0$，解得 $m=-2$，$n=3$. 所以 $m^2-n^2=(-2)^2-3^2=-5$.

6. 5　提示：根据题意，得题图中阴影部分的面积为 $4\times\frac{1}{2}ab+2b^2=2ab+2b^2$，题图中空白部分的面积为 $(a+b)^2-(2ab+2b^2)=a^2-b^2$. 因为阴影部分的面积与题图中空白部分的面积之比为 1∶2，所以 $(2ab+2b^2)∶(a^2-b^2)=1∶2$，所以 $a^2-b^2=2(2ab+2b^2)$，即 $4ab-a^2+5b^2=0$，$-\frac{a^2}{b^2}+\frac{4a}{b}+5=0$，$\left(-\frac{a}{b}-1\right)\left(\frac{a}{b}-5\right)=0$，所以 $\frac{a}{b}=-1$（不合题意，舍去）或 $\frac{a}{b}=5$.

7. 6　提示：原式 $=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac=(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2ac+c^2)+(b^2-2bc+c^2)=(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2$. 由题意，得 $a-b=-1$，$a-c=-2$，$b-c=-1$，所以原式 $=(-1)^2+(-2)^2+(-1)^2=6$.

8. 解：原式 $=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\left(1+\frac{1}{4}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{2\,025}\right)\times\left(1+\frac{1}{2\,025}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{2\,024}{2\,025}\times\frac{2\,026}{2\,025}=\frac{1}{2}\times\frac{2\,026}{2\,025}=\frac{1\,013}{2\,025}$.

9. 解：(1) ① 原式 $=x^2+(-x)+4x+(-1)\times4=(x-1)(x+4)$.

② 原式 $=m^2+(-3m)+(-5m)+(-3)\times(-5)=(m-3)(m-5)$.

(2) $a^2+2ab+b^2$，$a^2+3ab+2b^2$，$a^2+4ab+3b^2$，$a^2+4ab+4b^2$.

# 第 10 章　分　式

## 课时训练 29　分式的概念

【基础巩固】

1. C　2. B　3. A　4. C　5. $\frac{p}{m-n}$

6. $\frac{b^{11}}{a^6}$　$(-1)^n\cdot\frac{b^{2n-1}}{a^n}$　7. $x\neq4$　8. $\frac{1}{2}$

9. 解：因为当 $x=3$ 时，分式 $\frac{2x+3y}{2x-3y}$ 无意义，所以 $2x-3y=0$，即 $6-3y=0$，解得 $y=2$. 所以原分式可化为 $\frac{2x+6}{2x-6}$. 要使分式的值为 0，则 $2x+6=0$，且 $2x-6\neq0$，解得 $x=-3$.

10. 解：当 $x-a\neq0$，即 $x\neq a$ 时，分式有意义，所以 $a=2$. 当 $x+b=0$，且 $x-a\neq0$ 时，分

式的值为0,所以$1+b=0$,解得$b=-1$.所以$a-b=2-(-1)=3$.

【拓展提优】

1. C 2. C 3. C

4. A 提示:原式$=\frac{a(b-c)-b(b-c)}{a-c}=\frac{(b-c)(a-b)}{a-c}$.根据题意,得$b-c=0$或$a-b=0$且$a-c\neq0$,所以$b=c$或$a=b$且$a\neq c$,所以此三角形一定是等腰三角形,且一定不是等边三角形.

5. $-3$ 6. $-2$

7. $-1$或$-3$ 提示:由分式$\frac{4}{m-1}$的值是整数,$m$为负整数,得$m-1=-2$或$m-1=-4$,解得$m=-1$或$m=-3$.

8. $\frac{5a+10b}{a+b}$ 9. $\frac{60}{m}$(答案不唯一)

10. $\frac{1}{3}$ 提示:由$\frac{x}{y}=2$可知$x=2y$且$y\neq0$,则$\frac{x-y}{x+y}=\frac{2y-y}{2y+y}=\frac{y}{3y}=\frac{1}{3}$.

11. 解:(1) 因为$\frac{x}{x^2-2x-2}=4$,所以$x\neq0$,所以$\frac{x^2-2x-2}{x}=\frac{1}{4}$,所以$x-2-\frac{2}{x}=\frac{1}{4}$,所以$x-\frac{2}{x}=\frac{9}{4}$.

(2) 因为$\frac{x^4-6x^2+4}{x^2}=x^2-6+\frac{4}{x^2}=\left(x-\frac{2}{x}\right)^2-2=\frac{81}{16}-2=\frac{49}{16}$,所以$\frac{x^2}{x^4-6x^2+4}=\frac{16}{49}$.

12. 解:(1) 解题过程补充如下:

因为无论$x$取何值,原分式总有意义,所以$(x-1)^2+(m-1)\neq0$,所以$m-1>0$,所以$m>1$.

(2) 原式$=\frac{1}{3(x^2-2x+1)+(m-3)}=\frac{1}{3(x-1)^2+(m-3)}$.因为无论$x$取何值,原分式总有意义,所以$3(x-1)^2+(m-3)\neq0$,所以$m-3>0$,所以$m>3$.

## 课时训练30 分式的基本性质(1)

【基础巩固】

1. D 2. D 3. D 4. A

5. 解:(1) 原式$=-\frac{5b}{6a^2}$. (2) 原式$=-\frac{3x}{4y}$.

(3) 原式$=\frac{2m}{n}$. (4) 原式$=\frac{4m}{5n}$.

6. 解:不正确.改正如下:

分式$\frac{a-1}{(a-1)^2}$的分子、分母同除以$(a-1)$后,分母变为$a-1$,而分子为1,即$\frac{a-1}{(a-1)^2}=\frac{1}{a-1}$.

7. 解:(1) 原式$=\frac{30\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{5}y\right)}{30\left(2x+\frac{1}{6}y\right)}=\frac{10x-6y}{60x+5y}$.

(2) 原式$=\frac{60\left(0.2x-\frac{1}{2}y\right)}{60\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y\right)}=\frac{12x-30y}{20x+15y}$.

【拓展提优】

1. D 2. D

3. C 提示:原分式为$\frac{xy}{2x+y}$,将$x$和$y$均扩大为10倍后,新分式的分子为$(10x)(10y)=100xy$,分母为$2(10x)+10y=20x+10y=10(2x+y)$.所以新分式为$\frac{100xy}{10(2x+y)}=\frac{10xy}{2x+y}$,所以分式的值扩大为原式的10倍.

4. C

5. (1) $xy^2$ (2) $5x$ (3) $x+y$ $x+y$ $x^2+2xy+y^2$ (4) $a+b$ $a+b$ $a^2-b^2$

6. (1) $\frac{a-3}{a^2+3}$ (2) $\frac{(x-3)^2}{x^3-8}$

7. 0 提示:因为$a$与$b$互为相反数,所以$a=-b$.又因为$|a+2b|=2$,所以$|-b+2b|=2$,即$|b|=2$.又因为$b>0$,所以$b=2$,$a=-2$,则$\frac{2a-ab}{a^2+ab+b-1}=\frac{2\times(-2)-(-2)\times2}{(-2)^2+(-2)\times2+2-1}=0$.

**8.** $x\neq3$ 且 $x\neq0$

**9.** **解**:由 $\frac{1}{x}+x=4$,得 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2x\cdot\frac{1}{x}=4^2-2=14$,所以 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{14+1}=\frac{1}{15}$.

**10.** **解**:(1) 等式　分式

(2) 设 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{6}=k(k\neq0)$,则 $x=2k$,$y=3k$,$z=6k$,所以 $\frac{x+2y-z}{x-2y+3z}=\frac{2k+6k-6k}{2k-6k+18k}=\frac{2k}{14k}=\frac{2}{14}=\frac{1}{7}$,所以分式 $\frac{x+2y-z}{x-2y+3z}$ 的值为 $\frac{1}{7}$.

(3) 设 $\frac{y+z}{x}=\frac{z+x}{y}=\frac{x+y}{z}=k(k\neq0)$,则 $\begin{cases}y+z=kx & ①,\\x+z=ky & ②,\\x+y=kz & ③,\end{cases}$ ①+②+③,得 $2x+2y+2z=k(x+y+z)$.因为 $x+y+z\neq0$,所以 $k=2$,所以原式 $=\frac{2z-z}{2z+z}=\frac{z}{3z}=\frac{1}{3}$.

## 课时训练 31　分式的基本性质(2)

**【基础巩固】**

**1.** C　**2.** C　**3.** C　**4.** C

**5.** (1) $b$　(2) $3c$　(3) $m$　(4) $6my^2$

**6.** $\frac{6b^2}{ac}$　**7.** $\frac{6}{x-1}$(答案不唯一)　**8.** $-\frac{4}{3}$

**9.** **解**:(1) 原式 $=\frac{2ax^2y\div axy}{3axy^2\div axy}=\frac{2x}{3y}$.

(2) 原式 $=\frac{-2a(a+b)^3\div(a+b)^2}{3b(a+b)^2\div(a+b)^2}$

$=-\frac{2a(a+b)}{3b}$.

(3) 原式 $=\frac{2xy(x-y)}{(x-y)^2}$

$=\frac{2xy(x-y)\div(x-y)}{(x-y)^2\div(x-y)}=\frac{2xy}{x-y}$.

(4) 原式 $=-\frac{x^2-25}{x^2-10x+25}$

$=-\frac{(x+5)(x-5)}{(x-5)^2}$

$=-\frac{x+5}{x-5}$.

**10.** **解**:(1) 原式 $=\frac{a+3b}{(a+3b)(a-3b)}=\frac{1}{a-3b}$.

当 $a=4$,$b=3$ 时,原式 $=\frac{1}{4-3\times3}=\frac{1}{4-9}=-\frac{1}{5}$.

(2) 原式 $=\frac{(x+1)^2}{x+1}+\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1+x+1=2x+2$.当 $x=-2$ 时,原式 $=2\times(-2)+2=-2$.

**11.** **解**:解法 1 正确;解法 2 有问题,当 $x-y=0$ 时,不能在分子、分母上乘以 $x-y$.

**【拓展提优】**

**1.** A　**2.** A　**3.** D

**4.** C　**提示**:因为 $\frac{2m-2}{m^2-1}=\frac{2(m-1)}{(m+1)(m-1)}=\frac{2}{m+1}$,所以 $m+1=\pm1$ 或 $m+1=\pm2$,且 $m^2-1\neq0$,解得 $m=0$ 或 $m=-2$ 或 $m=1$ 或 $m=-3$,且 $m\neq\pm1$.所以能使 $\frac{2m-2}{m^2-1}$ 也为整数的 $m$ 的值为 0,−2,−3,共 3 个.

**5.** 0 或 −4　**6.** 30　**7.** $x<1$　**8.** $1-a+b$

**9.** **解**:由 $a+2b=0$,得 $a=-2b$,所以 $\frac{a^2+2ab-b^2}{2a^2+ab+b^2}=\frac{(-2b)^2+2(-2b)b-b^2}{2(-2b)^2+(-2b)b+b^2}=-\frac{1}{7}$.

**10.** **解**:(1) 因为 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,所以 $ad=bc$.所以 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

(2) 因为 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,所以 $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$,所以 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

(3) 设$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=k(k\neq0)$,则 $a=kc,b=kd$,

所以$\frac{a+b}{a-b}=\frac{kc+kd}{kc-kd}=\frac{k(c+d)}{k(c-d)}=\frac{c+d}{c-d}$.

## 课时训练 32　分式的基本性质(3)

【基础巩固】

**1.** A　**2.** D　**3.** B　**4.** B　**5.** $6x^3y^2$

**6.** $6x^2y(x-y)$　**7.** $x(x+3)(x-3)$

**8.** $\frac{1}{6b}$　$\frac{1}{a^2}$(答案不唯一)

**9.** 解:(1) $21x^7$.　(2) $abc$.　(3) $(1-a)^3$.

**10.** 解:(1) $\frac{a-1}{a+1}=\frac{(a-1)(b+1)}{(a+1)(b+1)}=\frac{ab+a-b-1}{ab+a+b+1}$,$\frac{b-1}{b+1}=\frac{(a+1)(b-1)}{(a+1)(b+1)}=\frac{ab-a+b-1}{ab+a+b+1}$.

(2) 由(1),得$\frac{a-1}{a+1}=\frac{ab+a-b-1}{ab+a+b+1}$.因为$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$,$ab=3$,$a+b=4$,所以 $a^2+b^2=10$,所以$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2=10-6=4$,所以 $a-b=\pm2$,所以 $\frac{a-1}{a+1}=\frac{3+2-1}{3+4+1}=\frac{1}{2}$ 或 $\frac{a-1}{a+1}=\frac{3-2-1}{3+4+1}=0$.

【拓展提优】

**1.** C　**2.** D　**3.** B　**4.** $\frac{2}{3}$　**5.** 3　5 或 10

**6.** $\frac{12}{11}$　提示:因为$\frac{ab}{a+b}=2$,$\frac{bc}{b+c}=3$,$\frac{ac}{a+c}=1$,所以$\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{2}$①,$\frac{b+c}{bc}=\frac{1}{3}$②,$\frac{a+c}{ac}=1$③,①+②+③,得$\frac{a+b}{ab}+\frac{b+c}{bc}+\frac{a+c}{ac}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+1$,通分可得$\frac{2(ab+bc+ac)}{abc}=\frac{11}{6}$,所以$\frac{ab+bc+ac}{abc}=\frac{11}{12}$,所以$\frac{abc}{ab+bc+ac}=\frac{12}{11}$.

**7.** 解:(1) $6x$.　(2) $(a+b)(a-b)$.
(3) $12x^3yz^2$.　(4) $2x(x+3)(x-3)$.
(5) $(a+2b)(a-2b)$.

**8.** 解:(1) $\frac{x}{x-2}=\frac{x(x+1)}{(x-2)(x+1)}$,

$\frac{2x}{x+1}=\frac{2x(x-2)}{(x-2)(x+1)}$.

(2) $\frac{1}{x^2-16}=\frac{2}{2(x+4)(x-4)}$,

$\frac{1}{2x-8}=\frac{x+4}{2(x+4)(x-4)}$.

(3) $\frac{1}{x+2}=\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}$,

$\frac{4x}{x^2-4}=\frac{4x}{(x+2)(x-2)}$,

$\frac{2}{2-x}=-\frac{2(x+2)}{(x+2)(x-2)}$.

(4) $\frac{y}{x(x-y)^2}=\frac{y(y-x)}{x(y-x)^3}$,

$\frac{x}{(y-x)^3}=\frac{x^2}{x(y-x)^3}$.

**9.** 解:因为 $M-N=x+1-\frac{4x}{x+1}=\frac{(x-1)^2}{x+1}$,所以当 $x>-1$ 时,$M-N\geqslant0$,即 $M\geqslant N$,所以①错误;同理,当 $M<N$ 时,$M-N<0$,即 $x+1<0$,所以 $x<-1$,所以②正确.

## 课时训练 33　分式的加减

【基础巩固】

**1.** A　**2.** C　**3.** C　**4.** B

**5.** (1) $x$　(2) $\frac{1-a+b}{(a+b)(a-b)}$

(3) $\frac{1}{(x+1)(x-1)}$

**6.** $\frac{2}{m^2-1}$　**7.** 2　**8.** =

**9.** 解:(1) 原式$=\frac{2x-2y}{x^2-y^2}=\frac{2(x-y)}{(x+y)(x-y)}=\frac{2}{x+y}$.

(2) 原式$=\frac{x+1}{x^2-1}+\frac{x^2-3x}{x^2-1}=\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}=\frac{x-1}{x+1}$.

(3) 原式$=\frac{x+9}{x+3}+\frac{x-3}{x+3}=\frac{2x+6}{x+3}=2$.

(4) 原式$=\frac{a^2}{a-1}-\frac{a^2-1}{a-1}=\frac{1}{a-1}$.

**10.** 因式分解　三　$\frac{1}{x-2}$

**【拓展提优】**

**1.** B

**2.** B　提示：因为$\frac{A}{3x+2}-\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)-B(3x+2)}{(3x+2)(x-1)}=\frac{(A-3B)x-(A+2B)}{(3x+2)(x-1)}$，所以$\begin{cases}A-3B=4,\\A+2B=9,\end{cases}$解得$\begin{cases}A=7,\\B=1.\end{cases}$

**3.** B　提示：设全程为 1 km，则小明所用的时间是$\frac{\frac{1}{2}}{a}+\frac{\frac{1}{2}}{b}=\frac{a+b}{2ab}$ h. 设小刚走完全程所用的时间是 $x$ h，则$\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}bx=1$，所以$x=\frac{2}{a+b}$，即小刚走完全程所用的时间是$\frac{2}{a+b}$ h. 因为$\frac{a+b}{2ab}-\frac{2}{a+b}=\frac{(a-b)^2}{2ab(a+b)}>0(a\neq b)$，所以小刚所用的时间较少.

**4.** $-1$　提示：因为$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}=-\frac{a-b}{ab}=5$，所以$a-b=-5ab$，所以$\frac{3a+8ab-3b}{2ab-a+b}=\frac{3(a-b)+8ab}{2ab-(a-b)}=\frac{-15ab+8ab}{2ab+5ab}=\frac{-7ab}{7ab}=-1$.

**5.** 2 025　**6.** $\frac{b-a}{a}$　**7.** $\frac{n}{n+1}$

**8.** 9　提示：因为$m^2-3m+1=0$，所以$m^2=3m-1$. 则原式$=(3m-1)+\frac{19}{(3m-1)+2}=(3m-1)+\frac{19}{3m+1}=\frac{(3m-1)(3m+1)}{3m+1}+\frac{19}{3m+1}=\frac{9m^2-1+19}{3m+1}=\frac{9(3m-1)-1+19}{3m+1}=\frac{27m+9}{3m+1}=9$.

**9.** **解**：原式$=\left(\frac{1-2m}{m}+\frac{m}{m}\right)+\frac{1-m^2}{m}=\frac{1-2m+m+1-m^2}{m}=\frac{2-m-m^2}{m}$. 当$m=2$时，原式$=\frac{2-2-2^2}{2}=-2$.

**10.** **解**：(1) $1+\frac{1}{x+4}$　$2x+\frac{1}{x-2}$

(2) $\frac{-2x^2+3}{x^2+1}=\frac{-2(x^2+1)+5}{x^2+1}=\frac{-2(x^2+1)}{x^2+1}+\frac{5}{x^2+1}=-2+\frac{5}{x^2+1}$. 因为$x^2\geqslant0$，所以$x^2+1\neq0$，分式$\frac{-2x^2+3}{x^2+1}$有意义. 当$x=0$时，$x^2+1$有最小值 1，此时分式有最大值，最大值为$-2+\frac{5}{x^2+1}=-2+\frac{5}{0+1}=-2+5=3$.

(3) 由题意知 $y=\frac{4}{P}-\frac{Q}{12}=\frac{4}{x+2}-\frac{8x}{12(x+2)}=\frac{12-2x}{3(x+2)}$，所以$3(x+2)y=12-2x$，所以$3yx+6y=12-2x$，$(3y+2)x=12-6y$，$x=\frac{12-6y}{3y+2}=\frac{-6y-4+16}{3y+2}=-2+\frac{16}{3y+2}$. 因为 $x$，$y$ 均为非零整数，所以$3y+2$必是 16 的因数，枚举可得，当$3y+2=-1$时，$y=-1$，$x=-18$，此时$xy=18$；当$3y+2=-4$时，$y=-2$，$x=-6$，此时$xy=12$；当$3y+2=-16$时，$y=-6$，$x=-3$，此时$xy=18$；其他情况都不符合题意. 综上所述，$xy$的值为 18 或 12.

## 课时训练 34　分式的乘除(1)

**【基础巩固】**

**1.** C　**2.** A　**3.** A　**4.** D

**5.** (1) $-\frac{a^2b}{2}$　(2) $\frac{3x^2y}{2}$

**6.** (1) $-\frac{a}{4b}$　(2) $-\frac{1}{m+1}$

**7.** **解**：(1) 原式$=-\frac{24x^3y^3}{4y^2}=-6x^3y$.

(2) 原式$=\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{-1}{a-b}=-\frac{1}{a+b}$.

(3) 原式 $=\frac{(1-x)^2}{x(1-x)(1+x)}\cdot\frac{xy(1+x)}{x(1-x)}=\frac{y}{x}$.

**8. 解**:原式 $=\frac{m+1}{m+2}\cdot\frac{(m+2)(m-2)}{(m+1)^2}=\frac{m-2}{m+1}$. 当 $m=1$ 时,原式 $=\frac{1-2}{1+1}=-\frac{1}{2}$.

**9. 解**:原式 $=a\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\cdot\left(a^4+\frac{1}{a^4}\right)\left(a^8+\frac{1}{a^8}\right)$

$=a\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\left(a^4+\frac{1}{a^4}\right)\left(a^8+\frac{1}{a^8}\right)$

$=a\left(a^4-\frac{1}{a^4}\right)\left(a^4+\frac{1}{a^4}\right)\left(a^8+\frac{1}{a^8}\right)$

$=a\left(a^8-\frac{1}{a^8}\right)\left(a^8+\frac{1}{a^8}\right)$

$=a\left(a^{16}-\frac{1}{a^{16}}\right)$

$=a^{17}-\frac{1}{a^{15}}$.

**【拓展提优】**

**1.** A **2.** A **3.** D

**4.** B 提示:$\frac{2a-2}{a^2-1}=\frac{2(a-1)}{(a+1)(a-1)}=\frac{2}{a+1}$. 因为分式要有意义,所以 $(a+1)(a-1)\neq 0$,所以 $a\neq 1$ 且 $a\neq -1$. 因为分式的值随着 $a$ 的值的增大而减小,所以当 $a$ 取最小正整数 2 时,原式有最大值,最大值 $=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}$,且原分式无最小值.

**5.** $x\neq -2$ 且 $x\neq -3$ 且 $x\neq -4$

**6.** 3 或 2 提示:因为 $\frac{2x+2}{x^3-2x^2+x}\div\frac{1+x}{x^2-x}=\frac{2}{x-1}$,且它的值为整数,所以 $x-1$ 是 2 的约数. 因为 $x$ 为整数,所以 $x-1=2$ 或 $x-1=1$ 或 $x-1=-2$ 或 $x-1=-1$,解得 $x=3$ 或 $x=2$ 或 $x=-1$ 或 $x=0$. 又因为当 $x=0$ 或 $x=-1$ 时,分式没有意义,或除式的值为零,所以 $x=3$ 或 $x=2$.

**7. 解**:(1) 原式 $=\frac{(a+3)(a-3)}{(a+3)^2}\cdot\frac{a}{a-3}=\frac{a}{a+3}$.

(2) 原式 $=\frac{4(a+b)}{5ab}\cdot\frac{15a^2b}{(a+b)(a-b)}=\frac{12a}{a-b}$.

(3) 原式 $=8x^2y^4\cdot\frac{3x}{4y^6}\cdot\frac{6z}{x^2y}=\frac{36xz}{y^3}$.

(4) 原式 $=\frac{(y-2)^2}{2(y-3)}\cdot\frac{1}{y+3}\cdot\frac{(y+3)(y-3)}{6(y-2)}=\frac{y-2}{12}$.

(5) 原式 $=\frac{2(m+2)}{(m-2)^2}\cdot(m+2)(m-2)\cdot\frac{2(m-2)}{(m^2+4)(m+2)(m-2)}=\frac{4(m+2)}{(m-2)(m^2+4)}$.

**8. 解**:由题意可知,甲 3 次共买了 $3m$ kg 的米,花费为 $3.8m+4.2m+4m=12m$(元),则甲所购大米的平均单价为 $12m\div 3m=4$(元/kg). 乙共花费 $3\times 4m=12m$(元),则乙所购大米的平均单价为 $12m\div(4m\div 3.8+4m\div 4.2+4m\div 4)=\frac{4\ 788}{1\ 199}$(元/kg).

因为 $\frac{4\ 788}{1\ 199}<4$,所以乙的购买方式比甲的购买方式便宜.

## 课时训练 35 分式的乘除(2)

**【基础巩固】**

**1.** C **2.** D **3.** B **4.** D

**5.** (1) $x^2$ (2) $a-b$

**6. 解**:(1) 原式 $=-\frac{3a}{b}\cdot\frac{ab^2}{a^3b^2}\cdot\frac{a^2}{6b}=-\frac{a}{2b^2}$.

(2) 原式 $=\frac{m+1}{m}\cdot\frac{m}{(m+1)(m-1)}=\frac{1}{m-1}$.

(3) 原式 $=\frac{y(xy-1)}{x^2}\cdot\frac{x^2}{y^2}=\frac{xy-1}{y}$.

(4) 原式 $=\frac{(a+3)(a-3)}{a-3}\cdot\frac{a}{a+3}=a$.

(5) 原式 $=\frac{3x-2(x+1)}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{(x-1)^2}{x-2}=\frac{x-2}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{(x-1)^2}{x-2}=\frac{x-1}{x+1}$.

**7. 解**:原式 $=\frac{x+1+x-1}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{(x-1)^2}{2x}=\frac{x-1}{x+1}$. 当 $x=-2$ 时,原式 $=\frac{-2-1}{-2+1}=3$.

**8. 解**:(1) ③　②

(2) 若选择甲同学的解法:

原式 $=\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x^2-1}{x}+\frac{x}{x-1}\cdot\frac{x^2-1}{x}=\frac{x}{x+1}\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{x}+\frac{x}{x-1}\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{x}=x-1+x+1=2x$.

若选择乙同学的解法:

原式 $=\left[\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}+\frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}\right]\cdot\frac{x^2-1}{x}=\frac{x^2-x+x^2+x}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{x}=\frac{2x^2}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{x}=2x$.

**9. 解**:原式 $=\frac{x^2+4}{(x+2)(x-2)}\cdot(x+2)(x-2)=x^2+4$. 因为当 $x=-3$ 时,$x^2+4=(-3)^2+4=13$,当 $x=3$ 时,$x^2+4=3^2+4=13$,所以小玲做题时把"$x=-3$"错抄成"$x=3$",其计算结果也是正确的.

**【拓展提优】**

**1.** C　**2.** D　**3.** $\frac{7}{10}$　**4.** ③

**5.** $\frac{1}{6}$　**提示**:因为 $\frac{ab}{a+b}=\frac{1}{3}$,所以 $\frac{a+b}{ab}=3$,即 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=3$ ①. 同理可得 $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=4$ ②,$\frac{1}{c}+\frac{1}{a}=5$ ③. ①+②+③,得 $2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=3+4+5$,所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=6$. 又因为 $\frac{abc}{ab+bc+ca}$ 的倒数为 $\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=6$,所以 $\frac{abc}{ab+bc+ca}=\frac{1}{6}$.

**6. 解**:提高了. 理由如下:

原来猪肉的利润率为 $\frac{2}{a}$,现在猪肉的利润率为 $\frac{a+2+2b-(a+b)}{a+b}=\frac{2+b}{a+b}$,则 $\frac{2+b}{a+b}-\frac{2}{a}=\frac{a(2+b)-2(a+b)}{a(a+b)}=\frac{ab-2b}{a(a+b)}=\frac{b(a-2)}{a(a+b)}$. 因为 $a>0,b>0,a>2$,所以 $\frac{b(a-2)}{a(a+b)}>0$,所以 $\frac{2+b}{a+b}>\frac{2}{a}$,所以肉贩的利润率提高了.

**7. 解**:(1) 由题意,得 $A=\frac{x(x+1)}{x-4}\cdot\frac{(x-4)^2}{(x+1)(x-1)}=\frac{x(x-4)}{x-1}=\frac{x^2-4x}{x-1}$.

(2) 由题意,得 $C=\frac{x(x-4)}{x-1}\cdot\frac{1-x}{x(x-1)}=\frac{4-x}{x-1}=-\frac{x-1-3}{x-1}=-1+\frac{3}{x-1}$. 又因为 $C$ 为整数,所以 $\frac{3}{x-1}$ 是整数. 所以 $x-1$ 是 3 的因数,即 $x-1=\pm1$ 或 $x-1=\pm3$. 所以 $x$ 为 0,2,−2,4. 又由题意,得 $x\neq\pm1$,$x\neq4$,$x\neq0$,所以满足题意的整数 $x$ 为 2,−2.

## 提优专题 4　分式求值的常见方法

**1.** C

**2.** A　**提示**:根据比例式 $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}$,设 $a=2k,b=3k$,代入分式,得 $\frac{2a-b}{a+b}=\frac{2(2k)-3k}{2k+3k}=\frac{k}{5k}=\frac{1}{5}$.

**3.** 2　**提示**:因为 $\frac{a}{a+b}=\frac{2}{3}$,所以 $2a+2b=3a$,整理,得 $a=2b$,所以 $\frac{a}{b}=2$.

**4.** $\frac{1}{2}$　**提示**:因为 $a+b=3ab$,所以 $\frac{3a-7ab+3b}{a+ab+b}=\frac{3(a+b)-7ab}{(a+b)+ab}=\frac{3\times3ab-7ab}{3ab+ab}=\frac{2ab}{4ab}=\frac{1}{2}$.

**5.** 7　**提示**:因为 $a^2-3a+1=0$,所以 $a-3+\frac{1}{a}=0$,

即 $a+\frac{1}{a}=3$，所以原式 $=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2=9-2=7$.

**6.** 2　**提示**：由条件可知 $\frac{a+b}{ab}=\frac{2}{a-b}$，即 $(a+b)(a-b)=2ab$，所以 $a^2-b^2=2ab$，所以 $\frac{a^2}{b^2}-1=\frac{2a}{b}$，即 $\frac{a^2}{b^2}=\frac{2a}{b}+1$. 所以 $\left(1-\frac{a}{b}\right)^2=1-\frac{2a}{b}+\frac{a^2}{b^2}=1-\frac{2a}{b}+\frac{2a}{b}+1=2$.

**7.** $\frac{1}{2}$　**提示**：因为 $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)=\left(ab+\frac{a}{c}+1+\frac{1}{bc}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)=abc+a+c+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{abc}=\left(a+\frac{1}{b}\right)+\left(b+\frac{1}{c}\right)+\left(c+\frac{1}{a}\right)+\left(abc+\frac{1}{abc}\right)$，所以 $3\times11\left(c+\frac{1}{a}\right)=3+11+\left(c+\frac{1}{a}\right)+2$，解得 $c+\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$.

**8.** $\frac{2}{13}$　**提示**：由题意，得 $a_1=2$，$a_2=\frac{1}{2}$，$a_3=\frac{2}{7}$，$\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+2}}=\frac{2}{a_{n+1}}$，所以当 $n=2$ 时，$\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_4}=\frac{2}{a_3}$，即 $\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{a_4}=\frac{2}{\frac{2}{7}}$，解得 $a_4=\frac{1}{5}$；当 $n=3$ 时，$\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_5}=\frac{2}{a_4}$，即 $\frac{1}{\frac{2}{7}}+\frac{1}{a_5}=\frac{2}{\frac{1}{5}}$，解得 $a_5=\frac{2}{13}$.

**9.** **解**：(1) 原式 $=\frac{a(a-1)+3a+1}{a-1}\cdot\frac{1}{(a+1)(a-1)}=\frac{a^2-a+3a+1}{a-1}\cdot\frac{1}{(a+1)(a-1)}=\frac{(a+1)^2}{a-1}\cdot\frac{1}{(a+1)(a-1)}=\frac{a+1}{(a-1)^2}$. 当 $a=2$ 时，原式 $=\frac{2+1}{(2-1)^2}=3$.

(2) 原式 $=\frac{2a^2}{(a+b)(a-b)}-\frac{a(a+b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{a^2-ab}{(a+b)(a-b)}=\frac{a}{a+b}$. 因为 $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$，所以设 $a=3k$，$b=2k$. 原式 $=\frac{3k}{3k+2k}=\frac{3}{5}$.

(3) 原式 $=\frac{(a^2-1)-3}{a+1}\cdot\frac{a+1}{(a-2)^2}=\frac{a^2-4}{a+1}\cdot\frac{a+1}{(a-2)^2}=\frac{(a-2)(a+2)}{a+1}\cdot\frac{a+1}{(a-2)^2}=\frac{a+2}{a-2}$. 因为要使分式有意义，故 $a+1\neq0$ 且 $a-2\neq0$，所以 $a\neq-1$ 且 $a\neq2$，所以当 $a=1$ 时，原式 $=\frac{1+2}{1-2}=-3$.

**10.** **解**：(1) $\frac{1}{2}$　$\frac{2}{3}$　$\frac{3}{4}$　$\frac{4}{5}$

(2) $M<N$. 证明如下：$M-N=\frac{a}{a+1}-\frac{a+1}{a+2}=\frac{a(a+2)-(a+1)^2}{(a+1)(a+2)}=-\frac{1}{(a+1)(a+2)}$. 因为 $a>0$，所以 $(a+1)\cdot(a+2)>0$，所以 $-\frac{1}{(a+1)(a+2)}<0$，即 $M-N<0$，所以 $M<N$.

**11.** **解**：(1) 因为 $\frac{2}{a^2-1}-\frac{2}{a^2+1}=\frac{2(a^2+1)-2(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2+1)}=\frac{4}{(a^2-1)(a^2+1)}$，$\frac{2}{a^2-1}\cdot\frac{2}{a^2+1}=\frac{4}{(a^2-1)(a^2+1)}$，所以 $\frac{2}{a^2+1}$ 是 $\frac{2}{a^2-1}$ 的关联分式.

(2) 设 $\frac{x+y}{2x-3y}$ 的关联分式是 $N$，则 $\frac{x+y}{2x-3y}-N=\frac{x+y}{2x-3y}\cdot N$，所以 $\left(\frac{x+y}{2x-3y}+1\right)\cdot N=\frac{x+y}{2x-3y}$，所以 $\frac{3x-2y}{2x-3y}\cdot N=\frac{x+y}{2x-3y}$，所以 $N=\frac{x+y}{3x-2y}$.

(3) ① $\frac{a}{b}$　**提示**：根据(2)可知，$\frac{a}{b-a}$ 的关联分式为 $\frac{a}{b-a}\div\left(\frac{a}{b-a}+1\right)=\frac{a}{b-a}\div\frac{b}{b-a}=\frac{a}{b-a}\cdot$

$\frac{b-a}{b}=\frac{a}{b}$.

② $\frac{1}{2}$　提示：因为$\frac{n-2}{mx+m^2+n}$是$\frac{m+2}{mx+n^2}$的"关联分式"，所以 $n-2=m+2, mx+m^2+n=mx+n^2+m+2$，整理，得 $m-n=-4, m^2-n^2=m-n+2$，即 $(m+n)(m-n)=m-n+2$. 把 $m-n=-4$ 代入，得 $-4(m+n)=-2$，解得 $m+n=\frac{1}{2}$.

**12. 解：**(1) 4　$\frac{1}{21}$　提示：因为 $\frac{x}{x^2-x+1}=\frac{1}{3}$，所以$\frac{x^2-x+1}{x}=3$，即$\frac{x^2}{x}-\frac{x}{x}+\frac{1}{x}=3$，所以 $x+\frac{1}{x}=4$；因为 $\frac{x^4+7x^2+1}{x^2}=x^2+7+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5=4^2+5=21$，所以$\frac{x^2}{x^4+7x^2+1}=\frac{1}{21}$.

(2) 原方程组化为$\begin{cases}\frac{2m+3n}{mn}=5,\\ \frac{3m+2n}{mn}=3,\end{cases}$即$\begin{cases}\frac{2}{n}+\frac{3}{m}=5①,\\ \frac{3}{n}+\frac{2}{m}=3②.\end{cases}$ ①×3－②×2 得$\frac{9}{m}-\frac{4}{m}=15-6$，解得 $m=\frac{5}{9}$，①×2－②×3，得$\frac{4}{n}-\frac{9}{n}=10-9$，解得 $n=-5$，所以原分式方程组的解为$\begin{cases}m=\frac{5}{9},\\ n=-5.\end{cases}$

(3) 因为$\frac{ab}{a+b}=\frac{1}{2\ 024}$，$\frac{bc}{b+c}=-\frac{1}{2\ 025}$，$\frac{ac}{a+c}=\frac{1}{2\ 026}$，所以$\frac{a+b}{ab}=2\ 024$，$\frac{b+c}{bc}=-2\ 025$，$\frac{a+c}{ac}=2\ 026$，所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2\ 024$，$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=-2\ 025$，$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=2\ 026$，所以 $2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=2\ 024-2\ 025+2\ 026=2\ 025$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{2\ 025}{2}$. 因为 $\frac{ab+bc+ac}{abc}=\frac{ab}{abc}+\frac{bc}{abc}+\frac{ac}{abc}=\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2\ 025}{2}$，所以$\frac{abc}{ab+bc+ac}=\frac{2}{2\ 025}$.

## 课时训练 36　分式方程(1)

**【基础巩固】**

**1.** B　**2.** D　**3.** A　**4.** D　**5.** C

**6.** $x=\frac{1}{4}$　**7.** 24

**8. 解：**(1) 去分母，得 $5(2x+1)=x-1$，解得 $x=-\frac{2}{3}$. 经检验，$x=-\frac{2}{3}$是原方程的解.

(2) 去分母，得 $4+2x=x-2$，解得 $x=-6$. 经检验，$x=-6$ 是原方程的解.

**9. 解：**根据题意，得$\frac{2a+3}{a-1}=\frac{3}{4}$，解得 $a=-3$. 经检验，$a=-3$ 是原方程的解. 所以 $a=-3$.

**10. 解：**(1) B

(2) 三　括号前是"－"号，去括号后，括号内第二项没有变号

(3) 该分式方程的正确解答过程如下：去分母，得 $2x-1=3(x-1)-6(x+2)$. 去括号，得 $2x-1=3x-3-6x-12$. 移项、合并同类项，得 $5x=-14$. 解得 $x=-\frac{14}{5}$. 把 $x=-\frac{14}{5}$代入原方程：左边$=\frac{11}{4}$，右边$=\frac{11}{4}$，左边＝右边，所以 $x=-\frac{14}{5}$是原方程的解.

**【拓展提优】**

**1.** B　**2.** B

**3.** A　提示：方程 $x+\frac{1}{x+1}=a+\frac{1}{a+1}$可以写成 $x+1+\frac{1}{x+1}=a+1+\frac{1}{a+1}$的形式. 因为方程 $x+\frac{1}{x}=a+\frac{1}{a}$的两个解分别为 $a$，$\frac{1}{a}$，所以方程 $x+1+\frac{1}{x+1}=a+1+\frac{1}{a+1}$的两个解为 $x+1=a+1$，$x+$

$1=\frac{1}{a+1}$，解得 $x_1=a$，$x_2=-\frac{a}{a+1}$，所以方程 $x+\frac{1}{x+1}=a+\frac{1}{a+1}$ 的两个解分别是 $a$，$-\frac{a}{a+1}$.

**4.** 9　**5.** $a<5$ 且 $a\neq3$　**6.** $\frac{4}{5}$

**7.** $\frac{-2}{x-2}=1$(答案不唯一)　**8.** 1

**9.** **解**：(1) 去分母，得 $x^2+x(x+2)=2(x+2)\cdot(x-2)$，解得 $x=-4$. 经检验，$x=-4$ 是原方程的解.

(2) 去分母，得 $x(x+2)-5(x-2)=x\cdot(x-2)$，解得 $x=10$. 经检验，$x=10$ 是原方程的解.

**10.** **解**：(1) 把 $m=4$ 代入方程 $\frac{m}{x+3}+\frac{1}{x-3}=\frac{m+4}{x^2-9}$ 中，得 $\frac{4}{x+3}+\frac{1}{x-3}=\frac{8}{x^2-9}$，去分母，得 $4(x-3)+x+3=8$，解得 $x=\frac{17}{5}$. 经检验，$x=\frac{17}{5}$ 是原方程的解.

(2) $\frac{m}{x+3}+\frac{1}{x-3}=\frac{m+4}{x^2-9}$，去分母，得 $m(x-3)+x+3=m+4$，解得 $x=\frac{4m+1}{m+1}$，所以 $x=\frac{4m+1}{m+1}=\frac{4(m+1)-3}{m+1}=4-\frac{3}{m+1}$. 因为原分式方程的解为整数，所以 $m+1=\pm3$ 或 $m+1=\pm1$，且 $\frac{4m+1}{m+1}\neq\pm3$，所以 $m=2$ 或 $m=-4$ 或 $m=0$ 或 $m=-2$ 且 $m\neq2$，$m\neq-\frac{4}{7}$，所以整数 $m$ 的值为 $-4$ 或 0 或 $-2$.

## 课时训练 37　分式方程(2)

**【基础巩固】**

**1.** D　**2.** C

**3.** C　**提示**：解分式方程 $\frac{x}{x-1}-\frac{k}{x^2-1}=\frac{x}{x+1}$，得 $x=\frac{k}{2}$，则 $k=2x$. 又因为原方程没有增根，所以 $x\neq\pm1$，所以 $k\neq\pm2$.

**4.** C　**5.** $\frac{1}{4}$　**6.** 2 或 1

**7.** $-1$　**提示**：去分母，得 $1-x-m=x-2$. 因为关于 $x$ 的方程有增根，所以 $x-2=0$，即增根为 $x=2$，代入，得 $1-2-m=2-2$，解得 $m=-1$.

**8.** $k<\frac{4}{3}$ 且 $k\neq1$　**提示**：去分母，得 $3(x-k)=4(x-1)$，解得 $x=4-3k$. 因为关于 $x$ 的方程 $\frac{3}{x-1}=\frac{4}{x-k}$ 的解是正数，所以 $4-3k>0$ 且 $4-3k\neq1$，$4-3k\neq k$，所以 $k<\frac{4}{3}$ 且 $k\neq1$.

**9.** **解**：(1) 去分母，得 $1=x-1-3(x-2)$，解得 $x=2$. 检验：当 $x=2$ 时，$x-2=0$，所以 $x=2$ 是原方程的增根，所以原方程无解.

(2) 去分母，得 $(x+1)^2-4=x^2-1$，解得 $x=1$. 检验：当 $x=1$ 时，$x-1=0$，所以 $x=1$ 是原方程的增根，所以原方程无解.

**10.** **解**：去分母，得 $2(x+2)+mx=3(x-2)$，解得 $x=\frac{10}{1-m}$. 因为方程有增根，所以 $x^2-4=0$，解得 $x=2$ 或 $x=-2$. 当 $x=2$ 时，$m=-4$；当 $x=-2$ 时，$m=6$. 故 $m=-4$ 或 $m=6$.

**11.** **解**：去分母，得 $x(x-a)-5(x-2)=x\cdot(x-2)$. 整理，得 $(a+3)x=10$.

(1) 易知分式方程的增根为 $x=0$ 或 $x=2$. 当 $x=0$ 时，$a$ 不存在；当 $x=2$ 时，$a=2$. 所以 $a$ 的值为 2.

(2) 满足分式方程无解的情况有两种：当解为增根时，由(1)可知，$a=2$；当去分母后所得整式方程 $(a+3)x=10$ 无解时，$a+3=0$，即 $a=-3$. 综上所述，$a=2$ 或 $a=-3$.

**【拓展提优】**

**1.** D

**2.** B　**提示**：去分母，得 $x(2m+x)-x(x-3)=2(x-3)$. 由题意，得增根可能为 $x=0$ 或 $x=3$. 经检验，$x=0$ 不是整式方程 $x(2m+x)-x(x-3)=$

$2(x-3)$的根.故增根只可能为$x=3$.

3. B　提示:去分母,得$3x=-m+4(x-1)$.去括号,得$3x=-m+4x-4$.解得$x=4+m$.因为当$x=1$时,方程$\frac{3x}{x-1}=\frac{m}{1-x}+4$无解,所以$4+m=1$,所以$m=-3$.

4. B　提示:去分母,得$x-2(x-1)=-k$,解得$x=2+k$.因为该分式方程的解为正数,所以$2+k>0$,$2+k\neq1$,解得$k>-2$且$k\neq-1$.

5. 0.5或1.5　提示:去分母,得$x-2a=2a(x-3)$.整理,得$(1-2a)x=-4a$.当$1-2a=0$且$-4a\neq0$时,原分式方程无解,此时$a=0.5$;当$1-2a\neq0$且$x=\frac{4a}{2a-1}=3$时,原分式方程有增根,无解,此时$a=1.5$.综上所述,$a$的值为0.5或1.5.

6. $\pm1$　提示:去分母,得$(2x-a)(x+1)-4(x^2-1)=(-2x+a)(x-1)$,解得$x=\frac{2}{a}$.因为分式方程$\frac{2x-a}{x-1}-4=\frac{-2x+a}{x+1}$的解为整数,$a$为整数,所以$a=\pm1$或$a=\pm2$.当$a=\pm1$时,解得$x=\pm2$,经检验,$x-1\neq0$,$x+1\neq0$,所以$x=\pm2$是原分式方程的解;当$a=\pm2$时,解得$x=\pm1$,经检验,$x-1=0$,$x+1=0$,所以$x=\pm1$是增根.综上所述,$a=\pm1$.

7. **解**:(1) 去分母,得$2-x-m=2(x-2)$.因为分式方程有增根,所以$x=2$.所以$2-2-m=0$,解得$m=0$.

(2) 去分母,得$2-x-m=2(x-2)$,解得$x=\frac{6-m}{3}$.因为方程的解是正数,所以$\frac{6-m}{3}>0$且$\frac{6-m}{3}\neq2$,所以$m<6$且$m\neq0$.

8. **解**:(1) $\frac{y}{4}-\frac{1}{y}=0$

(2) $y-\frac{4}{y}=0$

(3) 原方程化为$\frac{x-1}{x+2}-\frac{x+2}{x-1}=0$,设$y=\frac{x-1}{x+2}$,则原方程化为$y-\frac{1}{y}=0$.方程两边同时乘$y$,得$y^2-1=0$,解得$y=\pm1$.经检验,$y=\pm1$都是方程$y-\frac{1}{y}=0$的解.当$y=1$时,$\frac{x-1}{x+2}=1$,该方程无解;当$y=-1$时,$\frac{x-1}{x+2}=-1$,解得$x=-\frac{1}{2}$.经检验,$x=-\frac{1}{2}$是原分式方程的解,所以原分式方程的解为$x=-\frac{1}{2}$.

## 课时训练38　分式方程(3)

**【基础巩固】**

1. A

2. B　提示:根据分式方程$3\times\frac{10}{150}=\frac{10}{150-x}$可知食盐水含盐的百分比提高到原来的3倍后,含盐10 g不变,而盐水总量变为$(150-x)$ g,所以应蒸发掉了水分,所以$x$表示的意义是蒸发掉的水量.

3. 0.2　提示:设B款燃油汽车平均每公里燃油费用为$x$元,则A款电动汽车平均每公里充电费用为$(x-0.6)$元.根据题意,得$\frac{200}{x-0.6}=4\times\frac{200}{x}$,解得$x=0.8$.经检验,$x=0.8$是该分式方程的解.所以A款电动汽车平均每公里充电费用为$0.8-0.6=0.2$(元).

4. 0.4　提示:设该商店第一次购进的铅笔每支的进价为$x$元,则第二次购进的铅笔每支的进价为$\frac{5}{4}x$元.根据题意,得$\frac{600}{x}-\frac{600}{\frac{5}{4}x}=300$,解得$x=0.4$.经检验,$x=0.4$是原分式方程的解,且符合题意.所以该商店第一次购进的铅笔每支的进价为0.4元.

5. **解**:(1) 汽车原计划需行驶的时间　实际行驶的速度

(2) 选择甲同学的方法.设汽车原计划需行驶的时间为$x$ h,则汽车实际行驶的时间为$(x-1)$ h.根据题意,得$(1+25\%)\cdot\frac{300}{x}=\frac{300}{x-1}$,解得$x=5$.经检验,$x=5$是原方程的解,所以$x-1=4$.

答:汽车实际行驶的时间为4 h.

**6. 解**:(1) 设甲队单独完成这项工程需要 $x$ 天. 根据题意,得 $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{60}\right)\times16+\frac{1}{60}\times20=1$,解得 $x=40$. 经检验,$x=40$ 是原分式方程的解,且符合题意.

答:甲队单独完成这项工程需要 40 天.

(2) 设甲、乙两队合作完成这项工程需要 $y$ 天. 根据题意,得 $\left(\frac{1}{40}+\frac{1}{60}\right)y=1$,解得 $y=24$. 所以甲、乙两队全程合作完成这项工程需付工程款为 $24\times(3.5+2)=132$(万元),甲队单独完成这项工程需付工程款为 $40\times3.5=140$(万元),乙队单独完成这项工程超过计划天数不符合题意. 因为 $132<140$,所以甲、乙两队合作省钱.

答:在不超过计划天数的前提下,由甲、乙两队全程合作完成最省钱.

**【拓展提优】**

**1.** D **2.** 40

**3. 解**:选择①,解答如下:

设大队的速度为 $x$ km/h,则先遣队的速度为 $1.2x$ km/h. 根据题意,得 $\frac{15}{x}-\frac{15}{1.2x}=0.5$,解得 $x=5$. 经检验,$x=5$ 是原分式方程的解. 所以 $1.2x=6$.

答:先遣队的速度为 6 km/h,大队的速度为 5 km/h.

选择②,解答如下:

设大队的速度为 $y$ km/h,则先遣队的速度为 $(y+1)$km/h. 根据题意,得 $\frac{15}{y}-\frac{15}{y+1}=0.5$,解得 $y=5$(负值已舍). 经检验,$y=5$ 是原分式方程的解. 所以 $y+1=6$.

答:先遣队的速度为 6 km/h,大队的速度为 5 km/h.

**4. 解**:(1) 设 A 款卡片的进货单价是每盒 $x$ 元,则 B 款卡片的进货单价是每盒 $(x+5)$元. 根据题意,可得 $\frac{500}{x}=\frac{750}{x+5}$,解得 $x=10$. 经检验,$x=10$ 是原分式方程的解,所以 $x+5=15$.

答:A 款卡片的进货单价是每盒 10 元,B 款卡片的进货单价是每盒 15 元.

(2) 设购进 B 款卡片 $n$ 盒,则购进 A 款卡片 $(100-n)$盒. 因为 A 款哪吒卡片的盒数不得超过 B 款哪吒卡片的盒数,所以 $100-n\leqslant n$,解得 $n\geqslant50$. 根据题意,得 $10(100-n)+15n\leqslant1\ 260$,解得 $n\leqslant52$,所以 $50\leqslant n\leqslant52$. 因为 $n$ 为整数,所以 $n=50$ 或 $n=51$ 或 $n=52$. 当 $n=50$ 时,$100-n=50$,获利为 $50\times3+50\times5=400$(元);当 $n=51$ 时,$100-n=49$,获利为 $49\times3+51\times5=402$(元);当 $n=52$ 时,$100-n=48$,获利为 $48\times3+52\times5=404$(元). 因为 $400<402<404$,所以购进 A 款卡片 48 盒、B 款卡片 52 盒时获得的利润最大.

## 提优专题 5 含参的分式方程

**1.** B

**2.** D **提示**:因为关于 $x$ 的分式方程 $\frac{2x}{x-1}=\frac{m}{x-1}+5$ 有增根,所以 $x-1=0$,解得 $x=1$. 原分式方程去分母,得 $2x=m+5(x-1)$,把 $x=1$ 代入,得 $m=2$.

**3.** D **提示**:去分母,得 $2-m=2(x-2)$,解得 $x=\frac{6-m}{2}$. 因为关于 $x$ 的分式方程 $\frac{2}{x-2}+\frac{m}{2-x}=2$ 的解为正数,所以 $\frac{6-m}{2}>0$ 且 $\frac{6-m}{2}\neq2$,所以 $m<6$ 且 $m\neq2$.

**4.** D **提示**:去分母,得 $ax=x-2+6$,解得 $x=\frac{4}{a-1}$. 因为 $a\neq1$ 时,$\frac{4}{a-1}$ 才有意义,所以 $a=1$ 时,原分式方程无解;当 $\frac{4}{a-1}=2$ 时,即 $a=3$ 时,原分式方程有增根,无解. 综上所述,$a=1$ 或 $a=3$.

**5.** 3 **提示**:去分母,得 $3=a+x-2$,因为方程 $\frac{3}{x-2}=\frac{a}{x-2}+1$ 有增根,所以 $x=2$. 将 $x=2$ 代入 $3=a+x-2$,得 $3=a+2-2$,解得 $a=3$.

**6.** $m\leqslant2$ 且 $m\neq-2$ **提示**:去分母,得 $m+x-$

$2=-x$，解得 $x=1-\frac{m}{2}$. 因为原分式方程的解为非负数，且 $x\neq 2$，所以 $1-\frac{m}{2}\geqslant 0$，$1-\frac{m}{2}\neq 2$，所以 $m\leqslant 2$ 且 $m\neq -2$.

**7.** $-1$ **提示**：去分母，得 $m-x=-2$，解得 $x=m+2$. 由于分式方程无解，即分式方程有增根 $x=1$，当 $x=1$ 时，$m=1-2=-1$.

**8.** $m>-6$ 且 $m\neq -2$ **提示**：原方程 $\frac{x-m}{x+2}=3$，解得 $x=\frac{-(m+6)}{2}$. 因为原分式方程的解是负数，且 $x\neq -2$，所以 $\frac{-(m+6)}{2}<0$，且 $\frac{-(m+6)}{2}\neq -2$，所以 $m>-6$ 且 $m\neq -2$.

**9.** **解**：(1) 小强的说法对. 理由如下：
解这个关于 $x$ 的分式方程，得到方程的解为 $x=a-2$. 因为解为正数，可得 $a-2>0$，即 $a>2$，同时 $a-2\neq 1$，即 $a\neq 3$，所以 $a$ 的取值范围是 $a>2$ 且 $a\neq 3$.
(2) 去分母，得 $mx-1-1=2x-4$，整理，得 $(m-2)x=-2$，当 $m\neq 2$ 时，解得 $x=-\frac{2}{m-2}$. 由方程有整数解，得到 $m-2=\pm 1$，$m-2=\pm 2$，解得 $m=1$ 或 $m=3$ 或 $m=4$ 或 $m=0$. 当 $m=1$ 时，$x=2$ 是原分式方程的增根，不符合题意，舍去. 综上所述，整数 $m$ 的值为 3 或 4 或 0.

**10.** **解**：(1) 当 $a=1$，$b=0$ 时，分式方程为 $\frac{1}{2x+3}+\frac{x}{x-5}=1$，解得 $x=-\frac{10}{11}$. 经检验，$x=-\frac{10}{11}$ 是原分式方程的解.

(2) 当 $a=1$ 时，分式方程为 $\frac{1}{2x+3}-\frac{b-x}{x-5}=1$，$(11-2b)x=3b-10$. ①当 $11-2b=0$，即 $b=\frac{11}{2}$ 时，此方程无解. ②当 $11-2b\neq 0$，即 $b\neq\frac{11}{2}$ 时，若 $2x+3=0$，即 $2\cdot\frac{3b-10}{11-2b}+3=0$，$6b-6b=33-20$，不成立；若 $x-5=0$，即 $\frac{3b-10}{11-2b}-5=0$，解得 $b=5$. 综上所述，当 $b=\frac{11}{2}$ 或 $b=5$ 时，原分式方程无解.

(3) 当 $a=3b$ 时，分式方程为 $\frac{3b}{2x+3}-\frac{b-x}{x-5}=1$，即 $(10+b)x=18b-15$. 因为 $a$，$b$ 是正整数，所以 $10+b\neq 0$，所以 $x=\frac{18b-15}{10+b}$，即 $x=18-\frac{195}{10+b}$. 又因为 $a$，$b$ 是正整数，$x$ 是整数，所以 $b=3$ 或 $b=5$ 或 $b=29$ 或 $b=55$ 或 $b=185$. 经检验，当 $b=5$ 时，$x=5$（不符合题意，舍去），所以 $b$ 的值为 3 或 29 或 55 或 185.

# 第 11 章　二次根式

## 课时训练 39　二次根式的概念(1)

**【基础巩固】**

**1.** D **2.** A **3.** B **4.** D

**5.** A **提示**：由 $\sqrt{2-x}$ 可知，$2-x\geqslant 0$，即 $x\leqslant 2$；由 $\sqrt{x-2}$ 可知，$x-2\geqslant 0$，即 $x\geqslant 2$. 所以 $x=2$. 将 $x=2$ 代入原式，得 $y=\sqrt{2-2}+\sqrt{2-2}+3=0+0+3=3$，所以 $y^x=3^2=9$.

**6.** 0 **7.** $x<1$ **8.** $\sqrt{8}$ **9.** (1) $<$ (2) $>$

**10.** **解**：(1) $x\geqslant 0$. (2) $x$ 为任意实数.
(3) $x\geqslant 2$. (4) $x=-2$.

**11.** **解**：(1) 原式 $=3^2\times(\sqrt{2})^2=9\times 2=18$.
(2) 原式 $=\left(-\frac{2}{3}\right)^2\times(\sqrt{3})^2=\frac{4}{9}\times 3=\frac{4}{3}$.
(3) 因为 $x^2+2>0$，所以 $(\sqrt{x^2+2})^2=x^2+2$.

**【拓展提优】**

**1.** D **2.** A

**3.** C **提示**：由题意，得 $\begin{cases}\frac{m}{2}-1\geqslant 0,\\ 3-m\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $2\leqslant m\leqslant 3$. 又

因为 $m,n$ 均为整数，所以 $m=2$ 或 $m=3$. 当 $m=2$ 时，$n=1$；当 $m=3$ 时，$n=\sqrt{\frac{1}{2}}$，不符合题意. 所以 $m+n=2+1=3$.

**4.** C　**5.** $x\geqslant 0$ 且 $x\neq 9$

**6.** $x>-3$ 且 $x\neq -2$

**7.** $-7$　**提示：**由题意，得 $d-3\geqslant 0, 3-d\geqslant 0$，所以 $d-3=0$，所以 $a-4=0, 2+b=0, c-5=0$，解得 $a=4, b=-2, c=5, d=3$，所以 $\frac{b-c}{a-d}=\frac{-2-5}{4-3}=-7$.

**8.** 5　**提示：**因为 $3<\sqrt{11}<4$，所以 $4<8-\sqrt{11}<5$，从而可得 $x=4, y=4-\sqrt{11}$. 所以 $2xy-y^2=y(2x-y)=(4-\sqrt{11})(4+\sqrt{11})=4^2-(\sqrt{11})^2=5$.

**9.** **解：**因为 $\sqrt{8-x}+\sqrt{x-8}$ 有意义，所以 $\begin{cases}8-x\geqslant 0,\\x-8\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $x=8$，所以 $y=\sqrt{8-x}+\sqrt{x-8}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，所以 $x+y=\frac{17}{2}$，$x-y=\frac{15}{2}$，$xy=4$. 所以 $\sqrt{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2}-\sqrt{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2}=\sqrt{\frac{(x+y)^2}{xy}}-\sqrt{\frac{(x-y)^2}{xy}}=\frac{17}{4}-\frac{15}{4}=\frac{1}{2}$.

**10.** **解：**(1) 原式 $=5-4+1=2$.

(2) 原式 $=13-8=5$.

(3) 原式 $=9-5+1=5$.

**11.** **解：【回顾旧知，类比求解】**

$x+1=4$　3　3

**【学会转化，解决问题】**

(1) 移项，得 $\sqrt{x-2}=3$. 去根号，两边同时平方，得 $x-2=9$，解得 $x=11$. 经检验，$x=11$ 是原方程的解.

(2) 移项，得 $\sqrt{4x^2+5x}=2x+1$. 去根号，两边同时平方，得 $4x^2+5x=4x^2+4x+1$，解得 $x=1$. 经检验，$x=1$ 是原方程的解.

## 课时训练 40　二次根式的概念(2)

**【基础巩固】**

**1.** B　**2.** D

**3.** D　**提示：**因为 $2<a<4$，所以 $\sqrt{1-2a+a^2}+\sqrt{a^2-8a+16}=|1-a|+|a-4|=a-1+4-a=3$.

**4.** B　**提示：**由数轴可知 $b<-1<0<a<1$，所以 $a-b>0, a+b<0$. 所以原式 $=|a-b|+|a+b|=a-b-a-b=-2b$.

**5.** A　**提示：**因为 $m<0$，所以原式 $=|-m-m|=|-2m|=-2m$.

**6.** $\pi-3$

**7.** 3　**提示：**由数轴可知 $-2<a<-1$，所以原式 $=\sqrt{(a-1)^2}+\sqrt{(a+2)^2}=1-a+a+2=3$.

**8.** $-1$(答案不唯一)　**9.** $x\leqslant 2$

**10.** 3　**提示：**因为点 $Q(3-a, 5-a)$ 在第二象限，所以 $3-a<0, 5-a>0$，解得 $3<a<5$. 所以原式 $=\sqrt{(a-2)^2}+\sqrt{(a-5)^2}=|a-2|+|a-5|=a-2-(a-5)=a-2-a+5=3$.

**11.** **解：**(1) 原式可化为 $|a+6|=a+6$，所以 $a+6\geqslant 0$，解得 $a\geqslant -6$.

(2) 原式可化为 $|2a-1|=1-2a$，所以 $2a-1\leqslant 0$，解得 $a\leqslant \frac{1}{2}$.

**12.** **解：**由数轴可知 $c<a<0<b$，则 $a-b<0$，$b-c>0$，所以原式 $=|a-b|-(b-c)+|c|=-a+b-b+c-c=-a$.

**【拓展提优】**

**1.** D

**2.** D　**提示：**由条件可得 $3x-5\geqslant 0$，即 $3x\geqslant 5$，则 $3x-1>0$，所以原式 $=\sqrt{(3x-1)^2}-(\sqrt{3x-5})^2=3x-1-(3x-5)=3x-1-3x+5=4$.

**3.** B　**提示：**原式可化简为 $|a-1|-|a-3|=2$. 当 $a\geqslant 3$ 时，$a-1-(a-3)=2$，符合题意；当 $1\leqslant a<3$ 时，$a-1-(3-a)=2a-4=2$，解得 $a=3$，不符合题意，舍去；当 $a<1$ 时，$1-a-(3-a)=-2\neq 2$，不符合题意，舍去.

**4.** $a\geqslant 2$

5. $a+b+c$　提示：原式 $=|a+b-c|+|b-c-a|+|b+c-a|$．根据三角形的三边关系，则原式 $=(a+b-c)+(a+c-b)+(b+c-a)=a+b+c$.

6. $x<1$　提示：原式 $=\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}=\frac{|x-1|}{x-1}$．因为 $\frac{|x-1|}{x-1}=-1$，所以 $x-1<0$，解得 $x<1$.

7. 4　提示：因为 $m$ 是 $\sqrt{5}$ 的小数部分，所以 $m=\sqrt{5}-2$．原式 $=\sqrt{\left(m-\frac{1}{m}\right)^2}=\left|m-\frac{1}{m}\right|$．因为 $m=\sqrt{5}-2$，所以 $\frac{1}{m}=\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}+2$，即 $\frac{1}{m}>m$，所以原式 $=-\left(m-\frac{1}{m}\right)=-m+\frac{1}{m}=-(\sqrt{5}-2)+(\sqrt{5}+2)=4$.

8. 解：(1) 原式 $=|3-\sqrt{11}|+|\sqrt{11}-4|=\sqrt{11}-3+4-\sqrt{11}=1$.

(2) 因为 $0<a<3$，所以原式 $=|a|-|a-3|=a-(3-a)=2a-3$.

9. 解：(1) 3　提示：因为 $2\leqslant a\leqslant 3$，所以 $a-2\geqslant 0$，$a-5\leqslant 0$，所以原式 $=|a-2|+|a-5|=a-2-(a-5)=3$.

(2) $3\leqslant a\leqslant 7$　提示：由题意可知 $|3-a|+|a-7|=4$．当 $a\leqslant 3$ 时，原式化为 $3-a-(a-7)=4$，解得 $a=3$，符合题意；当 $3<a<7$ 时，原式化为 $-(3-a)-(a-7)=4$，解得 $4=4$，符合题意；当 $a\geqslant 7$ 时，原式化为 $-(3-a)+(a-7)=4$，解得 $a=7$，符合题意．综上所述，$3\leqslant a\leqslant 7$.

(3) 由题意可知 $|a+1|+|a-5|=8$．当 $a\leqslant -1$ 时，原式化为 $-a-1-(a-5)=8$，解得 $a=-2$，符合题意；当 $-1<a<5$ 时，原式化为 $(a+1)-(a-5)=6\neq 8$，不符合题意，舍去；当 $a\geqslant 5$ 时，原式化为 $a+1+a-5=8$，解得 $a=6$，符合题意．综上所述，$a=-2$ 或 $a=6$.

## 课时训练 41　二次根式的乘除(1)

**【基础巩固】**

1. C　2. D　3. A　4. C　5. $10mn$

6. (1) 2　(2) 42

7. (1) $4x\sqrt{y}$　(2) $12\sqrt{3}a^2$　8. $\frac{5}{2}$

9. 解：(1) 原式 $=\frac{1}{3}\times 4\times\sqrt{72\times\frac{5}{12}}=\frac{4\sqrt{30}}{3}$.

(2) 原式 $=\frac{a^2}{a}\cdot\sqrt{2x^3\cdot 4x}=a\sqrt{2\times 4x^4}=2\sqrt{2}ax^2$.

(3) 原式 $=a\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)\cdot 2b\cdot\sqrt{\frac{x}{b}\cdot ax\cdot\frac{a}{b}}=-2b^2\cdot\sqrt{\frac{a^2x^2}{b^2}}=-2abx$.

10. 解：(1) 原式 $=\sqrt{4b}$.

(2) 原式 $=-\sqrt{-a}$.

**【拓展提优】**

1. C　2. C　3. A

4. $<$　提示：因为 $-3\sqrt{2}=-\sqrt{18}$，$-2\sqrt{3}=-\sqrt{12}$，且 $18>12$，所以 $\sqrt{18}>\sqrt{12}$，所以 $-\sqrt{18}<-\sqrt{12}$，所以 $-3\sqrt{2}<-2\sqrt{3}$.

5. $-2ab\sqrt{-2b}$　提示：因为 $a>0$，$b<0$，所以 $\sqrt{-8a^2b^3}=\sqrt{4a^2b^2}\cdot\sqrt{-2b}=|2ab|\cdot\sqrt{-2b}=-2ab\sqrt{-2b}$.

6. $1\leqslant x\leqslant 2$　7. $\sqrt{6}$

8. 解：(1) 原式 $=\sqrt{\left(\frac{65}{2}\right)^2-\left(\frac{33}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{65}{2}+\frac{33}{2}\right)\times\left(\frac{65}{2}-\frac{33}{2}\right)}=\sqrt{49\times 16}=28$.

(2) 原式 $=-ab\sqrt{a}$.

(3) 原式 $=2x\sqrt{1+13x^2y^2}$.

(4) 原式 $=\sqrt{3(m-2)^2}=\sqrt{3}(2-m)$.

9. 解：由勾股定理，得矩形的另一边长为 $\sqrt{(5\sqrt{3})^2-(\sqrt{48})^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$，所以矩形的面积为 $3\sqrt{3}\times\sqrt{48}=3\sqrt{3}\times 4\sqrt{3}=36$.

10. 解：(1) $=$　$=$　$=$　$=$　$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

(2) $\sqrt{8}\times\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{8\times\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2$.

(3) 因为 $x=\sqrt{3}$，$y=\sqrt{6}$，所以 $\sqrt{54}=$

$\sqrt{6\times3\times3}=\sqrt{6}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=x^2y$.

## 课时训练 42　二次根式的乘除(2)

【基础巩固】

1. B　2. B　3. A　4. C

5. (1) $2\sqrt{2}$　(2) $\frac{1}{2}$　6. $0\leqslant x<3$　7. $6\sqrt{3}$

8. 1 或 4 或 16　提示:$\sqrt{2}\div\sqrt{\frac{x}{8}}=\sqrt{\frac{16}{x}}$. 因为$\sqrt{\frac{16}{x}}$是整数,所以整数 $x$ 的值为 1 或 4 或 16.

9. 解:(1) 原式 $=-\frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{45y^2}{5y}}=-\frac{1}{3}\times\sqrt{9y}=-\sqrt{y}$.

(2) 原式$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}\times\frac{24}{5}}=\frac{\sqrt{8}}{2}=\sqrt{2}$.

(3) 原式$=\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{4a}\cdot\sqrt{ab^2\cdot\frac{b}{a}}=\frac{1}{8}\sqrt{b^3}=\frac{1}{8}b\sqrt{b}$.

10. 解:(1) 原式$=\sqrt{\frac{196}{81}}=\frac{14}{9}$.

(2) 原式$=\frac{4a\sqrt{3ab}}{a-b}$.

11. 解:由题意,可得$\begin{cases}4a-b+1=0,\\ \frac{1}{3}b-4a-3=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-1,\\ b=-3.\end{cases}$当 $a=-1$, $b=-3$ 时,原式$=-2\sqrt{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{3}\div\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=-2\sqrt{3}$.

【拓展提优】

1. D　2. B　3. B

4. D　提示:因为 $\sqrt{7}=a$, $\sqrt{70}=b$,所以 $\frac{ab}{10}=\frac{\sqrt{7}\times\sqrt{70}}{10}=\frac{\sqrt{490}}{\sqrt{100}}=\sqrt{4.9}$,故甲正确;$\frac{7a}{b}=\frac{7\sqrt{7}}{\sqrt{70}}=\sqrt{\frac{49\times7}{70}}=\sqrt{4.9}$,故乙正确;$\frac{7b}{10a}=\frac{7\sqrt{70}}{10\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{49\times70}}{\sqrt{700}}=\sqrt{\frac{49\times70}{700}}=\sqrt{4.9}$,故丙正确.

5. 14　提示:根据题意,得 $x-6\geqslant0$ 且 $9-x>0$,解得 $6\leqslant x<9$. 又因为 $x$ 为奇数,所以 $x=7$. 所以 $\sqrt{1+2x+x^2}+\sqrt{5x+1}=|x+1|+\sqrt{5x+1}=8+6=14$.

6. 解:原式$=\frac{\sqrt{x-2}}{x-2}\div\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^3-2x^2}}=\frac{\sqrt{x-2}}{x-2}\cdot\frac{x\sqrt{x-2}}{\sqrt{2}}=\frac{x(x-2)}{\sqrt{2}(x-2)}=\frac{x}{\sqrt{2}}(x>2)$. 取 $x=2\sqrt{2}$,则原式$=2$.(答案不唯一,但代入求值的 $x$ 需满足隐含条件 $x>2$)

7. 解:因为 $a>0$, $b>0$,所以 $a+b=2\sqrt{ab}$ 可化为$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=0$,所以$\sqrt{a}=\sqrt{b}$,即 $a=b$,所以原式$=\frac{\sqrt{3a}}{\sqrt{12a}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$.

8. (1) =　=

(2) 证明:因为$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}=\frac{a}{b}$, $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2=\frac{a}{b}$,所以$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2$. 又因为$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\geqslant0$, $\sqrt{\frac{a}{b}}\geqslant0$,所以$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$.

## 课时训练 43　二次根式的乘除(3)

【基础巩固】

1. D　2. D　3. C

4. $-\sqrt{2}-\sqrt{3}$　$\sqrt{3}-\sqrt{2}$　5. $\sqrt{xy}$　6. $\sqrt{2}$

7. 2　提示:由题意,得 $m=\sqrt{2}-1$,所以$\frac{1}{m}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$,所以$\sqrt{m^2+\frac{1}{m^2}-2}=\sqrt{\left(m-\frac{1}{m}\right)^2}=\left|m-\frac{1}{m}\right|=|\sqrt{2}-1-\sqrt{2}-1|=2$.

8. 解:(1) 原式$=\sqrt{\frac{12}{50}}=\frac{\sqrt{6}}{5}$.

(2) 原式$=\sqrt{\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{1\times6}{6\times6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

(3) 原式$=\sqrt{\frac{30a^2bc}{144b^2c^2}}=\frac{a\sqrt{30bc}}{12bc}$.

9. 解：原式 $=\frac{a+3}{a}\cdot\frac{6}{(a+3)^2}+\frac{2(a-3)}{(a+3)(a-3)}=\frac{6}{a(a+3)}+\frac{2}{a+3}=\frac{6}{a(a+3)}+\frac{2a}{a(a+3)}=\frac{2(a+3)}{a(a+3)}=\frac{2}{a}$. 当 $a=\sqrt{3}-1$ 时，原式 $=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$.

【拓展提优】

1. D 2. A

3. D 提示：由题意，可知 $\alpha\leqslant0,\beta=2$ 或 $\beta=3$. 当 $\alpha=-\frac{1}{2},\beta=2$ 时，$\sqrt{\alpha+\beta}=\sqrt{\frac{3}{2}}$ 不是最简二次根式，故选项 A 错误；当 $\beta=2$ 或 $\beta=3$ 时，$\sqrt{\beta^{-2}}$ 的值为 $\sqrt{\frac{1}{4}}$ 或 $\sqrt{\frac{1}{9}}$，均不是最简二次根式，故选项 B 错误；当 $\alpha=0$ 时，$\sqrt{\alpha^0}$ 无意义，当 $\alpha<0$ 时，$\sqrt{\alpha^0}=\sqrt{1}$，故选项 C 错误；当 $\beta=2$ 或 $\beta=3$ 时，$\sqrt{\beta}$ 的值为 $\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{3}$，均是最简二次根式，故选项 D 正确.

4. $\sqrt{30}$，$\sqrt{x^2+2}$，$\sqrt{x^2+y^2}$ 5. $\sqrt{3}+1$

6. $-\sqrt{3}-2$ 提示：原式 $=[(\sqrt{3}-2)\times(\sqrt{3}+2)]^{21}\times(\sqrt{3}+2)=(-1)^{21}\times(\sqrt{3}+2)=-\sqrt{3}-2$.

7. 2 提示：由题意，得 $3m-4\geqslant0$，解得 $m\geqslant\frac{4}{3}$. 因为 $m$ 为整数，所以 $m$ 的最小值为 2，且 $\sqrt{3m-4}=\sqrt{2}$ 是最简二次根式.

8. 解：(1) 原式 $=\frac{3\times\sqrt{6x}}{\sqrt{6x}\times\sqrt{6x}}=\frac{3\sqrt{6x}}{6x}=\frac{\sqrt{6x}}{2x}$.

(2) 原式 $=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2xy}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2xy}}{\sqrt{2xy}\times\sqrt{2xy}}=\frac{\sqrt{6xy}}{2xy}$.

(3) 原式 $=\frac{(m-n)\times\sqrt{m-n}}{\sqrt{m-n}\times\sqrt{m-n}}=\sqrt{m-n}$.

9. 解：(1) 猜想：$4\sqrt{\frac{4}{15}}=\sqrt{4+\frac{4}{15}}$.

验证：$4\sqrt{\frac{4}{15}}=\sqrt{\frac{4^3}{15}}=\sqrt{\frac{(4^3-4)+4}{4^2-1}}=\sqrt{\frac{4\times(4^2-1)+4}{4^2-1}}=\sqrt{4+\frac{4}{15}}$.

(2) $n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}=\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}$. 证明如下：

$n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}=\sqrt{\frac{n^3}{n^2-1}}=\sqrt{\frac{(n^3-n)+n}{n^2-1}}=\sqrt{\frac{n(n^2-1)+n}{n^2-1}}=\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}$.

10. 解：(1) $\sqrt{2}-1$

(2) 因为 $a=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$，所以 $a-1=\sqrt{2}$. 所以 $(a-1)^2=2$，即 $a^2-2a+1=2$. 所以 $a^2-2a=1$. 所以 $4a^2-8a+1=4(a^2-2a)+1=4\times1+1=5$.

(3) 原式 $=\frac{1}{2}\times[(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+\cdots+(\sqrt{101}-\sqrt{99})]=\frac{\sqrt{101}-1}{2}$.

## 课时训练 44　二次根式的加减(1)

【基础巩固】

1. A 2. D 3. B 4. B

5. $3\sqrt{2}$

6. 2 提示：因为 $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$，且最简二次根式 $\sqrt{m+1}$ 与 $\sqrt{12}$ 是同类二次根式，所以 $m+1=3$，解得 $m=2$.

7. $3\sqrt{S}$

8. 2 提示：原式 $=3\sqrt{2x}+\sqrt{2x}+\sqrt{2x}=10$，即 $5\sqrt{2x}=10$，所以 $x=2$.

9. 解：(1) 原式 $=2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-2=2\sqrt{2}-2$.

(2) 原式 $=4\sqrt{2}-4\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}-3\sqrt{2}=$

$\sqrt{2}-\dfrac{13\sqrt{3}}{3}$.

(3) 原式$=2\sqrt{x}+3\sqrt{x}-2\sqrt{x}=3\sqrt{x}$.

**10.** **解**:(1) 该矩形的周长为 $2a+2b=2\times\dfrac{\sqrt{32}}{2}+2\times\dfrac{\sqrt{18}}{2}=4\sqrt{2}+3\sqrt{2}=7\sqrt{2}$.

(2) 设该正方形的边长为 $x(x>0)$,则 $x^2=\dfrac{\sqrt{32}}{2}\times\dfrac{\sqrt{18}}{2}=\dfrac{4\sqrt{2}\times3\sqrt{2}}{2\times2}=6$. 所以 $x=\sqrt{6}$(负值已舍). 所以该正方形的周长为 $4\sqrt{6}$. 因为 $7\sqrt{2}=\sqrt{98}$,$4\sqrt{6}=\sqrt{96}$,$\sqrt{98}>\sqrt{96}$,所以 $7\sqrt{2}>4\sqrt{6}$,所以该矩形的周长大于该正方形的周长.

**【拓展提优】**

**1.** B **2.** D

**3.** A **提示**:因为 $m,n$ 是两个连续的自然数($m<n$),所以 $n=m+1$. 因为 $q=mn$,所以 $q=m(m+1)$,所以 $q+n=m(m+1)+m+1=(m+1)^2$,$q-m=m(m+1)-m=m^2$. 所以 $p=\sqrt{q+n}+\sqrt{q-m}=m+1+m=2m+1$,故 $p$ 的值总是奇数.

**4.** $-1-\sqrt{3}$

**5.** 4 或$\dfrac{1}{4}$ **提示**:因为 $\sqrt{27}=3\sqrt{3}$,所以$\sqrt{a}$和$\sqrt{b}$都是$\sqrt{3}$的同类二次根式. 因为 $a,b$ 均为正整数,所以 $a=3,b=12$ 或 $a=12,b=3$. 所以$\dfrac{b}{a}=4$ 或$\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{4}$.

**6.** $5\sqrt{2}$或$\sqrt{2}$或$-3\sqrt{2}$ **提示**:因为 $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$,所以$\sqrt{x}$和 $2\sqrt{y}$ 都是$\sqrt{2}$的同类二次根式. 因为 $x,y$ 均为整数,所以 $y=0,x=50$ 或 $y=2,x=18$ 或 $y=8,x=2$,所以$\sqrt{x}-2\sqrt{y}=\sqrt{50}-0=5\sqrt{2}$ 或$\sqrt{x}-2\sqrt{y}=\sqrt{18}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{x}-2\sqrt{y}=\sqrt{2}-2\sqrt{8}=-3\sqrt{2}$.

**7.** **解**:(1) 原式$=(12\sqrt{3}-2\sqrt{2})-(\sqrt{3}-2\sqrt{2})=11\sqrt{3}$.

(2) 原式$=\sqrt{5}+\sqrt{5}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}+3\sqrt{5}=\dfrac{9\sqrt{5}}{2}$.

(3) 原式$=\sqrt{2a}+a\sqrt{2a}-3a\sqrt{2a}=(1-2a)\sqrt{2a}$.

**8.** **解**:(1) $a+(n-1)\sqrt{b}$

(2) $S_{n+1}-S_n=(2n-1)b+2a\sqrt{b}$. 证明如下:

由(1)可知 $S_{n+1}=(a+n\sqrt{b})^2$,$S_n=[a+(n-1)\sqrt{b}]^2$,所以 $S_{n+1}-S_n=(a+n\sqrt{b})^2-[a+(n-1)\sqrt{b}]^2=[a+n\sqrt{b}+a+(n-1)\sqrt{b}]\cdot[a+n\sqrt{b}-a-(n-1)\sqrt{b}]=[2a+(2n-1)\sqrt{b}]\cdot\sqrt{b}=(2n-1)b+2a\sqrt{b}$.

(3) 由题意,可得 $T=S_2-S_1+S_3-S_2+S_4-S_3+\cdots+S_{n+1}-S_n=S_{n+1}-S_1=(a+n\sqrt{b})^2-a^2=(a+n\sqrt{b}+a)(a+n\sqrt{b}-a)=(2a+n\sqrt{b})\cdot n\sqrt{b}=2an\sqrt{b}+n^2b$.

## 课时训练 45 二次根式的加减(2)

**【基础巩固】**

**1.** B **2.** C **3.** B **4.** C **5.** $4\sqrt{2}$

**6.** $-3\sqrt{2}$ **7.** 12

**8.** $12-\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$ **提示**:因为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<1$,$\sqrt{8}>1$,$\sqrt{18}>1$,所以在"$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\square\sqrt{8}\square\sqrt{18}-4\sqrt{2}$"的"□"内填入运算符号后,要使计算所得的数最大,则"□"内分别填"+""×",所以$\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{8}\times\sqrt{18}-4\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}\times3\sqrt{2}-4\sqrt{2}=12-\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$.

**9.** **解**:(1) 原式$=6-4\sqrt{6}-5\sqrt{6}+20=26-9\sqrt{6}$.

(2) 原式$=6\div\sqrt{2}-2\sqrt{2}\times2=3\sqrt{2}-4\sqrt{2}=-\sqrt{2}$.

(3) 原式$=3-4+3+4\sqrt{3}+4=6+4\sqrt{3}$.

**10.** **解**:(1) 4 (2) $5-\sqrt{2}$

(3) 是. 理由如下:

因为$\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2+(\sqrt{2}-1)^2}{2}=3$，所以$a^2$与$b^2$是关于整数3的一组“关联数”.

【拓展提优】

1. B

2. B　提示：$\sqrt{x^2+6x+5}=\sqrt{(x+1)(x+5)}=\sqrt{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=1$.

3. D　4. C　5. $-\frac{13}{3}$　6. 72

7. 34　提示：因为$x=3+2\sqrt{2}$，$y=3-2\sqrt{2}$，所以$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\frac{(x+y)^2}{xy}-2=\frac{(3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2})^2}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}-2=\frac{36}{9-8}-2=34$.

8. 解：(1) 原式$=(\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2})(\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{2})=\sqrt{3}$.

(2) 原式$=\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}-\sqrt{\frac{1}{3}\times 12}=3-2=1$.

9. 解：(1) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$　$2+\sqrt{3}$

(2) 因为$DE$是边$AB$上的垂直平分线，所以$AE=BE$. 所以$\angle BAE=\angle B=15°$. 所以$\angle AEC=30°$. 在$Rt\triangle ACE$中，因为$AC=1$，$\angle AEC=30°$，所以$AE=2AC=2$，$CE=\sqrt{AE^2-AC^2}=\sqrt{3}$. 所以$BE=AE=2$，所以$BC=BE+CE=2+\sqrt{3}$. 在$Rt\triangle ACB$中，$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{1^2+(2+\sqrt{3})^2}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{2}+\sqrt{6}$.

## 提优专题6　二次根式的有理化问题

1. A　2. C

3. D　提示：因为$a=\sqrt{6}-\sqrt{5}=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$，$b=\sqrt{7}-\sqrt{6}=\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$，$c=2\sqrt{2}-\sqrt{7}=\sqrt{8}-\sqrt{7}=\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}$，且$\sqrt{6}+\sqrt{5}<\sqrt{7}+\sqrt{6}<\sqrt{8}+\sqrt{7}$，所以$\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}>\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}>\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}$，即$a>b>c$.

4. C　提示：$\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{20}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$，故①错误；$\frac{1}{5-\sqrt{5}}=\frac{5+\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}=\frac{5+\sqrt{5}}{25-5}=\frac{5+\sqrt{5}}{20}$，故②正确；③$\frac{b}{\sqrt{4}-\sqrt{3}}-\frac{c}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}=\frac{b(\sqrt{4}+\sqrt{3})}{(\sqrt{4}+\sqrt{3})(\sqrt{4}-\sqrt{3})}-\frac{c(\sqrt{4}-\sqrt{3})}{(\sqrt{4}+\sqrt{3})(\sqrt{4}-\sqrt{3})}=b(\sqrt{4}+\sqrt{3})-c(\sqrt{4}-\sqrt{3})=2b+\sqrt{3}b-2c+\sqrt{3}c=\sqrt{3}(b+c)+2b-2c$，若$\frac{b}{\sqrt{4}-\sqrt{3}}-\frac{c}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}=4\sqrt{3}+4$，则$\begin{cases}b+c=4,\\2b-2c=4,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=3,\\c=1,\end{cases}$所以$b=3c$，故③错误；因为$(\sqrt{43-m}-\sqrt{11-m})(\sqrt{43-m}+\sqrt{11-m})=43-m-(11-m)=32$，$\sqrt{43-m}-\sqrt{11-m}=4$，所以$\sqrt{43-m}+\sqrt{11-m}=32\div 4=8$，故④正确.

5. $\sqrt{2}+2$　6. $>$

7. $-2\ 026$　提示：由题意，得$m=\frac{2\ 025}{\sqrt{2\ 026}-1}=\frac{2\ 025\times(\sqrt{2\ 026}+1)}{(\sqrt{2\ 026}-1)\times(\sqrt{2\ 026}+1)}=\sqrt{2\ 026}+1$，所以$m^3-2m^2-2\ 025m-2\ 026=m^3-2m^2+m-2\ 026m-2\ 026=m(m-1)^2-2\ 026(m+1)=(\sqrt{2\ 026}+1)\times(\sqrt{2\ 026}+1-1)^2-2\ 026\times(\sqrt{2\ 026}+1+1)=2\ 026\sqrt{2026}+2\ 026-2\ 026\sqrt{2\ 026}-4\ 052=-2\ 026$.

8. $\frac{9}{10}$　提示：因为$\frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}$，…，$\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}=\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}$，所以$\frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{100}}=\frac{9}{10}$.

9. 解：(1) 解法一：① $\frac{4}{\sqrt{15}-\sqrt{11}}=$

$\frac{4(\sqrt{15}+\sqrt{11})}{(\sqrt{15}-\sqrt{11})(\sqrt{15}+\sqrt{11})}=\sqrt{15}+\sqrt{11}$.

② $\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}+\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=2-\sqrt{3}+\sqrt{2}+1=3-\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

解法二:① $\frac{4}{\sqrt{15}-\sqrt{11}}=\frac{(\sqrt{15})^2-(\sqrt{11})^2}{\sqrt{15}-\sqrt{11}}=\frac{(\sqrt{15}+\sqrt{11})(\sqrt{15}-\sqrt{11})}{\sqrt{15}-\sqrt{11}}=\sqrt{15}+\sqrt{11}$.

② $\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{2^2-(\sqrt{3})^2}{2+\sqrt{3}}+\frac{(\sqrt{2})^2-1^2}{\sqrt{2}-1}=\frac{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}}+\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1}=2-\sqrt{3}+\sqrt{2}+1=3-\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

(2) 原式$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})=\sqrt{100}-1=9$.

(3) 因为$a=\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}+2$,所以$a-2=\sqrt{5}$.所以$(a-2)^2=5$,即$a^2-4a+4=5$,所以$a^2-4a=1$.所以$a^4-4a^3-4a+3=a^2(a^2-4a)-4a+3=a^2-4a+3=1+3=4$.

**10. 解**:(1) $3\sqrt{2}+4$　$3\sqrt{2}+4$　$\frac{2}{3\sqrt{2}+4}$

(2) 因为$\sqrt{a}-\sqrt{a-1}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}$,$\sqrt{a+1}-\sqrt{a}=\frac{(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}$,且$\sqrt{a+1}+\sqrt{a}>\sqrt{a}+\sqrt{a-1}>0$,所以$\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}<\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}$,所以$\sqrt{a+1}-\sqrt{a}<\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$.

(3) 因为$2x+4\geqslant 0$,$2x+1\geqslant 0$,所以$x\geqslant -\frac{1}{2}$.因为$y=\sqrt{2x+4}-\sqrt{2x+1}=\frac{(\sqrt{2x+4}+\sqrt{2x+1})(\sqrt{2x+4}-\sqrt{2x+1})}{\sqrt{2x+4}+\sqrt{2x+1}}=\frac{3}{\sqrt{2x+4}+\sqrt{2x+1}}$,所以$x=-\frac{1}{2}$时,$\sqrt{2x+4}+\sqrt{2x+1}$有最小值$\sqrt{3}$,所以$y=\sqrt{2x+4}-\sqrt{2x+1}$的最大值为$\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.

**11. 解**:(1) $\frac{\sqrt{11}+3}{2}$

(2) $>$　**提示**:因为$\frac{1}{\sqrt{2\,025}-\sqrt{2\,023}}=\frac{\sqrt{2\,025}+\sqrt{2\,023}}{(\sqrt{2\,025}-\sqrt{2\,023})(\sqrt{2\,025}+\sqrt{2\,023})}=\frac{\sqrt{2\,025}+\sqrt{2\,023}}{2}$,$\frac{1}{\sqrt{2\,023}-\sqrt{2\,021}}=\frac{\sqrt{2\,023}+\sqrt{2\,021}}{(\sqrt{2\,023}-\sqrt{2\,021})(\sqrt{2\,023}+\sqrt{2\,021})}=\frac{\sqrt{2\,023}+\sqrt{2\,021}}{2}$,而$\frac{\sqrt{2\,025}+\sqrt{2\,023}}{2}>\frac{\sqrt{2\,023}+\sqrt{2\,021}}{2}$,所以$\frac{1}{\sqrt{2\,025}-\sqrt{2\,023}}>\frac{1}{\sqrt{2\,023}-\sqrt{2\,021}}$.因为$\sqrt{2\,025}-\sqrt{2\,023}>0$,$\sqrt{2\,023}-\sqrt{2\,021}>0$,所以$\sqrt{2\,025}-\sqrt{2\,023}<\sqrt{2\,023}-\sqrt{2\,021}$,即$\sqrt{2\,023}-\sqrt{2\,021}>\sqrt{2\,025}-\sqrt{2\,023}$.

(3) 设$m=\sqrt{8-x}-\sqrt{2-x}=2$,$n=\sqrt{8-x}+\sqrt{2-x}$,则$m\cdot n=(\sqrt{8-x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{8-x}+\sqrt{2-x})=(\sqrt{8-x})^2-(\sqrt{2-x})^2=8-x-(2-x)=6$.因为$m=2$,所以$n=\frac{6}{m}=3$,即$\sqrt{8-x}+\sqrt{2-x}=3$.

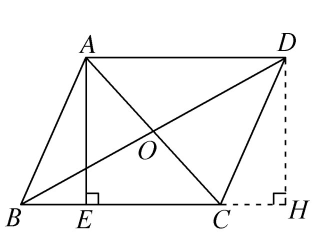
(4) 原式$=\frac{\sqrt{4}-\sqrt{1}}{(\sqrt{4}+\sqrt{1})(\sqrt{4}-\sqrt{1})}+$

$\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}+\cdots+\dfrac{\sqrt{2\,024}-\sqrt{2021}}{(\sqrt{2\,024}+\sqrt{2\,021})(\sqrt{2\,024}-\sqrt{2\,021})}+\dfrac{\sqrt{2\,025}-\sqrt{2\,022}}{(\sqrt{2\,025}+\sqrt{2\,022})(\sqrt{2\,025}-\sqrt{2\,022})}=\dfrac{\sqrt{4}-\sqrt{1}}{3}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}+\cdots+\dfrac{\sqrt{2\,024}-\sqrt{2\,021}}{3}+\dfrac{\sqrt{2\,025}-\sqrt{2\,022}}{3}=\dfrac{1}{3}(\sqrt{4}-\sqrt{1}+\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{2\,024}-\sqrt{2\,021}+\sqrt{2\,025}-\sqrt{2\,022})=\dfrac{1}{3}(-\sqrt{1}-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2\,023}+\sqrt{2\,024}+\sqrt{2\,025})=\dfrac{1}{3}(-1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2\,023}+2\sqrt{506}+45)=\dfrac{1}{3}(-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2\,023}+2\sqrt{506}+44)$.

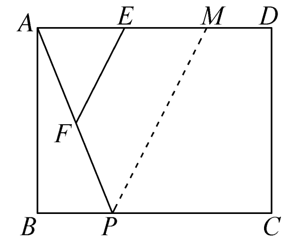
# 专题强化篇

## 专题强化 1　四边形的动点问题

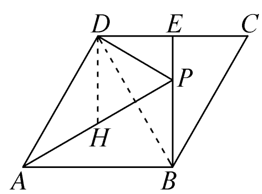
**1.** C　**提示**:如图,过点 $D$ 作 $DH\perp BC$,交 $BC$ 的延长线于点 $H$,则 $AE=DH$. 易证 $\mathrm{Rt}\triangle DCH\cong\mathrm{Rt}\triangle ABE(\mathrm{HL})$,所以 $CH=BE=x$,所以 $EC=BC-BE=y-x$, $BH=BC+CH=y+x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AEC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle BDH$ 中,由勾股定理,得 $AC^2-EC^2=AE^2=DH^2=BD^2-BH^2$,即 $2^2-(y-x)^2=(2\sqrt{3})^2-(y+x)^2$,解得 $xy=2$. 所以 $xy$ 的值不变.




**2.** A　**提示**:在边 $AD$ 上取一点 $M$,使得 $EM=AE$,连接 $MP$. 由条件可知 $EF$ 是$\triangle APM$ 的中位线,所以 $PM=2EF$. 所以当 $PM$ 的长取得最小值时,$EF$ 的长最小. 当 $PM\perp AD$ 时,$PM$ 的长最小,此时 $PM=AB=6$,所以 $EF$ 长的最小值为 3.




**3.** 1　**提示**:如图,连接 $BD$,在 $AP$ 上截取 $PH=DP$,连接 $DH$. 因为四边形 $ABCD$ 是菱形,$\angle C=60^\circ$,所以 $BC=CD=AB=2\sqrt{3}$,$\angle BAD=\angle C=60^\circ$,所以$\triangle ABD$ 和$\triangle BCD$ 均为等边三角形,所以 $AD=BD$,$\angle ADB=60^\circ$. 因为 $DP=PH$,$\angle APD=60^\circ$,所以$\triangle DPH$ 是等边三角形,所以 $DP=DH$,$\angle PDH=60^\circ$,所以$\angle ADH=60^\circ-\angle HDB=\angle BDP$,所以$\triangle ADH\cong\triangle BDP(\mathrm{SAS})$,所以 $AH=BP$. 设 $AH=BP=x$,$DP=PH=y$,则 $AP=x+y$. 因为$\triangle BCD$ 是等边三角形,$E$ 为 $CD$ 的中点,所以 $DE=CE=\frac{1}{2}CD=\sqrt{3}$,$BE\perp CD$,所以 $BE=\sqrt{BC^2-CE^2}=3$,所以 $PE=3-x$. 因为 $DC/\!/AB$,所以$\angle ABP=\angle CEB=90^\circ$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABP$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle DEP$ 中,$AB^2+BP^2=AP^2$,$PE^2+DE^2=DP^2$,即 $12+x^2=(x+y)^2$,$(3-x)^2+3=y^2$,解得 $x=y=2$,所以 $PE=3-x=1$.




**4.** 2 或 $\frac{19}{3}$ 或 8　**提示**:要使点 $P$,$Q$ 所在的直线平分矩形 $ABCD$ 的面积,则点 $P$,$Q$ 所在的直线需经过点 $O$. ①如图 1,当点 $P$ 在边 $CD$ 上时,因为四边形 $ABCD$ 是矩形,所以 $AB/\!/CD$,$OB=OD$,$CD=AB=8$ cm,所以$\angle OBQ=\angle ODP$. 因为$\angle DOP=\angle BOQ$,所以$\triangle DOP\cong\triangle BOQ(\mathrm{ASA})$,所以 $BQ=DP$. 由题意,得 $BQ=t$ cm,$CP=3t$ cm,所以 $DP=CD-CP=(8-3t)$ cm,所以 $t=8-3t$,解得 $t=2$. ②如图 2,当点 $P$ 与点 $O$ 重合时,易得 $AC=10$ cm. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形,所以 $OA=OC=5$ cm,所以运动时间 $t=(8+6+5)\div3=\frac{19}{3}(\mathrm{s})$. ③当点 $P$ 与点 $C$ 重合时,点 $Q$ 与点 $A$ 重合,如图 3. 此时运动

时间 $t=(8+6+10)\div 3=8(\text{s})$. 综上所述,$t$ 的值为 $2$ 或 $\frac{19}{3}$ 或 $8$.

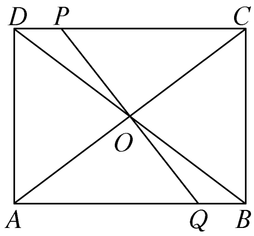



图 1

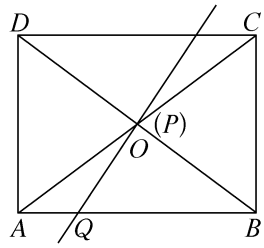



图 2

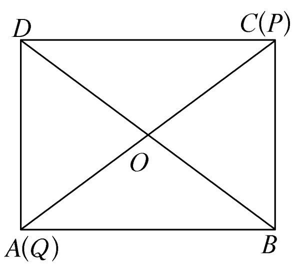
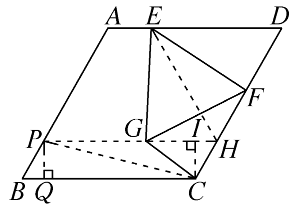



图 3

**5.** $\sqrt{3}\leqslant d\leqslant 2\sqrt{21}$ **提示**:如图,在 $CD$ 上截取 $DH=DE$,连接 $HG$ 并延长,交 $AB$ 于点 $P$,连接 $EH$. 因为四边形 $ABCD$ 是菱形,$AB=10$,$\angle B=60°$,所以 $BC=CD=AD=AB=10$,$\angle D=\angle B=60°$,所以 $\triangle EDH$ 是等边三角形,所以 $EH=ED$,$\angle DEH=\angle DHE=60°$. 因为 $\triangle EFG$ 是等边三角形,所以 $EG=EF$,$\angle FEG=60°$,所以 $\angle HEG=60°-\angle FEH=\angle DEF$. 所以 $\triangle HEG\cong\triangle DEF$(SAS),所以 $\angle EHG=\angle D=60°$,$GH=FD$,所以 $\angle PHC=180°-\angle EHG-\angle DHE=60°=\angle D$,所以 $PH/\!/AD/\!/BC$. 因为 $PB/\!/CH$,所以四边形 $PBCH$ 是平行四边形. 连接 $PC$,过点 $C$ 作 $CI\perp PH$ 于点 $I$,过点 $P$ 作 $PQ\perp BC$ 于点 $Q$. 易证四边形 $CQPI$ 是矩形. 因为 $\angle PHC=60°$,所以 $\angle HCI=30°$. 所以 $HI=\frac{1}{2}CH$. 因为 $BP=CH=CD-DH=AD-DE=AE=2$,所以 $HI=1$,所以 $PQ=CI=\sqrt{3}$,同理可得 $BQ=\frac{1}{2}BP=1$,所以 $CQ=BC-BQ=9$,所以 $PC=\sqrt{PQ^2+CQ^2}=\sqrt{3+81}=2\sqrt{21}$. 易知点 $G$ 在线段 $PH$ 上运动,所以 $CI\leqslant CG\leqslant CP$,所以 $CG$ 的长度 $d$ 的取值范围是 $\sqrt{3}\leqslant d\leqslant 2\sqrt{21}$.




**6.** $\frac{20}{3}$ 或 $8$ **提示**:因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形,所以 $PD/\!/BQ$. 若要以 $P,D,Q,B$ 四点为顶点的四边形为平行四边形,则 $PD=BQ$. 当 $5<t\leqslant\frac{15}{2}$ 时,$AP=t$ cm,$PD=(10-t)$cm,$BQ=(30-4t)$cm,所以 $10-t=30-4t$,解得 $t=\frac{20}{3}$;当 $\frac{15}{2}<t<10$ 时,$AP=t$ cm,$PD=(10-t)$cm,$BQ=(4t-30)$cm,所以 $10-t=4t-30$,解得 $t=8$. 综上所述,当 $t=\frac{20}{3}$ 或 $t=8$ 时,以 $P,D,Q,B$ 四点为顶点的四边形为平行四边形.

**7.** **解**:(1) 当四边形 $ABQP$ 是矩形时,$BQ=AP$,即 $t=8-t$,解得 $t=4$. 所以当 $t=4$ 时,四边形 $ABQP$ 是矩形.

(2) 当四边形 $AQCP$ 是菱形时,$AQ=CQ$,即 $\sqrt{4^2+t^2}=8-t$,解得 $t=3$. 所以当 $t=3$ 时,四边形 $AQCP$ 是菱形.

(3) 当 $t=3$ 时,$CQ=5$,所以菱形 $AQCP$ 的周长为 $4CQ=20$ cm,面积为 $4\times 5=20(\text{cm}^2)$.

**8.** (1) **解**:由折叠的性质知 $EC'=EC$,所以 $\angle EC'C=\angle ECC'=15°$,所以 $\angle BEC'=\angle ECC'+\angle EC'C=30°$. 因为 $EC'\perp AB$,所以 $\angle EC'B=90°$,所以 $BE=2BC'$. 由勾股定理,得 $EC'=\sqrt{BE^2-(BC')^2}=\sqrt{3}BC'$,所以 $EC=EC'=\sqrt{3}BC'$. 所以 $BC=BE+EC=2BC'+\sqrt{3}BC'=4+2\sqrt{3}$,所以 $BC'=2$,所以 $EC=2\sqrt{3}$.

(2) **证明**:由折叠的性质知 $\angle CEF=\angle C'EF$,$\angle EFD=\angle EFD'$. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $AD/\!/BC$,$\angle D=\angle B$,所以 $\angle CEF+\angle EFD=180°$. 所以 $\angle C'EF+\angle EFD'=180°$,所以 $C'E/\!/$

$D'F$. 所以$\angle BC'E=\angle D'=\angle D=\angle B$. 所以$BE=C'E=CE$,所以$C'E=\frac{1}{2}BC$. 因为$AD \parallel BC$,点$D'$在$BA$延长线上,所以$\angle D'=\angle B=\angle D'AF$,所以$AF=D'F=DF$,所以$D'F=\frac{1}{2}AD$. 因为$AD=BC$,所以$C'E=D'F$. 又因为$C'E \parallel D'F$,所以四边形$EC'D'F$是平行四边形.

## 专题强化 2　四边形的折叠问题

**1.** A

**2.** B　**提示**:由条件,易证$Rt\triangle EDF \cong Rt\triangle EGF$,所以$DF=GF$. 设$DF=GF=x$,则$BF=6+x$,$CF=6-x$. 在$Rt\triangle BCF$中,根据勾股定理,得$BC^2+CF^2=BF^2$,即$(4\sqrt{6})^2+(6-x)^2=(6+x)^2$,解得$x=4$. 所以$DF$的长为 4.

**3.** D　**提示**:如图 1,当$A'E$在$AC$的上方时,连接$BD$,则$BD$过$AC$的中点$E$,设$A'E$交$AB$于点$G$,则$\angle A'GF=90°$,$A'F=AF$. 因为$AB=4$,$AD=3$,所以$AC=5$. 易求$A'E=AE=\frac{1}{2}AC=\frac{5}{2}$,$AG=\frac{1}{2}AB=2$,所以$EG=\sqrt{AE^2-AG^2}=\frac{3}{2}$,所以$A'G=A'E-EG=1$. 设$AF=A'F=x$,则$FG=2-x$. 在$Rt\triangle A'GF$中,$A'F^2=A'G^2+FG^2$,即$x^2=1^2+(2-x)^2$,解得$x=\frac{5}{4}$,所以$AF=\frac{5}{4}$. 如图 2,当$A'E$在$AC$的下方时,连接$BD$,则$BD$过$AC$的中点$E$,射线$A'E$交$AB$于点$G$. 同理可得$\angle A'GF=90°$,$A'F=AF$,$A'E=\frac{5}{2}$,$AG=2$,$EG=\frac{3}{2}$,$A'G=A'E+EG=4$. 设$AF=A'F=x$,则$FG=x-2$. 在在$Rt\triangle A'GF$中,$A'F^2=A'G^2+FG^2$,即$x^2=4^2+(x-2)^2$,解得$x=5$,所以$AF=5$. 综上所述,$AF$的长为 5 或$\frac{5}{4}$.

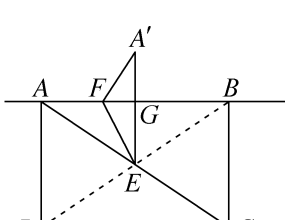


图 1

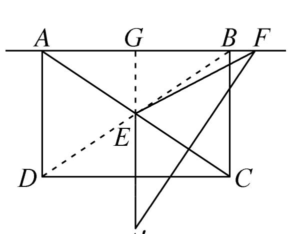


图 2

**4.** 4 或 5　**提示**:①如图 1,经历三次折叠后,四边形$IJHF$为菱形. 因为四边形$ABCD$为菱形,所以$AB=AD=BC=CD=3$,所以$DF=CE=a-3$. 因为四边形$GCEH$为菱形,所以$GC=CE=a-3$,所以$FH=DG=3-(a-3)=6-a$. 因为四边形$DGJI$为菱形,所以$DI=DG=6-a$,所以$IF=a-3-(6-a)=2a-9$. 因为四边形$IJHF$为菱形,所以$IF=HF$,即$6-a=2a-9$,解得$a=5$. ②如图 2,经历三次折叠后,四边形$DIHF$为菱形. 因为四边形$ABCD$为菱形,所以$AB=AD=BC=CD=3$,所以$DF=CE=a-3$. 因为四边形$JCEG$,$IJGH$,$DIHF$都为菱形,所以$DI=\frac{1}{3}CD=1$. 因为四边形$IDFH$为菱形,所以$DF=DI$,即$a-3=1$,解得$a=4$. 综上所述,$a$的值为 4 或 5.

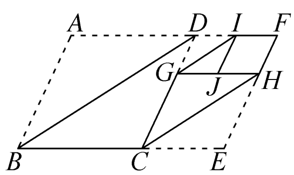


图 1

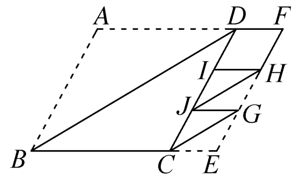


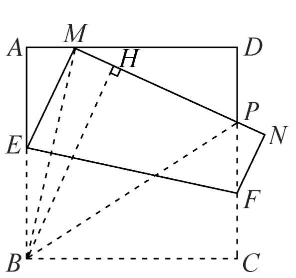
图 2

**5.** ②③　**提示**:因为$CD$是定长线段,而通过作图可发现,$CQ$的长不固定,所以$CQ$不一定等于$CD$,故①错误. 因为$PM \parallel CN$,所以$\angle PMN=\angle MNC$. 由折叠可知,$\angle MNC=\angle PNM$,$PN=CN$,$PM=CM$. 所以$\angle PMN=\angle PNM$. 所以$PM=PN=CN=CM$,所以四边形$CMPN$是菱形,故②正确. 当点$P$与点$A$重合时,在$Rt\triangle ABC$中,由勾股定理,得$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=4\sqrt{5}$,所以$CQ=\frac{1}{2}AC=2\sqrt{5}$. 设$BN=x$,则$AN=CN=8-x$. 在$Rt\triangle ABN$中,由勾股定理,得$AB^2+BN^2=AN^2$,即$4^2+x^2=(8-x)^2$,解得$x=3$. 所以$CN=5$,所以$QN=\sqrt{CN^2-CQ^2}=\sqrt{5}$. 所以$MN=2QN=2\sqrt{5}$,故③正确. 由②可知,$S=\frac{1}{4}S_{菱形CMPN}$. 当$MN$过点$D$时,四边形$CMPN$的面积最小,则$S$的最小值为$S=\frac{1}{4}S_{菱形CMPN}=\frac{1}{4}\times4\times4=4$;当点$P$与点$A$重合时,四边形$CMPN$的面积最大,则$S$的最大值为$S=\frac{1}{4}\times5\times4=5$,所以$4 \leqslant S \leqslant 5$,故④错误.

**6.** **解**:(1) 根据折叠的性质,得$ME=BE=$

$x$，所以 $AE=1-x$. 在 Rt△$MAE$ 中，由勾股定理，得 $AE^2+AM^2=ME^2$，即 $(1-x)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=x^2$，解得 $x=\frac{5}{9}$.

(2) △$PDM$ 的周长不会发生变化. 如图，连接 $BM$，$BP$，过点 $B$ 作 $BH\perp MN$ 于点 $H$. 根据折叠的性质，得 $\angle EMN=\angle ABC$，$ME=BE$，所以 $\angle EBM=\angle EMB$. 所以 $\angle ABC-\angle EBM=\angle EMN-\angle EMB$，即 $\angle MBC=\angle BMN$. 因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $AD\parallel BC$，所以 $\angle AMB=\angle MBC=\angle BMN$. 因为 $BH\perp MN$，所以 $\angle A=\angle BHM=90°$. 所以 $\triangle ABM\cong\triangle HBM$，所以 $AM=HM$，$HB=AB=CB$. 易证 Rt△$BHP\cong$ Rt△$BCP$，所以 $HP=CP$. 因为 $C_{\triangle PDM}=MD+DP+MP=MD+DP+MH+HP=MD+DP+AM+CP=AD+DC=2$，所以△$PDM$ 的周长不会发生变化，周长为定值 2.




**7. 解：**(1) ①65

②2　**提示：**如图 1，因为四边形 $ABCD$ 为矩形，所以 $AD=BC=10$，$CD=AB=6$，$\angle B=\angle C=90°$. 由折叠的性质，得 $BQ=EQ$，$AE=AB=6$，$\angle AEQ=\angle B=90°$. 因为点 $E$ 恰好在线段 $QD$ 上，所以 $\angle AED=180°-\angle AEQ=90°$. 在 Rt△$AED$ 中，由勾股定理，得 $DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=8$. 设 $BQ=EQ=x$，则 $CQ=10-x$，$DQ=8+x$. 在 Rt△$CDQ$ 中，$CD^2+CQ^2=DQ^2$，即 $6^2+(10-x)^2=(8+x)^2$，解得 $x=2$，即 $BQ=2$.

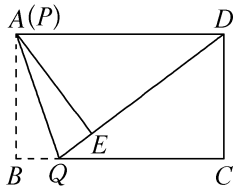



**图 1**

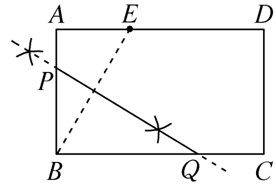



**图 2**

(2) ①如图 2，$PQ$ 即为所求.

②补全图形如图 3 所示. 证明如下：

由折叠的性质，得 $PB=PE$，$\angle BPF=\angle EPF$. 因为 $PB\parallel EF$，所以 $\angle BPF=\angle EFP$. 所以 $\angle EPF=\angle EFP$，所以 $PE=EF$. 所以 $PB=EF$. 所以四边形 $PBFE$ 是平行四边形. 又因为 $PB=PE$，所以四边形 $PBFE$ 是菱形.

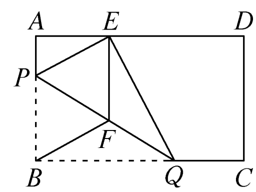



**图 3**

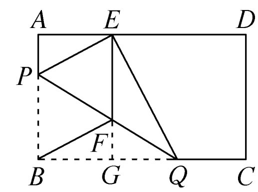



**图 4**

③$\frac{15}{4}$　$\frac{15}{2}$　**提示：**设 $PB=PE=y$，则 $AP=6-y$. 在Rt△$AEP$ 中，$AE^2+AP^2=PE^2$，即 $3^2+(6-y)^2=y^2$，解得 $y=\frac{15}{4}$，即菱形 $PBFE$ 的边长为 $\frac{15}{4}$. 如图 4，延长 $EF$ 交 $BC$ 于点 $G$，则四边形 $ABGE$ 是矩形，所以 $EG=AB=6$，$BG=AE=3$，$EG\perp BC$. 由折叠的性质，得 $BQ=EQ$. 设 $BQ=EQ=a$，则 $GQ=a-3$. 在 Rt△$EGQ$ 中，$EG^2+GQ^2=EQ^2$，即 $6^2+(a-3)^2=a^2$，解得 $a=\frac{15}{2}$，即 $BQ=\frac{15}{2}$.

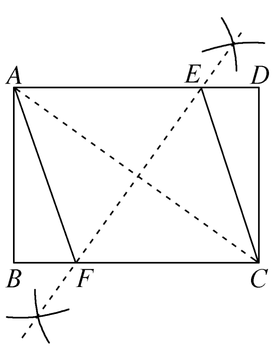
(3) $\frac{34}{5}$或$\frac{20}{3}$　**提示：**由折叠的性质，得 $BQ=EQ$. 设 $BQ=EQ=m$，则 $CQ=10-m$. 分两种情况讨论：①当 $DQ=EQ=m$ 时，在 Rt△$CDQ$ 中，$CD^2+CQ^2=DQ^2$，即 $6^2+(10-m)^2=m^2$，解得 $m=\frac{34}{5}<10$，符合题意，即 $BQ=\frac{34}{5}$. ②当 $DE=DQ$ 时，过点 $D$ 作 $DF\perp EQ$ 于点 $F$，则 $FQ=\frac{1}{2}EQ=\frac{m}{2}$. 由折叠的性质，得 $\angle PQB=\angle PQE$. 因为 $DQ\perp PQ$，所以 $\angle PQB+\angle CQD=90°=\angle PQE+\angle FQD$. 所以 $\angle CQD=\angle FQD$. 易证△$CDQ\cong$△$FDQ$，所以 $CQ=FQ$，即 $10-m=\frac{m}{2}$，解得 $m=\frac{20}{3}<10$，符合题意，即 $BQ=\frac{20}{3}$. 综上所述，$BQ$ 的长为 $\frac{34}{5}$或$\frac{20}{3}$.

# 专题强化 3 几何作图综合

1. B **提示**：由题图 1 作图可知 $AE$ 平分 $\angle DAB$，所以 $\angle DAE=\angle EAF$. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AB /\!/ CD$，所以 $\angle DEA=\angle EAF$，所以 $\angle DAE=\angle DEA$，所以 $AD=DE$. 由题图 2 作图可知 $DF\perp AE$，所以 $\angle ADF=\angle EDF$. 同理可证 $AD=AF$，所以 $DE=AF$. 因为 $DE /\!/ AF$，所以四边形 $ADEF$ 是平行四边形. 因为 $AD=DE$，所以四边形 $ADEF$ 是菱形. 所以四边形 $ADEF$ 的周长为 $4\times3=12$.

2. $(1,6)$或$(9,6)$或$(7,2)$

3. **解**：(1) 如图，连接 $AC$，作线段 $AC$ 的垂直平分线，交 $AD$ 于点 $E$，交 $BC$ 于点 $F$，连接 $AF$，$CE$，则四边形 $AECF$ 即为所求.




(2) 因为四边形 $AECF$ 为菱形，所以 $AF=CF=CE=AE$. 因为四边形 $ABCD$ 为矩形，所以 $\angle B=90^\circ$，$BC=AD=8$. 设 $AF=CF=x$，则 $BF=BC-CF=8-x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABF$ 中，由勾股定理，得 $AB^2+BF^2=AF^2$，即 $4^2+(8-x)^2=x^2$，解得 $x=5$，所以 $CF=5$，所以菱形 $AECF$ 的面积为 $CF\cdot AB=5\times4=20$.

4. **解**：(1) 如图 1，四边形 $ABCD$ 即为所求. 作法：作 $\angle MBN=\alpha$，作射线 $BT$ 平分 $\angle MBN$，在射线 $BT$ 上截取线段 $BD$，使得 $BD=m$，作线段 $BD$ 的垂直平分线交 $BM$ 于点 $A$，交 $BN$ 于点 $C$，连接 $AD$，$CD$，则四边形 $ABCD$ 即为所求.

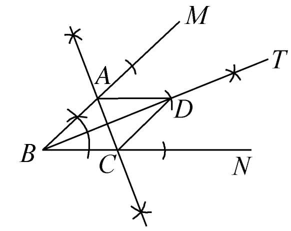



图 1

(2) 如图 2，四边形 $ABCD$ 即为所求. 作法：作 $\angle MAN=180^\circ-\alpha$，作射线 $AT$ 平分 $\angle MAN$，在射线 $AT$ 上截取线段 $AC$，使得 $AC=m$，作线段 $AC$ 的垂直平分线交 $AM$ 于点 $B$，交 $AN$ 于点 $D$，连接 $BC$，$CD$，则四边形 $ABCD$ 即为所求.

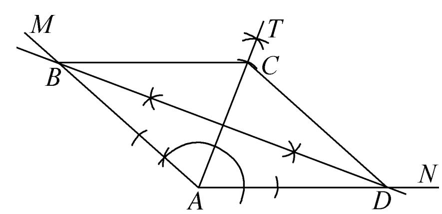



图 2

5. **解**：(1) 如图 1，四边形 $ABCD$ 即为所求.

(2) 15 **提示**：观察可知，$AB=BC=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$，所以平行四边形 $ABCD$ 为菱形. 连接 $BD$. 因为 $AC=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$，$BD=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$，所以 $S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times5\sqrt{2}=15$.

(3) 如图 2，连接 $DE$，交 $AC$ 于点 $G$，则点 $G$ 即为所求.

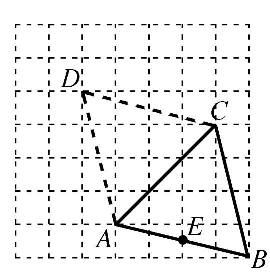



图 1

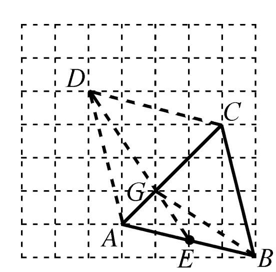



图 2

6. **解**：(1) 如图 1，四边形 $POMQ$ 即为所求.

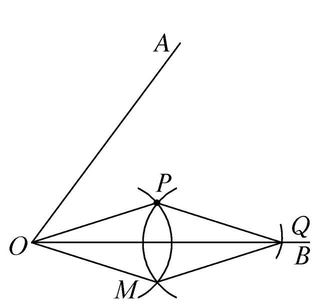



图 1

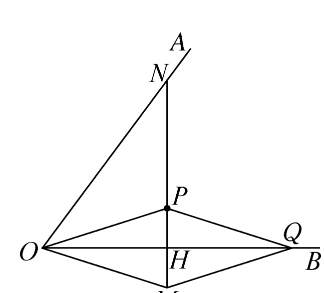



图 2

(2) 如图 2,设 $MP$,$OQ$ 交于点 $H$. 因为四边形 $POMQ$ 是菱形,所以 $PM\perp OQ$,设 $PH=HM=x$. 因为 $MN=ON=n$,所以 $NH=MN-HM=n-x$. 在 Rt$\triangle OHP$ 和 Rt$\triangle OHN$ 中,由勾股定理,得 $OP^2-HP^2=OH^2=ON^2-NH^2$,所以 $m^2-x^2=n^2-(n-x)^2$,所以 $x=\frac{m^2}{2n}$,所以 $PH=\frac{m^2}{2n}$,$PM=2PH=\frac{m^2}{n}$. 所以 $OH=\sqrt{OP^2-PH^2}=\sqrt{m^2-\left(\frac{m^2}{2n}\right)^2}=\frac{m\sqrt{4n^2-m^2}}{2n}$,所以 $OQ=2OH=\frac{m\sqrt{4n^2-m^2}}{n}$. 所以菱形 $POMQ$ 的面积为 $\frac{1}{2}\cdot\frac{m\sqrt{4n^2-m^2}}{n}\cdot\frac{m^2}{n}=\frac{m^3\sqrt{4n^2-m^2}}{2n^2}$.

**7.** (1) **证明**:因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以 $AB=BC=CD=AD$,$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90^\circ$. 因为 $AE=BF=CG$,所以 $AB-AE=BC-BF$,即 $BE=CF$. 所以 $\triangle BEF\cong\triangle CFG$(SAS),所以 $EF=FG$. 同理可得 $EF=FG=GH=EH$,所以四边形 $EFGH$ 是菱形. 因为 $\triangle BEF\cong\triangle CFG$,所以 $\angle BEF=\angle CFG$. 因为 $\angle BEF+\angle BFE=90^\circ$,所以 $\angle BFE+\angle CFG=90^\circ$,所以 $\angle EFG=90^\circ$,所以菱形 $EFGH$ 是正方形,即四边形 $EFGH$ 是四边形 $ABCD$ 的内接正方形.

(2) ①**解**:作法一:如图 1,连接 $AC$,$BD$ 交于点 $O$;过点 $O$ 作 $OK\perp AD$ 于点 $K$;以点 $K$ 为圆心,$OK$ 的长为半径作圆,交直线 $AD$ 于点 $M$,$Q$;过点 $M$ 作 $MN\perp BC$ 于点 $N$,交边 $AB$ 于点 $E$,过点 $Q$ 作 $QP\perp BC$,交 $BC$ 的延长线于点 $P$,交边 $CD$ 于点 $G$,则四边形 $MNPQ$ 为正方形(通过 $\angle QMN=\angle MNP=\angle NPQ=\angle PQM=90^\circ$,$MQ=2OK=MN$ 证明),且 $ME=PG$[先通过 $\triangle OAM\cong\triangle OCP$(SAS)得到 $AM=CP$,再通过 $\triangle AME\cong\triangle CPG$(ASA)证得,或通过中心对称性证明];以点 $N$ 为圆心,$ME$ 的长为半径作弧,交边 $BC$ 于点 $F$,以点 $Q$ 为圆心,$ME$ 的长为半径作弧,交边 $AD$ 于点 $H$,则 $ME=NF=PG=QH$;连接 $EF$,$FG$,$GH$,$HE$,同(1)可证,四边形 $EFGH$ 为正方形,即四边形 $EFGH$ 即为所求.

作法二:如图 2,连接 $AC$,$BD$ 交于点 $O$;过点 $O$ 作 $OP\perp AD$ 于点 $P$;过点 $O$ 作 $OQ\perp OP$,且 $OQ=OP$;过点 $Q$ 作 $QE\perp OQ$,交 $AB$ 于点 $E$;在 $PD$ 上截取 $PH=QE$[通过 $\triangle OQE\cong\triangle OPH$(SAS)得到 $OE=OH$,$\angle EOQ=\angle HOP$,从而得到 $OE\perp OH$];连接 $EO$,$HO$ 并延长,分别交 $CD$,$BC$ 于点 $G$,$F$,连接 $EF$,$FG$,$GH$,$EH$. 由平行四边形的中心对称性可知 $OG=OE=OH=OF$. 所以 $EG$ 与 $FH$ 互相垂直平分,故四边形 $EFGH$ 是正方形.(方法不唯一,也可在 $AD$ 上适当位置取点 $P$,作图依次按 $OQ\perp OP$,$OQ=OP$,$\angle OQE=\angle OPH$,$PH=QE$ 确定点 $E$,$H$ 后,作出正方形 $EFGH$ 即可)

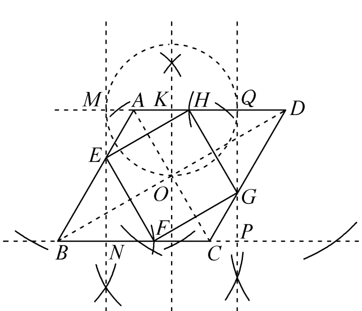


图 1

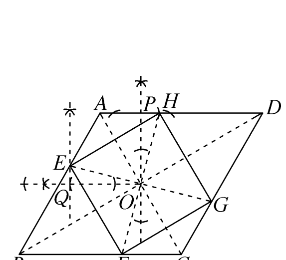


图 2

②$\sqrt{26}$ **提示**:如图 3,过点 $E$ 作 $MN\perp BC$ 于点 $N$,交 $DA$ 的延长线于点 $M$,过点 $G$ 作 $PQ\perp AD$ 于点 $Q$,交 $BC$ 的延长线于点 $P$. 由四边形 $EFGH$ 为正方形,易证 $\triangle MEH\cong\triangle NFE\cong\triangle PGF\cong$

$\triangle QHG$，所以 $ME=NF=PG=QH$，$MH=NE=PF=QG$. 所以 $MN=NP=PQ=QM$. 因为 $AD//BC$，$AB//CD$，所以 $\angle MAE=\angle B=\angle PCG=45°$. 所以 $AM=ME$，$BN=NE$. 在 Rt$\triangle BNE$ 和Rt$\triangle AME$ 中，由勾股定理，得 $BE=\sqrt{2}NE$，$AE=\sqrt{2}ME$. 所以 $AB=AE+BE=\sqrt{2}(ME+NE)$，即 $6\sqrt{2}=\sqrt{2}MN$，所以 $ME+NE=MN=6$，所以 $BF=BN+NF=NE+ME=6$，所以 $CF=BC-BF=4$. 设 $ME=x$，则 $NF=PG=ME=x$，$PF=NE=6-x$. 在 Rt$\triangle PCG$ 中，$PC=PG=x$，所以 $PF=PC+CF=x+4$，所以 $6-x=x+4$，解得 $x=1$. 所以 $NE=5$，$NF=1$. 在 Rt$\triangle NEF$ 中，$EF=\sqrt{NE^2+NF^2}=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$.

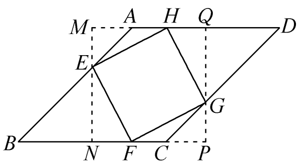



**图 3**

## 专题强化 4　分式与根式

**1.** A　**2.** C　**3.** D

**4.** B　**提示**：原式$=1-\frac{1}{x+1}$. 因为 $x$ 为正整数，所以 $0<\frac{1}{x+1}\leqslant\frac{1}{2}$，所以$\frac{1}{2}\leqslant 1-\frac{1}{x+1}<1$.

**5.** A

**6.** C　**提示**：因为当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，分式无意义，所以 $2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+a=0$，解得 $a=1$. 故选项 A 正确. 所以原分式为$\frac{x+b}{2x+1}$. 当 $x=2$ 时，分式的值为 0，所以 $\frac{2+b}{2\times2+1}=0$，解得 $b=-2$. 故选项 B 正确. 所以原分式为$\frac{x-2}{2x+1}$. 当 $x=0$ 时，$p=\frac{0-2}{2\times0+1}=-2$. 故选项 C 错误. 当 $x=q$ 时，$\frac{q-2}{2q+1}=1$，解得 $q=-3$，经检验，$q=-3$ 是原方程的解. 故选项 D 正确.

**7.** 1　**8.** $-1$

**9.** $m<2$ 且 $m\neq1$　**提示**：去分母，得 $x-2(x-1)=m$，解得 $x=2-m$. 因为原方程的解为正数，所以 $x>0$ 且 $x-1\neq0$，即 $2-m>0$ 且 $2-m-1\neq0$，解得 $m<2$ 且 $m\neq1$.

**10.** $>$　**提示**：根据勾股定理，得 $AD=\sqrt{AC^2+DC^2}=\sqrt{10}$，$AB=\sqrt{17}$. 因为 $AB$，$AD$，$BD$ 是$\triangle ADB$ 的三条边，所以 $\sqrt{10}+1>\sqrt{17}$.

**11.** $m\geqslant9$　**提示**：根据题意，得 $x^2-6x+m\geqslant0$，即 $(x-3)^2-9+m\geqslant0$，则 $(x-3)^2\geqslant9-m$. 因为 $(x-3)^2\geqslant0$，所以 $9-m\leqslant0$，解得 $m\geqslant9$.

**12.** 0　**提示**：将 $m$ 化简可得 $m=\sqrt{2\ 026}+1$，则原式$=m^3(m^2-2m-2\ 025)=m^3[(m-1)^2-2\ 026]=m^3[(\sqrt{2\ 026}+1-1)^2-2\ 026]=0$.

**13.** $-4$　**提示**：由$\frac{xy}{x+y}=-2$，得$\frac{x+y}{xy}=-\frac{1}{2}$. 裂项，得$\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}$. 同理$\frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{3}{4}$，$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=-\frac{3}{4}$，所以$\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=-\frac{1}{4}$. 所以$\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=-\frac{1}{4}$，所以$\frac{xyz}{xy+yz+zx}=-4$.

**14.** $x=n+3$ 或 $x=n+4$　**提示**：根据题意，得 $x+\frac{1\times2}{x}=1+2$ 的根为 $x=1$ 或 $x=2$；$x+\frac{2\times3}{x}=2+3$ 的根为 $x=2$ 或 $x=3$；$x+\frac{3\times4}{x}=3+4$ 的根为 $x=3$ 或 $x=4$……依此类推，$(x-3)+\frac{n(n+1)}{x-3}=n+(n+1)$ 的根为 $x-3=n$ 或 $x-3=n+1$，解得 $x=n+3$ 或 $x=n+4$.

**15.** **解**：由数轴，可知 $c<a<0<b$，所以 $a-c>0$，$b-c>0$，所以原式$=|a|+(a-c)+|b-c|-b=-a+a-c+b-c-b=-2c$.

**16.** **解**：原式$=\frac{(m+1)(m-1)}{m(m+1)}\div\frac{m^2-2m+1}{m}=\frac{(m+1)(m-1)}{m(m+1)}\cdot\frac{m}{(m-1)^2}=\frac{1}{m-1}$. 当 $m=\sqrt{2}$ 时，原式$=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}+1$.

**17.** **解**:(1) 设乙第一次购买原料的单价是 $x$ 元/kg,则乙第二次购买原料的单价是 $\frac{5}{4}x$ 元/kg. 根据题意,得 $\frac{8\,000}{x}-\frac{8\,000}{\frac{5}{4}x}=80$,解得 $x=20$. 经检验,$x=20$ 是该方程的解. 所以 $\frac{5}{4}x=25$.

答:乙两次的购买单价分别是 20 元/kg 和 25 元/kg.

(2) 乙的购买方式更划算. 理由如下:

由题意可知,甲两次购买原料的平均价格为 $\frac{500m+500n}{1\,000}=\frac{m+n}{2}$(元/kg),乙两次购买原料的平均价格为 $\frac{6\,000\times2}{\frac{6\,000}{m}+\frac{6\,000}{n}}=\frac{2mn}{m+n}$(元/kg). 因为 $\frac{m+n}{2}-\frac{2mn}{m+n}=\frac{(m+n)^2-4mn}{2(m+n)}=\frac{(m-n)^2}{2(m+n)}$,而 $m>0,n>0$ 且 $m\neq n$,所以 $(m-n)^2>0$,所以 $\frac{(m-n)^2}{2(m+n)}>0$,所以 $\frac{m+n}{2}>\frac{2mn}{m+n}$,即乙的购买方式平均价格更低,乙的购买方式更划算.

**18.** **解**:(1) 原式 $=\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}+1^2}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}+1$.

(2) 原式 $=\sqrt{10+8(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{18+8\sqrt{2}}=\sqrt{16+8\sqrt{2}+2}=\sqrt{4^2+8\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{(4+\sqrt{2})^2}=4+\sqrt{2}$.

(3) 原式 $=\sqrt{2-2\sqrt{2}+1}+\sqrt{3-2\sqrt{6}+2}+\sqrt{3-2\sqrt{12}+4}+\sqrt{4-2\sqrt{20}+5}+\sqrt{5-2\sqrt{30}+6}=\sqrt{(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}+1^2}+\sqrt{(\sqrt{3})^2-2\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}+(\sqrt{2})^2}+\sqrt{(\sqrt{3})^2-2\times2\times\sqrt{3}+2^2}+\sqrt{2^2-2\times2\times\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}+\sqrt{(\sqrt{5})^2-2\times\sqrt{5}\times\sqrt{6}+(\sqrt{6})^2}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}+\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{6})^2}=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}+\sqrt{5}-2+\sqrt{6}-\sqrt{5}=\sqrt{6}-1$.

# 阶段检测篇

## 第 6 章检测卷

**1.** B **2.** B **3.** C **4.** C **5.** C **6.** D **7.** D **8.** C

**9.** 抽样调查 **10.** 扇形统计图 **11.** 6 **12.** 60 **13.** 22 **14.** 14 **15.** 甲 **16.** 3 16 **17.** 240 **18.** 12

**19.** **解**:(1) 小明的抽样不合理. 理由:全年级每个学生被抽到的机会不相等,样本不具有代表性. 小刚的抽样不合理. 理由:样本容量太小,样本不具有广泛性.

(2) 从八年级 25 个班级中各随机抽取学号为 9,19,29,39 的 4 名同学进行调查.(答案不唯一)

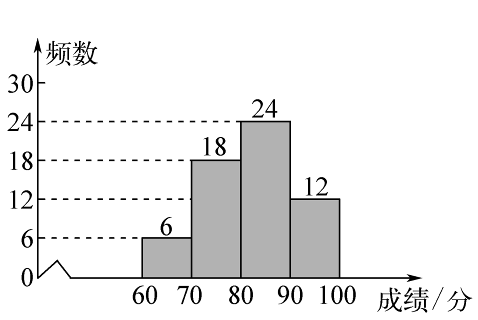
**20.** **解**:(1) 60 3

(2) 从 2024 年底到 2025 年底绿地面积的增长率为 $(66-60)\div60\times100\%=10\%$.

**21.** **解**:(1) 6 12

(2) 补全图形如下:

学生竞赛成绩频数分布直方图




(3) $1\,500\times\frac{24+12}{60}=900$(名).

答:全校竞赛成绩达到优秀的学生人数约为 900.

**22.** **解**:(1) 50　11

(2) 72

(3) 估计该校最喜爱的运动会项目是“篮球”的学生人数为 $1\ 200\times\frac{20}{50}=480$.

**23.** **解**:(1) 10 000　4 500

(2) 36 000

(3) 与去年相比,今年该地区大学生 50 m 跑成绩合格率下降了 5%.(答案不唯一)

**24.** **解**:(1) 65

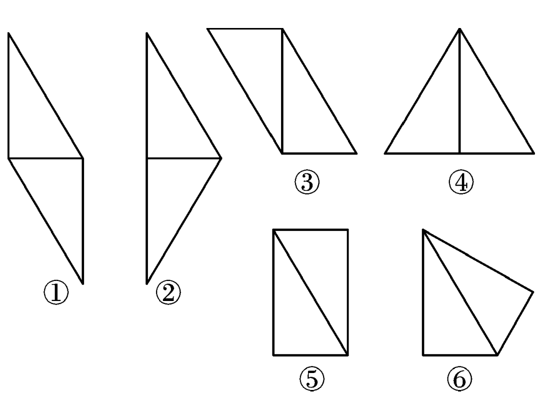
(2) $x>80$ 所在扇形的百分比为 $100\%-41\%-29.5\%-3\%-1.5\%=25\%$,补全扇形统计图略.

(3) 经过一个学期的训练,该校八年级学生最终测试 30 s 跳绳超过 80 个的人数是 $200\times25\%=50$.

## 第 7 章检测卷

**1.** A　**2.** D　**3.** C　**4.** A　**5.** C　**6.** D　**7.** D　**8.** B　**9.** ②③　**10.** ③　**11.** ③　**12.** 大于　**13.** 0.85　**14.** 50　**15.** 32　**16.** 15　**17.** ②③

**18.** $\frac{2}{3}$　**提示**:如图,构成的平面图形一共有 6 种,其中②④⑤⑥为轴对称图形,所以抽出卡片上的平面图形为轴对称图形的概率是 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.




**19.** **解**:10 张黑色,0 张红色——不可能摸到红牌;8 张黑色,2 张红色——不太可能摸到红牌;5 张黑色,5 张红色——可能摸到红牌;2 张黑色,8 张红色——很可能摸到红牌;0 张黑色,10 张红色——一定摸到红牌.

**20.** **解**:(1) 抛掷一次,朝上的点数为 7;(2) 抛掷一次,朝上的点数大于或等于 1;(3) 抛掷一次,朝上的点数为 6.(答案不唯一)

**21.** **解**:(1) 参加此次活动得到玩具的频率为 $\frac{8\ 000}{40\ 000}=\frac{1}{5}$.

(2) 由题意及(1)中结论可知,摸到红球的概率为 $\frac{1}{5}$,所以袋中共有 $8\div\frac{1}{5}=40$(个)球,所以估计袋中白球的数量为 $40-8=32$(个).

**22.** **解**:(1) B

(2) 如图所示.(答案不唯一)

| | | |
|---|---|---|
| 谢谢参与 | 水壶 | 水壶 |
| 谢谢参与 | 球拍 | 手机 |
| 谢谢参与 | 水壶 | 球拍 |

**翻奖牌反面**

**23.** **解**:(1) 4　0.68

(2) $\frac{1}{6}$　**提示**:由(1)可知获得 A 等级的学生有 4 人,用 $A_1,A_2,A_3,A_4$ 表示,从中随机抽取两名学生,可能的结果有 $(A_1,A_2),(A_1,A_3),(A_1,A_4),(A_2,A_3),(A_2,A_4),(A_3,A_4)$,共 6 种,所以恰好抽到学生 $A_1$ 和 $A_2$ 的概率为 $\frac{1}{6}$.

**24.** **解**:(1) 由题意,得 $x=100-12-19-15-18-20=16$.

(2) 因为 3 点朝上出现的次数是 15,所以 3 点朝上出现的频率为 $\frac{15}{100}=0.15$.

(3) 数学学习小组的结论不正确. 理由

如下：

因为1点朝上的频率为12%，不能说明1点朝上这一事件发生的概率就是12%，只有当试验的次数足够多时，该事件发生的频率才稳定在事件发生的概率附近，才可以将这个频率的稳定值作为该事件发生的概率.

(4) 设盒子中大约有白球 $x$ 个. 根据题意，得 $\frac{40}{40+x}=0.2$，解得 $x=160$. 经检验，$x=160$ 是原方程的解.

答：盒子中大约有白球160个.

## 第8章检测卷

**1.** A

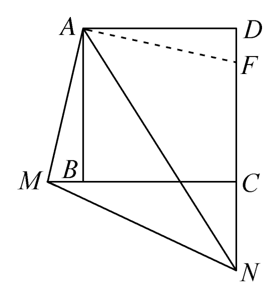
**2.** B　**提示：**因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $BC=AB=8$. 因为 $E$ 是 $BC$ 的中点，所以 $BE=CE=\frac{1}{2}BC=4$. 因为将边 $AB$ 沿着 $AE$ 翻折，点 $B$ 与点 $C$ 正好重合，所以 $AB=AC$，所以 $AE\perp BC$，所以 $\angle AEB=\angle AEC=90^\circ$，所以 $AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$.

**3.** A　**4.** B

**5.** C　**提示：**因为四边形 $ABCD$ 是菱形，$AC=8$，$BD=6$，所以 $AC\perp BD$，$OC=OA=\frac{1}{2}AC=4$，$OB=OD=\frac{1}{2}BD=3$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BOC$ 中，由勾股定理，得 $BC=\sqrt{OB^2+OC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$. 因为 $DH\perp BC$，所以 $S_{菱形ABCD}=BC\cdot DH=\frac{1}{2}AC\cdot BD$，即 $5DH=\frac{1}{2}\times 8\times 6$，所以 $DH=\frac{24}{5}$.

**6.** D　**提示：**由四边形 $ABCD$ 是正方形，$EF\perp AB$，$GH\perp BC$，得四边形 $BEOH$ 与四边形 $DFOG$ 均为矩形. 由 $BE=BH$，易得 $DG=DF$，所以矩形 $BEOH$ 与矩形 $DFOG$ 均为正方形，所以 $S_{正方形BEOH}+S_{正方形DFOG}=BH^2+OG^2=AG^2+OG^2$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOG$ 中，由勾股定理，得 $AG^2+OG^2=OA^2=4^2=16$，所以四边形 $BEOH$ 与四边形 $DFOG$ 的面积之和为16.

**7.** A　**提示：**如图，在 $DC$ 上截取 $DF=BM=1$，连接 $AF$. 易证 $\triangle ABM\cong\triangle ADF$，所以 $AM=AF$，$\angle MAB=\angle FAD$. 所以 $\angle MAF=\angle MAB+\angle BAF=\angle FAD+\angle BAF=\angle BAD=90^\circ$，所以 $\angle NAF=\angle MAF-\angle MAN=45^\circ=\angle MAN$. 因为 $AN=AN$，所以 $\triangle MAN\cong\triangle FAN$（SAS），所以 $MN=FN$. 设 $MN=FN=x$，则 $DN=FN+DF=x+1$，$CM=BC+BM=5$，$CN=DN-CD=x-3$. 因为 $MC^2+CN^2=MN^2$，所以 $5^2+(x-3)^2=x^2$，解得 $x=\frac{17}{3}$，所以 $MN=\frac{17}{3}$.

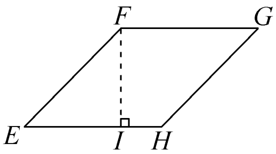



**8.** D　**提示：**由题意，得 $PE=BE=2AE$，所以 $\angle APE=30^\circ$，所以 $\angle AEP=60^\circ$，所以 $\angle BEF=\angle PEF=60^\circ$，所以 $\angle EFB=30^\circ$，所以 $EF=2BE$，故①正确；因为 $BE=PE$，所以 $EF=2PE$，因为 $EF>PF$，所以 $PF<2PE$，故②错误；易得 $\angle EBQ=\angle EFB=30^\circ$，所以 $BE=2EQ$，$EF=2BE$，所以 $EF=4EQ$，所以 $FQ=3EQ$，故③错误；由折叠的性质，得 $\angle EFP=\angle EFB=30^\circ$，$BF=PF$，所以 $\angle BFP=60^\circ$，所以 $\triangle PBF$ 是等边三角形，故④正确.

**9.** 72　**10.** $(2,\sqrt{3})$　**11.** $(4\sqrt{3}+4)$ cm

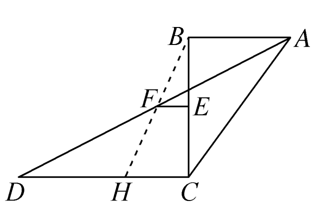
**12.** $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

**13.** $3\sqrt{2}$　**提示：**如图，菱形 $EFGH$ 的周长为24 cm，所以 $EF=EH=6$ cm. 过点 $F$ 作 $FI\perp EH$ 于点 $I$. 因为 $\angle E=45^\circ$，所以 $\triangle EFI$ 为等腰直角三角形，所以 $2FI^2=EF^2=36$，所以 $FI=3\sqrt{2}$ cm.




**14.** 12　**提示**：因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AB/\!/CD$，$AD/\!/BC$，$BC=AD=\frac{5}{2}$，所以$\angle BAP=\angle DPA$，$\angle ABP=\angle CPB$，$\angle DAB+\angle ABC=180°$．又因为 $AP$ 平分$\angle DAB$，$BP$ 平分$\angle CBA$，所以$\angle BAP=\angle DAP=\frac{1}{2}\angle DAB$，$\angle ABP=\angle CBP=\frac{1}{2}\angle ABC$，所以$\angle DPA=\angle DAP$，$\angle CPB=\angle CBP$，$\angle BAP+\angle ABP=90°$，所以 $PD=AD=\frac{5}{2}$，$PC=BC=\frac{5}{2}$，$\angle APB=90°$，所以 $AB=CD=PD+PC=5$．因为 $AP=4$，所以 $BP=\sqrt{AB^2-AP^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，所以 $AB+AP+BP=5+4+3=12$，所以$\triangle APB$ 的周长是 12．

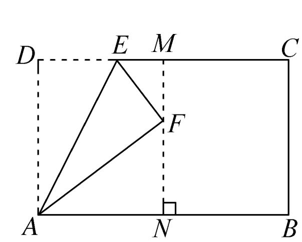
**15.** 2　**提示**：如图，连接 $BF$，并延长交 $CD$ 于点 $H$．在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，由勾股定理，得 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=10$．又因为 $CD/\!/AB$，$AD$ 平分$\angle BAC$，所以$\angle D=\angle BAD=\angle CAD$，所以 $CD=AC=10$．由 $F$ 是 $AD$ 的中点，易证$\triangle DFH\cong\triangle AFB$（ASA），所以 $HF=BF$，$DH=AB=6$，所以 $CH=CD-DH=4$．因为 $E$ 为 $BC$ 的中点，$HF=BF$，所以 $EF$ 为$\triangle BHC$ 的中位线，所以 $EF=\frac{1}{2}CH=2$．

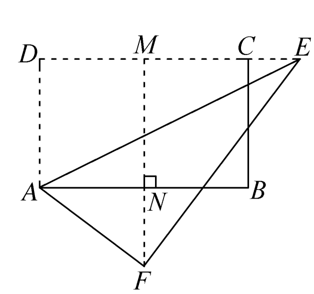



**16.** 2 或 3　**提示**：设运动的时间为 $t$ s．由题意，得点 $P$ 运动时间 $t\leqslant\frac{AD}{1}=8$，点 $Q$ 运动时间 $t\leqslant\frac{BC}{3}=4$，所以 $0<t\leqslant4$．分以下两种情况讨论：当四边形 $PDCQ$ 为平行四边形时，$PD=QC$，结合题意，得 $PD=(8-t)$cm，$QC=3t$ cm，所以 $8-t=3t$，解得 $t=2$；当四边形 $APQB$ 为平行四边形时，$AP=BQ$，结合题意，得 $AP=t$ cm，$BQ=(12-3t)$cm，所以 $t=12-3t$，解得 $t=3$．综上所述，$t=2$ 或 $t=3$．

**17.** (3，4)或(2，4)或(8，4)　**提示**：由题意，得 $OD=AD=5$．①当 $OP=PD$ 时，点 $P$ 在 $OD$ 的垂直平分线上，所以点 $P(2.5,4)$．由勾股定理，得 $OP=PD=\frac{\sqrt{89}}{2}\neq5$，不符合题意，舍去．②当 $OP=OD=5$ 时，$PC=\sqrt{OP^2-OC^2}=3$，所以点 $P(3,4)$．③当 $PD=OD=5$ 时，过点 $P$ 作 $PE\perp OA$ 于点 $E$，则$\angle PED=90°$，$DE=\sqrt{PD^2-PE^2}=3$．分两种情况：当点 $E$ 在点 $D$ 的左侧时，$OE=OD-DE=2$，所以点 $P(2,4)$；当点 $E$ 在点 $D$ 的右侧时，$OE=OD+DE=8$，所以点 $P(8,4)$．综上所述，点 $P$ 的坐标为(3，4)或(2，4)或(8，4)．

**18.** $\frac{5}{2}$或 10　**提示**：①当点 $D$ 的对应点 $F$ 落在矩形 $ABCD$ 的内部时，如图 1，过点 $F$ 作 $FN\perp AB$ 于点 $N$，延长 $NF$ 交 $DC$ 于点 $M$．易证四边形 $ANMD$ 为矩形．因为 $AD=5$，$AB=8$，所以 $MN=AD=5$．因为点 $F$ 刚好落在线段 $AB$ 的垂直平分线上，所以 $DM=AN=\frac{1}{2}AB=4$．由折叠的性质可知 $AF=AD=5$，$DE=EF$，所以 $NF=\sqrt{AF^2-AN^2}=3$，所以 $MF=MN-NF=2$．在 $\mathrm{Rt}\triangle EFM$ 中，$EM^2+MF^2=EF^2$，即$(4-DE)^2+2^2=DE^2$，所以 $DE=\frac{5}{2}$．②当点 $D$ 的对应点 $F$ 落在矩形 $ABCD$ 的外部时，如图 2，过点 $F$ 作 $FN\perp AB$ 于点 $N$，延长 $FN$ 交 $DC$ 于点 $M$．由①同理可得 $AF=AD=5$，$DE=EF$，四边形 $ANMD$ 为矩形，所以 $MN=AD=5$，$DM=AN=4$，所以 $NF=3$．在 $\mathrm{Rt}\triangle MEF$ 中，$MF^2+ME^2=EF^2$，即$(5+3)^2+(DE-4)^2=DE^2$，所以 $DE=10$．综上所述 $DE$ 的长为$\frac{5}{2}$或 10．



**19. 解**:四边形 $EGFH$ 是菱形. 证明如下:
因为在四边形 $ABCD$ 中,$E,F,G,H$ 分别是 $AD,BC,BD,AC$ 的中点,所以 $GF/\!/CD,EH/\!/CD,FH/\!/AB,GE/\!/AB$,所以 $GE/\!/FH,GF/\!/EH$,所以四边形 $EGFH$ 是平行四边形. 因为 $GF=\frac{1}{2}CD,GE=\frac{1}{2}AB,AB=CD$,所以 $GF=GE$,所以四边形 $EGFH$ 是菱形.

**20.** (1) **证明**:因为 $AD/\!/BC$,所以 $\angle FAO=\angle ECO$. 因为 $O$ 是 $AC$ 的中点,所以 $AO=CO$. 又因为 $\angle AOF=\angle COE$,所以 $\triangle AOF\cong\triangle COE$(ASA),所以 $OF=EO$,所以四边形 $AECF$ 是平行四边形.
(2) **解**:若选①③. 证明如下:因为 $AE\perp BC$,所以 $\angle AEC=90°$. 因为四边形 $AECF$ 是平行四边形,所以四边形 $AECF$ 是矩形,所以 $AC=EF$.
若选③①. 证明如下:因为四边形 $AECF$ 是平行四边形,$AC=EF$,所以四边形 $AECF$ 是矩形,所以 $\angle AEC=90°$,所以 $AE\perp BC$.

**21. 解**:(1) $S_{\triangle ABC}=S_{四边形AFBD}$.
(2) $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形,即 $AB=AC,\angle BAC=90°$. 证明如下:
因为四边形 $AFBD$ 是正方形,所以 $AF=BF,\angle AFB=90°$. 因为 $F$ 是线段 $BC$ 的中点,所以 $AF=BF=CF$,所以 $\triangle ACF$ 和 $\triangle ABF$ 都是等腰直角三角形. 易证 $\triangle ACF\cong\triangle ABF$,所以 $\angle CAF=\angle BAF=45°,AC=AB$,所以 $\angle BAC=90°$,即 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

**22. 解**:(1) 如图 1,四边形 $AMCN$ 即为所求的菱形.
(2) 如图 2,边 $CD$ 上的高 $AH$ 即为所求.

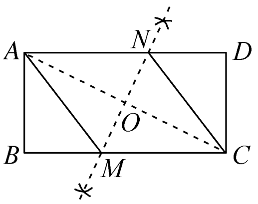


**图 1**

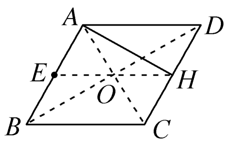


**图 2**

**23. 解**:(1) 设 $BE$ 与 $AC$ 相交于点 $P$,连接 $BD$ 与 $AC$ 交于点 $O$. 由矩形的性质,得 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=10$ cm,所以 $AO=\frac{1}{2}AC=5$ cm. 由折叠的性质可知,$AC$ 垂直平分 $BE$,所以 $P$ 是 $BE$ 的中点,$\angle APB=90°$. 所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}AC\cdot BP$,所以 $BP=\frac{24}{5}$ cm. 所以 $AP=\sqrt{AB^2-BP^2}=\frac{18}{5}$ cm,所以 $OP=AO-AP=\frac{7}{5}$ cm. 易证 $OP$ 是 $\triangle BED$ 的中位线,所以 $ED=2OP=\frac{14}{5}$ cm.
(2) 由折叠可设 $BH=DH=x$ cm,则 $CH=(8-x)$cm. 在 Rt$\triangle CDH$ 中,由勾股定理,得 $CD^2+CH^2=DH^2$,即 $6^2+(8-x)^2=x^2$,解得 $x=\frac{25}{4}$. 所以 $BH=\frac{25}{4}$cm. 连接 $BG$. 由折叠的性质,可得 $\angle BHG=\angle DHG$,$GH$ 垂直平分 $BD$,所以 $BG=DG$. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形,所以 $AD/\!/BC$,所以 $\angle BHG=\angle DGH$. 所以 $\angle DHG=\angle DGH$,所以 $DH=DG$,所以 $BH=DH=DG=BG$,所以四边形 $BHDG$ 是菱形. 易得 $BD=10$ cm,所以 $S_{菱形BHDG}=\frac{1}{2}BD\cdot GH=BH\cdot CD$,即 $\frac{1}{2}\times10\cdot GH=\frac{25}{4}\times6$,所以 $GH=\frac{15}{2}$ cm.

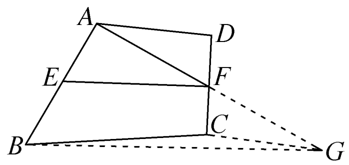
**24. 解**:(1) $EF=BC$. 理由如下:

因为 $AD // BC$，$AB // CD$，所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形，所以 $AB=CD$. 因为 $E$，$F$ 分别是边 $AB$，$CD$ 的中点，所以 $BE=\frac{1}{2}AB$，$CF=\frac{1}{2}CD$，所以 $BE=CF$. 又因为 $BE // CF$，所以四边形 $EBCF$ 是平行四边形，所以 $EF=BC$.

(2) ①一组对边平行且相等的四边形是平行四边形　$EF=\frac{1}{2}(AD+BC)$

②因为 $E$，$F$ 分别是边 $AB$，$CD$ 的中点，所以 $DF=CF$. 因为 $AD // BC$，所以 $\angle ADF=\angle PCF$，$\angle DAF=\angle P$，所以 $\triangle ADF \cong \triangle PCF$ (AAS)，所以 $AF=PF$，$AD=PC$，所以 $EF$ 是 $\triangle ABP$ 的中位线，所以 $EF=\frac{1}{2}BP=\frac{1}{2}(BC+PC)=\frac{1}{2}(BC+AD)$.

(3) $\frac{1}{2}(m+n)$　**提示**：由(1)(2)可知，当 $AD // BC$ 时，$EF=\frac{1}{2}(AD+BC)=\frac{1}{2}(m+n)$；当 $AD$ 与 $BC$ 不平行时，如图，作 $CG // AD$，交 $AF$ 的延长线于点 $G$，连接 $BG$，同(2)可得 $\triangle AFD \cong \triangle GFC$，所以 $AF=GF$，$AD=GC$，所以 $EF$ 是 $\triangle ABG$ 的中位线，所以 $EF=\frac{1}{2}BG$，因为 $BC+AD=BC+GC>BG$，所以 $EF<\frac{1}{2}(AD+BC)$. 故中位线 $EF$ 的最大值是 $\frac{1}{2}(m+n)$.




## 第 9、10 章检测卷

**1.** C　**2.** B　**3.** D　**4.** D　**5.** D　**6.** A

**7.** B　**提示**：因为总路程为 $a$ m，原计划每天修 $b$ m，所以原计划完成时间为 $\frac{a}{b}$ 天. 因为实际每天修 $(b-c)$ m，所以实际完成时间为 $\frac{a}{b-c}$ 天. 所以推迟天数为实际时间减去原计划时间，所以 $\frac{a}{b-c}-\frac{a}{b}=\frac{ab-a(b-c)}{b(b-c)}=\frac{ab-ab+ac}{b(b-c)}=\frac{ac}{b(b-c)}$.

**8.** B　**提示**：由题图可得 $k=\frac{a^2-b^2}{a(a-b)}=\frac{(a+b)(a-b)}{a(a-b)}=\frac{a+b}{a}=1+\frac{b}{a}$. 因为 $a>b>0$，所以 $0<\frac{b}{a}<1$，所以 $1<1+\frac{b}{a}<2$，即 $1<k<2$.

**9.** $3xy(4z-3x)$　**10.** $-2$

**11.** $(x-1)(x+1)$(或 $x^2-1$)　**12.** ①②

**13.** 2

**14.** 108　**提示**：因为 $x+y=12$，所以 $y=12-x$，所以 $3x^2+y^2=3x^2+(12-x)^2=3x^2+x^2-24x+144=4x^2-24x+144=4(x-3)^2+108$. 因为 $4(x-3)^2 \geqslant 0$，所以 $4(x-3)^2+108 \geqslant 108$，所以 $3x^2+y^2$ 的最小值为 108.

**15.** $\left(1+\frac{b}{a}\right)$　**提示**：因为 1 m 长的电线质量为 $a$，所以质量为 $b$ 的电线长度为 $\frac{b}{a}$ m，所以这捆电线的长度为 $\left(1+\frac{b}{a}\right)$ m.

**16.** $-1$ 或 1　**提示**：去分母，得 $x-a=a(x+1)$，即 $(1-a)x=2a$. 当 $x=-1$ 时，原分式方程有增根，$a-1=2a$，解得 $a=-1$；当 $1-a=0$，即 $a=1$ 时，整式方程无解，故原分式方程也无解. 综上所述，$a$ 的值是 $-1$ 或 1.

**17.** $m>-6$ 且 $m \neq -4$　**提示**：去分母，得 $2x+m=3x-6$，解得 $x=m+6$. 因为原方程的解为正数，所以 $m+6>0$，即 $m>-6$. 又因为 $x \neq 2$，所以 $m+6 \neq 2$，即 $m \neq -4$. 所以 $m$ 的取值范围是 $m>-6$ 且 $m \neq -4$.

**18.** $-\frac{2^9}{x^{10}}$　$(-1)^{n+1} \cdot \frac{2^{n-1}}{x^n}\left[\text{或}(-1)^{n-1} \cdot \frac{2^{n-1}}{x^n}\right]$

**19.** **解**：(1) ①原式 $=\frac{4x^2}{9y^2} \cdot \left(-\frac{27y^3}{64x^3}\right) \cdot \frac{4}{xy}=-\frac{3}{4x^2}$.

②原式$=\frac{x-y}{x}\cdot\frac{x}{(x-y)^2}=\frac{1}{x-y}$.

(2)①原式$=(2a+3)(2a-3)$.

②原式$=-xy(x^2-6x+9)=-xy(x-3)^2$.

**20. 解**:(1) 因为 $m-n=3,mn=-2$,所以原式$=10+5mn(m-n)=10+5\times(-2)\times3=10-30=-20$.

(2) 因为 $a+a^{-1}=3$,所以 $a+\frac{1}{a}=3$,所以 $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=9$,即 $a^2+2+\frac{1}{a^2}=9$,所以 $a^2+\frac{1}{a^2}=7$. 所以$\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2=49$,即 $a^4+\frac{1}{a^4}+2=49$,所以 $a^4+\frac{1}{a^4}=47$.

**21. 解**:(1) 去分母,得 $x+3=5x$,解得 $x=\frac{3}{4}$. 检验:当 $x=\frac{3}{4}$ 时,$x(x+3)=\frac{3}{4}\times\left(\frac{3}{4}+3\right)=\frac{45}{16}\neq0$,所以 $x=\frac{3}{4}$ 是原方程的解.

(2) 去分母,得 $x(x+2)-(x-1)(x+2)=3$,解得 $x=1$. 检验:当 $x=1$ 时,$(x-1)(x+2)=(1-1)\times(1+2)=0$,所以 $x=1$ 是增根,故原方程无解.

**22. 解**:(1) $a^2-6a+5=a^2-6a+9-9+5=(a-3)^2-4=(a-3+2)(a-3-2)=(a-1)(a-5)$.

(2) 因为 $a+2b=3$,所以$(a+2b)^2=9$,即 $a^2+4ab+4b^2=9$. 因为 $ab=\frac{3}{4}$,所以 $a^2+4b^2=6$. 所以原式$=a^2+4b^2-2ab=6-2\times\frac{3}{4}=\frac{9}{2}$.

(3) 设另一个因式为 $4x+n$. 则 $4x^2+12x+m=(x+2)(4x+n)=4x^2+(8+n)x+2n$. 所以 $8+n=12,m=2n$,解得 $n=4,m=8$.

**23.** (1) ①$\frac{b}{a+m}$　$\frac{b}{a+m}<\frac{b}{a}$

②$\frac{b+n}{a+n}$　$\frac{b+n}{a+n}>\frac{b}{a}$

(2) **证明**:$\frac{b+n}{a+n}-\frac{b}{a}=\frac{a(b+n)-b(a+n)}{a(a+n)}=\frac{n(a-b)}{a(a+n)}$. 因为 $a>b>0,n>0$,所以 $a-b>0,a+n>0$,所以$\frac{n(a-b)}{a(a+n)}>0$,所以$\frac{b+n}{a+n}-\frac{b}{a}>0$,所以$\frac{b+n}{a+n}>\frac{b}{a}$.

(3) **解**:因为$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=k$,所以 $b_1=a_1k$,$b_2=a_2k$,所以$\frac{b_1+b_2}{a_1+a_2}=\frac{a_1k+a_2k}{a_1+a_2}=\frac{k(a_1+a_2)}{a_1+a_2}=k$.

(4) **证明**:由现象 1,得$\frac{a}{a+b+c}<\frac{a}{b+c}<\frac{2a}{a+b+c}$①,$\frac{b}{a+b+c}<\frac{b}{a+c}<\frac{2b}{a+b+c}$②,$\frac{c}{a+b+c}<\frac{c}{a+b}<\frac{2c}{a+b+c}$③. 由①+②+③,得$\frac{a+b+c}{a+b+c}<\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}<\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}$,即 $1<\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}<2$.

**24. 解**:(1) A　**提示**:当 $a=3,b=-5$ 时,分式方程为$\frac{3}{x}+1=-5$,解得 $x=-\frac{1}{2}$,因为$\frac{1}{3+(-5)}=-\frac{1}{2}$,所以[3,-5]是关于 $x$ 的方程$\frac{a}{x}+1=b$ 的一个“关联数对”;当 $a=1,b=-4$ 时,分式方程为$\frac{1}{x}+1=-4$,解得 $x=-\frac{1}{5}$,因为$\frac{1}{1+(-4)}=-\frac{1}{3}\neq-\frac{1}{5}$,所以[1,-4]不是关于 $x$ 的方程$\frac{a}{x}+$

$1=b$ 的一个“关联数对”.

(2) 因为$\left[-n,-\frac{1}{3}+n\right]$是关于 $x$ 的分式方程$\frac{a}{x}+1=b$ 的一个“关联数对”,所以$\frac{-n}{x}+1=-\frac{1}{3}+n$,解得 $x=\frac{3n}{4-3n}$,所以$\frac{3n}{4-3n}=\frac{1}{-n+\left(-\frac{1}{3}+n\right)}=-3$,解得 $n=2$.

(3) 因为$[2m+k,-k]$是关于 $x$ 的分式方程$\frac{a}{x}+1=b$ 的一个“关联数对”,所以$\frac{2m+k}{x}+1=-k$,解得 $x=-\frac{2m+k}{k+1}$,所以 $-\frac{2m+k}{k+1}=\frac{1}{2m+k+(-k)}=\frac{1}{2m}$.当 $m\neq-\frac{1}{2}$时,解得 $k=-\frac{4m^2+1}{2m+1}$.代入 $kx-2m+1=\frac{-4mx}{2m+1}$,得$\frac{-4m^2-1}{2m+1}x-2m+1=\frac{-4mx}{2m+1}$,化简,得$(2m-1)^2x=(1-2m)(1+2m)$.因为 $m\neq\frac{1}{2}$,解得 $x=-\frac{2m+1}{2m-1}=-1-\frac{2}{2m-1}$.因为关于 $x$ 的方程 $kx-2m+1=\frac{-4m}{2m+1}x$ 有整数解,且 $m$ 为整数,所以 $2m-1=\pm1$ 或 $2m-1=\pm2$,解得 $m=0$ 或 $m=1$ 或 $m=-\frac{1}{2}$(舍去)或 $m=\frac{3}{2}$(舍去).因为 $m\neq0$,所以 $m=1$.

## 第 11 章检测卷

**1.** B **2.** D **3.** C **4.** B **5.** D **6.** B
**7.** D **8.** D

**9.** $a\leqslant2$ **10.** 3 **11.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ **12.** $>$ **13.** 2

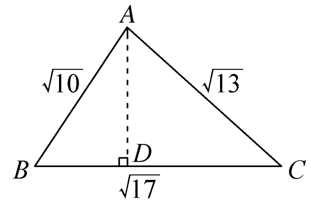
**14.** $-1$ 提示:因为 $y=\sqrt{x-2\ 024}+\sqrt{2\ 024-x}+2\ 025$,所以 $x-2\ 024\geqslant0$,$2\ 024-x\geqslant0$,所以 $x-2\ 024=0$,所以 $x=2\ 024$,所以 $y=0+0+2\ 025=2\ 025$,所以 $x-y=-1$.

**15.** $\frac{4}{27}m$

**16.** 3 提示:由条件可得 $a^2+2a+\sqrt{n-2}=-1$,所以 $a^2+2a+1+\sqrt{n-2}=0$,所以$(a+1)^2+\sqrt{n-2}=0$,所以 $a+1=0$,$n-2=0$,所以 $a=-1$,$n=2$,所以当 $x=-a$ 时,$x^2+2x+\sqrt{n-2}=a^2-2a+\sqrt{n-2}=(-1)^2-2\times(-1)+0=3$.

**17.** $\frac{5}{2}$ 提示:根据题意,得 $m=2$,$n=5-\sqrt{7}-2=3-\sqrt{7}$.将 $m=2$,$n=3-\sqrt{7}$ 代入 $amn+bn^2=1$,得 $2a(3-\sqrt{7})+b(3-\sqrt{7})^2=1$,从而可得$(6a+16b-1)-\sqrt{7}(2a+6b)=0$.因为 $a$,$b$ 为有理数,所以 $6a+16b-1=0$ 且 $2a+6b=0$,解得 $a=\frac{3}{2}$,$b=-\frac{1}{2}$,所以 $2a+b=\frac{5}{2}$.

**18.** 5.5 提示:如图,过点 $A$ 作 $AD\perp BC$ 于点 $D$.设 $BD=x$,$AD=y$,则$\begin{cases}x^2+y^2=10,\\(\sqrt{17}-x)^2+y^2=13,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\frac{7\sqrt{17}}{17},\\y=\frac{11\sqrt{17}}{17}\end{cases}$(负值已舍).所以 $AD=\frac{11\sqrt{17}}{17}$,所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}\times\sqrt{17}\times\frac{11\sqrt{17}}{17}=5.5$.




**19.** 解:(1) 原式$=\sqrt{\frac{1}{2}\times32}+\sqrt{\frac{18}{2}}-\sqrt{\frac{8}{2}}=\sqrt{16}+\sqrt{9}-\sqrt{4}=4+3-2=5$.

(2) 原式$=7-2\sqrt{7}+1+(2\sqrt{3})^2-(2\sqrt{5})^2=7-2\sqrt{7}+1+12-20=-2\sqrt{7}$.

**20. 解**:因为 $a=\sqrt{5}+1$,$b=\sqrt{5}-1$,所以 $a+b=2\sqrt{5}$,$ab=(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)=4$. 所以 $a^2b+ab^2=ab(a+b)=4\times2\sqrt{5}=8\sqrt{5}$.

**21. 解**:(1) 因为 $b=\sqrt{1-2a}+\sqrt{2a-1}+\frac{3}{2}$,所以$\begin{cases}1-2a\geqslant0,\\2a-1\geqslant0,\end{cases}$所以 $a=\frac{1}{2}$. 把 $a=\frac{1}{2}$ 代入 $b=\sqrt{1-2a}+\sqrt{2a-1}+\frac{3}{2}$,得 $b=\frac{3}{2}$.

(2) 由(1),得 $a=\frac{1}{2}$,$b=\frac{3}{2}$,所以 $a+b=2$,$a-b=-1$,$ab=\frac{3}{4}$. 所以$\sqrt{\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+2}-\sqrt{\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2}=\sqrt{\frac{(a+b)^2}{ab}}-\sqrt{\frac{(a-b)^2}{ab}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

**22.** (1) ①不等式的基本性质 1　②平方差公式

(2) **证明**:因为 $a+b>c$,所以 $(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2>c$,所以 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>c+2\sqrt{ab}$. 因为 $2\sqrt{ab}>0$,所以 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>c$,所以 $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})>0$. 因为 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}>0$. 所以 $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}>0$. 所以 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}$.

**23. 解**:(1) 2　**提示**:因为 $(\sqrt{18-x}+\sqrt{6-x})\cdot(\sqrt{18-x}-\sqrt{6-x})=18-x-6+x=12$,所以 $\sqrt{18-x}-\sqrt{6-x}=12\div6=2$.

(2) $\sqrt{6}-\sqrt{5}$　$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$

(3) 原式 $=\left[\frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}+\cdots+\frac{\sqrt{2\,025}-\sqrt{2\,023}}{(\sqrt{2\,025}+\sqrt{2\,023})(\sqrt{2\,025}-\sqrt{2\,023})}\right]\times(\sqrt{2\,025}+1)=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\cdots+\frac{\sqrt{2\,025}-\sqrt{2\,023}}{2}\right)\times(\sqrt{2\,025}+1)=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2\,025}-1)\times(\sqrt{2\,025}+1)=1\,012$.

**24. 解**:(1) $m^2+3n^2$　$2mn$

(2) 16　8　2　2(答案不唯一)　**提示**:设 $m=2$,$n=2$,则 $a=m^2+3n^2=16$,$b=2mn=8$.

(3) 由题意,得 $a=m^2+3n^2$,$4=2mn$,即 $mn=2$. 因为 $m$,$n$ 均为正整数,所以 $m=2$,$n=1$ 或 $m=1$,$n=2$,所以 $a=2^2+3\times1^2=7$ 或 $a=1^2+3\times2^2=13$. 所以 $a$ 的值为 7 或 13.

(4) 若设 $6+2\sqrt{5}=(m+n\sqrt{5})^2$(其中 $m$,$n$ 均为整数),则 $6=m^2+5n^2$,$2=2mn$,所以 $m=n=1$ 或 $m=n=-1$. 所以$\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\sqrt{(1+\sqrt{5})^2}=1+\sqrt{5}$ 或 $\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\sqrt{(-1-\sqrt{5})^2}=1+\sqrt{5}$.

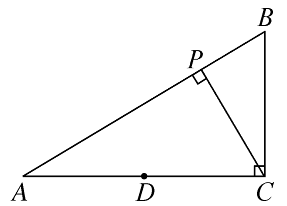
## 期末检测卷

**1.** D　**2.** D　**3.** C　**4.** C　**5.** A　**6.** A

**7.** A　**提示**:因为四边形 $ABCD$ 是菱形,所以 $AB=AD$,$OB=OD$. 因为 $\angle BAD=60^\circ$,所以 $\triangle ABD$ 是等边三角形. 因为 $DH\perp AB$,所以 $AH=BH=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}AD$,所以 $DH=\sqrt{AD^2-AH^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}AD$. 因为菱形 $ABCD$ 的面积为 $32\sqrt{3}$,所以 $AB\cdot DH=32\sqrt{3}$,即$\frac{\sqrt{3}}{2}AD^2=32\sqrt{3}$,所以 $AD=8$(负值已舍). 因为 $O$,$H$ 分别是 $BD$,$AB$ 的中点,所以 $OH$ 是 $\triangle ABD$ 的中位线,所以 $OH=\frac{1}{2}AD=4$.

**8.** B　**提示**:根据题图象可知,$CD=3$. 因为 $D$ 为边 $AC$ 中点,所以 $AD=CD=3$,$CA=2AD=6$. 由题图象可知,当 $x=7$ 时,$y$ 的值最小,即 $CP$ 的长最小,

根据垂线段最短可得，此时 $CP \perp AB$. 如图，此时点 $P$ 运动的路程 $AD+AP=7$，所以 $AP=7-AD=4$，所以在 $\mathrm{Rt}\triangle APC$ 中，$PC=\sqrt{AC^2-AP^2}=\sqrt{6^2-4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$，即 $m=2\sqrt{5}$.

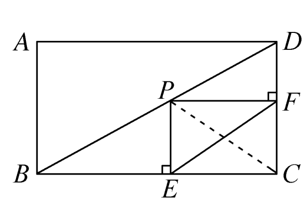



**9.** 800　**10.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　**11.** $\frac{1}{4}$　**12.** $-\frac{1}{4}$

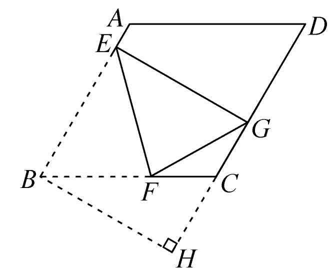
**13.** $m>-6$ 且 $m\neq-2$　**提示：** 去分母，得 $x-m=3(x+2)$，解得 $x=\frac{-(m+6)}{2}$. 因为 $x+2\neq0$，即 $x\neq-2$，所以 $\frac{-(m+6)}{2}\neq-2$，所以 $m\neq-2$. 因为解是负数，即 $x<0$，所以 $m+6>0$，即 $m>-6$，所以 $m$ 的取值范围是 $m>-6$ 且 $m\neq-2$.

**14.** 13　**15.** 2 100

**16.** $\frac{24}{5}$　**提示：** 如图，连接 $PC$. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $\angle BCD=90^\circ$，所以 $BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$. 因为 $PE\perp BC$ 于点 $E$，$PF\perp CD$ 于点 $F$，所以 $\angle PEC=\angle PFC=\angle BCD=90^\circ$，所以四边形 $PECF$ 为矩形，所以 $EF=PC$. 当 $PC\perp BD$ 时，$PC$ 的长取最小值，此时 $PC=\frac{BC\cdot CD}{BD}=\frac{6\times8}{10}=\frac{24}{5}$，所以 $EF$ 长的最小值为 $\frac{24}{5}$.




**17.** $\frac{9}{16}$　**提示：** 如图，过点 $B$ 作 $BH\perp CD$，交 $DC$ 的延长线于点 $H$，则 $\angle H=90^\circ$. 因为 $EG\perp CD$，所以 $BH/\!/EG$. 因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $AB/\!/CD$，$AB=BC=CD$，所以 $BE/\!/GH$，所以四边形 $BEGH$ 是平行四边形，所以 $GH=BE=5$. 由折叠的性质，得 $GE=BE=5$，所以 $BH=GE=5$. 因为 $DG=3$，所以 $DH=DG+GH=3+5=8$，所以 $CH=DH-CD=8-AB$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BCH$ 中，由勾股定理，得 $BH^2+CH^2=BC^2$，即 $5^2+(8-AB)^2=AB^2$，所以 $AB=\frac{89}{16}$，所以 $AE=AB-BE=\frac{89}{16}-5=\frac{9}{16}$.




**18.** 40 cm 或 $\frac{80\sqrt{3}}{3}$ cm　**提示：** 由折叠的性质可知，该平行四边形是菱形，分以下几种情况讨论：①如图 1，作 $EH=ED$，沿 $EH$ 剪开. 易得 $AD=DE=\frac{1}{2}CD$，$AC=AD+CD=30$ cm，所以 $AD=10$ cm. 所以所得平行四边形的周长为 40 cm. ②如图 2，作 $BD$ 的垂直平分线，交 $BE$ 于点 $P$，沿 $DP$ 剪开，则 $DP=BP$. 易得 $AD=10$ cm，$\angle EDB=60^\circ$，$\angle PDB=\angle B=30^\circ$，所以 $\angle EDP=30^\circ$，所以易得 $PD=\frac{20\sqrt{3}}{3}$ cm. 所以所得平行四边形的周长为 $\frac{80\sqrt{3}}{3}$ cm. 综上所述，所得平行四边形的周长为 40 cm 或 $\frac{80\sqrt{3}}{3}$ cm.

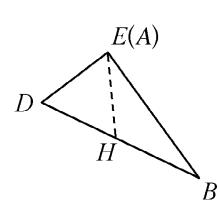


**图 1**

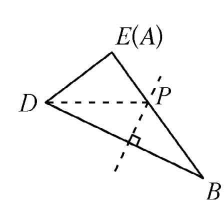


**图 2**

**19.** **解：** (1) 原式 $=\frac{1}{2}+3-\frac{1}{2}=3$.

(2) 原式 $=3x(x-2+4y)$.

**20.** **解：** (1) 方程两边同乘 $x-2$，得 $3-x=-2(x-2)$，解得 $x=1$. 经检验，$x=1$ 是原

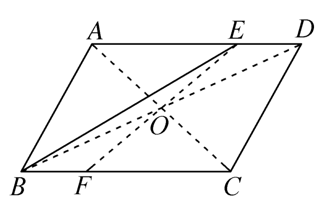
分式方程的解.

(2) 方程两边同乘$(x-1)(x+1)$,得$3(x-1)+2(x+1)=4$,解得$x=1$.经检验,$x=1$是原分式方程的增根.所以原分式方程无解.

**21.** **解**:原式$=\frac{x-3}{(x+3)^2}\div\frac{x+3-6}{x+3}=\frac{x-3}{(x+3)^2}\cdot\frac{x+3}{x-3}=\frac{1}{x+3}$.当$x=\sqrt{2}-3$时,原式$=\frac{1}{\sqrt{2}-3+3}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**22.** **解**:(1) 因为四边形$ABCD$为平行四边形,所以$AD=BC=6$,$AD\parallel BC$,所以$\angle AEB=\angle CBE$.因为$BE$为$\angle ABC$的平分线,所以$\angle ABE=\angle CBE$,所以$\angle AEB=\angle ABE$,所以$AE=AB=4$,所以$DE=AD-AE=2$.

(2) 如图,连接$AC$,$BD$,相交于点$O$,连接$EO$并延长,交$BC$于点$F$,则点$F$即为所求.




**23.** **解**:(1) 200

(2) 调查结果为B的人数为$20\div10\%\times30\%=60$,调查结果为C的人数为$20\div10\%-(20+60+40)=80$.补全条形统计图略.

(3) $144°$

(4) 估计全校学生中阅读课外书20本以上的学生人数为$2\,000\times\frac{40}{200}=400$.

**24.** (1) **证明**:因为在▱$ABCD$中,$AB\parallel CD$,$AB=CD$,所以$\angle ABE=\angle CDF$.因为$AE\perp BD$,$CF\perp BD$,所以$\angle AEB=\angle CFD=90°$.所以$\triangle ABE\cong\triangle CDF$,所以$AE=CF$,$\angle BAE=\angle DCF$.因为$AG=CH$,所以$\triangle AGE\cong\triangle CHF$,所以$GE=FH$,$\angle AEG=\angle CFH$.所以$\angle AEG+\angle AED=\angle CFH+\angle CFB$,所以$\angle GEF=\angle HFE$,所以$GE\parallel FH$.所以四边形$EHFG$是平行四边形.

(2) **解**:不能为菱形.理由如下:

假设能为菱形,连接$GH$,则$GH\perp BD$.过点$C$作$CM\parallel GH$交$AB$于点$M$,则$CM\perp BD$.因为$CF\perp BD$,所以过一点$C$有两条直线垂直于同一直线,这与垂线的唯一性矛盾,所以四边形$EHFG$不能为菱形.

**25.** **解**:(1) 设B种粽子的进价是$x$元/袋,则A种粽子的进价是$1.25x$元/袋.根据题意,得$\frac{6\,000}{x}-\frac{6\,000}{1.25x}=60$,解得$x=20$.经检验,$x=20$是原方程的解,所以$1.25x=25$.

答:A种粽子的进价是25元/袋,B种粽子的进价是20元/袋.

(2) 设购进A种粽子$a$袋,则购进B种粽子$(500-a)$袋.设利润为$w$元.由题意,得$w=(30-25)a+(23-20)(500-a)=2a+1\,500$.因为$a\leqslant3(500-a)$,所以$a\leqslant375$,因为$2>0$,所以$w$随着$a$的增大而增大,所以当$a=375$时,$w$取得最大值,最大值为$2\,250$,此时$500-a=125$.

答:购进A种粽子375袋,B种粽子125袋,获得的利润最大,最大利润是2 250元.

**26.** **解**:(1) =

(2) 相等.证明如下:

过点$A$作$AN\parallel GE$,交$BF$于点$H$,交$BC$于点$N$,则$\angle AHB=\angle GMB=90°$.因为四边形$ABCD$是正方形,所以$AG\parallel NE$,$AB=BC$,$\angle ABN=\angle BCF=90°$,所以四

边形 $ANEG$ 为平行四边形，所以$\angle BAN+\angle ABH=90^{\circ}=\angle CBF+\angle ABH$，$AN=EG$，所以$\angle BAN=\angle CBF$. 易证$\triangle ABN\cong\triangle BCF$，所以$AN=BF$. 所以$GE=BF$.

(3) ①是. 理由如下：

连接 $DM$. 因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以$AB=AD$，$\angle BAM=\angle DAM$. 又因为$AM=AM$，所以$\triangle BAM\cong\triangle DAM$，所以$BM=DM$，$\angle ABM=\angle ADM$. 因为$\angle BAG+\angle BMG=180^{\circ}$，所以$\angle ABM+\angle AGM=180^{\circ}$. 因为$\angle DGM+\angle AGM=180^{\circ}$，所以$\angle DGM=\angle ABM$，所以$\angle DGM=\angle ADM$，所以$GM=DM$. 由折叠的性质可知，$GM=GM'$，$BM=BM'$. 所以$GM=BM=GM'=BM'$，所以四边形 $BMGM'$为菱形. 又因为$\angle GMB=90^{\circ}$，所以四边形 $BMGM'$为正方形.

②$2\sqrt{17}$ **提示**：如图，连接 $M'A$，过点 $M'$ 作 $M'Q\perp AD$，交 $DA$ 的延长线于点 $Q$，过点 $M$ 作$MH\perp AD$ 于点 $H$. 易证$\triangle GM'Q\cong\triangle MGH$，所以$M'Q=GH$，$MH=GQ=AG+AQ$. 易证$\triangle AHM$为等腰直角三角形，所以$MH=AH=GH+AG$，所以$AQ=GH=M'Q$. 所以$\angle M'AQ=45^{\circ}$，所以$\angle BAM'=45^{\circ}$，所以$\angle M'AC=90^{\circ}$. 作点 $P$ 关于 $AM'$的对称点 $P'$，连接 $P'A$，$P'M'$，$BP'$，则 $PM'=P'M'$. 因为 $PM'+\frac{\sqrt{2}}{2}BG=PM'+BM'=P'M'+BM'\geqslant BP'$，所以 $PM'+\frac{\sqrt{2}}{2}BG$ 的最小值为 $BP'$的长. 由条件，得 $AC=6\sqrt{2}$. 所以 $AP'=AP=2\sqrt{2}$. 过点 $P'$ 作 $P'K\perp BA$，交 $BA$ 的延长线于点 $K$. 易证$\triangle AP'K$ 是等腰直角三角形，所以 $AK=P'K=2$. 所以 $BP'=\sqrt{P'K^2+(AB+AK)^2}=2\sqrt{17}$，即 $PM'+\frac{\sqrt{2}}{2}BG$ 的最小值为 $2\sqrt{17}$.