答案全解精析

第 5 章　二次函数

巅峰训练 1　二次函数、二次函数的图像和性质(1)

1. A　**提示**:因为$\triangle ABC$是等腰直角三角形,$\angle C=90^\circ$,所以$\angle A=\angle B=45^\circ$. 因为$DF\perp BC$,$DE\perp AC$,所以$\triangle DFB$是等腰直角三角形,四边形$CFDE$是矩形,所以$CF=DE=x$,$BF=DF=y$. 因为$AC=BC=2$,所以$BF=BC-CF$,即$y=2-x$,所以$y$与$x$满足一次函数关系. 因为$S=CF\cdot DF=xy=x(2-x)=2x-x^2=-(x-1)^2+1$,最大值为1,所以$S$与$x$满足二次函数关系,且$S$存在最大值.

2. C　**提示**:设$y_1=k_1x+6(k_1\neq 0)$,$y_2=k_2x+2(k_2\neq 0)$,点$C(x_0,3)$. 由题意,得$3=k_1x_0+6=k_2x_0+2$,所以$k_1=-3k_2$. 所以$y=y_1\cdot y_2=k_1k_2x^2+(2k_1+6k_2)x+12=-3k_2^2x^2+12$. 所以函数$y$的图像是开口向下,顶点坐标为$(0,12)$的抛物线.

3. A　**提示**:当n逐渐增大时,相关函数图像的变化如图1～图4所示. 如图1,线段MN与二次函数$y=-x^2+4x+n=-(x-2)^2+4+n$的相关函数的图像恰有一个公共点. 所以当$x=2$时,$y=1$,即$4+n=1$,解得$n=-3$. 如图2,线段MN与二次函数$y=-x^2+4x+n$的相关函数的图像恰有两个公共点. 此时抛物线$y=x^2-4x-n$与y轴交点的纵坐标为1,所以$-n=1$,解得$n=-1$. 所以当$-3<n\leqslant -1$时,线段MN与二次函数$y=-x^2+4x+n$的相关函数的图像有两个公共点. 如图3,线段MN与二次函数$y=-x^2+4x+n$的相关函数的图像恰有三个公共点. 此时抛物线$y=-x^2+4x+n$经过点$(0,1)$,所以$n=1$. 如图4,线段MN与二次函数$y=-x^2+4x+n$的相关函数的图像恰有两个公共点. 此时抛物线$y=x^2-4x-n$经过点$M\left(-\frac{1}{2},1\right)$,所以$\frac{1}{4}+2-n=1$,解得$n=\frac{5}{4}$. 所以当$1<n\leqslant\frac{5}{4}$时,线段$MN$与二次函数$y=-x^2+4x+n$的相关函数的图像有两个公共点. 综上所述,$n$的取值范围是$-3<n\leqslant -1$或$1<n\leqslant\frac{5}{4}$.

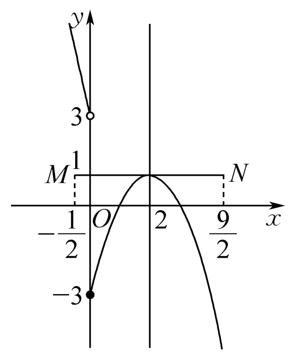


图 1

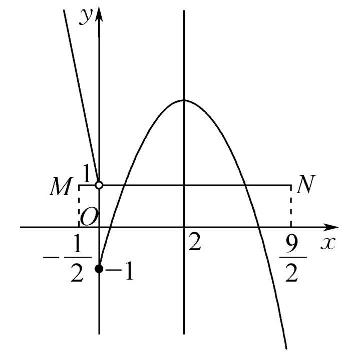


图 2

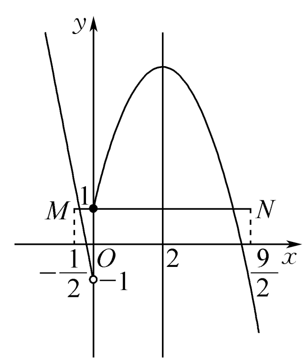


图 3

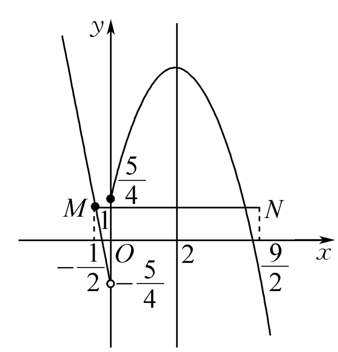


图 4

4. $m\geqslant -2$　**提示**:易得二次函数图像的对称轴为直线$x=-\frac{2m}{2\times 1}=-m$. 因为当$x>2$时,$y$的值随$x$值的增大而增大,且该二次函数的图像开口向上,所以$-m\leqslant 2$,解得$m\geqslant -2$.

5. $\frac{29}{4}$　**提示**:由$x+y=5$,得$x=5-y$,所以$xy+1=(5-y)y+1=-y^2+5y+1=-\left(y-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{29}{4}$. 因为$-1<0$,所以当$y=\frac{5}{2}$时,$xy+1$有最大值,最大值为$\frac{29}{4}$.

6. $a<-4$或$a>4$　**提示**:根据题意,易得$y_1=a+b+c$,$y_2=4a+2b+c$,$y_3=9a+3b+c$,$a^2+c=16a+4b+c$,所以$a^2=16a+4b$,即有$b=\frac{a^2-16a}{4}$. 因为$y_1<y_2<y_3$,所以$a+b+c<4a+$

$2b+c<9a+3b+c$，所以$\begin{cases}b>-3a,\\b>-5a.\end{cases}$当 $a>0$ 时，$b>-3a$，所以$\dfrac{a^2-16a}{4}>-3a$，解得 $a>4$；当 $a<0$ 时，$b>-5a$，所以$\dfrac{a^2-16a}{4}>-5a$，解得 $a<-4$. 综上所述，a 的取值范围是 $a<-4$ 或 $a>4$.

7. 1 **提示**：因为 $y=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$，所以抛物线的顶点坐标为(1,1). 因为四边形 $ABCD$ 为矩形，所以 $BD=AC$. 又因为 $AC\perp x$ 轴，所以 AC 的长等于点 A 的纵坐标的绝对值. 当 A 为抛物线的顶点时，点 A 到 x 轴的距离最小，最小值为1，所以对角线 BD 长的最小值为1.

8. ②④⑤ **提示**：由题图，得 $a>0$，$c<0$，$-\dfrac{b}{2a}=1$，即 $2a+b=0$，所以 a 与 b 异号，即 $b<0$，所以 $abc>0$，故①错误；因为该抛物线与 x 轴的一个交点横坐标在 -1 和 0 之间，且对称轴为直线 $x=1$，所以与 x 轴的另一个交点横坐标在 2 和 3 之间，所以关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 必有一个根大于 2 且小于 3，故②正确；因为点 $(0,y_1)$ 到对称轴的距离大于点 $\left(\dfrac{3}{2},y_2\right)$ 到对称轴的距离，所以 $y_1>y_2$，故③错误；易得 $a-b+c>0$，$9a+3b+c>0$，所以 $10a+2b+2c>0$，因为 $b=-2a$，所以 $6a+2c>0$，因为 $a>0$，所以 $11a+2c>0$，故④正确；因为当 $x=1$ 时，函数有最小值 $a+b+c$，所以对于任意实数 m，都有 $am^2+bm+c\geqslant a+b+c$，即 $m(am+b)\geqslant a+b$，故⑤正确.

9. $(-2,2)$或$(1,5)$ **提示**：因为点 A，B 关于直线 $y=x$ 对称，所以设点 $A(a,b)$，其中 $b>a$，则点 $B(b,a)$. 由于 $AB=4\sqrt{2}=\sqrt{(b-a)^2+(a-b)^2}$，所以 $b-a=4$ 或 $b-a=-4$(舍去)，所以 $b=a+4$. 因为点 $A(a,b)$在函数 $y=-x^2+6$ 的图像上，所以 $b=-a^2+6$，即 $a+4=-a^2+6$. 整理，得 $a^2+a-2=0$，解得 $a_1=-2$，$a_2=1$. 所以 $b_1=2$，$b_2=5$，所以点 A 的坐标是$(-2,2)$或$(1,5)$.

10. $(1+\sqrt{7},3)$或$(2,-3)$ **提示**：因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形，且 $AB=2\sqrt{3}$，所以边 AB 上的高为 3. 因为边 AB 在 x 轴上，所以点 C 的纵坐标为 ±3. 将 $y=3$ 代入 $y=x^2-2x-3$，解得 $x=1\pm\sqrt{7}$，将 $y=-3$ 代入 $y=x^2-2x-3$，解得 $x=0$ 或 $x=2$. 因为点 C 落在该函数 y 轴右侧的图像上，所以 $x>0$. 所以当 $y=3$ 时，$x=1+\sqrt{7}$；当 $y=-3$ 时，$x=2$. 所以点 C 的坐标为$(1+\sqrt{7},3)$或$(2,-3)$.

11. (1) **证明**：因为 $y=ax^2-a^2x=ax(x-a)$，所以当 $y=0$ 时，解得 $x_1=0$，$x_2=a$. 根据题意，得 $a\neq0$，所以 $x_1\neq x_2$，所以该函数的图像与 x 轴总有两个公共点.

(2) $\dfrac{a}{2}$

(3) **解**：a 的取值范围是 $a>\dfrac{3}{2}$ 或 $-2<a<0$. **提示**：因为点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$在该函数图像上，该函数图像的对称轴为直线 $x=\dfrac{a}{2}$，所以点 $B(x_2,y_2)$关于对称轴的对称点 B' 的坐标为$(a-x_2,y_2)$. 因为 $2a\leqslant x_2\leqslant 2a+1$，所以 $-a-1\leqslant a-x_2\leqslant -a$. 当 $a>0$ 时，$\dfrac{a}{2}<2a$，所以点 B 在该抛物线对称轴的右侧，如图 1 所示，根据题意，得 $x_{B'}<x_1<x_B$，所以$\begin{cases}2a>3,\\-a<2,\end{cases}$解得 $a>\dfrac{3}{2}$；当 $a<0$ 时，$\dfrac{a}{2}<0$，所以点 A 在该抛物线对称轴的右侧，如图 2 所示，根据题意，得 $x_B<x_1$，$x_{B'}<x_1$，所以$\begin{cases}2a+1<2,\\-a<2,\end{cases}$解得 $-2<a<0$. 综上所述，a 的取值范围为 $a>\dfrac{3}{2}$ 或 $-2<a<0$.

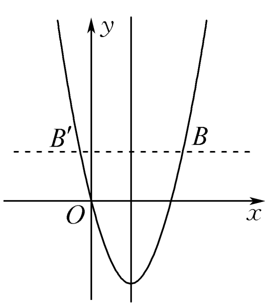


图 1

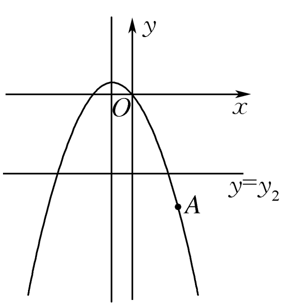


图 2

12. $-\dfrac{1}{4}\leqslant b\leqslant 6$ **提示**：化简 $a(a+b)=b(a+1)+a$，得 $b=a^2-a$. 化为顶点式，得 $b=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$. 因为 $-2\leqslant a\leqslant 2$，所以当 $-2\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，b 随 a 的增

大而减小；当$\frac{1}{2}<a\leqslant 2$时，b随a的增大而增大. 当$a=\frac{1}{2}$时，b取得最小值，最小值为$-\frac{1}{4}$. 当$a=-2$时，$b=6$；当$a=2$时，$b=2$. 因为$6>2$，所以b的最大值为6. 所以b的取值范围是$-\frac{1}{4}\leqslant b\leqslant 6$.

13. 解：解法1 根据题意，得抛物线$y=x^2-6x+3$的对称轴为直线$x=3$，$y_t=y_{6-t}$，y_1与y_2的图像不重合. 画出草图如图所示.

如图1，$y_1<y_2$，可得$6-t\geqslant t+2$，解得$t\leqslant 2$；如图2，$y_1>y_2$，不合题意，舍去. 综上所述，$t\leqslant 2$.

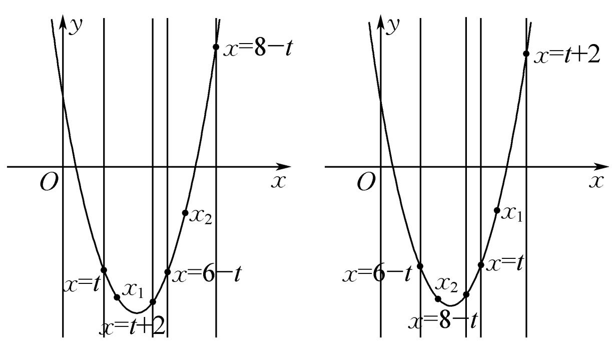


图1　　图2

解法2 因为点P，Q在抛物线$y=x^2-6x+3$上，所以$y_1=x_1^2-6x_1+3$，$y_2=x_2^2-6x_2+3$. 根据题意，得$y_1<y_2$，即$x_1^2-6x_1+3<x_2^2-6x_2+3$. 整理，得$(x_1-x_2)(x_1+x_2-6)<0$. 因为$t<x_1<t+2$，$6-t<x_2<8-t$，所以$6<x_1+x_2<10$，所以$x_1+x_2-6>0$. 所以$x_1-x_2<0$，所以$x_1<x_2$，所以$t+2\leqslant 6-t$，所以$t\leqslant 2$.

巅峰训练2　二次函数、二次函数的图像和性质(2)

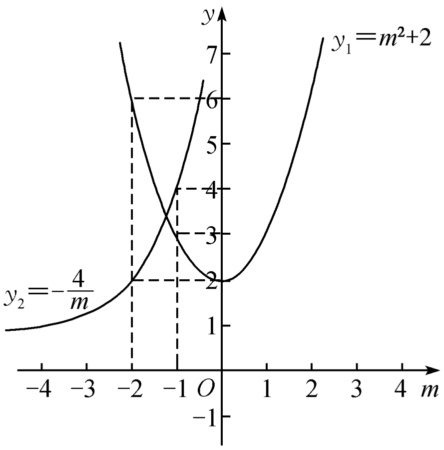
1. C　**提示：**将抛物线$y=x^2+kx+4k$与直线$y=16$联立，得$x^2+kx+4k=16$，即$x^2+kx+4k-16=0$，解得$x_1=-4$，$x_2=-k+4$. 当$-k+4>-4$时，抛物线$y=x^2+kx+4k$在直线$y=16$下方的图像上的五个整数点的横坐标依次为-3，-2，-1，0，1，所以$\begin{cases}-k+4>1,\\-k+4\leqslant 2,\end{cases}$解得$2\leqslant k<3$，所以$k$的值可以是$2$，$\sqrt{5}$，故选项A，B不符合题意；当$-k+4<-4$时，抛物线$y=x^2+kx+4k$在直线$y=16$下方的图像上的五个整数点的横坐标依次为$-5$，$-6$，$-7$，$-8$，$-9$，所以$\begin{cases}-k+4<-9,\\-k+4\geqslant -10,\end{cases}$解得$13<k\leqslant 14$，所以$k$的值不可以是13，可以是$4\pi+1$，故选项C符合题意，选项D不符合题意.

2. D　**提示：**设该二次函数对称轴与x轴交于点H. 由二次函数$y=ax^2+bx+c$的图像，得$a<0$，$b>0$，$c>0$，故①正确；结合当$x=1$时，$n=a+b+c$最大，当$x=m$时，$y=am^2+bm+c$，所以$a+b+c\geqslant am^2+bm+c$，得$a+b\geqslant am^2+bm$，故②错误；由$-\frac{b}{2a}=1$，$a-b+c>0$，可得$3b<2c$，故③正确；由题意可知，$\angle PAH=60^\circ$，易得$n=PH=\sqrt{3}AH$，记点A，B的横坐标分别为x_1，x_2，所以$n=\sqrt{3}(x_2-1)=\sqrt{3}(1-x_1)$，所以$2n=\sqrt{3}(x_2-x_1)$，令$y=ax^2+bx+c=0$，则$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=2$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$，所以$x_2-x_1=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{4-\frac{4c}{a}}$，可得$n=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\frac{4a-4c}{a}}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{a-c}{a}}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{a^2-ac}{a^2}}=-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{a(a-c)}}{a}$，结合$n=a+b+c=c-a$，可得$a(a-c)=3$，所以$n=c-a=-\frac{3}{a}$，故④正确.

3. D　**提示：**由题意，得原二次函数图像的顶点坐标为$(1,-2a)$，所以其函数表达式为$y=a(x-1)^2-2a=ax^2-2ax-a$. 所以$b=-2a$，$c=-a$. 因为$(m-1)a+b+c\leqslant 0$，所以$(m-1)a-2a-a\leqslant 0$. 因为$a>0$，所以$m-1-2-1\leqslant 0$，解得$m\leqslant 4$，即m的最大值是4.

4. A　**提示：**因为$m^2+2\left(1+\frac{2}{m}\right)=0$，所以$m^2+2+\frac{4}{m}=0$，所以$m^2+2=-\frac{4}{m}$. 所以原方程的实数解可以看作是函数$y_1=m^2+2$的图像与函数$y_2=-\frac{4}{m}$的图

像的交点横坐标，作出上述两个函数的图像如图所示(反比例函数在第四象限的图像显然与抛物线无交点).在第二象限，y_1 值随 m 值的增大而减小，y_2 值随 m 值的增大而增大. 当 $m=-2$ 时，$y_1=6$，$y_2=2$，因为 $6>2$，所以交点的横坐标大于-2；当 $m=-1$ 时，$y_1=3$，$y_2=4$，因为 $3<4$，所以交点的横坐标小于-1. 综上所述，$-2<m<-1$.



5. -2　**提示：**因为二次函数 $y=ax^2-bx+2$ 有最大值 6，所以设二次函数 $y=ax^2-bx+2$ 图像的顶点坐标为$(m,6)$. 由平移，可知抛物线 $y=a(x+1)^2-b(x+1)+2$ 的顶点坐标为$(m-1,6)$. 根据关于 x 轴对称，可知抛物线 $y=-a(x+1)^2+b(x+1)-2$ 的顶点坐标为$(m-1,-6)$，且开口向上. 再向上平移 4 个单位长度，得抛物线 $y=-a(x+1)^2+b(x+1)+2$，此时顶点坐标为$(m-1,-2)$，最小值为-2.

6. $\frac{9}{2}\leqslant d\leqslant 8$　**提示：**将点$(7,0)$代入抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+3x+c$，得 $-\frac{1}{2}\times 7^2+3\times 7+c=0$，解得 $c=\frac{7}{2}$. 所以抛物线的函数表达式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{7}{2}=-\frac{1}{2}(x-3)^2+8(0\leqslant x\leqslant 7)$，所以顶点坐标为$(3,8)$. 当 $x=0$ 时，$y=\frac{7}{2}$，当 $x=6$ 时，$y=\frac{7}{2}$. 当 $x_1=0$ 时，$x_2=6$，d 取得最小值，且 $d=8-\frac{7}{2}=\frac{9}{2}$；当 $x_1=1$ 时，$x_2=7$，d 取得最大值，且 $d=8-0=8$. 综上所述，d 的取值范围是 $\frac{9}{2}\leqslant d\leqslant 8$.

7. $-2<k<\frac{1}{2}$　**提示：**由题图可知，$\angle AOB=45°$，所以直线 OA 的函数表达式为 $y=x$. 联立，得 $\begin{cases} y=x, \\ y=\frac{1}{2}x^2+k. \end{cases}$ 整理，得 $x^2-2x+2k=0$. 当根的判别式 $(-2)^2-8k=0$，即 $k=\frac{1}{2}$ 时，抛物线与直线 OA 有一个交点，此交点的横坐标为 1. 因为点 $B(2,0)$，所以 $OA=OB=2$，所以点 $A(\sqrt{2},\sqrt{2})$，所以交点在线段 OA 上. 当抛物线经过点 $B(2,0)$ 时，$\frac{1}{2}\times 4+k=0$，解得 $k=-2$. 所以要使抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+k$ 与扇形 OAB 的边界总有两个公共点，则实数 k 的取值范围是 $-2<k<\frac{1}{2}$.

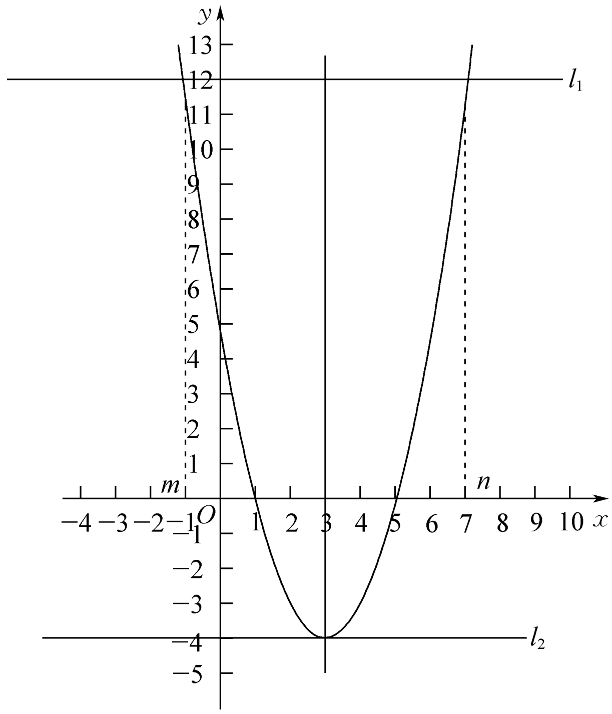
8. 解：设 $y=ax^2+bx+4a+1$. 由题意可知，抛物线 $y=ax^2+bx+4a+1$ 的对称轴为直线 $x=\frac{-m+m-4}{2}=-2$. 所以 $-\frac{b}{2a}=-2$，所以 $b=4a$. 若 $a>0$，则当 $x>-2$ 时，y 随 x 的增大而增大，根据题意，得 $a-b+4a+1<3<4a+2b+4a+1$，即 $a+1<3<16a+1$，解得 $\frac{1}{8}<a<2$；若 $a<0$，同理可得 $a+1>3>16a+1$，此时无解. 综上所述，a 的取值范围是 $\frac{1}{8}<a<2$.

9. 解：(1) 把点$(1,0)$代入 $y=x^2-ax+5$，得 $1-a+5=0$，解得 $a=6$.

(2) 由(1)知，抛物线的函数表达式为 $y=x^2-6x+5$，所以对称轴为直线 $x=3$. 根据题意，得点 B，C 关于直线 $x=3$ 对称，$y_B=y_C=t$. 又因为 B 为线段 AC 的中点，$x_A=0$，所以 $x_C=2x_B$，所以 $\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{3}{2}x_B=3$，所以 $x_B=2$. 将 $x=2$ 代入 $y=x^2-6x+5$，得 $y_B=2^2-6\times 2+5=-3$，所以 $t=-3$.

(3) 因为 $y=x^2-6x+5=(x-3)^2-4$，所以抛物线的顶点坐标为$(3,-4)$. 若要使 $n-m$ 的值最大，则 $x=m$ 和 $x=n$ 关于对称轴对称. 又因为直线 l_1，l_2 之间的距离为 16，为定

值，所以当一条直线恰好经过抛物线的顶点$(3,-4)$，即$y=-4$时，$n-m$的值最大，此时另一条直线的函数表达式为$y=16-4=12$.如图，所以当$x^2-6x+5=12$时，解得$x_1=7$，$x_2=-1$，即$n=7$，$m=-1$，所以$n-m$的最大值为$7-(-1)=8$.



10. C　**提示**：因为点$C(2,1)$，抛物线过定点$(0,1)$，所以当抛物线对称轴所在直线$x=-\frac{b}{2}\leqslant 1$，即$b\geqslant -2$时，点$(0,1)$关于对称轴的对称点在点$C$或点$C$的左侧，必与阴影部分(含边界)有公共点.当$b<-2$时，对称轴在点$B$的右侧，最低点的纵坐标$1-\frac{b^2}{4}<0$，在$x$轴下方，此时只需考虑该二次函数的图像在对称轴左侧部分与阴影部分是否有公共点.经计算可知，$x=1$时$y=2+b<0$，在点B下方，因此与阴影部分(含边界)无交点.综上所述，$b\geqslant -2$.

11. 解：(1) ①③

(2) 直线$y=kx+k+\frac{1}{2}$的“2级方点”有两个.理由如下：

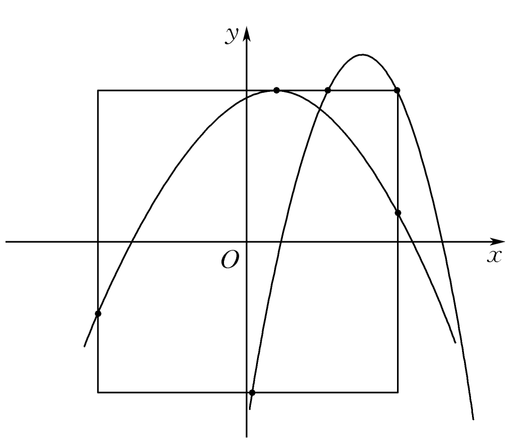
因为$y=kx+k+\frac{1}{2}=k(x+1)+\frac{1}{2}$，所以直线$y=kx+k+\frac{1}{2}$过定点$\left(-1,\frac{1}{2}\right)$.由“$a$级方点”的定义可知，函数图像的“2级方点”是指函数图像上落在以原点为中心，边长为4且一边平行于x轴的正方形上的点.因为点$\left(-1,\frac{1}{2}\right)$恰好落在该正方形的内部，所以直线$y=kx+k+\frac{1}{2}$与该正方形必有两个交点.所以$y=kx+k+\frac{1}{2}$的“2级方点”有两个.

(3) 由二次函数$y=-(x-a+1)^2+3(a-1)^2-3(a-1)+2$可知，抛物线开口方向向下，顶点坐标为$(a-1,3(a-1)^2-3(a-1)+2)$.

当抛物线顶点在直线$y=a$上时，抛物线恰有三个“a级方点”，如图，则$3(a-1)^2-3(a-1)+2=a$，解得$a_1=2$，$a_2=\frac{4}{3}$.

当抛物线经过点(a,a)时，抛物线恰有三个“a级方点”，如图，则$-1+3(a-1)^2-3(a-1)+2=a$，解得$a_3=\frac{7}{3}$，$a_4=1$(不合题意，舍去).

综上所述，a的值为2或$\frac{4}{3}$或$\frac{7}{3}$.



巅峰训练3　用待定系数法确定二次函数表达式

1. B　**2.** A

3. C　**提示**:因为抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 过点 $\left(\frac{1}{2},\frac{t}{2}\right)$,$\left(-\frac{1}{2},\frac{3t}{2}\right)$,所以$\begin{cases}-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}b+c=\frac{t}{2},\\-\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}b+c=\frac{3t}{2},\end{cases}$解得$\begin{cases}b=-t,\\c=t+\frac{1}{4},\end{cases}$所以抛物线的函数表达式为 $y=-x^2-tx+t+\frac{1}{4}$. 易知抛物线的开口向下,对称轴是直线 $x=-\frac{-t}{-2}=-\frac{t}{2}$. 当 $x=-\frac{t}{2}$ 时,y 有最大值,最大值为 $-\left(-\frac{t}{2}\right)^2-t\left(-\frac{t}{2}\right)+t+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}t^2+t+\frac{1}{4}$. 若 $-2\leqslant t\leqslant 4$,则 $-2\leqslant-\frac{t}{2}\leqslant 1$. 因为当 $-2\leqslant x\leqslant 3$ 时,y 的最大值为 $\frac{3}{2}$,所以 $\frac{1}{4}t^2+t+\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$,即 $t^2+4t-5=0$,解得 $t_1=-5$,$t_2=1$. 因为 $-2\leqslant t\leqslant 4$,所以 $t=1$.

4. $y=\frac{a}{k}x^2+bx+ck$　**提示**:设抛物线 L_2 上一点 $P'(x,y)$,则点 P' 在抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上的对应点为 $P\left(\frac{x}{k},\frac{y}{k}\right)$,所以 $\frac{y}{k}=a\left(\frac{x}{k}\right)^2+b\cdot\frac{x}{k}+c$. 整理,得 $y=\frac{a}{k}x^2+bx+ck$.

5. $y=-0.4(x+1)^2+0.9(-2.5\leqslant x\leqslant-1)$　**提示**:记 EC 与 y 轴的交点为 F. 因为 $CE=2$ 且半圆关于 y 轴对称,所以 $FD=EF=FC=1$. 因为 $OD=1.9$,所以 $OF=0.9$,所以左侧抛物线的顶点 E 的坐标为 $(-1,0.9)$. 因为 $AB=5$ 且关于 y 轴对称,所以点 $A(-2.5,0)$. 设 $y=a(x+1)^2+0.9$,将点 $A(-2.5,0)$ 代入,得 $0=a(-2.5+1)^2+0.9$,解得 $a=-0.4$,所以 $y=-0.4(x+1)^2+0.9$. 因为点 $A(2.5,0)$,$E(-1,0.9)$,所以 $-2.5\leqslant x\leqslant-1$,所以图案中 AE 这段抛物线的函数表达式为 $y=-0.4(x+1)^2+0.9(-2.5\leqslant x\leqslant-1)$.

6. ①③④　**提示**:因为二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 图像的对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}$,且二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图像向右平移 1 个单位长度后关于 y 轴对称,所以 $-\frac{b}{2a}+1=0$,所以 $\frac{b}{a}=2$,故①正确. 可得 $b=2a$,所以 $a^2+b^2-5b+8=5a^2-10a+8=5(a-1)^2+3$. 因为 $\frac{3}{2}\leqslant a\leqslant\frac{5}{2}$,所以当 $a=\frac{3}{2}$ 时,a^2+b^2-5b+8 取得最小值,最小值为 $\frac{17}{4}$,故②错误. 因为 $-\frac{b}{2a}+1=0$,所以该函数图像的对称轴为直线 $x=-1$. 因为 $a>0$,所以当 $x=-1$ 时,二次函数取得最小值,最小值为 $a-b+c$. 当 $x=m$ 时,函数值为 am^2+bm+c,所以 $am^2+bm+c\geqslant a-b+c$,所以对于任意实数 m,不等式 $am^2+bm-a+b\geqslant 0$ 一定成立,故③正确. 当 $x_1<-1<x_2$ 时,因为 $x_1+x_2+2>0$,所以 $x_2+1>-1-x_1$,所以 $y_1<y_2$,当 $-1<x_1<x_2$ 时,满足 $x_1+x_2+2>0$,所以 $x_1+1<x_2+1$,所以 $y_1<y_2$,当 $x_1<x_2<-1$ 时,不满足 $x_1+x_2+2>0$,不符合题意,舍去,故④正确.

7. 解:(1) 易知抛物线的对称轴为直线 $x=2$,所以 $h=2$. 把点 $A(-1,0)$ 代入 $y=a(x-2)^2-2$,得 $a=\frac{2}{9}$. 所以该抛物线的函数表达式为 $y=\frac{2}{9}(x-2)^2-2$.

(2) 因为点 A 与点 B 关于抛物线的对称轴对称,所以△ABM 是以 M 为直角顶点的等腰直角三角形. 因为点 $M(h,-2)$,所以 $AB=2\times|-2|=4$,所以点 B 的坐标为 $(-5,0)$ 或 $(3,0)$.

当点 B 的坐标为 $(-5,0)$ 时,易得 $\begin{cases}a(-1-h)^2-2=0,\\a(-5-h)^2-2=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\h=-3.\end{cases}$所以此时该抛物线的函数表达式为 $y=\frac{1}{2}(x+3)^2-2$.

当点 B 的坐标为 $(3,0)$ 时,同理可得该抛物线的函数表达式为 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2-2$.

综上所述,该抛物线的函数表达式为 $y=\frac{1}{2}(x+3)^2-2$ 或 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2-2$.

(3) ①把点 $M(h,-2)$ 代入 $y=x-6$,得 $h-6=-2$,解得 $h=4$. 联立,得$\begin{cases}y=a(x-4)^2-2,\\y=x-6,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=4,\\y=-2\end{cases}$或$\begin{cases}x=\frac{4a+1}{a},\\y=\frac{1-2a}{a}.\end{cases}$所以点 D 的坐标

为$\left(\dfrac{4a+1}{a},\dfrac{1-2a}{a}\right)$.

②$y=\dfrac{1}{4}(x-4)^2-2$. **提示**:当 $x=0$ 时,$y=a(0-4)^2-2=16a-2$. 所以点 $C(0,16a-2)$. 因为 $CD/\!/x$ 轴,所以$\begin{cases}\dfrac{1-2a}{a}=16a-2,\\ \dfrac{4a+1}{a}\neq 0,\end{cases}$ 解得 $a=\dfrac{1}{4}$ 或 $a=-\dfrac{1}{4}$(舍去). 所以该抛物线的函数表达式为 $y=\dfrac{1}{4}(x-4)^2-2$.

8. B **提示**:由一次函数、二次函数和反比例函数的图像性质,可知一次函数图像和二次函数图像,一次函数图像和反比例函数图像最多只有两个交点,故这三点不可以同时位于一次函数和二次函数的图像上,以及一次函数和反比例函数的图像上. 若点$(1,m)$和点$(2,2-m)$在反比例函数的图像上,设反比例函数为 $y=\dfrac{k}{x}$,则 $k=m=2(2-m)$,解得 $k=m=\dfrac{4}{3}$,所以 $-3m^2+5m-1=\dfrac{1}{3}$. 把 $x=4$ 代入 $y=\dfrac{4}{3x}$,得 $y=\dfrac{1}{3}$,故当 $m=\dfrac{4}{3}$ 时,这三点可以同时位于二次函数和反比例函数的图像上.

9. 解:(1) 由题意,得 $C_2:y=bx^2+(4a-3)x+a$. 因为 C_1 与 C_2 交于 y 轴上的同一点 M,所以 $4a-3=a$,解得 $a=1$.

(2) 由(1),得 $C_1:y=x^2+bx+1$,所以 $C_2:y=bx^2+x+1$. 将两式联立,解得 $x_1=0$,$x_2=1$,所以点 $M(0,1)$,$N(1,b+2)$.

①当 $b+2>1$,即 $b>-1$ 时,如图 1,过点 N 作 $NO'\perp x$ 轴,垂足为 O',过点 M 作 $ME\perp NO'$,垂足为 E,过点 P 作 $PF\perp NO'$,垂足为 F. 易证$\triangle MEN\cong\triangle NFP$,所以 $NF=ME=1$,$PF=NE=b+1$. 易得点 $P(-b,b+3)$,将其代入 C_1 的函数表达式,得 $b^2-b^2+1=b+3$,解得 $b=-2$(不合题意,舍去).

②当 $b+2<1$,即 $b<-1$ 时,如图 2,同理,易证$\triangle MGN\cong\triangle NHP$,所以 $PH=NG=1$,$NH=MG=-b-1$,所以点 $P(-b,b+3)$,同理可得 $b=-2$.

③当 $b+2=1$,即 $b=-1$ 时,点 $N(1,1)$,$P(1,2)$. 此时点 P 不在 C_1 上,不合题意,舍去.

综上所述,b 的值为-2.

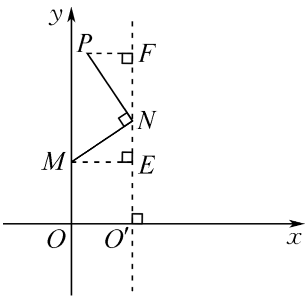


图 1

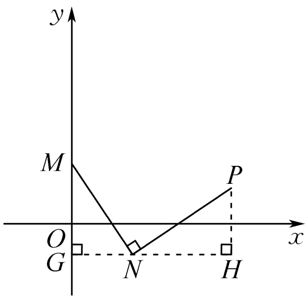


图 2

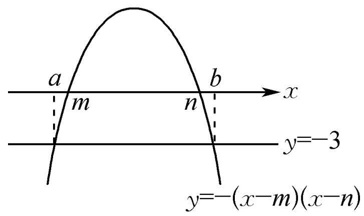
(3) 根据题意,易得点 $P(0,4a-3)$,$Q(0,a)$. 将 $y=ax^2+bx+4a-3$ 与 $y=bx^2+(4a-3)x+a$ 联立,得$(a-b)x^2+(b-4a+3)x+3a-3=0$. 整理,得 $a(x^2-4x+3)-b(x^2-x)+3x-3=0$. 由题意,知 $x^2-4x+3=0$ 且 $x^2-x=0$,于是 $3x-3=0$,解得 $x=1$. 易知点 G 的横坐标为 1,代入函数表达式,可得点 $G(1,5a+b-3)$. 因为 $PG=QG$,所以点 G 在线段 PQ 的垂直平分线上,所以 $5a+b-3=\dfrac{4a-3+a}{2}$,即 $b=-\dfrac{5}{2}a+\dfrac{3}{2}$. 由 $a\neq 0$,$b\neq 0$,$a\neq b$,得 $a\neq 0$,$a\neq\dfrac{3}{5}$,$a\neq\dfrac{3}{7}$. 代入 $S=ab$,得 $S=a\left(-\dfrac{5}{2}a+\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{5}{2}\left(a-\dfrac{3}{10}\right)^2+\dfrac{9}{40}$,所以 S 的最大值为$\dfrac{9}{40}$.

巅峰训练 4　二次函数与一元二次方程

1. B **提示**:由题意可知,$(2\Phi 3)=3^2-2=7$,$(6\Phi 4)=6+\sqrt{4}=8$,所以 $y=x^2+7x-8$. 令 $y=0$,则 $x^2+7x-8=0$. 因为根的判别式 $7^2-4\times(-8)=81>0$,所以抛物线 $y=x^2+(2\Phi 3)x-(6\Phi 4)$与 x 轴交点的个数为 2.

2. D **提示**:由题意,可将 a,b 看成抛物线 $y=-(x-m)(x-n)$与直线 $y=-3$ 的交点的横坐标,将 m,n 看成抛物线 $y=-(x-m)(x-n)$与直线 $y=0$(即 x 轴)的交点的横坐标. 令 $m<n$,$a<b$,画出草图如

图所示，由图可知，$a<m<n<b$.



3. D　**提示**：因为 $b>a>0$，所以 $-\dfrac{b}{2a}<0$，故①正确. 因为抛物线与 x 轴最多有一个交点，所以 $b^2-4ac\leqslant 0$，所以在关于 x 的方程 $ax^2+bx+c+2=0$ 中，$b^2-4a(c+2)=b^2-4ac-8a<0$，故②正确. 因为 $a>0$，且抛物线与 x 轴最多有一个交点，所以当 x 取任何值时，$y\geqslant 0$，所以当 $x=-1$ 时，$a-b+c\geqslant 0$，故③正确. 同理可得，当 $x=-2$ 时，$4a-2b+c\geqslant 0$，即 $a+b+c\geqslant 3(b-a)$，所以 $\dfrac{a+b+c}{b-a}\geqslant 3$，故④正确.

4. C　**提示**：因为 $y=a(x-1)^2+2$，所以抛物线的顶点坐标为 $(1,2)$. 因为抛物线 $y=a(x-1)^2+2$ 与线段 AB 只有一个交点，所以开口向下. 如图 1，把点 $(3,-4)$ 代入 $y=a(x-1)^2+2$，得 $-4=(3-1)^2a+2$，解得 $a=-\dfrac{3}{2}$. 如图 2，把点 $(0,-2)$ 代入 $y=a(x-1)^2+2$，得 $-2=(-1)^2a+2$，解得 $a=-4$. 观察图像可知，当抛物线与线段 AB 只有一个交点时，a 的取值范围是 $-4<a\leqslant -\dfrac{3}{2}$.

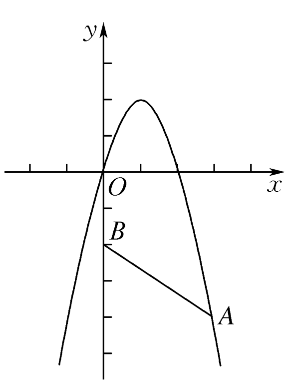


图 1

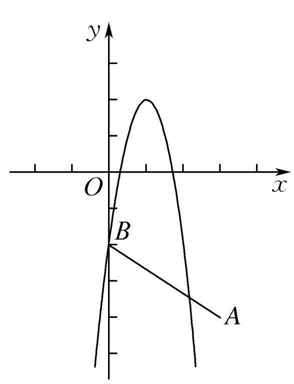
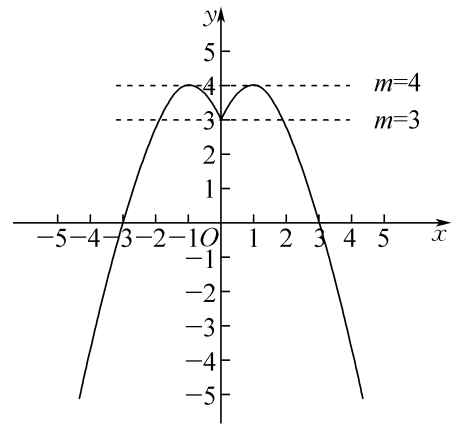
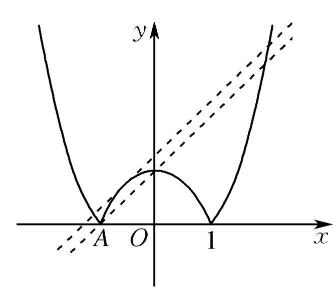


图 2

5. ①③④　**提示**：画出该函数全部图像的草图，如图所示. 函数图像关于 y 轴对称，故①正确. 如图，函数有最大值，没有最小值，故②错误. 如图，当 $x<-1$ 时，y 随 x 的增大而增大，故③正确. 如图，当 $3<m<4$ 时，关于 x 的方程 $-x^2+2|x|+3=m$ 有 4 个实数根，故④正确.

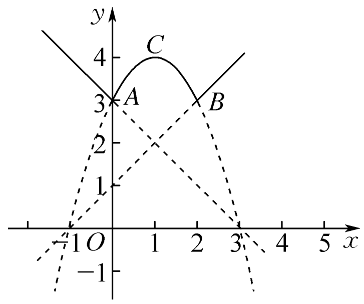


6. $1<m<\dfrac{5}{4}$　**提示**：翻折后的新图像如图所示. 把直线 $y=x$ 向上平移，当平移后的直线 $y=x+m$ 过点 $A(-1,0)$ 时，直线 $y=x+m$ 与新图像恰好有 3 个公共点，所以 $-1+m=0$，解得 $m=1$；当直线 $y=x+m$ 与抛物线 $y=-x^2+1(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 相切时，直线 $y=x+m$ 与新图像也恰好有 3 个公共点，即 $-x^2+1=x+m$ 有两个相等的实数根. 易得 $m=\dfrac{5}{4}$. 结合图像可知，当直线 $y=x+m$ 与新图像有 4 个公共点时，m 的取值范围是 $1<m<\dfrac{5}{4}$.

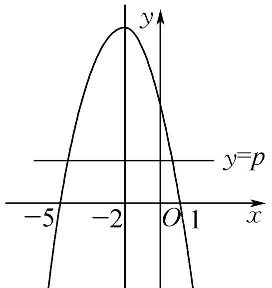


7. $3<b<4$ 或 $b>\dfrac{73}{16}$　**提示**：画出函数 $y=\max\{x+1,3-x,-x^2+2x+3\}$ 的图像，如图中实线所示. 易知直线 $y=-\dfrac{1}{2}x+b$ 与直线 $y=-\dfrac{1}{2}x$ 平行，且随 b 的取值变化而平移. 将点 $A(0,3)$ 代入直线 $y=-\dfrac{1}{2}x+b$，得 $b=3$. 联立 $\begin{cases}y=-x^2+2x+3,\\y=x+1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-1,\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2,\\y=3,\end{cases}$ 所以点 $B(2,3)$，代入 $y=-\dfrac{1}{2}x+b$，得 $3=-1+b$，解得 $b=4$. 所以当 $3<b<4$ 时，直线 $y=-\dfrac{1}{2}x+b$ 与函数 $y=\max\{x+1,3-x,-x^2+2x+3\}$ 的图像有且只有两个交点. 当直线 $y=-\dfrac{1}{2}x+b$ 与

抛物线 $y=-x^2+2x+3$ 相切时，$-\frac{1}{2}x+b=-x^2+2x+3$，即 $x^2-\frac{5}{2}x+b-3=0$，则根的判别式 $\left(-\frac{5}{2}\right)^2-4(b-3)=-4b+\frac{73}{4}=0$，解得 $b=\frac{73}{16}$. 所以当 $b>\frac{73}{16}$时，直线 $y=-\frac{1}{2}x+b$ 与函数 $y=\max\{x+1,3-x,-x^2+2x+3\}$的图像有且只有两个交点. 综上所述，$b$ 的取值范围为 $3<b<4$ 或 $b>\frac{73}{16}$.



8. 3 **提示**：因为抛物线 $y=ax^2+bx+c(a<0)$的对称轴为直线 $x=-2$，所以 $-\frac{b}{2a}=-2$，解得 $b=4a$. 又因为抛物线 $y=ax^2+bx+c(a<0)$与 x 轴的一个交点为$(1,0)$. 把点$(1,0)$代入 $y=ax^2+bx+c(a<0)$，得 $a+b+c=0$，即 $a+4a+c=0$，解得 $c=-5a$. 所以 $y=ax^2+4ax-5a$. 因为$\frac{4a\cdot(-5a)-16a^2}{4a}=-9a$，所以顶点坐标为$(-2,-9a)$. 令 $ax^2+4ax-5a=0$，即 $x^2+4x-5=0$，解得 $x_1=1$，$x_2=-5$. 所以抛物线始终与 x 轴交于点$(1,0)$和点$(-5,0)$. 因为 $ax^2+bx+c=p(p>0)$有整数根，所以画出函数 $y=ax^2+bx+c(a<0)$以及函数 $y=p$ 的图像如图所示. 由 $p>0$，可得 $0<y\leqslant-9a$. 由图像，得当 $0<y\leqslant-9a$ 时，$-5<x<1$. 当 x 为整数时，易知当 $x=-4$ 与 $x=0$，$x=-3$ 与 $x=-1$ 时，y 的值相等；当 $x=-2$ 时，直线 $y=p$ 恰好过抛物线顶点. 所以 p 的值有 3 个.



9. 解：(1) 由题意可知，$m-n+1=0$，且根的判别式 $n^2-4m=0$，即$(m+1)^2-4m=0$，解得 $m=1$，$n=2$. 所以二次函数的表达式为 $y=x^2+2x+1$.

(2) 由题易得 $n=m+1$，所以 $y=mx^2+nx+1=mx^2+(m+1)x+1=(mx+1)\cdot(x+1)$. 当 $y=0$ 时，$x_1=-\frac{1}{m}$，$x_2=-1$，所以点 $B\left(-\frac{1}{m},0\right)$；当 $x=0$ 时，$y=1$，所以点 $C(0,1)$. 因为 $S_{\triangle ABC}=1$，所以$\frac{1}{2}\times\left|-\frac{1}{m}+1\right|\times1=1$，解得 $m=-1$ 或 $m=\frac{1}{3}$，所以 $n=0$ 或 $n=\frac{4}{3}$. 综上所述，n 的值为 0 或$\frac{4}{3}$.

(3) 没有. 理由如下：

当 $x=1$ 时，$y>2$，即 $m+n+1>2$. 因为 $n=m+1$，所以可得 $m>0$，所以该二次函数的图像开口向上. 因为该二次函数图像的对称轴为直线 $x=-\frac{n}{2m}=-\frac{m+1}{2m}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2m}<0$，且该二次函数的图像与 y 轴交于点$(0,1)$，所以当 $0<x<1$ 时该二次函数 y 的值随 x 值的增大而增大，易得该二次函数的图像在 $0<x<1$ 之间的部分与 x 轴没有公共点.

10. D **提示**：因为抛物线 $y=ax^2+bx+c(a>0)$经过点$(1,0)$和$(m,0)(-3<m<-2)$，则 $-\frac{b}{2a}=\frac{1+m}{2}$，所以$-1<-\frac{b}{2a}<-\frac{1}{2}$，则 $b>0$，所以抛物线的开口向上，对称轴在 y 轴的左侧，与 y 轴的交点在 x 轴下方，则 $c<0$，所以 $a+b-c>0$，故①正确. 因为 $-1<-\frac{b}{2a}<-\frac{1}{2}$，$a>0$，$b>0$，所以 $-2a<-b<-a$，所以 $-4a<-2b<-2a$，所以 $-3a<a-2b<-a$，所以 $a-2b<0$，故②正确. 因为抛物线开口向上，所以当抛物线与直线 $y=-1$ 有交点时，抛物线顶点的纵坐标小于或等于-1，即$\frac{4ac-b^2}{4a}\leqslant-1$，所以 $4ac-b^2\leqslant-4a$，所以当关于 x 的方程 $a(x-m)(x-1)+1=0$ 有实数根时，$4ac-b^2\leqslant-4a$，即 $b^2\geqslant4a(c+1)$，故③正确.

11. (1) **解**：由 $y=x^2-2mx+m^2+m+1$，可得 $y=(x-m)^2+m+1$，所以图像 C 的顶点坐标为$(m,m+1)$.

(2) **证明**:当 $y=0$ 时,可得 $x^2-2mx+m^2+m+1=0$,所以根的判别式为 $(-2m)^2-4\times1\times(m^2+m+1)=-4(m+1)$,当 $m<-1$ 时,$-4(m+1)>0$,所以关于 x 的方程 $x^2-2mx+m^2+m+1=0$ 有两个不相等的实数根,所以图像 C 与 x 轴有两个交点.

(3) **解**:m 的取值范围为 $6-\sqrt{19}<m\leqslant 6+\sqrt{19}$ 或 $-2\leqslant m\leqslant -1$ 或 $m=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **提示**:令 $x=-1$,则 $y=0$,令 $x=4$,则 $y=5m$.设点 A 的坐标为 $(-1,0)$,点 B 的坐标为 $(4,5m)$.依题意,图像 C 与线段 AB 恰有一个公共点.

①如图1,当 $m>0$ 且图像 C 不与直线 $y=mx+m$ 相切时,若 $x=-1$,则 $y=(-1-m)^2+m+1\geqslant 0$,解得 $m\geqslant -1$ 或 $m\leqslant -2$;若 $x=4$,则 $y=(4-m)^2+m+1\leqslant 5m$,解得 $6-\sqrt{19}\leqslant m\leqslant 6+\sqrt{19}$,当 $m=6-\sqrt{19}$ 时,有两个公共点,舍去,所以 $6-\sqrt{19}<m\leqslant 6+\sqrt{19}$.

②如图2,当 $m<0$ 且图像 C 不与直线 $y=mx+m$ 相切时,$\begin{cases}(-1-m)^2+m+1\leqslant 0,\\(4-m)^2+m+1\geqslant 5m,\end{cases}$ 解得 $-2\leqslant m\leqslant -1$.

③当图像 C 与直线 $y=mx+m$ 相切时,将 $y=mx+m$ 与 $y=x^2-2mx+m^2+m+1$ 联立,得 $x^2-2mx+m^2+m+1=mx+m$.整理,得 $x^2-3mx+m^2+1=0$.令根的判别式 $(3m)^2-4(m^2+1)=0$,解得 $m_1=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$m_2=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$,此时交点的横坐标为 $x_1=\frac{3\sqrt{5}}{5}$,$x_2=-\frac{3\sqrt{5}}{5}$(舍去),所以 $m=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

综上所述,当 $6-\sqrt{19}<m\leqslant 6+\sqrt{19}$ 或 $-2\leqslant m\leqslant -1$ 或 $m=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 时,图像 C 与线段 AB 恰有一个公共点.

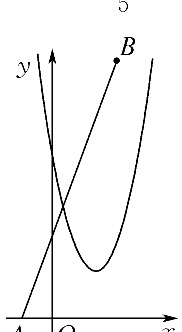


图1

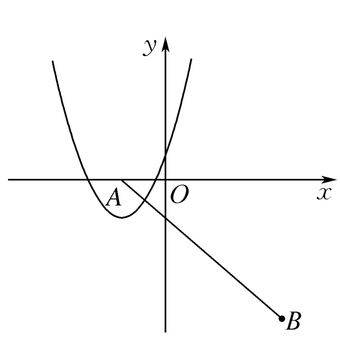
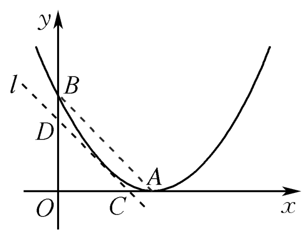


图2

巅峰训练5　用二次函数解决问题(1)

1. A　**提示**:如图,设抛物线与坐标轴的交点为 A,B,则点 $A(4,0)$,$B(0,4)$.连接 AB,则 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times4\times4=8$.易求得直线 AB 的函数表达式为 $y=-x+4$,作直线 $l/\!/AB$,则可设直线 l 的函数表达式为 $y=-x+h$.当直线 l 与抛物线只有一个交点(相切)时,$-x+h=\frac{1}{4}(x-4)^2$.整理,得 $\frac{1}{4}x^2-x+4-h=0$,根的判别式 $1-4\times\frac{1}{4}\times(4-h)=0$,解得 $h=3$.所以直线 l 的函数表达式为 $y=-x+3$.设直线 l 与 x 轴、y 轴的交点分别为 C,D,则点 $C(3,0)$,$D(0,3)$.所以 $S_{\triangle OCD}=\frac{1}{2}\times3\times3=4.5$.因为抛物线与两坐标轴所围成的图形面积 S 大于 $S_{\triangle OCD}$ 且小于 $S_{\triangle OAB}$,所以 $4.5<S<8$.



2. $0<a<6$　**提示**:设未来30天第 t 天获得的利润为 y 元,则根据题意,得 $y=(110-40-t)(20+4t)-(20+4t)a$.化简,得 $y=-4t^2+(260-4a)t+1\,400-20a$.因为30天内每天缴纳电商平台推广费用后的利润随天数 t(t 为正整数)的增大而增大,所以 $-\frac{260-4a}{2\times(-4)}>\frac{29+30}{2}$,解得 $a<6$.又因为 $a>0$,所以 a 的取值范围是 $0<a<6$.

3. 48　**提示**:如图,以底部所在的直线为 x 轴,以线段 AB 的垂直平分线所在的直线为 y 轴建立平面直角坐标系,所以点 $A(-40,0)$,$E(0,200)$.设抛物线的函数表达式为 $y=ax^2+200$,将点 $A(-40,0)$ 代入,得 $a=-\frac{1}{8}$,所以抛物线的函数表达式为 $y=-\frac{1}{8}x^2+200$,将 $y=128$ 代入,得 $-\frac{1}{8}x^2+200=128$,解得 $x=\pm24$,所以点 $C(-24,128)$,$D(24,128)$,所以 $CD=24-(-24)=48$(m).

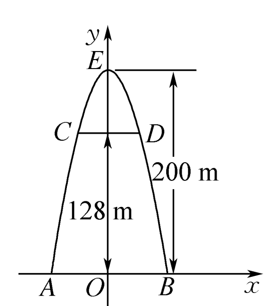


图2

4. 解:(1) 由题意及图像,得小明家到乙处的路程为 180 m. 因为点(8,48)在抛物线 $s=at^2$ 上,代入,可得 $48=8^2a$,解得 $a=\frac{3}{4}$.

(2) $h=48+12\times(17-8)=156$. 它的实际意义是表示小明家到甲处的路程为 156 m.

(3) 易求得 OB 所在直线的函数表达式为 $v=\frac{3}{2}t$. 设妈妈加速所用时间为 x s($0<x<8$). 根据题意,得 $\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x(21+7-x)=156$. 解得 $x_1=4$,$x_2=52$(不合题意,舍去). 所以 $v=6$ m/s. 所以此时妈妈驾车的行驶速度为 6 m/s.

5. $3\sqrt{5}$ **提示**:因为二次函数 $y=mx^2-4mx-20m+5$ 的图像经过原点,所以 $-20m+5=0$,解得 $m=\frac{1}{4}$. 所以二次函数表达式为 $y=\frac{1}{4}x^2-x=\frac{1}{4}(x-2)^2-1$. 所以点 $D(2,-1)$. 因为直线 PD 与 x 轴的夹角为 $45°$,所以可设直线 PD 的函数表达式为 $y=-x+b$,把点 $D(2,-1)$代入,得 $-1=-2+b$,解得 $b=1$. 所以直线 PD 的函数表达式为 $y=-x+1$. 联立,得 $\begin{cases}y=\frac{1}{4}x^2-x,\\ y=-x+1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-2,\\ y=3.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2,\\ y=-1.\end{cases}$ 所以点 $P(-2,3)$. 同理可求出直线 OP 的函数表达式为 $y=-\frac{3}{2}x$,所以点 $D'(2,3)$. 把点 $D'(2,3)$代入 $y=mx^2-4mx-20m+5$,所以 $4m-8m-20m+5=3$,解得 $m=\frac{1}{12}$. 所以抛物线的函数表达式为 $y=\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$. 联立,得 $\begin{cases}y=-\frac{3}{2}x,\\ y=\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3},\end{cases}$ 所以 $x_1=-4$,$x_2=-10$. 因为幼苗叶片是越长越张开,所以 $x_2=-10$ 不合题意,舍去. 所以点 $Q(-4,6)$. 所以 $QD'=\sqrt{(-4-2)^2+(6-3)^2}=3\sqrt{5}$.

6. 解:(1) 点 $N(80,60)$. 设该抛物线的函数表达式为 $y=a(x-80)^2+60$. 因为函数图像过原点,所以 $a(0-80)^2+60=0$,解得 $a=-\frac{3}{320}$. 所以该抛物线的函数表达式为 $y=-\frac{3}{320}(x-80)^2+60(0\leqslant x\leqslant 160)$.

(2) 因为抛物线的形状不变,点 $P(0,75)$,故第二次的函数图像可以看作由(1)的抛物线向上平移 75 个单位长度得到的,所以新的抛物线的函数表达式为 $y=-\frac{3}{320}(x-80)^2+60+75=-\frac{3}{320}(x-80)^2+135$. 当 $y=0$ 时,$-\frac{3}{320}(x-80)^2+135=0$,解得 $x_1=200$,$x_2=-40$(舍去). 故起跳点 P 与落地点 Q 的水平距离 OQ 的长为 200 cm.

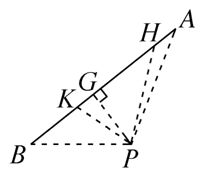
(3) 该平台的高度为 6 cm. **提示**:设该平台的高度为 k cm,则由题意,可设新的抛物线函数表达式为 $y=-\frac{3}{320}(x-80)^2+60+k$. 由题可知,点 $A(80,57)$,$B(80,0)$,$C(120,0)$,$D(120,48)$. 易得直线 AD 的函数表达式为 $y=-\frac{9}{40}x+75(80\leqslant x\leqslant 120)$. 所以新的抛物线与直线 AD 在竖直方向上的距离 $h=-\frac{3}{320}(x-80)^2+60+k+\frac{9}{40}x-75=-\frac{3}{320}x^2+\frac{69}{40}x+k-75$. 因为抛物线 h 的对称轴为直线 $x=-\frac{\frac{69}{40}}{2\times\left(-\frac{3}{320}\right)}=92$,$80\leqslant x\leqslant 120$,所以当 $x=120$ 时,h 有最小值,最小值为 3,所以 $-\frac{3}{320}\times120^2+\frac{69}{40}\times120+k-75=3$,解得 $k=6$.

巅峰训练 6 用二次函数解决问题(2)

1. B

2. D **提示**:如图,过点 P 作 $PG\perp AB$ 于点 G. 当 $x=1$ 时,动点 Q 运动到点 H 的位置,则由题意和图像,可知 $PH^2=225$,当点 Q 运动到点 G 时,PQ^2 的值最小,即 $PG^2=81$,$HG=m-1=12$. 在 Rt$\triangle PGH$ 中,由勾股定理,得 $225=81+(m-1)^2$,所以 $m=13$(负值已舍). 故选项 A 错误. 所以 $AG=m=13$,$HG=m-1=12$. 当 $x=n$ 时,点 Q 运动到点 B,则 $PB^2=225=PH^2$,所以 $PB=PH$. 因为 $PG\perp AB$,所以 $BG=HG=12$,所以 $AB=AG+BG=25$,故选项 B 错误. 所以当 $x=0$,即点 Q 在点 A 时,所以 $AP^2=AG^2+PG^2=13^2+81=$

250. 所以点 C 的纵坐标为 250. 故选项 C 错误. 当 $x=15$ 时，点 Q 运动到点 K，所以 $AK=15$. 所以 $GK=AK-AG=2$. 所以 $PK^2=KG^2+PG^2=4+81=85$. 所以点(15,85)在该函数图像上. 故选项 D 正确.



3. $2.655<h\leqslant3.6$ **提示**：因为球会超过球网，所以当 $x=9$ 时，$y=-\frac{1}{40}(9-6)^2+h>2.43$，解得 $h>2.655$. 因为球不会出界，所以当 $x=18$ 时，$y=-\frac{1}{40}(18-6)^2+h\leqslant0$，解得 $h\leqslant3.6$. 所以 $2.655<h\leqslant3.6$.

4. 1.6 **提示**：设各自抛出后 1.1 s 时到达相同的最大离地高度为 h，则小球的高度 $y=a(t-1.1)^2+h$. 根据题意，得 $a(t-1.1)^2+h=a(t-1-1.1)^2+h$，解得 $t=1.6$.

5. $\frac{4}{3}$ **提示**：由题意可知，在调整喷头高度的过程中，水柱的形状不发生变化. 当喷头高 2.5 m 时，可设 $y=ax^2+bx+2.5$，将点(2.5,0)代入 $y=ax^2+bx+2.5$，得 $2.5a+b+1=0$①；当喷头高 4 m 时，可设 $y=ax^2+bx+4$，将点(3,0)代入 $y=ax^2+bx+4$，得 $9a+3b+4=0$②. 联立①②，可求出 $a=-\frac{2}{3}$，$b=\frac{2}{3}$. 设当喷头高为 h m 时，水柱落点与点 O 相距 2 m，所以 $y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x+h$，将点(2,0)代入，可得 $h=\frac{4}{3}$.

6. 解：(1) 如图 1，以 AB 的中点为坐标原点，建立平面直角坐标系. 因为甲款帐篷搭建时张开的宽度 $AB=3$ m，顶部高度 $h=1.8$ m，所以点 $A\left(-\frac{3}{2},0\right)$，$B\left(\frac{3}{2},0\right)$，顶点坐标为(0,1.8). 设抛物线函数表达式为 $y=b\left(x+\frac{3}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)$. 因为抛物线经过点(0,1.8)，所以 $1.8=b\cdot\left(0+\frac{3}{2}\right)\cdot\left(0-\frac{3}{2}\right)$. 所以 $b=-\frac{4}{5}$，即抛物线的函数表达式为 $y=-\frac{4}{5}\left(x+\frac{3}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)=-\frac{4}{5}x^2+\frac{9}{5}$.

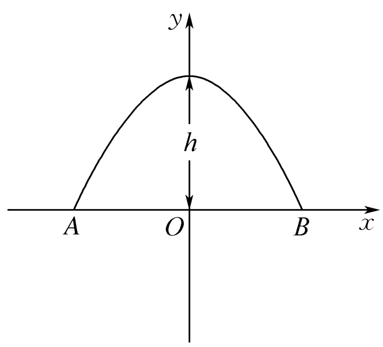


图 1

(2) 由(1)得，$y=-\frac{4}{5}x^2+\frac{9}{5}$. 当 $y=1$，解得 $x_1=1$，$x_2=-1$. 因为$[1-(-1)]\div0.6=\frac{20}{6}=3\frac{1}{3}<4$，所以最多可摆放的椅子数量为 3.

(3) $-\frac{2}{3}$ **提示**：设抛物线函数表达式为 $y=ax^2+2.5$. 若一排恰好能容纳 5 张高宽分别为 1 m 和 0.6 m 的椅子，则该抛物线刚好经过点 G，如图 2 所示，所以 $y_G=1$，$x_G=\frac{5\times0.6}{2}=\frac{3}{2}$. 所以 $y=ax^2+2.5$ 经过点 $G\left(\frac{3}{2},1\right)$. 所以当 $y=1$，即 $1=a\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+2.5$ 时，解得 $a=-\frac{2}{3}$. 所以 a 的最小值为 $-\frac{2}{3}$.

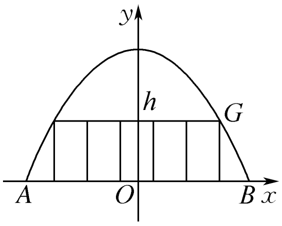
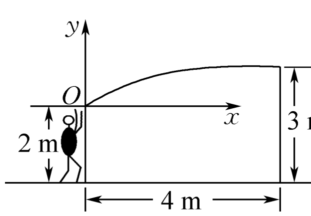


图 2

7. $x=6$ **提示**：设抛物线 L 的函数表达式为 $y=a(x-4)^2+5$，把点 $P(0,1)$ 代入，得 $a=-\frac{1}{4}$，所以抛物线 L 的函数表达式为 $y=-\frac{1}{4}(x-4)^2+5$. 因为点 A 与点 P 的高度相同，所以当 $y=1$，即 $-\frac{1}{4}(x-4)^2+5=1$ 时，解得 $x_1=0$，$x_2=8$，所以点 $A(8,1)$. 因为反弹后的抛物线开口方向及大小不变，反弹后高度变为第一次高度的 $\frac{2}{5}$，所以抛物线 L' 顶点的纵坐标为 2，所以设抛

物线 L' 函数表达为 $y=-\frac{1}{4}(x-m)^2+2$，将点 $A(8,1)$ 代入，得 $-\frac{1}{4}(8-m)^2+2=1$，解得 $m=6$ 或 $m=10$（舍去），所以抛物线 L' 的对称轴为直线 $x=6$.

8. 解：(1) 以点 O 为坐标原点，建立如图所示的平面直角坐标系，由题意可知，抛物线的顶点坐标为 $(4,1)$，则设其函数表达式为 $y=a(x-4)^2+1$，将点 $O(0,0)$ 代入，可得 $16a+1=0$，所以 $a=-\frac{1}{16}$，所以抛物线 C 的函数表达式为 $y=-\frac{1}{16}(x-4)^2+1=-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{2}x$.



(2) 由 (1) 可设抛物线 C' 的表达式为 $y'=-\frac{1}{16}(x-h)^2+k$. 因为改用跳投的方式，出手点 O 的位置升高了 0.5 m，则抛物线 C' 的最高点在抛物线 C 的基础上升高 0.5 m，所以可设抛物线 C' 的抛球点为 $(t,0.5)$，$k=1+0.5=1.5$，$t<4$，将其代入 $y'=-\frac{1}{16}(x-h)^2+k$，得 $0.5=-\frac{1}{16}(t-h)^2+1.5$，解得 $t-h=\pm4$，由球的运动可知，最高点在抛出点的右侧，则 $h>t$，所以 $t-h=-4$，则 $h=t+4$，所以 $y'=-\frac{1}{16}(x-t-4)^2+1.5$. 因为当球击在篮筐上方 0.2 m 及以内范围的篮板上时，球会打板进筐，所以当 $x=4$ 时，$3-2\leqslant y'\leqslant 3-2+0.2$，即 $1\leqslant y'\leqslant 1.2$. 若 $y'=1$，则 $-\frac{1}{16}(4-t-4)^2+1.5=1$，解得 $t=\pm2\sqrt{2}$，此时距离篮筐的距离 $L=4-t=4-2\sqrt{2}$ 或 $4+2\sqrt{2}$；若 $y'=1.2$，则 $-\frac{1}{16}(4-t-4)^2+1.5=1.2$，解得 $t=\pm\frac{2\sqrt{30}}{5}$，此时距离篮筐的距离 $L=4-t=4-\frac{2\sqrt{30}}{5}$ 或 $4+\frac{2\sqrt{30}}{5}$. 所以 $4-2\sqrt{2}\leqslant L\leqslant 4-\frac{2\sqrt{30}}{5}$ 或 $4+\frac{2\sqrt{30}}{5}\leqslant L\leqslant 4+2\sqrt{2}$，即 $1.2\leqslant L\leqslant 1.8$ 或 $6.2\leqslant L\leqslant 6.8$.

第 5 章综合练(1)

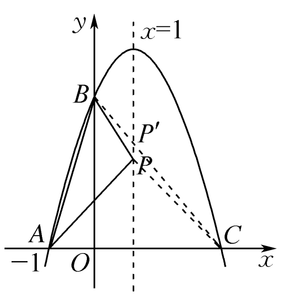
1. A

2. B　**提示**：过点 B 作 $BE\perp x$ 轴于点 E，连接 OB. 因为正方形 $OABC$ 绕顶点 O 顺时针旋转 $75°$，所以 $\angle AOE=75°$. 易得 $\angle AOB=45°$，所以 $\angle BOE=30°$. 因为 $OA=\sqrt{2}$，所以 $OB=2$. 所以 $BE=\frac{1}{2}OB=1$，所以 $OE=\sqrt{OB^2-BE^2}=\sqrt{3}$，所以点 $B(\sqrt{3},-1)$. 设该抛物线的函数表达式为 $y=ax^2(a\neq0)$. 将点 $B(\sqrt{3},-1)$ 代入，得 $-1=3a$，所以 $a=-\frac{1}{3}$，所以该抛物线的函数表达式为 $y=-\frac{1}{3}x^2$.

3. D　**提示**：由题图可知，拐点 $(2,2)$ 是两段抛物线衔接的关键点，当自变量 $x=2$ 时，$\triangle DEB$ 的面积为 2.（回到题图 1）因为 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，所以 $\angle A=\angle B=45°$，当点 D 在 BC 上运动时，$\angle EDB=45°$，所以 $DE=EB$. 当点 D 运动至点 C 时，$DB=BC=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=2\sqrt{2}$，$DE=EB=\frac{1}{2}AB=2$，$S_{\triangle DEB}=\frac{1}{2}EB\cdot DE=2$，所以自变量 x 不能代表 DB 的长，故选项 A 错误. 当 D 是 BC 的中点时，过点 C 作 $CF\perp AB$ 于点 F，易知 DE 是 $\triangle CFB$ 的中位线，$EB=\frac{1}{2}BF$. 又易知 $BF=AF$，所以 $BE=\frac{1}{2}BF=\frac{1}{4}AB$，所以 E 是线段 AB 的一个四等分点，故选项 B 错误. 当点 D 在 CA 上运动时，DE 减小，EB 变大，故题图 2 中自变量 x 代表的是 EB 的长. 当 $0<x\leqslant2$ 时，$DE=EB=x$，$y=\frac{1}{2}x^2$；当 $2\leqslant x<4$ 时，$DE=AE=AB-EB=4-x$，故 $y=\frac{1}{2}x(4-x)=-\frac{1}{2}x^2+2x$. 因为决定抛物线开口大小的是二次项系数的绝对值，而 $\left|\frac{1}{2}\right|=\left|-\frac{1}{2}\right|$，所以两段抛

物线开口大小相同,故选项 C 错误. 当 $x=3$ 时,$y=-\frac{1}{2}\times3^2+2\times3=\frac{3}{2}$,故选项 D 正确.

4. ①②③　**提示**:因为该抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=1$,所以 $b=-2a$,即 $2a+b=0$,所以①正确;因为该抛物线的对称轴为直线 $x=1$,抛物线与 x 轴的一个交点坐标为$(-1,0)$,所以抛物线与 x 轴的另一个交点坐标为$(3,0)$,所以 $x=3$ 是 $ax^2+bx+3=0$ 的一个根,所以②正确;如图,设抛物线与 x 轴的另一个交点为 C,则点 $C(3,0)$,连接 PC,连接 BC 交直线 $x=1$ 于点 P',易知 $PA=PC$,所以 $PA+PB=PC+PB$,因为 $PB+PC\geqslant BC$,所以当点 P 与点 P' 重合时,$PA+PB$ 的值最小,最小值为 BC 的长,此时△PAB 周长的最小,当 $x=0$ 时,$y=ax^2+bx+3=3$,则点 $B(0,3)$,因为 $BC=3\sqrt{2}$,$AB=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$,所以△$PAB$ 周长的最小值为 $\sqrt{10}+3\sqrt{2}$,所以③正确.



5. $\left(-\frac{5}{2},-\frac{33}{8}\right)$或$(2,-3)$　**提示**:令 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2=0$,解得 $x=-1$ 或 $x=4$,即 $x_A=-1$,$x_B=4$,则该抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{3}{2}$,当 $x=5$ 时,则 $y=3$,即点 $C(5,3)$. 分情况讨论如下:

①当点 A',D'在抛物线上时,如图 1,因为 $A'D'=AD=x_D-x_A=4$,抛物线的对称轴为 $x=\frac{3}{2}$,所以点 D'的横坐标为$\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}$,当 $x=-\frac{1}{2}$时,$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2=-\frac{9}{8}$,则点 $D'\left(-\frac{1}{2},-\frac{9}{8}\right)$. 设点 $C'(x,y)$,由中点坐标公式,得$-\frac{1}{2}+3=5+x$ 且$-\frac{9}{8}=3+y$,解得 $x=-\frac{5}{2}$,$y=-\frac{33}{8}$,即点 C'的坐标为$\left(-\frac{5}{2},-\frac{33}{8}\right)$.

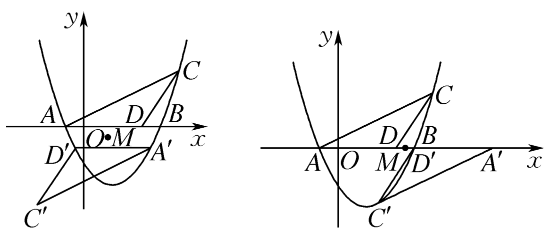


图 1　　图 2

② 如图 2,当点 C',D'在抛物线上时,设点 $C'\left(m,\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}m-2\right)$. 由点 D 向右平移 2 个单位长度,再向上平移 3 个单位长度得到点 C,则点 $D'\left(m+2,\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}m-2+3\right)$,将点 D'的坐标代入抛物线的函数表达式,得$\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}m-2+3=\frac{1}{2}(m+2)^2-\frac{3}{2}(m+2)-2$,解得 $m=2$,易得点 C'的坐标为$(2,-3)$.

③如图 3,当点 A',C'在抛物线上时,设点 C'的坐标为$\left(m,\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}m-2\right)$. 由点 A 向右平移 6 个单位长度,再向上平移 3 个单位长度得到点 C,则点 $A'\left(m+6,\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}m-2+3\right)$,将点 A'的坐标代入抛物线的函数表达式,得$\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}m-2+3=\frac{1}{2}(m+6)^2-\frac{3}{2}(m+6)-2$,解得 $m=-1$,易得点 C'的坐标为$(-1,0)$,与点 A 重合,舍去.

综上所述,点 C'的坐标为$\left(-\frac{5}{2},-\frac{33}{8}\right)$或$(2,-3)$.

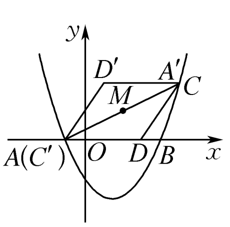


图 3

6. $-1-\sqrt{2}$　**提示**:将 $y=ax^2+(b+2)x+1$ 与 $y=x^2-1$ 联立,得 $ax^2+(b+2)x+1=x^2-1$,即 $(a-1)x^2+(b+2)x+2=0$. 根据题意,得根的判别式 $(b+2)^2-4(a-1)\cdot2=0$. 所以$(b+2)^2=8(a-1)$,即 $a=\frac{(b+2)^2}{8}+1$. 将 $a=\frac{(b+2)^2}{8}+1$ 代入 $W=b^2+8a-8$,得 $W=b^2+8\left[\frac{(b+2)^2}{8}+1\right]-8$,所以 $W=b^2+(b+2)^2=2b^2+4b+4=2(b+1)^2+2$. 所以抛物线开口向

上,其顶点坐标为$(-1,2)$.所以当$t\geqslant -1$时,最小值为2,最大值可能在$b=-3$或$b=t$处;当$t<-1$时,W随b的增大而减小,最大值在$b=-3$处,最小值在$b=t$处.又因为当$t\geqslant -1$时,最大值为10或$2t^2+4t+4$,最小值为2;当$t<-1$时,最大值为10,最小值为$2t^2+4t+4$.所以当$t\geqslant -1$时,$2t^2+4t+6=16$,解得$t=-1+\sqrt{6}$;当$t<-1$时,$2t^2+4t+14=16$,解得$t=-1-\sqrt{2}$.又因为当$t=-1+\sqrt{6}$时,若$b=-2$,则$a=1$,与$a>1$矛盾,舍去;当$t=-1-\sqrt{2}$时,符合题意,所以$t=-1-\sqrt{2}$.

7. 11　**提示**:因为抛物线$y=-x^2-bx+c$经过点$(-2,1)$,且$c=3b$,所以$\begin{cases}1=-(-2)^2-(-2)b+c,\\ c=3b,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=1,\\ c=3,\end{cases}$所以抛物线的表达式为$y=-x^2-x+3$.因为$y=-x^2-x+3=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{4}$,所以抛物线的对称轴为直线$x=-\frac{1}{2}$.因为点$P(x_1,m)$,$Q(x_2,m)$均在该抛物线上,且$x_1<x_2\leqslant 2$,所以点$P(x_1,m)$,$Q(x_2,m)$关于直线$x=-\frac{1}{2}$对称,点$P(x_1,m)$在对称轴的左侧,点$Q(x_2,m)$在对称轴的右侧.所以$x_1+x_2=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$,即$x_1=-1-x_2$,其中$x_1<-\frac{1}{2}$,$-\frac{1}{2}<x_2\leqslant 2$,所以$x_1^2+x_2=(-1-x_2)^2+x_2=\left(x_2+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$.因为$x_1^2+x_2=\left(x_2+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$的图像开口向上,对称轴为直线$x_2=-\frac{3}{2}$,所以当$-\frac{1}{2}<x_2\leqslant 2$时,$x_1^2+x_2$的值随$x_2$的增大而增大.所以当$x_2=2$时,$x_1^2+x_2$取得最大值,最大值为$\left(2+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}=11$.

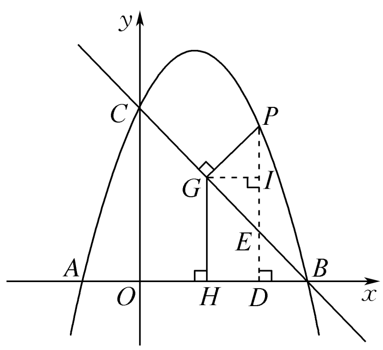
8. $\frac{5}{4}$　**提示**:因为抛物线的对称轴为直线$x=-\frac{-12a}{2a}=6$,且在$4<x<5$范围内位于x轴下方,所以由对称性可知,抛物线在$7<x<8$范围内位于x轴下方.因为抛物线在$8<x<9$范围内位于x轴上方,所以抛物线与x轴的交点坐标为$(4,0)$和$(8,0)$.将点$(4,0)$代入原函数,得$16a-48a+36a-5=0$,解得$a=\frac{5}{4}$.

9. 解:(1) 因为点$C(0,3)$,$OC=3OA$,所以$OC=3$,$OA=1$,所以点$A(-1,0)$.将点A,C的坐标分别代入,得$\begin{cases}0=-(-1)^2-b+c,\\ 3=c,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=2,\\ c=3.\end{cases}$所以二次函数表达式为$y=-x^2+2x+3$.

(2) 因为$y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$,所以抛物线的对称轴为直线$x=1$.因为$-1<0$,所以抛物线的开口方向向下,点$M(1-t,y_1)$到直线$x=1$的距离为$|1-(1-t)|=|t|$,点$N(t,y_2)$到直线$x=1$的距离为$|1-t|$.因为$y_1<y_2$,所以$|t|>|1-t|$,所以$t^2>(1-t)^2$,解得$t>\frac{1}{2}$.

(3) 令$y=-x^2+2x+3=0$,解得$x=3$或$x=-1$,所以点$B(3,0)$.设直线BC的函数表达式为$y=kx+m$,把点B,C的坐标分别代入,得$\begin{cases}3k+m=0,\\ m=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-1,\\ m=3.\end{cases}$所以直线$BC$的函数表达式为$y=-x+3$.因为点$B(3,0)$,$C(0,3)$,所以$OB=OC=3$,所以$\angle OBC=45°$.如图,过点$P$作$PD\perp x$轴于点$D$,交$BC$于点$E$,过点$G$作$GI\perp PE$于点$I$.因为$\angle OBC=45°$,所以$\angle PEG=\angle DEB=45°$,所以$PE=\sqrt{2}PG$,$GP=GE$.设点$P(p,-p^2+2p+3)(0<p<3)$,则点$E(p,-p+3)$.所以$PE=-p^2+2p+3-(-p+3)=-p^2+3p$,则$\sqrt{2}PG=-p^2+3p$.又因为$GP=GE$,所以$PI=IE$,所以$PI=IE=\frac{1}{2}PE=-\frac{1}{2}p^2+\frac{3}{2}p$,四边形$HGID$是矩形,所以$GH=PD-PI=-p^2+2p+3-\left(-\frac{1}{2}p^2+\frac{3}{2}p\right)=-\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}p+3$.令$W=\sqrt{2}PG+GH=-p^2+3p+\left(-\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}p+3\right)=-\frac{3}{2}p^2+$

$\frac{7}{2}p+3$，所以抛物线的对称轴为直线 $p=-\frac{\frac{7}{2}}{-\frac{3}{2}\times 2}=\frac{7}{6}$. 因为抛物线开口方向向下，$0<p<3$，所以当 $p=\frac{7}{6}$ 时，$\sqrt{2}PG+GH$ 取得最大值，所以点 P 的横坐标为 $\frac{7}{6}$.



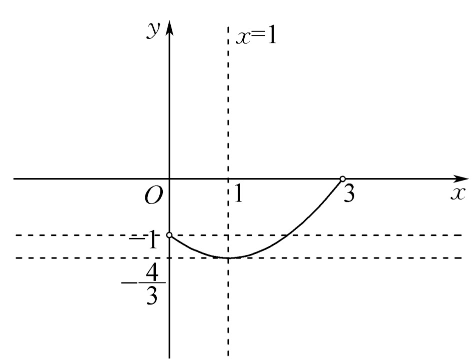
10. 解：(1) 函数 $y=x+2$ 与函数 $y=-\frac{3}{x}$ 是“关联函数”，它们的“关联点”为点(1，3)和点(1，−3)，以及点(−3，−1)和点(−3，1). **提示**：依题意，设点(a,b)和点$(a,-b)$是 $y=x+2$ 与函数 $y=-\frac{3}{x}$ 的一对“关联点”，可得 $\begin{cases}b=a+2,\\-ab=-3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-3,\\b=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1,\\b=3,\end{cases}$ 所以点(1，3)和点(1，−3)，以及点(−3，−1)和点(−3，1)都是这两个函数的一对“关联点”.

(2) 设函数 $y=2x+b$ 图像上某一对“关联点”的其中一点的坐标为$(p,2p+b)$，易知该点关于 x 轴的对称点的坐标为$(p,-2p-b)$. 由“关联函数”的定义，则点$(p,-2p-b)$在函数 $y=kx+k+5$ 的图像上. 所以$(p+1)k+2p+b+5=0$ 始终成立，无论实数 k 为何值. 所以 $\begin{cases}p+1=0,\\2p+b+5=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}p=-1,\\b=-3.\end{cases}$ 所以 b 的值为 -3.

(3) 由题意，设点(a,b)和点$(a,-b)$是函数 $y=x^2-mx+1$ 与函数 $y=2x-\frac{n^2}{4}$(m，n 为常数)的唯一一对“关联点”，则关于 a 的方程 $a^2-ma+1+2a-\frac{n^2}{4}=0$，即 $a^2+(2-m)a+1-\frac{n^2}{4}=0$ 有两个相等的实数根，所以 $(2-m)^2-4\left(1-\frac{n^2}{4}\right)=m^2-4m+n^2=0$，易得 $n^2=-m^2+4m\geqslant 0$，画图可知 $0\leqslant m\leqslant 4$. 所以 $2m^2+n^2-6m=2m^2-m^2+4m-6m=m^2-2m=(m-1)^2-1$，所以当 $m=4$ 时，其有最大值，最大值为 8；当 $m=1$ 时，其有最小值，最小值为 -1，所以 $-1\leqslant 2m^2+n^2-6m\leqslant 8$.

第 5 章综合练(2)

1. C **提示**：因为该函数图像的对称轴为直线 $x=\frac{-2+4}{2}=1$，所以 $-\frac{b}{2a}=1$，所以 $b=-2a$，所以 $y=ax^2-2ax-1(a\neq 0)$. 因为当 $x=3$ 时，$y=0$，所以 $9a-6a-1=0$，所以 $a=\frac{1}{3}$，则 $b=-\frac{2}{3}$，所以 $y=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1$，所以二次函数图像开口向上，有最小值. 当 $x=0$ 时，$y=-1$；当 $x=1$ 时，$y=-\frac{4}{3}$；当 $x=3$ 时，$y=0$. 画出函数 $y=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1(0<x<3)$ 的草图，如图所示. 可知，当过点$(0,n)$且平行于 x 轴的直线与该二次函数图像有两个公共点时，$-\frac{4}{3}<n<-1$.



2. C **提示**：设所获利润为 w 元，则根据题意，得 $w=[8+2(k-1)][60-3(k-1)]=-6(k-9)^2+864$. 所以当 k 的值为 9 时，所获利润最大.

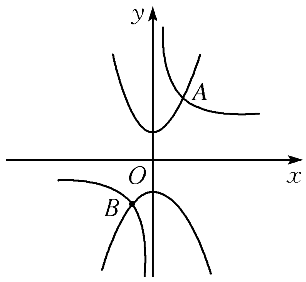
3. D **提示**：①若 $m<0<n\leqslant 1$，则当 $x=n$ 时，y 取得最大值，即 $2n=-(n-1)^2+5$，解得 $n_1=2$，$n_2=-2$(均不合题意，舍去). ②若 $m<0<1\leqslant n$，则当 $x=1$ 时，y 取最大值，即 $2n=-(1-1)^2+5$，解得 $n=\frac{5}{2}$. 若

$\frac{m+n}{2}<1$,则当 $x=m$ 时,y 取最小值,即 $2m=-(m-1)^2+5$,解得 $m_1=-2,m_2=2$(舍去);若$\frac{m+n}{2}\geqslant1$,则当 $x=n=\frac{5}{2}$ 时,y 取最小值,即 $2m=-\left(\frac{5}{2}-1\right)^2+5$,解得 $m=\frac{11}{8}$,与 $m<0$ 矛盾,故舍去.综上所述,$m=-2$,$n=\frac{5}{2}$.所以 $m+n=\frac{1}{2}$.

4. D **提示**:因为抛物线开口向下,所以 $a<0$.因为抛物线对称轴在 y 轴的右侧,所以$-\frac{b}{2a}>0$,所以 $b>0$.因为抛物线交 y 轴的正半轴,所以 $c>0$,所以 $abc<0$,故①正确.因为点$(-1,0)$和点$(0,1)$都在抛物 $y=ax^2+bx+c$ 上,所以 $c=1,a-b+c=0$,所以 $a=b-c=b-1,b=a+c=a+1$.因为 $a<0,b>0$,所以 $-1<a<0,0<b<1$,故②③正确.易知 $a+b+c=a+a+1+1=2a+2$,因为 $-1<a<0$,所以 $0<2a+2<2$,所以 $0<a+b+c<2$,故④正确.

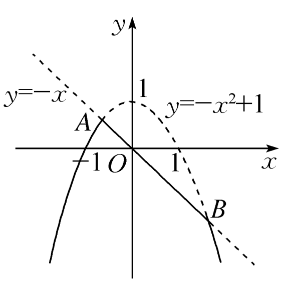
5. $y=\frac{2}{5}x^2-4x+8$ **提示**:易得 $OA=6$,$OC=8,AC=\sqrt{OA^2+OC^2}=10$.又因为四边形 $ABDC$ 为菱形,所以 $AB=AC=10$,所以 $OB=4$,点 $B(4,0)$.由点 $C(0,8)$,易得直线 BC 的函数表达式为 $y=-2x+8$.由题意可知,抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{-10a}{2a}=5$,设点 $M(5,n)$.又因为点 M 在直线 BC 上,所以 $n=-2$.将点 $M(5,-2),C(0,8)$代入 $y=ax^2-10ax+c$,得$\begin{cases}25a-50a+c=-2,\\c=8,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\frac{2}{5},\\c=8.\end{cases}$所以该抛物线的函数表达式为 $y=\frac{2}{5}x^2-4x+8$.

6. $-1<x<0$ **提示**:如图,作出函数 $y=-x^2-1$ 的图像,记抛物线 $y=-x^2-1$ 与双曲线 $y=\frac{k}{x}$的交点为 B.易知关于 x 的不等式$\frac{k}{x}<-x^2-1$ 的解集就是$\frac{k}{x}+x^2+1<0$ 的解集.根据对称性可知,点 B 的横坐标是-1,所以原不等式的解集为$-1<x<0$.



7. $y=-\frac{1}{16}(x-8)^2$ **提示**:连接 AE.由题意,得 $AE=CE=5$.将点 $D\left(-\frac{16}{3},0\right)$代入 $y=\frac{3}{4}x+n$,得 $n=4$.所以点 $A(0,4),OA=4$.因为 $OC\perp AB$,所以由垂径定理,得 $OB=OA=4$.所以点 $B(0,-4)$.在 $Rt\triangle AOE$ 中,由勾股定理,得 $OE=3$,所以 $OC=8$,点 $C(8,0)$.设抛物线的函数表达式为 $y=a(x-8)^2(a\neq0)$.将点 $B(0,-4)$代入,可得 $a=-\frac{1}{16}$.

8. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ **提示**:$\min\{a,b\}$的含义是取二者的较小值.如图,画出二次函数 $y=-x^2+1$ 与正比例函数 $y=-x$ 的图像,记它们的交点为 A,B.令$-x^2+1=-x$,易得点 $A\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right),B\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$.易知 $\min\{-x^2+1,-x\}$的图像为图中实线部分.易得 $\min\{-x^2+1,-x\}$的最大值为点 A 的纵坐标,是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

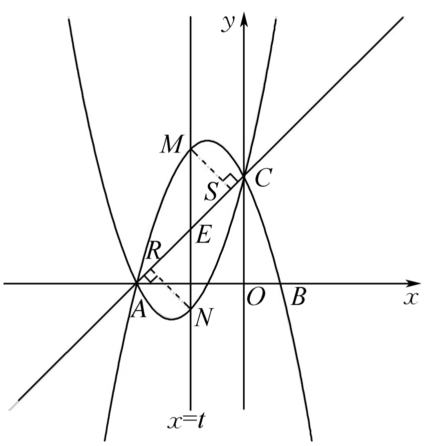


9. 解:(1) 令 $y=-x^2-2x+3=0$,解得 $x=-3$ 或 $x=1$.易得点 $A(-3,0),B(1,0)$,$C(0,3)$,把点 $A(-3,0),C(0,3)$代入 $y=x^2+bx+c$ 中,可得$\begin{cases}9-3b+3=0,\\c=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=4,\\c=3.\end{cases}$

(2) 由(1)知,G_2 的函数表达式为 $y=x^2+4x+3$.设点 $P(t,0)(-3\leqslant t\leqslant0)$,则点 $M(t,-t^2-2t+3),N(t,t^2+4t+3)$,所以 $MN=-t^2-2t+3-t^2-4t-3=-2t^2-6t=-2\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$,所以 MN 的最大值为$\frac{9}{2}$.

(3) 2 0 4 无数 **提示**:如图,过点 M 作 $MS\perp AC$ 于点 S,过点 N 作 $RN\perp AC$ 于点 R.设 MN 交 AC 于点 E.由待定系数法,可知直线 AC 的

函数表达式为 $y=x+3$. 易知 $\angle CAB=45°$，所以 $\angle MES=\angle NER=45°$. 因为 $MS=m$，$RN=n$，所以 $ME=\sqrt{2}m$，$NE=\sqrt{2}n$. 因为点 $E(t,t+3)$，所以 $ME=|-t^2-2t+3-t-3|=|-t^2-3t|$，$NE=|t+3-t^2-4t-3|=|-t^2-3t|$，即 $ME=NE=|-t^2-3t|$，所以 $m=n$. 当 $m+n=4$，即 $m=n=2$ 时，$MN=ME+NE=4\sqrt{2}$，当 $-3\leqslant t\leqslant 0$ 时，由(2)，知 MN 的最大值为 $\frac{9}{2}<4\sqrt{2}$，那么由图可知当 $t<-3$ 或 $t>0$ 时，共 2 种情况满足题意，所以对应的 t 值有 2 个；当 $m-n=3$，即 $m=n+3$ 时，这与 $m=n$ 相矛盾，所以对应的 t 值有 0 个；当 $mn=2$ 时，由 $m=n$ 可知，$m=n=\sqrt{2}$，所以 $ME=2$，所以 $|-t^2-3t|=2$，即 $t^2+3t=\pm 2$，解得 $t=-2$ 或 $t=-1$ 或 $t=\frac{-3-\sqrt{17}}{2}$ 或 $t=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$，所以对应的 t 值有 4 个；当 $\frac{m}{n}=1$ 时，因为 $m=n$ 恒成立，所以对应的 t 值有无数个.



10. 解：(1) 抛物线的函数表达式为 $y=-x^2-2x+3$，直线 AC 的函数表达式为 $y=-x+1$.

(2) 如图 1，过点 P 作 $PE/\!/y$ 轴，交 x 轴于点 E，交直线 AC 于点 F，过点 C 作 $CQ/\!/y$ 轴交 x 轴于点 Q. 设点 $P(x,-x^2-2x+3)(-2<x<1)$，则点 $F(x,-x+1)$. 所以 $PF=-x^2-x+2$. 易得 $AQ=3$. 所以 $S_{\triangle APC}=S_{\triangle APF}+S_{\triangle CPF}=\frac{1}{2}PF\cdot AO+\frac{1}{2}PF\cdot QO=\frac{1}{2}PF\cdot AQ=\frac{1}{2}(-x^2-x+2)\times 3=-\frac{3}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{27}{8}$. 当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，$\triangle APC$ 的面积最大，最大值为 $\frac{27}{8}$，此时点 P 的坐标为 $\left(-\frac{1}{2},\frac{15}{4}\right)$.

(3) 存在. 易得点 $N(0,3)$，抛物线的对称轴为直线 $x=-1$. 因为点 $C(-2,3)$，所以点 C 与点 N 关于对称轴对称. 因为点 M 在对称轴上，所以 $MN=MC$，$AM+MN=AM+MC$. 易得 $AN=\sqrt{10}$. 因为 $AM+MC\geqslant AC$，所以当 A，M，C 三点共线时(如图 2)，$AM+MN$ 的值最小，最小值为 $AM+MC=AC=\sqrt{(-2-1)^2+3^2}=3\sqrt{2}$，此时 $\triangle ANM$ 的周长最小，最小值为 $\sqrt{10}+3\sqrt{2}$. 将 $x=-1$ 代入 $y=-x+1$，得 $y=2$. 所以点 M 的坐标为 $(-1,2)$.

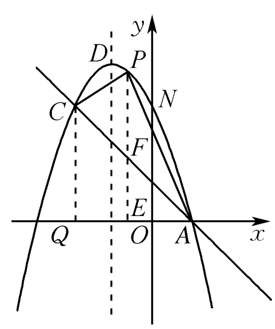


图 1

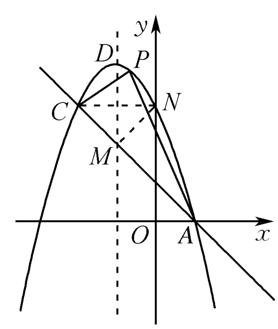


图 2

第 6 章　图形的相似

巅峰训练 7　图上距离与实际距离、黄金分割

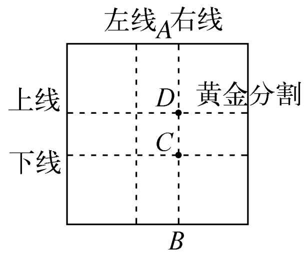
1. B

2. D　**提示**：根据 $\frac{a}{bc}=\frac{b}{ac}=\frac{c}{ab}=2$，可得 $a=2bc$，$b=2ac$，$c=2ab$，从而得到 $a^2=2abc$，$b^2=2abc$，$c^2=2abc$，所以 $\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}=\frac{2abc+2abc+2abc}{abc}=\frac{6abc}{abc}=6$.

3. $(88\sqrt{5}-88)$

4. $(10\sqrt{5}-20)$　**提示**：如图，C，D 是线段 AB 的两个黄金分割点. 因为 $AB=10$ cm，所以 $AC=BD=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB=5(\sqrt{5}-1)$ cm，所以 $CD=2BD-AB=$

$10(\sqrt{5}-1)-10=(10\sqrt{5}-20)\mathrm{cm}$,所以四个黄金分割点组成的正方形的边长为$(10\sqrt{5}-20)\mathrm{cm}$.



5. $\dfrac{89}{17}$ **提示**:因为 $a+b+c=10$,所以 $a=10-(b+c)$,$b=10-(a+c)$,$c=10-(a+b)$. 所以$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=\dfrac{10}{b+c}-\dfrac{b+c}{b+c}+\dfrac{10}{c+a}-\dfrac{c+a}{c+a}+\dfrac{10}{a+b}-\dfrac{a+b}{a+b}=\dfrac{10}{b+c}-1+\dfrac{10}{c+a}-1+\dfrac{10}{a+b}-1=\dfrac{10}{b+c}+\dfrac{10}{c+a}+\dfrac{10}{a+b}-3$. 因为$\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}=\dfrac{14}{17}$,所以原式$=\dfrac{14}{17}\times10-3=\dfrac{140}{17}-3=\dfrac{89}{17}$.

6. 解:(1) 因为$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CA}{C'A'}=\dfrac{3}{4}$,且 $A'B'+B'C'+C'A'\neq0$,所以$\dfrac{AB+BC+CA}{A'B'+B'C'+C'A'}=\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{3}{4}$,所以$\triangle ABC$的周长为$AB+BC+CA=\dfrac{3}{4}(A'B'+B'C'+C'A')=\dfrac{3}{4}\times20=15(\mathrm{cm})$.

(2) 因为$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=\dfrac{2}{3}$,所以$\dfrac{2a}{2b}=\dfrac{-c}{-d}=\dfrac{-5e}{-5f}=\dfrac{2}{3}$. 因为 $2b-d-5f\neq0$,所以$\dfrac{2a-c-5e}{2b-d-5f}=\dfrac{2a}{2b}=\dfrac{2}{3}$.

7. 解:令$\dfrac{b+c-a}{a}=\dfrac{c+a-b}{b}=\dfrac{a+b-c}{c}=k$,则 $b+c-a=ak$,$c+a-b=bk$,$a+b-c=ck$. 三式相加,得 $a+b+c=(a+b+c)k$. 当 $a+b+c\neq0$ 时,$k=1$,此时 $b+c=2a$,$c+a=2b$,$a+b=2c$,所以$\dfrac{(a+b)(b+c)(a+c)}{abc}=\dfrac{2c\cdot2a\cdot2b}{abc}=8$;当 $a+b+c=0$ 时,$b+c=-a$,$c+a=-b$,$a+b=-c$,显然 $k\neq1$,否则可得 $a=b=c=0$,分式无意义,则$\dfrac{(a+b)(b+c)(a+c)}{abc}=\dfrac{(-c)\cdot(-a)\cdot(-b)}{abc}=-1$.

综上所述,原式的值为 8 或-1.

8. $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{15}$ **提示**:根据题意,得 $BP_1=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. 所以 $AP_1=1-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$,$AP_2=\left(1-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)AP_1=\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2$,$AP_3=\left(1-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)AP_2=\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^3$,…,以此类推,线段 AP_{15} 的长度是$\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{15}$.

9. 解:(1) 线段 CD 所在直线是$\triangle ABC$的黄金分割线. 理由如下:

过点 C 作 $CM\perp AB$ 于点 M. 因为 D 是线段 AB 的黄金分割点,且 $BD>AD$,所以$\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{AD}{BD}$,所以$\dfrac{\frac{1}{2}BD\cdot CM}{\frac{1}{2}AB\cdot CM}=\dfrac{\frac{1}{2}AD\cdot CM}{\frac{1}{2}BD\cdot CM}$,即$\dfrac{S_{\triangle BDC}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle BDC}}$,所以线段 CD 所在直线是$\triangle ABC$的黄金分割线.

(2) ① $=$ **提示**:因为 $DF\parallel EC$,所以 $S_{\triangle CFD}=S_{\triangle EFD}$,所以 $S_{\triangle CFD}-S_{\triangle DGF}=S_{\triangle EFD}-S_{\triangle DGF}$,即 $S_{\triangle CFG}=S_{\triangle EDG}$.

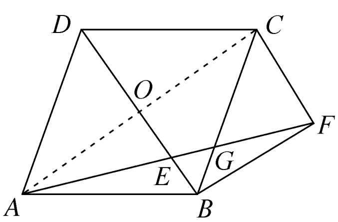
②线段 EF 所在直线是$\triangle ABC$的黄金分割线. 理由如下:

由题意可知,$S_{\triangle BDC}=S_{\text{四边形}BEGC}+S_{\triangle EDG}$. 因为 $S_{\triangle CFG}=S_{\triangle EDG}$,所以 $S_{\triangle BDC}=S_{\text{四边形}BEGC}+S_{\triangle CFG}=S_{\text{四边形}BEFC}$. 同理可得 $S_{\triangle ADC}=S_{\triangle AEF}$. 由(1)知,$\dfrac{S_{\triangle BDC}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle BDC}}$,则有$\dfrac{S_{\text{四边形}BEFC}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{S_{\triangle AEF}}{S_{\text{四边形}BEFC}}$. 所以线段 EF 所在直线是$\triangle ABC$的黄金分割线.

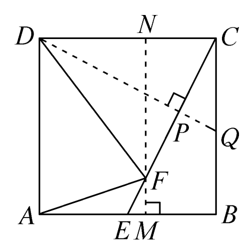
巅峰训练 8 相似图形、探索三角形相似的条件(1)

1. A **提示**:如图,连接 AC 交 BD 于点 O. 因为

四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $OA=OC$,$OB=OD=\frac{1}{2}DB=\frac{5}{6}$. 因为 $AE=EF$,所以 OE 是$\triangle ACF$ 的中位线,所以 $OE/\!/CF$,$OE=\frac{1}{2}CF$,所以 $BE/\!/CF$,所以$\triangle BEG\backsim\triangle CFG$,所以$\frac{BE}{CF}=\frac{BG}{CG}$. 因为 $CG=3BG$,所以$\frac{BE}{CF}=\frac{BG}{3BG}=\frac{1}{3}$. 设 $BE=a$,$CF=3a$,则 $OE=\frac{1}{2}CF=\frac{3a}{2}$. 因为 $BE+OE=OB=\frac{5}{6}$,所以 $a+\frac{3a}{2}=\frac{5}{6}$,所以 $a=\frac{1}{3}$,所以 $CF=3a=3\times\frac{1}{3}=1$.



2. B **提示**:如图,过点 D 作 $DQ\perp CE$ 于点 P,交 BC 于点Q,过点 F 作$MN\perp AB$ 于点M,交 CD 于点N. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形,且边长为 2,所以 $AB=BC=CD=2$,$\angle B=\angle DCB=90^\circ$,$CD/\!/AB$. 因为 E 是 AB 的中点,所以 $AE=BE=\frac{1}{2}AB=1$. 在 Rt$\triangle BCE$ 中,由勾股定理,得 $CE=\sqrt{BC^2+BE^2}=\sqrt{5}$,可知$\angle DCP+\angle BCE=90^\circ$. 因为 $DQ\perp CE$,所以$\angle CDQ+\angle DCP=90^\circ$,所以$\angle BCE=\angle CDQ$. 在$\triangle BCE$ 和 $\triangle CDQ$ 中,$\begin{cases}\angle BCE=\angle CDQ,\\ BC=CD,\\ \angle B=\angle DCQ=90^\circ,\end{cases}$ 所以$\triangle BCE\cong\triangle CDQ$(ASA),所以 $DQ=CE=\sqrt{5}$,$CQ=BE=1$. 因为 $DQ\perp CE$,$\angle B=90^\circ$,所以$\angle CPQ=\angle B=90^\circ$. 又因为$\angle PCQ=\angle BCE$,所以$\triangle CPQ\backsim\triangle CBE$,所以$\frac{CP}{CB}=\frac{PQ}{BE}=\frac{CQ}{CE}$,所以$\frac{CP}{2}=\frac{PQ}{1}=\frac{1}{\sqrt{5}}$,所以 $CP=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$PQ=\frac{\sqrt{5}}{5}$,所以 $DP=DQ-PQ=\sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$. 因为 $DF=DC$,$DQ\perp CE$,所以 $FP=CP=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,所以 $CF=FP+CP=\frac{4\sqrt{5}}{5}$,所以 $EF=CE-CF=\sqrt{5}-\frac{4\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. 因为 $CD/\!/AB$,$MN\perp AB$,所以 $MN\perp CD$,所以$\angle MNC=\angle DCB=\angle B=90^\circ$,所以四边形 $BCNM$ 是矩形,所以 $MN=BC=2$. 由三角形的面积公式,得 $S_{\triangle DCF}=\frac{1}{2}CD\cdot FN=\frac{1}{2}DP\cdot CF$. 所以$\frac{1}{2}\times2\times FN=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{5}}{5}\times\frac{4\sqrt{5}}{5}$,所以 $FN=\frac{8}{5}$,所以 $FM=MN-FN=2-\frac{8}{5}=\frac{2}{5}$. 在 Rt$\triangle EFM$ 中,由勾股定理,得 $EM=\sqrt{EF^2-FM^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{1}{5}$,所以 $AM=AE+EM=1+\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$. 在 Rt$\triangle AFM$ 中,由勾股定理,得 $AF=\sqrt{AM^2+FM^2}=\sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$.



3. $\frac{4}{3}$

4. 8 **提示**:因为 AD 平分$\angle BAC$,所以$\angle EAD=\angle CAD$. 因为 $DE/\!/AC$,所以$\angle CAD=\angle EDA$. 所以$\angle EAD=\angle EDA$,所以 $EA=ED=4$. 因为 $DE/\!/AC$,所以$\frac{BE}{EA}=\frac{BD}{DC}$. 因为 $DC=\frac{1}{3}BC$,所以 $BD=2DC$,所以 $BE=2EA=8$.

5. $\frac{16\sqrt{2}}{5}$或$\sqrt{5}$ **提示**:因为四边形 $ABCD$ 是矩形,$AB=8$,$BC=12$,所以 $AD=BC=12$,$CD=AB=8$,$\angle ADC=90^\circ$,$AD/\!/BC$. 因为 E 是边 AD 上的三等分点,所以分两种情况进行讨论:①如图 1,当 $AE=\frac{1}{3}AD=4$ 时,$DE=AD-AE=8$,所以 $EC=\sqrt{DE^2+CD^2}=8\sqrt{2}$. 因为 $AD/\!/BC$,所以$\triangle EFD\backsim\triangle CFB$,所以$\frac{EF}{CF}=\frac{DE}{BC}=\frac{2}{3}$,所以$\frac{EF}{EC}=\frac{2}{5}$,所以 $EF=\frac{2}{5}EC=\frac{16\sqrt{2}}{5}$. ②如图 2,当 $AE=\frac{2}{3}AD=8$ 时,$DE=AD-AE=4$,所以 $EC=\sqrt{DE^2+CD^2}=4\sqrt{5}$. 同理可得$\frac{EF}{CF}=\frac{DE}{BC}=\frac{1}{3}$,所以$\frac{EF}{EC}=\frac{1}{4}$,所以 $EF=\frac{1}{4}EC=\sqrt{5}$. 综上所述,线段 EF 的长为$\frac{16\sqrt{2}}{5}$或$\sqrt{5}$.

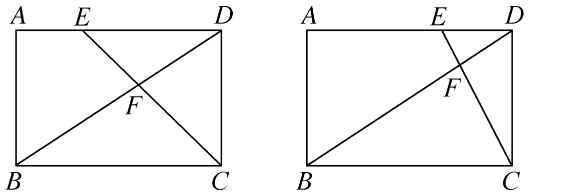


图 1　　　　**图 2**

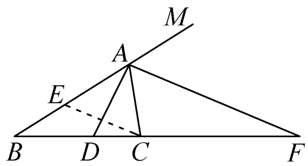
6. $1<m<4$ 且 $m\neq 3$　**提示**：分情况讨论：①当$\triangle AEF\backsim\triangle BCF$时，$\frac{AE}{BC}=\frac{AF}{BF}$. 设$AF=x$，则$\frac{1}{m}=\frac{x}{4-x}$. 因为$m>1$，所以$x=\frac{4}{1+m}$，所以此时无论$m$取何值，都存在一个这样的点$F$，使$\triangle AEF\backsim\triangle BCF$. ②当$\triangle AEF\backsim\triangle BFC$时，$\frac{AE}{BF}=\frac{AF}{BC}$，即$\frac{1}{4-x}=\frac{x}{m}$，$x^2-4x+m=0$. 若$m<4$，则关于$x$的方程$x^2-4x+m=0$有两个不相等的实数根，符合题意. 但当$m=3$时，关于$x$的方程$x^2-4x+m=0$的解为$x_1=1$，$x_2=3$，又因为①中的解$\frac{4}{1+m}=\frac{4}{1+3}=1$，所以此时只有2个点$F$使$\triangle AEF$与$\triangle BCF$相似，舍去. 综上所述，当$1<m<4$且$m\neq 3$时，恰好有3个点$F$，使$\triangle AEF$与$\triangle BCF$相似.

7.（1）**证明**：因为$CE/\!/DA$，所以$\frac{BD}{CD}=\frac{BA}{EA}$，$\angle CAD=\angle ACE$，$\angle BAD=\angle E$. 因为$AD$平分$\angle BAC$，所以$\angle BAD=\angle CAD$，所以$\angle ACE=\angle E$，所以$EA=AC$，所以$\frac{AB}{AC}=\frac{AB}{EA}=\frac{BD}{CD}$.

（2）**解**：因为AD平分$\angle BAC$，$AB=11$，$AC=15$，所以$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}=\frac{11}{15}$，所以$BD=\frac{11}{15}CD$. 所以$BC=BD+CD=\frac{26}{15}CD$，所以$CD=\frac{15}{26}BC$. 因为$E$是$BC$的中点，所以$CE=\frac{1}{2}BC$. 因为$EF/\!/AD$，所以$\frac{CF}{CA}=\frac{CE}{CD}=\frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{15}{26}BC}=\frac{13}{15}$，所以$CF=13$.

（3）**解**：①AB，AC，BF，CF这四条线段的比例关系为$\frac{AB}{AC}=\frac{BF}{CF}$. 证明如下：

如图，过点C作$CE/\!/AF$交AB于点E，所以$\frac{AB}{AE}=\frac{FB}{FC}$，$\angle MAF=\angle AEC$，$\angle CAF=\angle ACE$. 因为$AF$平分$\angle CAM$，所以$\angle MAF=\angle CAF$，所以$\angle AEC=\angle ACE$，所以$AE=AC$，所以$\frac{AB}{AC}=\frac{BF}{CF}$.



②因为AD平分$\angle BAC$，所以$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$. 由①知，$\frac{AB}{AC}=\frac{BF}{CF}$，所以$\frac{BF}{CF}=\frac{BD}{CD}$，即$\frac{BD+CD+CF}{CF}=\frac{BD}{CD}$. 因为$BD=2$，$CF=4$，所以$\frac{2+CD+4}{4}=\frac{2}{CD}$，所以$CD=-3+\sqrt{17}$（负值已舍）.

8.（1）**证明**：**解法1**　如图1，连接AG并延长交BC于点D，过点F作$FH/\!/AD$交BC于点H，所以$\triangle BFH\backsim\triangle BAD$，所以$\frac{BF}{BA}=\frac{BH}{BD}$. 因为$CF$是$\triangle ABC$的中线，所以$BF=\frac{1}{2}AB$，所以$\frac{BH}{BD}=\frac{1}{2}$，所以$H$是$BD$的中点. 因为$FH/\!/AD$，即$DG/\!/FH$，所以$\frac{CD}{DH}=\frac{CG}{GF}=2$，所以$CD=2DH$，所以$CD=BD$，即$AD$是$\triangle ABC$的中线，所以点$G$为$\triangle ABC$的重心.

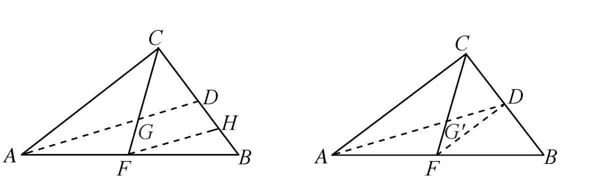


图 1　　　　**图 2**

解法 2　如图2，作$\triangle ABC$的中线AD交CF于点G'，连接DF，则点G'为$\triangle ABC$的重

心. 因为 CF 是 $\triangle ABC$ 的中线, 所以 DF 是 $\triangle ABC$ 的中位线, 所以 $DF \parallel AC, DF=\frac{1}{2}AC$, 所以 $\triangle DFG' \backsim \triangle ACG'$, 所以 $\frac{CG'}{FG'}=\frac{AC}{DF}=2$, 所以 $CG'=2FG'$. 因为 $CG=2FG$, 所以点 G' 与点 G 重合, 所以点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心.

(2) **解**: 如图 3, 连接 CG 并延长交 AB 于点 D_1, 过点 D_1 作 $D_1F_1 \parallel AC$ 交 P_1Q_1 于点 F_1. 因为 $\angle ACB=90°$, $AC=8$ dm, $BC=6$ dm, 所以 $AB=\sqrt{8^2+6^2}=10$(dm). 因为点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 所以 $AD_1=BD_1=\frac{1}{2}AB=5$ dm. 因为 $D_1F_1 \parallel CP_1$, 所以 $\triangle D_1F_1G \backsim \triangle CP_1G$, 所以 $\frac{CP_1}{D_1F_1}=\frac{CG}{D_1G}=\frac{2}{1}$. 设 $CP_1=x$ dm, 则 $AP_1=(8-x)$ dm, $D_1F_1=\frac{1}{2}CP_1=\frac{1}{2}x$ dm. 因为 $P_1Q_1 \perp AB$, $D_1F_1 \parallel AC$, 所以 $\angle F_1D_1Q_1=\angle A$, $\angle D_1Q_1F_1=\angle ACB=90°$, 所以 $\triangle D_1Q_1F_1 \backsim \triangle ACB$, 所以 $\frac{D_1Q_1}{AC}=\frac{D_1F_1}{AB}$, 所以 $\frac{D_1Q_1}{D_1F_1}=\frac{AC}{AB}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$, 所以 $D_1Q_1=\frac{4}{5}D_1F_1=\frac{2}{5}x$ dm, 所以 $AQ_1=AD_1+D_1Q_1=\left(5+\frac{2}{5}x\right)$dm. 因为 $D_1F_1 \parallel AP_1$, 所以 $\triangle Q_1D_1F_1 \backsim \triangle Q_1AP_1$, 所以 $\frac{AP_1}{D_1F_1}=\frac{AQ_1}{D_1Q_1}$, 所以 $\frac{8-x}{\frac{1}{2}x}=\frac{5+\frac{2}{5}x}{\frac{2}{5}x}$, 解得 $x=\frac{7}{6}$, 即 $CP_1=\frac{7}{6}$ dm.

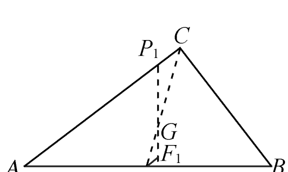


图 3

(3) **解**: 如图 4, 连接 CG 并延长交 AB 于点 D_2, 过点 D_2 作 $D_2F_2 \parallel AC$ 交 P_2Q_2 于点 F_2, 过点 Q_2 作 $Q_2H \perp AC$ 于点 H. 同(2)可得 $\triangle D_2F_2G \backsim \triangle CP_2G$, 所以 $\frac{CP_2}{D_2F_2}=\frac{CG}{D_2G}=\frac{2}{1}$, 所以 $D_2F_2=\frac{1}{2}CP_2=1$ dm. 同(2)可得 $\triangle Q_2D_2F_2 \backsim \triangle Q_2AP_2$, 所以 $\frac{AP_2}{D_2F_2}=\frac{AQ_2}{D_2Q_2}$. 设 $AQ_2=y$ dm, 所以 $\frac{6}{1}=\frac{y}{y-5}$, 解得 $y=6$, 即 $AQ_2=6$ dm. 因为 $Q_2H \perp AC$, 所以 $Q_2H \parallel BC$, 所以 $\triangle AHQ_2 \backsim \triangle ACB$, 所以 $\frac{Q_2H}{BC}=\frac{AQ_2}{AB}$, 所以 $\frac{Q_2H}{AQ_2}=\frac{BC}{AB}$, 所以 $\frac{Q_2H}{6}=\frac{6}{10}$, 所以 $Q_2H=\frac{18}{5}$ dm. 所以 $S_1=\frac{1}{2}AP_2 \cdot Q_2H=\frac{1}{2}\times 6\times\frac{18}{5}=\frac{54}{5}(\text{dm}^2)$, $S_2=S_{\triangle ABC}-S_1=\frac{1}{2}AC \cdot BC-\frac{54}{5}=24-\frac{54}{5}=\frac{66}{5}(\text{dm}^2)$, 所以 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{54}{5}}{\frac{66}{5}}=\frac{9}{11}$.

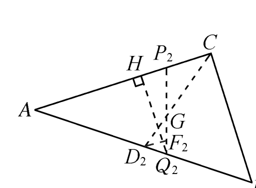


图 4

巅峰训练 9　相似图形、探索三角形相似的条件(2)

1. C

2. D　**提示**: 如图 1, 由 $\frac{AB}{D_1A}=\frac{AC}{D_1C}=\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{10}}{5}$, 得 $\triangle ABC \backsim \triangle D_1AC$, 故 D_1 即为所求作的点; 如图 2, 由 $\frac{AB}{D_2A}=\frac{BC}{AB}=\frac{AC}{D_2B}=\sqrt{2}$, 得 $\triangle ABC \backsim \triangle D_2AB$,

故 D_2 即为所求作的点；如图 3，由$\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{CD_3}{BD_3}=\dfrac{BD_3}{AD_3}=\sqrt{2}$，得$\triangle BCD_3\backsim\triangle ABD_3$，故 D_3 即为所求作的点；如图 4，由 $\dfrac{AB}{D_4C}=\dfrac{BC}{CA}=\dfrac{AC}{D_4A}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，得 $\triangle ABC\backsim\triangle D_4CA$，故 D_4 即为所求作的点；如图 5，由 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{BC}{CD_5}=\dfrac{AC}{BD_5}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，得$\triangle ABC\backsim\triangle BCD_5$，故 D_5 即为所求作的点. 综上所述，符合条件的格点 D 有 5 个.

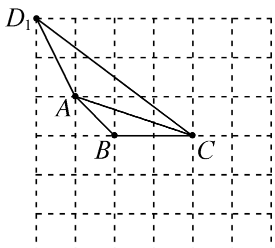


图 1

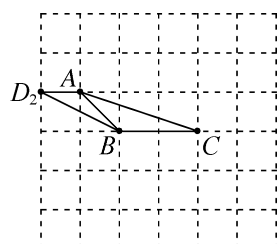


图 2

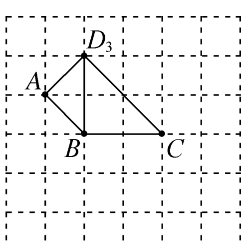


图 3

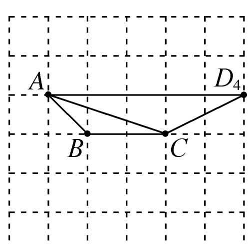


图 4

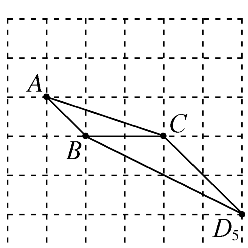


图 5

3. C　**提示**：延长 BE，CD 交于点 G. 由折叠的性质，得$\angle ABE=\angle A'BE$. 因为 $AB\parallel CD$，所以$\angle G=\angle ABE=\angle EBM$，所以 $GM=BM$. 因为$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{5}{6}$，所以可设 $AB=5x$，则 $BC=6x$. 所以 $DM=CM=\dfrac{5x}{2}$. 由勾股定理，得 $GM=BM=\sqrt{\left(\dfrac{5x}{2}\right)^2+(6x)^2}=\dfrac{13x}{2}$，所以 $DG=GM-DM=\dfrac{13x}{2}-\dfrac{5x}{2}=4x$. 因为 $DG\parallel AB$，所以$\triangle DGE\backsim\triangle ABE$，所以$\dfrac{DE}{AE}=\dfrac{DG}{AB}=\dfrac{4x}{5x}=\dfrac{4}{5}$.

4. $\dfrac{20}{9}$或$\dfrac{20}{7}$　**提示**：过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D. 易得 $BD=3$，$AD=4$. 如图 1，当 $AQ=PQ$，且 $QP\perp BC$ 时，设 $AQ=PQ=x$，则 $BQ=5-x$. 易证$\triangle BPQ\backsim\triangle BDA$，所以$\dfrac{PQ}{DA}=\dfrac{BQ}{BA}$，即$\dfrac{x}{4}=\dfrac{5-x}{5}$，解得 $x=\dfrac{20}{9}$，即 $AQ=\dfrac{20}{9}$. 如图 2，当 $AQ=PQ$，且 $PQ\perp AB$ 时，设 $AQ=PQ=y$，则 $BQ=5-y$. 易证$\triangle BQP\backsim\triangle BDA$，所以$\dfrac{PQ}{AD}=\dfrac{BQ}{BD}$，即$\dfrac{y}{4}=\dfrac{5-y}{3}$，解得 $y=\dfrac{20}{7}$，即 $AQ=\dfrac{20}{7}$.

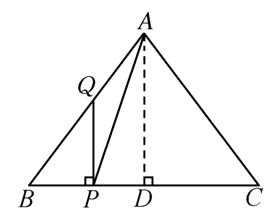


图 1

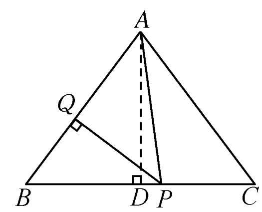
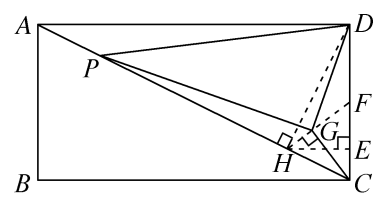


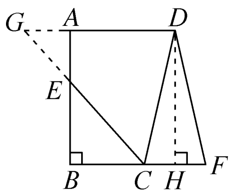
图 2

5. $\dfrac{4}{5}$　**提示**：如图，过点 D 作 $DH\perp AC$ 于点 H，连接 HG 并延长交 CD 于点 F，过点 H 作 $HE\perp CD$ 于点 E. 易证 $\triangle ADH\backsim\triangle PDG$，所以 $\dfrac{AD}{PD}=\dfrac{DH}{DG}$，$\angle ADH=\angle PDG$，所以$\dfrac{AD}{HD}=\dfrac{PD}{GD}$，$\angle ADP=\angle HDG$，所以$\triangle ADP\backsim\triangle HDG$，所以$\angle DHG=\angle DAP$，所以点 G 在射线 HF 上运动，所以当 $CG\perp HF$（如图所示）时，CG 长的值最小. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以$\angle HDF=\angle DAH=\angle DHF$，所以 $FD=FH$，所以$\angle FHC=\angle FCH$，所以 $FH=FC=FD=1$. 在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中，可知 $AC=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$. 由等积法，得 $DH=\dfrac{AD\cdot DC}{AC}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$，所以 $CH=\sqrt{CD^2-DH^2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. 同理可得 $HE=\dfrac{DH\cdot CH}{CD}=\dfrac{4}{5}$. 易证$\triangle CGF\cong\triangle HEF$(AAS)，所以 $CG=HE=\dfrac{4}{5}$，所以 CG 长的最小值为$\dfrac{4}{5}$.



6. $\dfrac{18}{5}$　**提示**：如图，延长 CE 交 DA 的延长线于

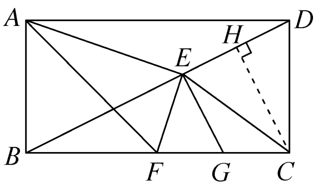
点 G,过点 D 作 $DH\perp BF$ 于点 H,所以 $DH=AB=8$,$BH=AD$. 因为 $AD/\!/BC$,所以$\triangle AEG\backsim\triangle BEC$,所以$\frac{AG}{BC}=\frac{AE}{BE}$. 因为 $AE=3$,所以 $BE=AB-AE=5$,所以$\frac{AG}{4}=\frac{3}{5}$,所以 $AG=\frac{12}{5}$. 又因为 $AD/\!/BC$,所以$\angle G=\angle BCE$. 因为$\angle DCE=\angle BCE$,所以$\angle DCE=\angle G$,所以 $CD=GD$. 因为 $DF=DC$,所以可设 $CH=FH=x$,则 $AD=BH=4+x$,所以 $CD=GD=4+x+\frac{12}{5}=x+\frac{32}{5}$. 由勾股定理,得 $CD^2=CH^2+DH^2$,即$\left(x+\frac{32}{5}\right)^2=x^2+8^2$,解得 $x=\frac{9}{5}$,即 $CH=\frac{9}{5}$,所以 $CF=2CH=\frac{18}{5}$.



7. (1) **证明**:因为$\frac{AB}{BC}=m=1$,所以 $AB=BC$,所以矩形 $ABCD$ 是正方形,所以$\angle ABC=90°$,$\angle GBE=\angle ABE=45°$. 因为 $EF\perp AE$,$EG\perp BE$,所以$\angle AEB=\angle FEG$,$\angle G=\angle GBE=\angle ABE$,所以 $BE=GE$. 在$\triangle ABE$ 和$\triangle FGE$ 中,$\begin{cases}\angle ABE=\angle G,\\ BE=GE,\\ \angle AEB=\angle FEG,\end{cases}$ 所以$\triangle ABE\cong\triangle FGE$(ASA).

(2) **解**:因为四边形 $ABCD$ 是矩形,所以 $CD=AB$,$\angle C=90°$. 由(1),得$\angle AEB=\angle FEG$. 易得$\angle ABF+\angle AEF=180°$,所以$\angle EAB+\angle BFE=180°$. 因为$\angle EFG+\angle BFE=180°$,所以$\angle EFG=\angle EAB$,所以$\triangle ABE\backsim\triangle FGE$,所以 $\frac{EF}{EA}=\frac{EG}{EB}$. 易得$\angle BEG=\angle C=90°$,$\angle CBD$ 是公共角,所以$\triangle BEG\backsim\triangle BCD$,所以$\frac{EG}{CD}=\frac{BE}{BC}$,所以$\frac{EG}{BE}=\frac{CD}{BC}=\frac{AB}{BC}=m$,所以$\frac{EF}{AE}=m$,即 $EF=mAE$. 所以在 Rt$\triangle AEF$ 中,由勾股定理,得 $AF=\sqrt{EF^2+AE^2}=\sqrt{m^2+1}\,AE$,所以 $\frac{EF}{AF}=\frac{mAE}{\sqrt{m^2+1}AE}=\frac{m\sqrt{m^2+1}}{m^2+1}$.

(3) **解**:$FG=\sqrt{5}$. **提示**:如图,过点 C 作 $CH\perp BD$ 于点 H. 设 $CD=a$. 因为 $m=\frac{1}{2}$,$AB=CD=a$,所以 $BC=2a$,所以 $BD=\sqrt{CD^2+BC^2}=\sqrt{5}a$. 因为$\angle CDH=\angle BDC$,$\angle CHD=\angle BCD=90°$,所以$\triangle CHD\backsim\triangle BCD$,所以$\frac{DH}{DC}=\frac{CD}{BD}=\frac{CH}{BC}$,所以$\frac{DH}{a}=\frac{a}{\sqrt{5}a}=\frac{CH}{2a}$,所以 $DH=\frac{\sqrt{5}}{5}a$,$CH=\frac{2\sqrt{5}}{5}a$. 因为 $CE=CD$,所以 $EH=DH=\frac{\sqrt{5}}{5}a$,所以 $ED=\frac{2\sqrt{5}}{5}a=4$,解得 $a=2\sqrt{5}$,即 $AB=2\sqrt{5}$. 由(2)可知,$\triangle ABE\backsim\triangle FGE$,所以$\frac{FG}{AB}=\frac{EF}{EA}=m=\frac{1}{2}$,所以 $FG=\frac{1}{2}AB=\sqrt{5}$.



8. 306 **提示**:因为 $DE/\!/AB$,$FG/\!/AC$,$HI/\!/BC$,所以四边形 $AFPD$ 和四边形 $PHCG$ 均为平行四边形,所以 $AD=FP$,$PG=HC$. 易证$\triangle AHI\backsim\triangle ACB$,$\triangle CDE\backsim\triangle CAB$,所以$\frac{AH}{AC}=\frac{HI}{CB}=\frac{d}{450}$,$\frac{CD}{CA}=\frac{DE}{AB}=\frac{d}{510}$. 所以$\frac{AH}{AC}+\frac{CD}{CA}=\frac{AH+CD}{AC}=\frac{(AC-CH)+(AC-AD)}{AC}=2-\frac{CH+AD}{AC}=2-\frac{FG}{AC}$,即$\frac{d}{450}+\frac{d}{510}=2-\frac{d}{425}$,则 $d=\frac{2}{\frac{1}{450}+\frac{1}{510}+\frac{1}{425}}=\frac{10}{\frac{1}{6\times15}+\frac{1}{6\times17}+\frac{1}{5\times17}}=\frac{10}{\frac{17+15+18}{6\times15\times17}}=\frac{6\times15\times17}{5}=306$.

9. **解**:(1) 满足条件的点 Q 有 3 个. 当 $CQ=PQ$ 时,CQ 的长为 2;当 $CQ=CP$ 时,CQ 的长为$\frac{12}{5}$;当 $PC=PQ$ 时,CQ 的长为

$\frac{72}{25}$. **提示**:如图1,当 $CQ=PQ$ 时,作 CP 的垂直平分线交 BC 于点 Q,此时 $CQ=\frac{1}{2}BC=2$;当 $CQ'=CP$ 时,$CQ'=CP=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{12}{5}$;当 $PC=PQ''$ 时,过点 P 作 $PM\perp BC$ 于点 M,则 $CM=MQ''$,易证 $\triangle CPM\backsim\triangle ABC$,所以 $\frac{CP}{AB}=\frac{CM}{AC}$,即 $\frac{\frac{12}{5}}{5}=\frac{CM}{3}$,所以 $CM=\frac{36}{25}$,所以 $CQ''=2CM=\frac{72}{25}$.

(2) 满足条件的点 Q 有2个.如图2,当 $\triangle PQ_1C\backsim\triangle ACB$ 时,$\frac{CQ_1}{BC}=\frac{PC}{AB}=\frac{1}{2}$,所以 $CQ_1=\frac{1}{2}BC=2$;当 $\triangle CPQ_2\backsim\triangle BCA$ 时,$\frac{CQ_2}{BA}=\frac{CP}{BC}$,即 $\frac{CQ_2}{5}=\frac{\frac{5}{2}}{4}$,所以 $CQ_2=\frac{25}{8}$.

(3) 可能.如图3,作 $\angle CAB$ 的平分线 AO 交 BC 于点 O,过点 O 作 $OP_1\perp AB$ 于点 P_1,则 $CO=OP_1$.以点 O 为圆心,OC 的长为半径作半圆 O,半圆 O 与 AB 相切,切点为 P_1,与 CB 的交点为 D.设 $CO=t$,则 $OP_1=t$,$CD=2t$,$OB=4-t$.易证 $\triangle ABC\backsim\triangle OBP_1$,所以 $\frac{OP_1}{AC}=\frac{OB}{AB}$,即 $\frac{t}{3}=\frac{4-t}{5}$,解得 $t=\frac{3}{2}$,所以 $CD=3$.分以下情况讨论:

当点 Q 与点 D 重合时,$CQ=3$,以 CQ 为直径的圆与 AB 相切,切点为 P_1,连接 CP_1,P_1Q,则 $\triangle CP_1Q$ 为直角三角形.

当点 Q 在线段 CD 上时(不与点 C,D 重合),$0<CQ<3$,以 CQ 为直径的圆与 AB 相离,此时其余的 $\triangle CPQ$ 不可能为直角三角形.

当点 Q 在线段 DB 上时(不与点 D,B 重合),$3<CQ<4$,以 CQ 为直径的圆与 AB 有两个交点 P_2,P_3.分别连接 P_2Q,P_2C 和 P_3Q,P_3C,得 $\mathrm{Rt}\triangle CP_2Q(\angle CP_2Q=90°)$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle CP_3Q(\angle CP_3Q=90°)$.

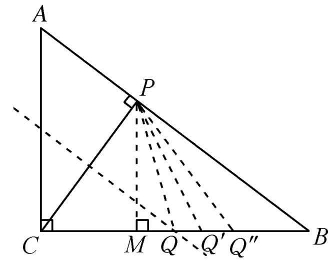


图1

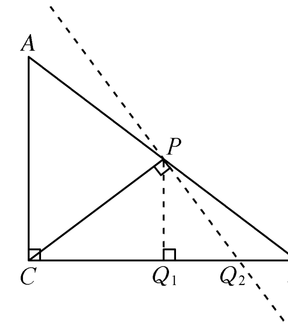


图2

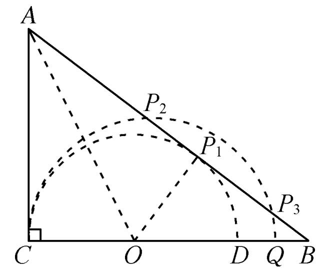
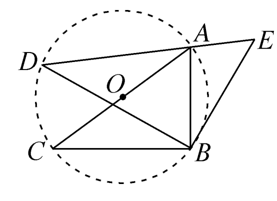


图3

巅峰训练10 相似三角形的性质、图形的位似(1)

1. B **提示**:根据题意,得点 D 在以 AC 的中点 O 为圆心,AC 的长为直径的 $\odot O$ 的 $\overset{\frown}{ADB}$ 上运动.因为 $\angle BDA=\angle C$,$\angle EBD=\angle ABC=90°$,所以 $\triangle BDE\backsim\triangle BCA$,所以 $\frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle BCA}}=\left(\frac{BD}{BC}\right)^2$.因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\sqrt{5}$,$BD$ 的最大值为 AC 的长,$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=3$,所以 $S_{\triangle BDE}$ 的最大值为 $S=\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2\times\sqrt{5}=\frac{9\sqrt{5}}{5}$.

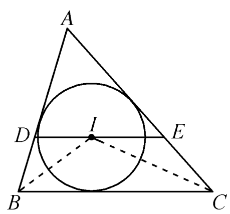


2. C **提示**:因为 A_1,B_1,C_1 分别是 AC,BC,AB 的中点,所以 $A_1B_1/\!/AB$,$B_1C_1/\!/AC$,$A_1C_1/\!/BC$,$A_1B_1=\frac{1}{2}AB$,$B_1C_1=\frac{1}{2}AC$,$A_1C_1=\frac{1}{2}BC$.易证 $\triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle ABC$,所以 $\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{A_1B_1}{AB}\right)^2=\frac{1}{4}$.又因为 $\triangle ABC$ 的面积为1,所以 $\triangle A_1B_1C_1$ 的面积为 $\frac{1}{4}$.同理可得,$\triangle A_2B_2C_2$ 的面积为 $\frac{1}{4^2}$,$\triangle A_3B_3C_3$ 的面积为

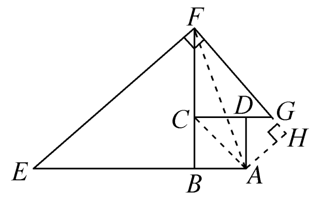
$\frac{1}{4^3}$,…,所以$\triangle A_nB_nC_n$的面积为$\frac{1}{4^n}$.

3. C　**提示**:过点A作$AC\perp x$轴于点C,过点B作$BD\perp x$轴于点D.易证$\triangle OBD\backsim\triangle AOC$,所以$\frac{S_{\triangle OBD}}{S_{\triangle AOC}}=\left(\frac{OB}{AO}\right)^2=2$.又可知$S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}\times 2=1$,所以$S_{\triangle OBD}=2$,所以$k=-4$.

4. $\frac{16}{3}$　**提示**:如图,连接BI,CI.因为$DE/\!/BC$,所以$\angle DIB=\angle IBC$,$\angle EIC=\angle BCI$.因为点I是内切圆的圆心,所以$\angle IBD=\angle IBC=\angle DIB$,$\angle ICE=\angle BCI=\angle EIC$,所以$BD=DI$,$CE=IE$.又因为$DE/\!/BC$,所以$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$,所以$\frac{AD+AE+DE}{AB+AC+BC}=\frac{DE}{BC}$,$\frac{AD+AE+BD+EC}{AB+AC+BC}=\frac{DE}{BC}$,所以$\frac{AB+AC}{AB+AC+BC}=\frac{DE}{BC}$,所以$\frac{7+9}{7+9+8}=\frac{DE}{8}$,所以$DE=\frac{8\times(7+9)}{7+9+8}=\frac{16}{3}$.



5. ①②④　**提示**:因为四边形$ABCD$是边长为a的正方形,所以$\angle ABC=\angle A=\angle BCD=\angle ADC=90°$,所以$\angle EBF=\angle FCG=90°$,所以$\angle BFE+\angle BEF=90°$,因为$FG\perp FE$,所以$\angle CFG+\angle BFE=90°$,所以$\angle CFG=\angle BEF$,所以$\triangle EBF\backsim\triangle FCG$,故①正确;如图,过点$A$作$AH\perp FG$,交$FG$的延长线于点$H$,连接$AF$,因为$AE=FE$,所以可设$\angle EFA=\angle EAF=\alpha$,则$\angle AFH=90°-\alpha$,在$\triangle EAF$中,$\angle E=180°-2\alpha$,所以$\angle EFB=90°-\angle E=2\alpha-90°$,所以$\angle AFB=\angle EFA-\angle EFB=90°-\alpha$,所以$\angle AFB=\angle AFH$,易证$\triangle ABF\cong\triangle AHF$(AAS),所以$AH=AB=a$,故②正确;连接$CA$,若$CA/\!/FG$,则$\angle CFG=\angle ACB=45°$,所以$\angle EFB=45°$,所以$\triangle BEF$是等腰直角三角形,但题目中没有足够条件证明此结论成立,故③错误;因为$AB=a=1$,$AE=FE=b=5$,所以$BE=4$,所以$BF=\sqrt{EF^2-BE^2}=3$,所以$CF=2$,由①知,$\triangle EBF\backsim\triangle FCG$,所以$\frac{BF}{BE}=\frac{CG}{CF}$,所以$\frac{3}{4}=\frac{CG}{2}$,所以$CG=1.5$,所以$DG=CG-CD=0.5$,故④正确.



6. 解:(1) 四边形$BDB'E$是菱形.理由如下:

由折叠的性质,可得$BD=B'D$,$BE=B'E$,$\angle B'DE=\angle BDE$.因为$D'B/\!/BC$,所以$\angle B'DE=\angle BED$,所以$\angle BDE=\angle BED$,所以$BD=BE$,所以$BE=BD=B'D=B'E$,所以四边形$BDB'E$是菱形.

(2) ①$DE\perp A'E$.理由如下:

由(1),得$B'D=BD=B'E$.由折叠的性质,得$A'D=AD$.所以$A'D=2B'D=2B'E$.所以$B'D=A'B'=B'E$.所以$\angle 1=\angle 2$,$\angle 3=\angle 4$.因为$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=180°$,所以$\angle 2+\angle 3=90°$,所以$DE\perp A'E$.

②$A'F$的长为5或$\frac{165}{37}$.　**提示**:因为$\angle C=90°$,$AB=15$,$BC=9$,所以$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=12$.

当$\triangle A'FG$是以$A'F$为腰、$A'G$为底的等腰三角形时,$FG=A'F$,如图1,延长$A'F$交AB于点H.设AC,$A'D$相交于点M.因为$\angle C=90°$,$A'D/\!/BC$,所以$\angle AMD=\angle C=90°$,所以$\angle AMA'=90°$.由折叠的性质,得$\angle A=\angle DA'F$.因为$\angle AFH=\angle A'FG$,所以$\angle AHF=\angle AMA'=90°$.因为$\angle A=\angle A$,所以$\triangle AFH\backsim\triangle ABC$,所以$\frac{AF}{AB}=\frac{HF}{CB}=\frac{AH}{AC}$,所以$HF:AH:AF=CB:AC:AB=3:4:5$.因为$\angle A=\angle DA'F$,$AF=A'F$,$\angle AFH=\angle A'FM$,所以$\triangle AHF\cong\triangle A'MF$(ASA),所以$HF=MF$,$AH=A'M$.设$HF=MF=3x$,$AH=A'M=4x$,$AF=A'F=5x$,所以$AM=AF+MF=8x$.因为$A'D/\!/BC$,所以$\triangle AMD\backsim\triangle ACB$,所以$\frac{AM}{AC}=\frac{AD}{AB}$,即$\frac{8x}{12}=\frac{AD}{15}$,所以$AD=10x$,所以$BE=BD=AB-AD=15-10x$,所以$CE=BC-BE=10x-6$.因为$FG=A'F=5x$,所以$MG=FG-MF=2x$,所以$CG=AC-AM-MG=12-8x-2x=12-10x$.因为$A'D/\!/BC$,所以

$\triangle A'MG \backsim \triangle ECG$，所以 $\dfrac{A'M}{EC}=\dfrac{MG}{CG}$，即 $\dfrac{4x}{10x-6}=\dfrac{2x}{12-10x}$，解得 $x=1$，所以 $A'F=5x=5$.

当 $\triangle A'FG$ 是以 $A'F$ 为腰、FG 为底的等腰三角形时，如图 2，$A'F=AG$，同理可得 $HF:AH:AF=CB:AC:AB=3:4:5$，$HF=MF$，$AH=A'M$，$AF=A'F$. 设 $HF=MF=3y$，$AH=A'M=4y$，$AF=A'F=5y$，所以 $AM=AF+MF=8y$. 同理可得 $AD=10y$，$BE=15-10y$，$CE=10y-6$. 易得 $A'M\perp AC$，所以 $MG=MF=3y$，所以 $FG=MG+MF=6y$，所以 $CG=AC-AF-FG=12-11y$. 同理可得 $\dfrac{A'M}{EC}=\dfrac{MG}{CG}$，所以 $\dfrac{4y}{10y-6}=\dfrac{3y}{12-11y}$，解得 $y=\dfrac{33}{37}$，所以 $A'F=5y=\dfrac{165}{37}$.

综上所述，$A'F$ 的长为 5 或 $\dfrac{165}{37}$.

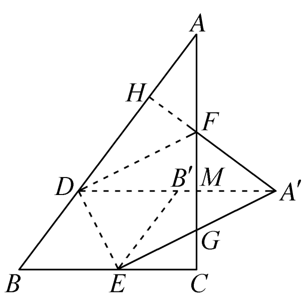


图 1

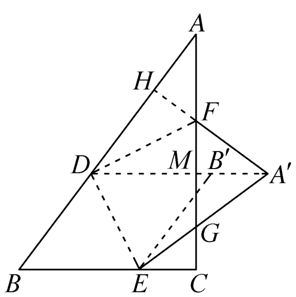
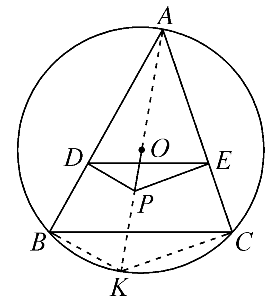


图 2

7. $\dfrac{1}{3}r$　**提示：**如图，作直径 AK，设 AK 分别交直线 PD，PE 于点 P'，P''，连接 BK，CK. 易知 $\angle ABK=\angle ACK=90^\circ$，所以 $BK\perp AB$，$CK\perp AC$. 因为 $PD\perp AB$，$PE\perp AC$，所以 $PD/\!/BK$，$PE/\!/CK$，所以 $AP':AK=AD:AB$，$AP'':AK=AE:AC$. 因为 $DE/\!/BC$，所以 $AD:AB=AE:AC$. 所以 $AP':AK=AP'':AK$，所以 $AP'=AP''$. 所以 $P'(P'')$ 为直线 AK，DP，EP 的交点，则 AK 过 DP 与 EP 的交点 P，所以点 P' 与点 P'' 重合于点 P，所以 A，O，P 三点共线. 因为 $AD=2BD$，所以 $AP:AK=AD:AB=2:3$. 因为 $AK=2r$，所以 $AP=\dfrac{2}{3}AK=\dfrac{4}{3}r$，所以 $OP=AP-AO=\dfrac{1}{3}r$.



8. $\dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}$　**提示：**易证 $\triangle ABE\cong\triangle BCF$，所以 $AE=BF$，$\angle BAE=\angle CBF$. 易得 $\angle AHB=90^\circ$. 因为 $AB=2BH=2\sqrt{3}$，所以 $BH=\sqrt{3}$，$\angle BAH=30^\circ$，易得 $HA=3$. 所以 $\angle CBF=\angle BAH=30^\circ$，所以 $BE=2HE$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BHE$ 中，易得 $HE=1$，$BE=2$. 易证 $\triangle ADH\backsim\triangle EGH$，所以 $\dfrac{EG}{AD}=\dfrac{HE}{HA}$，即 $\dfrac{EG}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$. 所以 $EG=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. 所以 $BG=BE-EG=\dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}$.

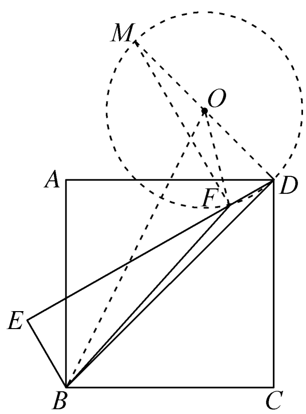
9. 4　**提示：**在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，因为 $BC=12$，$AC=15$，$\angle B=90^\circ$，所以 $AB=9$. 由题意知，$BP_0=P_0P_3=P_3A=3$，$AP_4=P_4P_1=P_1C=5$，$CP_2=P_2P_5=P_5B=4$，点 P_6 与点 P_0 重合，从点 P_6 开始出现循环. 因为 $15\div 6=2\cdots\cdots 3$，所以点 P_{15} 与点 P_3 重合，所以 $P_{15}P_{16}=P_3P_4$. 因为 $P_3P_4/\!/BC$，且 $P_3P_4=CP_2=4$，所以 $P_{15}P_{16}=4$.

巅峰训练 11　相似三角形的性质、图形的位似(2)

1. B　**提示：**设 $AD=k$，则 $DB=2k$. 因为 $\triangle ABC$ 为等边三角形，所以 $AC=AB=3k$，$\angle A=\angle B=\angle C=\angle EDF=60^\circ$，所以 $\angle EDA+\angle FDB=120^\circ$. 又可知 $\angle EDA+\angle AED=120^\circ$，所以 $\angle FDB=\angle AED$，所以 $\triangle AED\backsim\triangle BDF$. 由折叠的性质，得 $CE=DE$，$CF=DF$，所以 $\triangle AED$ 的周长为 $4k$，$\triangle BDF$ 的周长为 $5k$，所以 $\triangle AED$ 与 $\triangle BDF$ 的相似比为 $\dfrac{4}{5}$，所以 $\dfrac{CE}{CF}=\dfrac{DE}{FD}=\dfrac{4}{5}$.

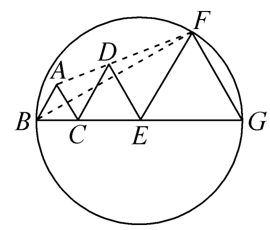
2. D　**提示：**如图，过点 F 作 EF 的垂线，过点 D 作 BD 的垂线，两垂线交于点 M，连接 OB，OF. 因为 $2BE=3DF$，所以 $\dfrac{BE}{DF}=\dfrac{3}{2}$. 因为 $\angle FMD+\angle FDM=90^\circ=\angle EDB+\angle FDM$，所以 $\angle FMD=\angle EDB$，所以

$\triangle MDF \backsim \triangle DBE$，所以$\dfrac{BD}{DM}=\dfrac{BE}{DF}=\dfrac{3}{2}$. 因为正方形$ABCD$的边长为6，所以$BD=\sqrt{DC^2+BC^2}=6\sqrt{2}$，所以$DM=4\sqrt{2}$，取$DM$的中点$O$，所以$OD=2\sqrt{2}$，可知点$F$在以点$O$为圆心，半径为$2\sqrt{2}$的圆上运动. 在$Rt\triangle BDO$中，$OB=\sqrt{OD^2+BD^2}=4\sqrt{5}$. 因为$OF+BF\geqslant OB$，所以$BF\geqslant OB-OF=4\sqrt{5}-2\sqrt{2}$. 当点$F$在线段$OB$上，即$O,F,B$三点共线时，$BF$的长取得最小值.

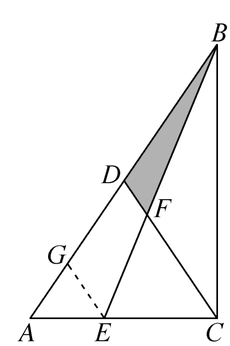


3. B　**提示：**连接AC,BD,DE，则AC与BD交于点O，且AC,BD均为$\odot O$的直径. 因为$\odot O$的半径为$3\sqrt{2}$，所以$BD=6\sqrt{2}$，所以$AD=CD=6$. 因为$OG\perp BE$，所以$BG=GE$. 又因为$BO=OD$，所以$OG=\dfrac{1}{2}DE$. 所以$DE=2OG=2\sqrt{2}$. 由勾股定理，得$BE=\sqrt{BD^2-DE^2}=8$. 易证$\triangle CDH\backsim\triangle BED$，所以$\dfrac{CD}{BE}=\dfrac{DH}{ED}$，得$DH=\dfrac{CD\cdot ED}{BE}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. 所以$AH=\dfrac{12-3\sqrt{2}}{2}$，$CH=\sqrt{CD^2+DH^2}=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$. 易证$\triangle ACH\backsim\triangle EDH$，所以$\dfrac{AH}{EH}=\dfrac{CH}{DH}$，得$EH=\dfrac{AH\cdot DH}{CH}=\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$. 所以$\dfrac{EH}{CH}=\dfrac{2\sqrt{2}-1}{9}$.

4. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　**提示：**如图，连接AF,BF，则点D在AF上. 因为BG是该圆的直径，点F恰好落在圆上，所以$\angle BFG=90^\circ$. 因为$\triangle FEG$为等边三角形，所以$\angle EGF=60^\circ$，$EF=EG=FG$. 所以$\angle FBG=30^\circ$，所以$EF=EG=FG=\dfrac{1}{2}BG=10$. 设$\triangle ABC$的边长为$x$，则$\triangle DCE$的边长为$10-x$. 因为$\triangle ABC,\triangle DCE,\triangle FEG$均为等边三角形，所以$\angle ABC=\angle ACB=\angle DCE=\angle DEC=\angle FEG=60^\circ$，所以$\angle ACD=\angle DEF=60^\circ$，$AC\parallel DE$，所以$\angle CAD=\angle EDF$，所以$\triangle ACD\backsim\triangle DEF$，所以$\dfrac{AC}{DE}=\dfrac{CD}{EF}$，所以$\dfrac{x}{10-x}=\dfrac{10-x}{10}$，解得$x_1=15-5\sqrt{5}$，$x_2=15+5\sqrt{5}$（舍去），经检验，$x_1=15-5\sqrt{5}$是原方程的解. 所以$BC=15-5\sqrt{5}$，$CE=10-(15-5\sqrt{5})=5\sqrt{5}-5$，所以$\dfrac{BC}{CE}=\dfrac{15-5\sqrt{5}}{5\sqrt{5}-5}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.



5. 6　**提示：**因为D为AB的中点，$Rt\triangle ABC$的面积是48，所以$S_{\triangle ACD}=S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}=24$. 因为$AE:EC=2:3$，所以$\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{2}{5}$，所以$S_{\triangle ABE}=\dfrac{2}{5}S_{\triangle ABC}=\dfrac{96}{5}$. 如图，过点$E$作$GE\parallel CD$，交$AB$于点$G$，所以$\triangle AGE\backsim\triangle ADC$，所以$\dfrac{S_{\triangle AGE}}{S_{\triangle ADC}}=\left(\dfrac{AE}{AC}\right)^2=\dfrac{4}{25}$，所以$S_{\triangle AGE}=\dfrac{96}{25}$，所以$S_{\triangle BGE}=S_{\triangle ABE}-S_{\triangle AGE}=\dfrac{96}{5}-\dfrac{96}{25}=\dfrac{384}{25}$. 因为$GE\parallel CD$，所以$\dfrac{AG}{GD}=\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{2}{3}$，所以$\dfrac{BD}{BG}=\dfrac{5}{8}$. 可知$\triangle BDF\backsim\triangle BGE$，所以$\dfrac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle BGE}}=\left(\dfrac{BD}{BG}\right)^2=\dfrac{25}{64}$，所以$S_{\triangle BDF}=\dfrac{25}{64}S_{\triangle BGE}=\dfrac{25}{64}\times\dfrac{384}{25}=6$.



6. $\dfrac{1}{4}$　$\dfrac{n}{2(n+1)}$　**提示：**易知$S_{\triangle A_1B_1C_1}=\dfrac{1}{2}\times 1\times 1=\dfrac{1}{2}$. 连接$B_1B_2,B_2B_3,B_3B_4,B_4B_5$，显然它们共线且所在直线平行于$A_1C_1$，且$B_1B_2=B_2B_3=\cdots=A_1C_1=C_1C_2=\cdots$. 易知$\triangle B_1B_2D_1\cong\triangle C_1A_1D_1$（全等也是特殊的相似），所以$B_1D_1:C_1D_1=1:1$，所

以 $S_1=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. 同理，由$\triangle B_2B_3D_2\backsim\triangle C_2A_1D_2$得$\frac{B_2D_2}{C_2D_2}=\frac{B_2B_3}{C_2A_1}=\frac{1}{2}$，可得 $S_2=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$，$S_3=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$，…，$S_n=\frac{n}{2(n+1)}$.

7. B **提示：**易知点 A' 的坐标为(k,kt)，矩形 $A'B'C'D'$关于点O成中心对称. 另可得 $mn=3$ 且 $n\neq 1$，即 $n=\frac{3}{m}(m\neq 3)$. 因为以 m,n 为坐标的所有的点中，有且只有一个点落在矩形 $A'B'C'D'$的边上，所以反比例函数 $n=\frac{3}{m}$的图像只能经过点A'或点C'，否则将与边有4个交点. 又因为矩形 $A'B'C'D'$关于点O成中心对称，反比例函数 $n=\frac{3}{m}$的图像关于点O也成中心对称，所以函数 $n=\frac{3}{m}(m\neq 3)$的图像只经过点C'，且点A'的坐标是$(3,1)$. 又因为点$A'(k,kt)$，所以 $k\cdot t=1$.

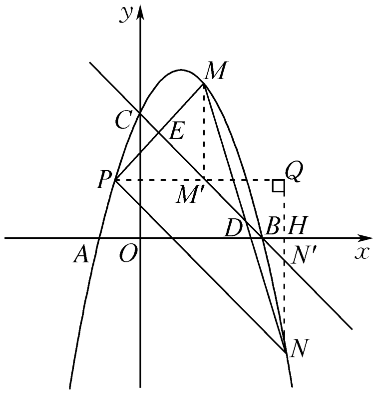
8. 解：(1) 令 $x=0$，则 $y=3$，可得 C 的坐标为$(0,3)$. 令 $y=0$，则$-x^2+2x+3=0$，解得 $x=-1$ 或 $x=3$. 故点 B 的坐标为$(3,0)$. 设直线 BC 的函数表达式为 $y=kx+b$，故 $\begin{cases}b=3,\\3k+b=0.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}k=-1,\\b=3.\end{cases}$ 所以直线 BC 对应函数的表达式为 $y=-x+3$.

(2) 不存在实数 m 使得 $y_1+2y_2=10$. 理由如下：

解法1 把点 $M(m,y_1)$，$N(m+2,y_2)$代入二次函数 $y=-x^2+2x+3$ 中，可得 $y_1=-m^2+2m+3$，$y_2=-(m+2)^2+2(m+2)+3=-m^2-2m+3$，所以 $y_1+2y_2=-m^2+2m+3+2(-m^2-2m+3)=-3m^2-2m+9$. 配方，得 $y_1+2y_2=-3\left(m+\frac{1}{3}\right)^2+9\frac{1}{3}$. 当 $m=-\frac{1}{3}$时，y_1+2y_2 的最大值为 $9\frac{1}{3}<10$. 所以不存在实数 m 使得 $y_1+2y_2=10$.

解法2 由解法1，得 $y_1+2y_2=-3m^2-2m+9$. 当 $y_1+2y_2=10$ 时，$-3m^2-2m+9=10$. 整理，得 $3m^2+2m+1=0$. 因为根的判别式 $4-12=-8<0$，所以关于 m 的方程没有实数根. 所以不存在实数 m 使得 $y_1+2y_2=10$.

(3) $m=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$或$m=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. **提示：**如图，过点 N 作 $NH/\!/y$ 轴，交 x 轴于点 H，交 BC 于点 N'，过点 P 作 $PQ\perp NH$，垂足为 Q，过点 M 作 $MM'/\!/y$ 轴，交 BC 于点 M'，则 $MM'/\!/NN'$. 当 $x=1-m$ 时，$y=-(1-m)^2+2(1-m)+3=-m^2+4$. 所以点 P 的坐标为$(1-m,-m^2+4)$. 因为点 N 的坐标为$(m+2,-m^2-2m+3)$，所以点 Q 的坐标为$(m+2,-m^2+4)$，点 H 的坐标为$(m+2,0)$，点 N' 的坐标为$(m+2,-m+1)$. 所以 $NQ=PQ=|2m+1|$，$BH=HN'=|-m+1|$. 所以$\angle PNQ=\angle BN'H=45°$. 所以 $PN/\!/BC$，所以$\triangle MDE\backsim\triangle MNP$. 所以$\left(\frac{MD}{MN}\right)^2=\frac{1}{4}$，所以 $MD=\frac{1}{2}MN$，即 $MD=ND$. 因为 $MM'/\!/NN'$，所以$\triangle MM'D\backsim\triangle NN'D$. 所以$\frac{MM'}{NN'}=\frac{MD}{ND}=\frac{1}{1}$，即 $MM'=NN'$. 易知点 M 的坐标为$(m,-m^2+2m+3)$，点 M'的坐标为$(m,-m+3)$，所以$|m^2-3m|=|-m^2-m+2|$. 当 $m^2-3m=-m^2-m+2$，即 $m^2-m-1=0$ 时，解得 $m=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$或 $m=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. 当 $m^2-3m=m^2+m-2$ 时(点 M,N 分别同时位于点 M',N'的上方或下方)，解得 $m=\frac{1}{2}$，此时点 P 与点M 重合(横坐标相等)，舍去.



巅峰训练12 用相似三角形解决问题(1)

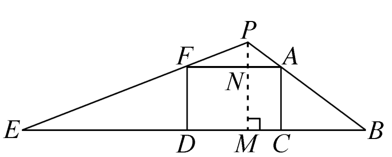
1. A **提示：**过点 P 作 $PE\perp BC$ 于点 E. 易证$\triangle APB\backsim\triangle CPD$，所以$\frac{DP}{BP}=\frac{CD}{AB}=\frac{2}{3}$. 易证$\triangle BPE\backsim\triangle BDC$，所以$\frac{PE}{DC}=\frac{BP}{BD}=\frac{3}{5}$，所以 $PE=2.4$ m.

2. A **提示：**根据 $AB/\!/DE/\!/FG$，可得$\triangle ABH\backsim$

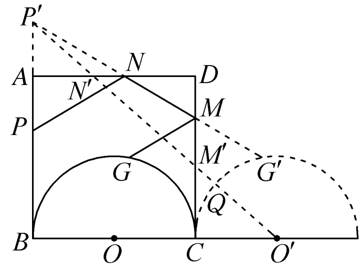
$\triangle EDH$，$\triangle CFG \backsim \triangle CBA$，所以$\dfrac{DE}{BA}=\dfrac{EH}{AH}$，$\dfrac{FG}{BA}=\dfrac{CG}{CA}$，所以$\dfrac{EH}{AH}=\dfrac{CG}{CA}$，即$\dfrac{EH}{AE+EH}=\dfrac{CG}{AE+EG+GC}$. 整理，得$(CG-EH)\cdot AE=EH\cdot EG$，所以$AE=\dfrac{EH\cdot EG}{CG-EH}$. 又因为$\dfrac{DE}{BA}=\dfrac{EH}{AH}$，所以$AB=\dfrac{DE\cdot AH}{EH}=\dfrac{DE(AE+EH)}{EH}=\dfrac{DE\cdot AE}{EH}+\dfrac{DE\cdot EH}{EH}=\dfrac{DE\cdot\dfrac{EH\cdot EG}{CG-EH}}{EH}+\dfrac{DE\cdot EH}{EH}=\dfrac{DE\cdot EG}{CG-EH}+DE$. 因为$EG=d$，$DE=h_0$，$EH=m_1$，$CG=m_2$，所以$AB=\dfrac{h_0d}{m_2-m_1}+h_0$.

3. D　**提示：**由题可知，$B_1C\parallel A_1D$，所以$\triangle OB_1C\backsim\triangle OA_1D$，故①正确；由$\triangle OB_1C\backsim\triangle OA_1D$，得$\dfrac{OC}{OD}=\dfrac{OB_1}{OA_1}$，所以$OA_1\cdot OC=OB_1\cdot OD$，由旋转的性质，得$OB=OB_1$，$OA=OA_1$，所以$OA\cdot OC=OB\cdot OD$，故②正确；由杠杆平衡原理，可得$OC\cdot G=OD\cdot F_1$，故③正确；由②③，得$\dfrac{F_1}{G}=\dfrac{OC}{OD}=\dfrac{OB_1}{OA_1}=\dfrac{OB}{OA}$，这个比值是定值，所以$F_1$的大小不变，所以$F=F_1$，故④正确.

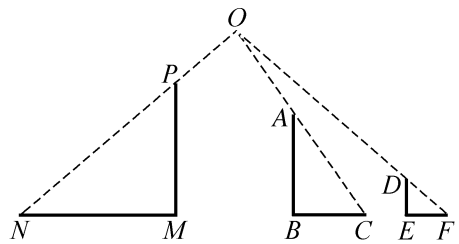
4. 1.68　**提示：**如图，过点P作$PM\perp BE$，垂足为M，交AF于点N，则$PM=1.6$ m. 设$AF=x$ m. 由$AF:FD=3:2$，得$MN=FD=\dfrac{2}{3}x$ m. 因为$AF/\!/CD$，所以$\dfrac{PF}{PE}=\dfrac{PN}{PM}$，$\triangle PAF\backsim\triangle PBE$，所以$\dfrac{PF}{PE}=\dfrac{FA}{EB}$，所以$\dfrac{PN}{PM}=\dfrac{FA}{EB}$，即$\dfrac{PN}{1.6}=\dfrac{x}{5.6}$，所以$PN=\dfrac{2}{7}x$ m. 因为$PN+MN=PM$，所以$\dfrac{2}{7}x+\dfrac{2}{3}x=1.6$，解得$x=1.68$，所以$CD=AF=1.68$ m.



5. $\dfrac{6}{5}$　**提示：**如图，作点P关于直线AD的对称点P'，作半圆O关于直线CD的对称图形半圆O'，G'是点G关于直线CD的对称点，连接$P'O'$交AD于点N'，交半圆O'于点Q，连接$P'N$，MG'. 由对称的性质，可知$PN=P'N$，$MG=MG'$，所以$PN+MN+MG=P'N+MN+MG'$. 所以当点P'，M，N，G'，O'在同一直线上时，红外线途经的路线最短，最短路径长为$P'Q$. 因为$AB=BC=4$ m，$\angle ABC=90°$，$\angle PAD=90°$，所以$\triangle P'AN'\backsim\triangle P'BO'$，所以$\dfrac{P'A}{P'B}=\dfrac{AN'}{BO'}$. 又因为$AP'=AP=1$ m，$CO'=CO=2$ m，所以$\dfrac{1}{4+1}=\dfrac{AN'}{4+2}$，所以$AN'=\dfrac{6}{5}$ m.



6. 解：(1) 如图，PM即为表示树高的线段.



(2) 因为点N，F到路灯的底部距离相等，所以$\angle N=\angle F$. 因为$PM\perp NM$，$DE\perp EF$，所以$\angle PMN=\angle DEF=90°$. 所以$\triangle PMN\backsim\triangle DEF$，所以$\dfrac{DE}{PM}=\dfrac{EF}{MN}$. 因为小明的身高$DE=1.6$ m，影子$EF=1.8$ m，树的影子$MN=6$ m，所以$PM=\dfrac{DE\cdot MN}{EF}=\dfrac{16}{3}$ m.

答：树高为$\dfrac{16}{3}$ m.

7. 解：(1) 如图1，过点A作$AD\perp BC$于点D，交EF于点H. 由【阅读理解】的结论可得$\dfrac{AH}{AD}=\dfrac{EF}{BC}$. 设正方形$EFGM$的边长为$x$，所以$\dfrac{4-x}{4}=\dfrac{x}{3}$，解得$x=\dfrac{12}{7}$，所以正方形$EFGM$的边长为$\dfrac{12}{7}$.

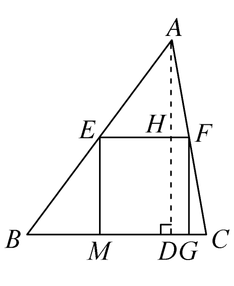


图1

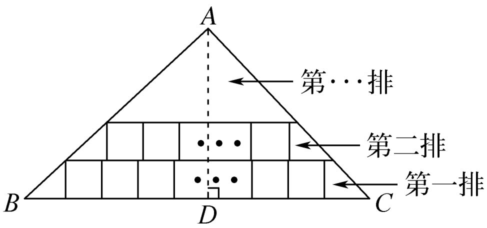


图 2

(2) ①$\frac{400}{3}$　$\frac{320}{3}$　80

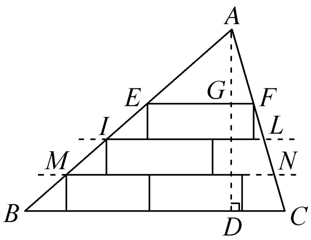
如图 2，过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D. 因为 $AB=AC$，$AD\perp BC$，所以 $BD=CD=80$ cm，所以 $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=60$ cm. 分别设第 1、第 2、第 3 排的隔板长为 y_1，y_2，y_3. 由【**阅读理解**】的结论，可得 $\frac{50}{60}=\frac{y_1}{160}$，$\frac{40}{60}=\frac{y_2}{160}$，$\frac{30}{60}=\frac{y_3}{160}$，解得 $y_1=\frac{400}{3}$，$y_2=\frac{320}{3}$，$y_3=80$，所以 $\frac{60-10n}{60}=\frac{y}{160}$，所以 $y=-\frac{80}{3}n+160$.

②最多可以摆放 38 瓶葡萄酒.　**提示**：由(2)①可知，当 $n=1$ 时，隔板长为 $\frac{400}{3}$ cm，所以可以作正方体 $\frac{400}{3}\div 10\approx 13$(个)；同理可得，当 $n=2$ 时，可以作正方体 $\frac{320}{3}\div 10\approx 10$(个)；当 $n=3$ 时，可以作正方体 $80\div 10=8$(个)；当 $n=4$ 时，可以作正方体 $\frac{160}{3}\div 10\approx 5$(个)；当 $n=5$ 时，可以作正方体 $\frac{80}{3}\div 10\approx 2$(个)；当 $n=6$ 时，隔板长为 0 cm，可以作正方体 0 个. 综上所述，最多可以摆放 $13+10+8+5+2=38$(瓶)葡萄酒.

巅峰训练 13　用相似三角形解决问题(2)

1. D　**2.** D

3. B　**提示**：如图，当最上层的小长方形上面一边分别与 AB，AC 交于点 E，F 时，$EF//BC$. 过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D，交 EF 于点 G. 易证 $\triangle AEF\backsim\triangle ABC$，所以 $\frac{EF}{BC}=\frac{AG}{AD}$. 因为 $BC=12$ cm，$AD=9$ cm，小长方形的长和宽分别为 4 cm 和 2 cm，所以 $\frac{4}{12}=\frac{AG}{9}$，所以 $AG=3$ cm. 所以 $GD=6$ cm. 所以能分割三层小长方形. 设与 BC 距离 2 cm 的直线分别与 AB，AC 交于点 M，N. 易证 $\triangle AMN\backsim\triangle ABC$，所以 $\frac{MN}{BC}=\frac{7}{9}$，所以 $MN=\frac{7}{9}\times 12=\frac{28}{3}$(cm). 因为 $\frac{28}{3}>4\times 2=8$，$\frac{28}{3}<4\times 3=12$，所以最底层能分割出 2 个小长方形. 设与 BC 距离 4 cm 的直线分别与 AB，AC 交于点 I，L，则同理可得 $IL=\frac{20}{3}$ cm. 因为 $\frac{20}{3}>4\times 1=4$，$\frac{20}{3}<4\times 2=8$，所以第二层只能分割出 1 个小长方形. 综上所述，最多可以分割出 4 个小长方形.

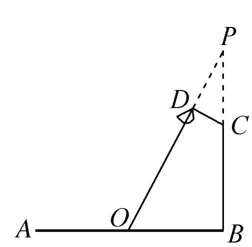


4. 7.2　**提示**：过点 P 作 $PG\perp AB$ 于点 G. 易证 $\mathrm{Rt}\triangle APG\backsim\mathrm{Rt}\triangle ABP\backsim\mathrm{Rt}\triangle PBG$. 易得 $AP^2=AG\cdot AB$，$BP^2=BG\cdot AB$，$PG^2=AG\cdot BG$. 易得 $AG=3.6$ cm，$BG=6.4$ cm，$PG=4.8$ cm，所以 $FC=BC-PG=7.2$ cm.

5. 22.5　**提示**：过点 D 作 $DF//AE$ 交 AB 于点 F. 设塔影留在坡面 DE 部分的塔高 $AF=h_1$ m，塔影留在平地 BD 部分的塔高 $BF=h_2$ m，则铁塔的高为 (h_1+h_2)m. 因为 $h_1:18=1.5:2$，所以 $h_1=13.5$. 因为 $h_2:6=1.5:1$，所以 $h_2=9$. 所以 $AB=h_1+h_2=22.5$(m).

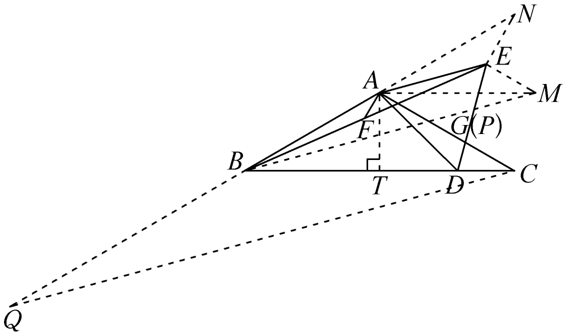
6. **解**：如图，延长 OD，BC 交于点 P. 因为 $\angle ODC=\angle B=90^\circ$，$\angle BCD=120^\circ$，所以 $\angle PDC=90^\circ$，$\angle PCD=60^\circ$，所以 $\angle P=30^\circ$. 由题意可知，$OB=11$ m，$CD=2$ m，所以 $PC=2CD=4$ m，$PD=2\sqrt{3}$ m. 易证 $\triangle PDC\backsim\triangle PBO$，所以 $\frac{PD}{PB}=\frac{CD}{OB}$，所以 $PB=\frac{PD\cdot OB}{CD}=11\sqrt{3}$ m. 所以 $BC=PB-PC=(11\sqrt{3}-4)$m.

答：路灯的灯柱 BC 的高为 $(11\sqrt{3}-4)$m.



7. $(20\sqrt{3}-20)$　**提示**：如图，过点 A 作 $AM//BC$，且 $AM=AC$，则 $AM=AB$，$\angle AMB=\angle ABM=$

$\angle MBC$. 连接 BM 交 AC 于点 G，连接 PM. 因为 $AM /\!/ BC$，所以 $\angle MAP=\angle ACD$，所以 $\triangle MAP \cong \triangle ACD$ (SAS)，所以 $\angle AMP=\angle CAD$，$MP=AD$. 因为 $BP+PM \geqslant BM$，所以 $BP+AD \geqslant BM$，所以当 P,M,B 三点共线时，$BP+AD$ 取得最小值，此时点 P 与点 G 重合. 过点 A 作 $AT \perp BC$ 于点 T，易得 $\angle ABC=\angle ACB=\angle CAM=30^\circ$，所以 $AT=\frac{1}{2}AB=40$ m，$BT=CT=\sqrt{80^2-40^2}=40\sqrt{3}$ (m)，$\angle ABM=\angle AMB=15^\circ$. 因为 $\angle AMP=\angle CAD$，所以 $\angle DAM=\angle CAD+\angle CAM=15^\circ+30^\circ=45^\circ$，$\angle CAE=\angle DAE-\angle DAC=60^\circ-15^\circ=45^\circ$. 延长 BA 至点 N，使得 $BA=AN$，则 $AN=AC=AM$. 连接 NE，ME，所以 $\angle MAE=\angle DAE-\angle DAM=15^\circ$，$\angle NAE=\angle CAN-\angle CAE=15^\circ$，所以 $\angle MAE=\angle NAE$，所以 $\triangle MAE \cong \triangle NAE$ (SAS)，所以 $NE=ME$. 因为 $AE=AD=MG$，$\angle MAE=\angle AMB=15^\circ$，所以 $AE /\!/ MG$，所以四边形 $AEMG$ 是平行四边形，所以 $AG=EM$. 因为 F 是 BE 的中点，$AB=AN$，所以 $AF=\frac{1}{2}EN=\frac{1}{2}EM=\frac{1}{2}AG$. 过点 C 作 $CQ /\!/ BG$，交 AB 的延长线于点 Q，所以 $\angle Q=\angle ABM=\angle MBC=\angle BCQ=15^\circ$，所以 $BQ=BC=2BT=80\sqrt{3}$ m. 因为 $CQ /\!/ BG$，所以 $\triangle ABG \backsim \triangle AQC$，所以 $\frac{AB}{AQ}=\frac{AG}{AC}$，所以 $\frac{80}{80+80\sqrt{3}}=\frac{AG}{80}$，解得 $AG=(40\sqrt{3}-40)$ m，所以 $AF=\frac{1}{2}AG=(20\sqrt{3}-20)$ m. 故此时灯光地板 AF 的长度为 $(20\sqrt{3}-20)$ m.



8. 解：(1) 作图如图 1 所示. $\frac{4\sqrt{26}}{5}$

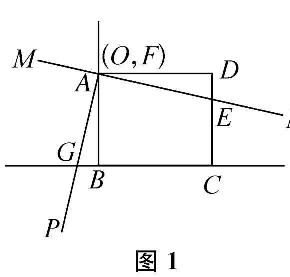


图 1

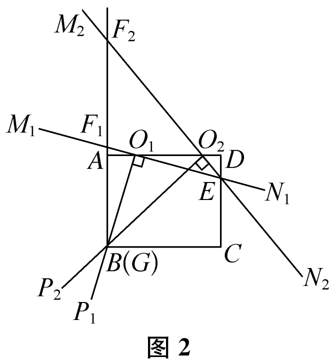


图 2

(2) 如图 2 所示（有两种情况）. 因为 $MN \perp OP$，所以 $\angle PON=90^\circ$，所以 $\angle AOP+\angle DOE=90^\circ$. 又因为 $\angle ABO+\angle AOP=90^\circ$，所以 $\angle ABO=\angle DOE$. 又因为 $\angle BAO=\angle ODE=90^\circ$，所以 $\triangle ABO \backsim \triangle DOE$. 设 $AO=x$，则 $DO=5-x$. 易得 $\frac{AO}{DE}=\frac{AB}{DO}$，即 $\frac{x}{1}=\frac{4}{5-x}$，解得 $x_1=1, x_2=4$. 所以 $O_1G=\sqrt{AB^2+AO_1^2}=\sqrt{17}$，同理可得 $O_2G=4\sqrt{2}$. 所以线段 OG 的长为 $\sqrt{17}$ 或 $4\sqrt{2}$.

(3) 如图 3，过点 E 作 $EH \perp AB$ 于点 H，过点 O 作 $OK \perp BC$ 于点 K，则 $OK /\!/ AB$，$\angle NOK=\angle NFB$. 又因为 $\angle OGK$ 与 $\angle NOK$ 都是 $\angle GOK$ 的余角，所以 $\angle OGK=\angle NOK=\angle NFB$. 可证 $\triangle EHF \backsim \triangle OKG$，所以 $\frac{EF}{OG}=\frac{EH}{OK}=\frac{5}{4}$.

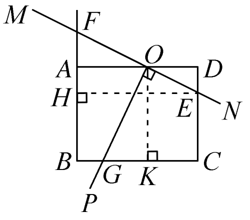


图 3

第 6 章综合练(1)

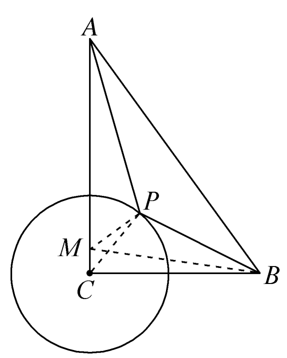
1. A **提示**：由菱形的性质，得 $AC \perp BD$，$OA=OC=\frac{1}{2}AC=1$. 因为 $OB=\sqrt{AB^2-AO^2}=\sqrt{2}$，所以 $BD=2OB=2\sqrt{2}$. 由折叠的性质，得 $AB=AF$，$\angle BAE=\angle FAE=\frac{1}{2}\angle BAF$. 因为 $AD=AB=AF$，所以 $\angle AFD=\angle ADF$. 因为 $AB /\!/ CD$，所以 $\angle BAF=\angle AFD=\angle ADF$，所以 $\angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAF=\frac{1}{2}\angle ADF=\angle BDA$. 易证 $\triangle ABE \backsim \triangle DBA$，所以 $\frac{BE}{BA}=\frac{AB}{DB}$，即 $\frac{BE}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$，所以 $BE=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

2. B **提示**：过点 F 作 $FH \perp AD$ 于点 H，交 ED 于点 O，则 $FH=AB=2$. 易得 $BF=AH=2$，$FC=HD=1$，$AF=2\sqrt{2}$，$AE=BE=1$. 因为 $OH /\!/ AE$，所以

$\triangle DHO \backsim \triangle DAE$，所以$\frac{HO}{AE}=\frac{DH}{DA}=\frac{1}{3}$，所以 $HO=\frac{1}{3}$. 所以 $FO=\frac{5}{3}$. 易得$\triangle AME \backsim \triangle FMO$，所以$\frac{AM}{FM}=\frac{AE}{FO}=\frac{3}{5}$，所以 $AM=\frac{3}{8}AF=\frac{3\sqrt{2}}{4}$. 易得$\triangle AND \backsim \triangle FNB$，所以$\frac{AN}{FN}=\frac{AD}{FB}=\frac{3}{2}$，所以 $AN=\frac{3}{5}AF=\frac{6\sqrt{2}}{5}$，所以 $MN=AN-AM=\frac{9\sqrt{2}}{20}$.

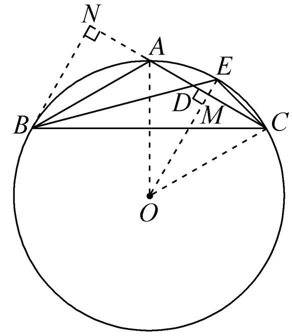
3. D **提示**：易得 $\angle CAD=\angle GFA$. 易证$\triangle FGA \cong \triangle ACD$，所以 $AC=FG$，故①正确. 因为 $BC=AC$，所以 $FG=BC$. 易证四边形 $CBFG$ 是矩形，所以$\angle GFB=90°$，所以 $S_{\triangle FAB}=\frac{1}{2}FB\cdot FG=\frac{1}{2}S_{四边形CBFG}$，故②正确. 因为 $CA=CB$，$\angle C=\angle CBF=90°$，所以$\angle ABC=\angle ABF=45°$，故③正确. 易得$\angle FQE=\angle DQB=\angle ADC$，$\angle E=\angle C=90°$，所以$\triangle ACD \backsim \triangle FEQ$，所以$\frac{AC}{FE}=\frac{AD}{FQ}$. 又因为 $AD=EF$，所以 $AD^2=AD\cdot FE=FQ\cdot AC$，故④正确.

4. B **提示**：如图，在 CA 上截取 $CM=1$，连接 PM，PC，BM. 因为 $PC=3$，$CM=1$，$AC=9$，所以$\frac{PC}{AC}=\frac{CM}{CP}=\frac{1}{3}$. 因为$\angle PCM=\angle ACP$，所以$\triangle PCM \backsim \triangle ACP$，所以$\frac{PM}{AP}=\frac{PC}{AC}=\frac{1}{3}$，所以 $PM=\frac{1}{3}AP$，所以$\frac{1}{3}AP+BP=PM+PB\geqslant BM$，当且仅当 M，P，B 三点依次共线时，等号成立. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BCM$ 中，由勾股定理，得 $BM=\sqrt{CM^2+CB^2}=5\sqrt{2}$，所以$\frac{1}{3}AP+BP\geqslant 5\sqrt{2}$，所以$\frac{1}{3}AP+BP$ 的最小值为 $5\sqrt{2}$.



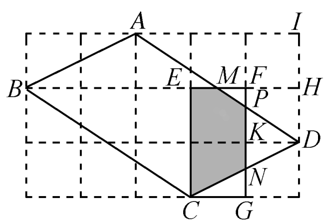
5. 8 **提示**：设 $AM=x$ cm，则 $MD=(4-x)$ cm. 由折叠的性质可知，$EM=BE=4-AE$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AEM$ 中，$AE^2+AM^2=EM^2$，即 $AE^2+x^2=(4-AE)^2$，整理，得 $AE^2+x^2=16-8AE+AE^2$，所以 $AE=\frac{1}{8}(16-x^2)$. 又因为$\angle EMP=90°$，所以$\angle AME+\angle DMP=90°$. 因为$\angle AME+\angle AEM=90°$，所以$\angle AEM=\angle DMP$. 又因为$\angle A=\angle D$，所以$\triangle PDM \backsim \triangle MAE$. 所以$\frac{C_{\triangle PDM}}{C_{\triangle MAE}}=\frac{DM}{AE}$，所以 $C_{\triangle PDM}=C_{\triangle MAE}\cdot\frac{DM}{AE}=(4+x)\cdot\frac{4-x}{\frac{1}{8}(16-x^2)}=8(\mathrm{cm})$.

6. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **提示**：如图，过点 E 作 $EM\perp AC$ 于点 M，过点 B 作 $BN\perp AC$ 交 CA 延长线于点 N，连接 OA，OM，OC. 易证$\triangle EDM \backsim \triangle BDN$，所以$\frac{ED}{BD}=\frac{EM}{BN}$. 因为 $AB=AC$，所以$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$，可得$\triangle AOC$ 是等边三角形，所以 $OA=OC=AC=AB$. 设 $OA=OC=AC=AB=r$. 因为$\angle BAN=180°-\angle BAC=60°$，$BN\perp AC$，所以$\angle ABN=30°$，所以 $AN=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}r$，所以 $BN=\sqrt{AB^2-AN^2}=\sqrt{r^2-\left(\frac{1}{2}r\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}r$. 因为$\frac{BE}{BD}=\frac{BD+DE}{BD}=1+\frac{DE}{BD}=1+\frac{EM}{BN}$，所以当 EM 的长最大，$\frac{BE}{BD}$的值最大，由图可知，当 E 为$\overset{\frown}{AC}$ 的中点，即 M 为 AC 的中点时，E，M，O 三点共线，EM 的长最大. 因为 $OM=\sqrt{OA^2-AM^2}=\sqrt{r^2-\left(\frac{1}{2}r\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}r$，所以 $EM=OE-OM=r-\frac{\sqrt{3}}{2}r$，所以$\frac{BE}{BD}=1+\frac{EM}{BN}=1+\frac{r-\frac{\sqrt{3}}{2}r}{\frac{\sqrt{3}}{2}r}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



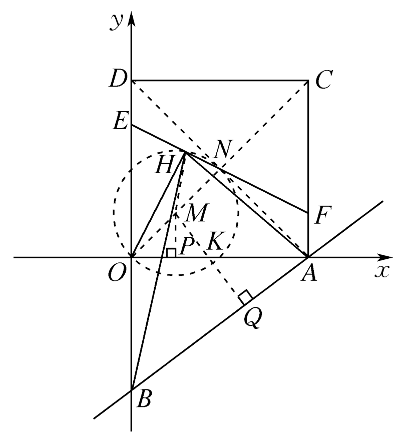
7. $\frac{5}{3}$ **提示**：如图，因为 $HM/\!/AI$，所以$\triangle MHD \backsim$

$\triangle AID$，易得 $MH=\frac{1}{2}AI=\frac{3}{2}$，所以 $MF=\frac{1}{2}=\frac{1}{3}MH$. 同理，$\triangle MFP\backsim\triangle MHD$，易得 $FP=\frac{1}{3}HD=\frac{1}{3}$. 易证$\triangle CGN\cong\triangle DKN$，所以 $NK=NG=\frac{1}{2}$. 所以 $S_{阴影}=S_{矩形ECGF}-S_{\triangle MFP}-S_{\triangle CGN}=\frac{5}{3}$.（还可以点 C 为坐标原点构建平面直角坐标系，利用函数求坐标进行解答）



8. $(-1,-2)$或$(1,2)$　**提示**：由条件可知，点 $M(-2,1)$. 连接 BM 并延长，交 x 轴于点 D，连接 OM. 若 OM 绕点 O 逆时针旋转 90° 得到 OM_1，则 $OM_1=OM$，过点 M_1 作 $M_1F\perp OD$ 于点 F，易证$\triangle OFM_1\cong\triangle MDO$，所以 $OF=MD=1$，$FM_1=DO=2$，则点 M_1 的坐标为$(-1,-2)$；若 OM 绕点 O 顺时针旋转 90° 得到 OM_2，则点 M_2 与点 M_1 关于原点成中心对称，所以点 M_2 的坐标为$(1,2)$. 所以旋转后三角形的重心坐标为$(-1,-2)$或$(1,2)$.

9. $26+10\sqrt{2}$　**提示**：如图，连接 AD，交 EF 于点 N，连接 OC，取 ON 的中点 M，连接 MH，过点 M 作 $MQ\perp AB$ 于点 Q，交 AO 于点 K，过点 M 作 $MP\perp OA$ 于点 P. 易得点 $A(8,0)$，$B(0,-6)$，所以 $OA=8$，$OB=6$，$AB=10$. 易证$\triangle DEN\cong\triangle AFN$，所以 $DN=AN$，所以 $ON=NC=4\sqrt{2}$. 因为 $OH\perp EF$，所以$\angle OHN=90^\circ$，所以点 H 在以 ON 为直径的圆上运动，则当点 H 在 QM 的延长线上时，点 H 到 AB 的距离最大. 因为 M 是 ON 的中点，所以 $OM=MN=2\sqrt{2}$. 因为 $MP\perp OP$，$\angle COA=45^\circ$，所以 $OP=MP=2$，所以 $AP=6$. 易证$\triangle MPK\backsim\triangle AOB$，所以$\frac{MP}{AO}=\frac{PK}{OB}=\frac{MK}{AB}$. 所以$\frac{2}{8}=\frac{PK}{6}=\frac{MK}{10}$，所以 $MK=\frac{5}{2}$，$PK=\frac{3}{2}$，所以 $AK=AP-PK=\frac{9}{2}$. 易证$\triangle AKQ\backsim\triangle ABO$，所以 $\frac{AK}{AB}=\frac{KQ}{BO}$，所以 $\frac{\frac{9}{2}}{10}=\frac{KQ}{6}$，所以 $KQ=\frac{27}{10}$，所以 $QM=MK+KQ=\frac{5}{2}+\frac{27}{10}=\frac{26}{5}$，所以点 H 到 AB 的最大距离为$\frac{26}{5}+2\sqrt{2}$，所以$\triangle HAB$ 面积的最大值为$\frac{1}{2}\times10\times\left(\frac{26}{5}+2\sqrt{2}\right)=26+10\sqrt{2}$.



10. 1 或$\frac{11}{6}$　**提示**：因为$\triangle ABC\cong\triangle DEF$，所以$\angle AEF=\angle B=\angle C$，且$\angle AME>\angle C=\angle F$，所以$\angle AME>\angle AEF$，所以 $AE\neq AM$. 因为$\angle CEA=\angle B+\angle BAE=\angle MEA+\angle CEM$，$\angle MEA=\angle B$，所以$\angle BAE=\angle CEM$. 当 $AE=EM$ 时，$\triangle ABE\cong\triangle ECM$，所以 $EC=AB=5$，所以 $BE=BC-EC=1$. 当 $AM=EM$ 时，$\angle MAE=\angle MEA$，故$\angle MAE+\angle BAE=\angle MEA+\angle CEM$，所以$\angle CAB=\angle CEA$. 易证$\triangle CAE\backsim\triangle CBA$，所以$\frac{CE}{CA}=\frac{CA}{CB}$，所以 $CE=\frac{AC^2}{BC}=\frac{25}{6}$，所以 $BE=BC-CE=\frac{11}{6}$.

11. 解：(1) 过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D，连接 CQ. 因为 $AB=10$，$AQ=2+2t$，所以 $QB=AB-AQ=8-2t$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，因为 $AB=10$，$AC=8$，所以由勾股定理，得 $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=6$. 因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot CD$，所以 $CD=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{24}{5}$. 所以 $S_{\triangle BCQ}=\frac{1}{2}QB\cdot CD=-\frac{24}{5}t+\frac{96}{5}$. 当 $t=4$ 时，点 Q 与点 B 重合，此时$\triangle BCQ$ 不存在，故$\triangle BCQ$ 存在时的 t 的取值范围是 $0\leqslant t<4$. 所以$\triangle BCQ$ 的面积 S 与 t 之间的函数表达式为 $S=-\frac{24}{5}t+\frac{96}{5}(0\leqslant t<4)$.

(2) 当 $QP\parallel AC$ 时，$\angle BPQ=\angle C$，$\angle BQP=\angle A$，所以$\triangle BPQ\backsim\triangle BCA$，所以$\frac{BQ}{BA}=\frac{BP}{BC}$. 又因为 $BQ=8-2t$，$BP=6t-10$，所以$\frac{8-2t}{10}=\frac{6t-10}{6}$，解得 $t=\frac{37}{18}$. 所以当 t 的值为$\frac{37}{18}$时，$QP\parallel AC$.

(3) 当点 Q，P 均在 AB 上时，$AP=6t$，$AQ=2+2t$. 由题意可知，点 Q 与点 P 重合，即 $AP=AQ$，所以 $6t=2+2t$，解得 $t=\frac{1}{2}$.

当点 P 在 BC 上时，由题意可知，点 P 与点R 重合. 因为$\angle PQB=\angle ACB=90°$，$\angle B=\angle B$，所以$\triangle BPQ\backsim\triangle BAC$，所以$\frac{BP}{BA}=\frac{BQ}{BC}$. 又因为 $BP=6t-10$，$BQ=8-2t$，所以$\frac{6t-10}{10}=\frac{8-2t}{6}$，解得 $t=\frac{5}{2}$.

当点 P 在 AC 上时，不存在 QR 经过点P.

综上所述，当 t 的值为$\frac{1}{2}$或$\frac{5}{2}$时，直线 QR 经过点 P.

(4) 当点 P 在点Q 的左侧，点 N 落在边 AC 上时，如图 1 所示. 因为 $AP=6t$，$AQ=2+2t$，所以 $PQ=AQ-AP=2-4t$. 因为四边形 $PQMN$ 是正方形，所以 $PN=PQ=2-4t$. 因为$\angle APN=\angle ACB=90°$，$\angle A=\angle A$，所以$\triangle APN\backsim\triangle ACB$，所以$\frac{PN}{CB}=\frac{AP}{AC}$，即$\frac{2-4t}{6}=\frac{6t}{8}$，解得 $t=\frac{4}{17}$.

当点 P 在点Q 的右侧，点 N 落在边 BC 上时，易知 $t\leqslant\frac{5}{3}$，则 QR 必仍与AC 相交，如图 2 所示. 根据题意，得 $BP=10-6t$，$PN=PQ=AP-AQ=4t-2$. 因为$\angle BPN=\angle BCA=90°$，$\angle B=\angle B$，所以$\triangle BPN\backsim\triangle BCA$，所以$\frac{BP}{BC}=\frac{PN}{CA}$，即$\frac{10-6t}{6}=\frac{4t-2}{8}$，解得 $t=\frac{23}{18}$. 检验可知，$QM=PN=\frac{28}{9}<QR=\frac{41}{12}$，此时正方形 $PQMN$ 在 Rt$\triangle ABC$ 内部.

因为当 $t=\frac{1}{2}$时，点 P 与点Q 重合，正方形 $PQMN$ 不存在，所以 $t\neq\frac{1}{2}$.

综上所述，当$\frac{4}{17}\leqslant t\leqslant\frac{23}{18}$且 $t\neq\frac{1}{2}$时，正方形 $PQMN$ 在Rt$\triangle ABC$ 的内部.

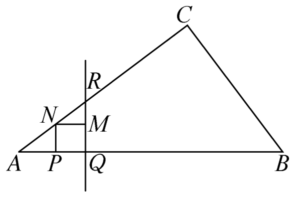


图 1

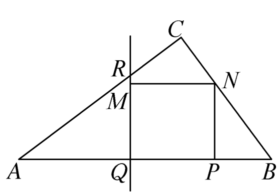


图 2

第 6 章综合练(2)

1. B **提示**：连接 OD 交 BC 于点 M. 由题易得 $AC=5$，且 AC 是$\odot O$ 的直径，所以 $OC=OD=\frac{5}{2}$. 因为 D 为 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，所以 $OM\perp BC$，$CM=BM=\frac{1}{2}BC=2$. 易证$\triangle ABE\backsim\triangle DME$，所以 $DE:AE=DM:AB$. 设 $DM=x$，则 $OM=OD-DM=\frac{5}{2}-x$. 在 Rt$\triangle OMC$ 中，由 $OC^2=OM^2+CM^2$，得$\left(\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}-x\right)^2+2^2$，解得 $x_1=1$，$x_2=4$(不合题意，舍去). 所以 $DM=1$. 所以 $DE:AE=DM:AB=1:3$.

2. D **提示**：过点 A 作 $AM\perp BC$ 于点 M. 因为 $BM=CM=\frac{1}{2}BC=4$，$BD=AB=5$，所以 $DM=BD-BM=1$，$CD=BC-BD=3$. 因为 $AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=3$，所以 $AD=\sqrt{AM^2+DM^2}=\sqrt{10}$. 因为 $AB=AC$，所以$\angle B=\angle C$. 又因为$\angle ADE=\angle B$，所以$\angle ADE=\angle C$. 因为 $BD=AB$，所以$\angle ADE+\angle E=\angle BAD=\angle BDA=\angle C+\angle DAC$，所以$\angle E=\angle DAC$，所以$\triangle ADE\backsim\triangle DCA$，所以$\frac{DE}{CA}=\frac{AD}{DC}$，所以$\frac{DE}{5}=\frac{\sqrt{10}}{3}$，所以 $DE=\frac{5\sqrt{10}}{3}$. 因为$\angle ADE=\angle C$，$\angle DAF=\angle CAD$，所以$\triangle ADF\backsim\triangle ACD$，所以$\frac{DF}{CD}=\frac{AD}{AC}$，所以

$\frac{DF}{3}=\frac{\sqrt{10}}{5}$,所以 $DF=\frac{3\sqrt{10}}{5}$,所以 $EF=DE-DF=\frac{5\sqrt{10}}{3}-\frac{3\sqrt{10}}{5}=\frac{16\sqrt{10}}{15}$.

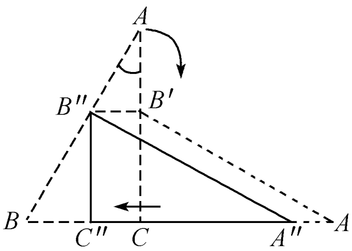
3. C　**提示**:易得$\triangle ADE\backsim\triangle ECF$,所以$\frac{AE}{EF}=\frac{DE}{CF}=\frac{AD}{EC}$.又因为 E 为 CD 的中点,即 $DE=EC$,所以$\frac{AD}{AE}=\frac{DE}{EF}$.又易得$\angle AEF=\angle ADE=90°$,所以$\triangle ADE\backsim\triangle AEF$,所以$\angle 1=\angle 2$.

4. C　**提示**:由题意,得 $BC/\!/AG$,所以$\triangle AFG\backsim\triangle CFB$,所以$\frac{AG}{CB}=\frac{AF}{CF}$.又因为 $AB=BC$,所以$\frac{AG}{AB}=\frac{AF}{FC}$,故①正确.易得$\triangle ABG\cong\triangle BCD$,所以 $AG=BD$.又因为 $BD=AD$,所以 $AG=AD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}BC$.因为$\triangle AFG\backsim\triangle CFB$,所以$\frac{AG}{CB}=\frac{AF}{CF}$.所以 $CF=2AF$,所以 $AF=\frac{1}{3}AC=\frac{\sqrt{2}}{3}AB$,故②正确.当 B,C,F,D 四点在同一个圆上时,$\angle CBD=\angle CFD=\angle AFD=90°$,$CD$ 是 B,C,F,D 四点所在圆的直径.因为 $BG\perp CD$,所以$\overset{\frown}{DF}=\overset{\frown}{BD}$,所以 $DF=DB$,故③正确.因为$\frac{AG}{AB}=\frac{AF}{FC}$,$AG=BD$,$\frac{DB}{AD}=\frac{1}{2}$,所以$\frac{DB}{AB}=\frac{1}{3}$,所以$\frac{AF}{FC}=\frac{1}{3}$,$S_{\triangle BDF}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABF}$,所以 $AF=\frac{1}{4}AC$,所以 $S_{\triangle ABF}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$,所以 $S_{\triangle BDF}=\frac{1}{12}S_{\triangle ABC}$,即 $S_{\triangle ABC}=12S_{\triangle BDF}$,故④错误.

5. (4,2)或(−4,−2)

6. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　**提示**:过点 E 作 $EM\perp AC$,交 AC 的延长线于点 M.根据题意,得$\triangle ACB\backsim\triangle DEB$,所以$\frac{BE}{BC}=\frac{BD}{BA}$,所以$\frac{BE}{BD}=\frac{BC}{BA}$.易得$\angle ABD=\angle CBE$,所以$\triangle ADB\backsim\triangle CEB$,所以$\frac{CE}{AD}=\frac{BC}{BA}=\frac{1}{2}$,$\angle BCE=\angle BAD=30°$,所以 $AD=2CE$,$\angle ECM=60°$,所以$\angle CEM=30°$,所以 $CE=2CM$,所以 $EM=\sqrt{CE^2-CM^2}=\sqrt{3}CM$,所以 $AD=2CE=4CM$,所以 $CD=AC-AD=4-4CM$,所以 $S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}CD\cdot EM=\frac{1}{2}\cdot(4-4CM)\cdot\sqrt{3}CM=-2\sqrt{3}(CM^2-CM)=-2\sqrt{3}\left(CM-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以$\triangle CDE$面积的最大值是$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7. $(6-2\sqrt{3})$　**提示**:如图,设平移后的三角尺为 $A''B''C''$,连接 $B'B''$.易得 $BC=\frac{1}{2}AB=6$ cm,$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=6\sqrt{3}$ cm.由旋转的性质,得 $B'C=BC=6$ cm,所以 $AB'=AC-B'C=(6\sqrt{3}-6)$cm.易证四边形 $B''C''CB'$ 是矩形,所以 $B''B'/\!/BC$,且 $B''B'=C''C$,所以$\triangle AB''B'\backsim\triangle ABC$,所以$\frac{AB'}{AC}=\frac{B''B'}{BC}$,所以 $B''B'=\frac{AB'\cdot BC}{AC}=(6-2\sqrt{3})$cm.所以 $C''C=B''B'=(6-2\sqrt{3})$cm,即三角尺向左平移的距离为$(6-2\sqrt{3})$cm.



8. 6　**提示**:连接 OC.因为 $AD/\!/BC$,AB 是$\odot O$的直径,所以$\angle DAC=\angle ACB=90°$.因为 CD 是$\odot O$的切线,所以$\angle OCA+\angle ACD=90°$.又因为$\angle OAC+\angle CBA=90°$,$\angle OAC=\angle OCA$,所以$\angle CBA=\angle ACD$.所以$\triangle CAB\backsim\triangle ADC$,所以$\frac{AC}{DA}=\frac{CB}{AC}=\frac{AB}{DC}$.因为$\frac{AC}{BC}=\frac{\sqrt{5}}{2}$,所以可设 $AC=\sqrt{5}k$,则 $BC=2k(k>0)$,$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=3k$.所以$\frac{2k}{\sqrt{5}k}=\frac{3k}{DC}$,所以 $DC=\frac{3\sqrt{5}}{2}k$.在 Rt$\triangle ODC$ 中,由 $OD^2=OC^2+DC^2$,$OC=\frac{1}{2}AB=\frac{3}{2}k$,得$(3\sqrt{6})^2=\left(\frac{3}{2}k\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}k\right)^2$,解得 $k=2$(负值已舍).所以 $AB=3k=6$.

9. $6.4<AP<8.4$　**提示**:过点 P 作 $PD/\!/BC$ 交 AC 于点 D 或 $PE/\!/AC$ 交 BC 于点 E,则$\triangle APD\backsim\triangle ABC$或$\triangle BPE\backsim\triangle BAC$,此时 $0<AP<10$;过点 P 作$\angle AFP=\angle B$ 交 AC 于点 F,则$\triangle APF\backsim\triangle ACB$,当点 F 与点 C 重合时,$AC^2=AP\cdot AB$,所以 $AP=6.4$,

此时 $0<AP\leqslant 6.4$;过点 P 作 $\angle BGP=\angle A$ 交 BC 于点 G,则 $\triangle BGP\backsim\triangle BAC$,当点 G 与点 C 重合时,$CB^2=BP\cdot AB$,所以 $BP=1.6$,$AP=8.4$,所以此时 $8.4\leqslant AP<10$. 因为只有 2 种不同的剪法,所以 AP 长的取值范围是 $6.4<AP<8.4$.

10. ③ **提示**:如图 1,过点 O 作 $OE\perp AC$ 于点 E,过点 D 分别作 $DG\perp OE$ 于点 G,$DF\perp AC$,交 AC 的延长线于点 F,连接 OD. 易证四边形 $DFEG$ 为矩形. 根据题意,可知 $AB=4$,$AC=2$,$BC=2\sqrt{3}$,$OE=\frac{1}{2}BC=\sqrt{3}$,$CE=\frac{1}{2}AC=1$. 因为 $\triangle ABC\backsim\triangle CBD$,所以 $\frac{AB}{CB}=\frac{AC}{CD}$,所以 $CD=\sqrt{3}$. 易得 $GE=DF=\frac{\sqrt{3}}{2}$,根据勾股定理,可得 $CF=\sqrt{CD^2-DF^2}=\frac{3}{2}$,所以 $DG=EF=\frac{5}{2}$,$OG=OE-GE=\frac{\sqrt{3}}{2}$,根据勾股定理,可得 $OD=\sqrt{DG^2+OG^2}=\sqrt{7}\neq 2\sqrt{3}$,故①错误. 若 $\alpha=60°$,如图 2,AD 的长取最大值,此时 $\triangle ACB\backsim\triangle CBD$. 过点 A 作 $AE\perp BD$,交 DB 的延长线于点 E. 易证四边形 $ACBE$ 为矩形,所以 $BE=AC=2$,$AE=BC=2\sqrt{3}$. 因为 $\frac{BD}{CB}=\frac{BC}{CA}=\sqrt{3}$,所以 $BD=\sqrt{3}BC=6$,所以 $DE=8$,所以 $AD=2\sqrt{19}\neq 2\sqrt{7}$,故②错误. 如图 3,因为 $\triangle ABC\backsim\triangle BCD$,所以 $\frac{CD}{BC}=\frac{BC}{AB}$,即 $CD=\frac{1}{4}BC^2$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$BC^2=AB^2-AC^2=16-x^2$,所以 $CD=\frac{1}{4}(16-x^2)=-\frac{1}{4}x^2+4$,所以 $AC+CD=x-\frac{1}{4}x^2+4=-\frac{1}{4}(x-2)^2+5$. 当 $x=2$ 时,$AC+CD$ 取得最大值,最大值为 5,故③正确.

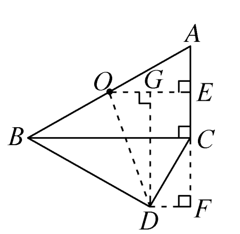


图 1

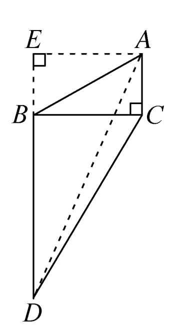


图 2

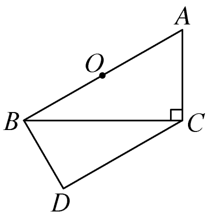


图 3

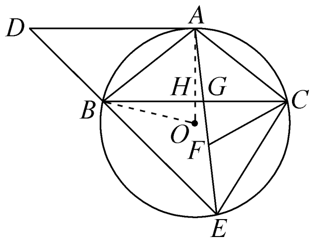
11. (1) **证明**:连接 AO 并延长交$\odot O$ 于点 K,连接 BK. 因为 AD 是$\odot O$ 的切线,所以 $\angle DAB=90°-\angle BAK=\angle BKA=\angle ACB$. 因为 $AD/\!/BC$,所以 $\angle ABC=\angle DAB$,所以 $\angle ABC=\angle DAB=\angle ACB$,所以 $AB=AC$.

(2) ①**解**:AF 与 AC 的数量关系为 $AF=AC$. 理由如下:

因为 CF 平分 $\angle BCE$,所以 $\angle GCF=\angle ECF$. 因为 $AB=AC$,所以 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$,所以 $\angle ACB=\angle AEC$. 因为 $\angle ACF=\angle ACB+\angle GCF$,$\angle AFC=\angle AEC+\angle ECF$,所以 $\angle ACF=\angle AFC$,所以 $AF=AC$. 因为 $\frac{GF}{AG}=\frac{1}{2}$,所以设 $GF=a$,则 $AG=2a$,所以 $AC=AF=AG+GF=3a$,所以 $AB=AC=3a$. 因为 $\angle ABC=\angle AEC$,$\angle AGB=\angle CGE$,所以 $\triangle ABG\backsim\triangle CEG$,所以 $\frac{AG}{AB}=\frac{CG}{CE}$,所以 $\frac{CG}{CE}=\frac{2a}{3a}=\frac{2}{3}$. 过点 F 作 $FM\perp CG$ 于点 M,作 $FN\perp CE$ 于点 N. 又因为 CF 平分 $\angle BCE$,所以 $FM=FN$. 设 $\triangle CGE$ 边 GE 上的高为 h,则 $\frac{S_{\triangle CGF}}{S_{\triangle CEF}}=\frac{\frac{1}{2}GF\cdot h}{\frac{1}{2}EF\cdot h}=\frac{\frac{1}{2}CG\cdot FM}{\frac{1}{2}CE\cdot FN}$,所以 $\frac{GF}{EF}=\frac{CG}{CE}=\frac{2}{3}$.

②$2\sqrt{6}$ **提示**:如图,连接 OA,OB,OA,BC 相交于点 H. 因为 AD 是$\odot O$ 的切线,所以 $OA\perp AD$. 因为 $AD/\!/BC$,所以 $OA\perp BC$,所以 $BH=CH=\frac{1}{2}BC$. 因为 $CF/\!/AB$,所以 $\angle ABC=\angle GCF$,所以 $\angle ABC=\angle ACB=\angle GCF=\angle ECF=\angle AEC$. 因为 $\angle ACB=$

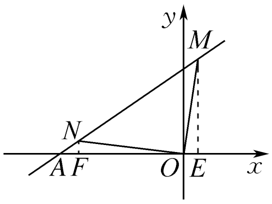
$\angle GCF$,同①可得$\frac{CF}{AC}=\frac{GF}{AG}=\frac{1}{2}$,所以$AC=2CF=6$,所以$AF=AC=6$,所以$AG=\frac{2}{3}AF=4$,所以$GF=2$.因为$\angle CAG=\angle EAC$,$\angle ACB=\angle AEC$,所以$\triangle AGC\backsim\triangle ACE$,所以$\frac{AG}{AC}=\frac{AC}{AE}$,所以$\frac{4}{6}=\frac{6}{AE}$,所以$AE=9$,所以$EG=AE-AG=5$.易知$\angle AFC=\angle ACF=\angle ACB+\angle BCF=\angle ECF+\angle BCF=\angle GCE$.因为$\angle CGF=\angle EGC$,所以$\triangle CGF\backsim\triangle EGC$,所以$\frac{CG}{GF}=\frac{EG}{GC}$,所以$\frac{CG}{2}=\frac{5}{CG}$,所以$CG=\sqrt{10}$.因为$\angle AGB=\angle CGE$,$\angle BAE=\angle ECB$,所以$\triangle ABG\backsim\triangle CEG$,所以$\frac{AG}{CG}=\frac{BG}{EG}$,所以$\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{BG}{5}$,所以$BG=2\sqrt{10}$.所以$BC=BG+CG=3\sqrt{10}$.所以$BH=\frac{1}{2}BC=\frac{3\sqrt{10}}{2}$.又因为$AB=AC=6$,所以$AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$.设$\odot O$的半径为$r$,则$OH=r-\frac{3\sqrt{6}}{2}$.因为$OB^2=OH^2+BH^2$,即$r^2=\left(r-\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{10}}{2}\right)^2$,所以$r=2\sqrt{6}$.



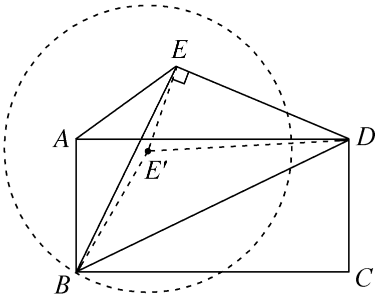
第 7 章　锐角三角函数

巅峰训练 14　正切、正弦、余弦

1. A　**提示:**如图,过点M作$ME\perp x$轴于点E,过点N作$NF\perp x$轴于点F.易证$\triangle MOE\cong\triangle ONF$,可得$\angle AON=\angle OME$.因为点$N$在直线$y=\frac{3}{4}x+3$上且在第二象限内,设点$N\left(x,\frac{3}{4}x+3\right)$,则$ME=OF=-x$,$OE=NF=\frac{3}{4}x+3$,所以点$M\left(\frac{3}{4}x+3,-x\right)$.将点$M$代入$y=\frac{3}{4}x+3$,得$-x=\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}x+3\right)+3$,解得$x=-\frac{84}{25}$.所以$ME=\frac{84}{25}$,$OE=\frac{12}{25}$,所以$\tan\angle AON=\tan\angle OME=\frac{OE}{ME}=\frac{1}{7}$.



2. B　**提示:**如图,作$\angle E'ED=90°$,且$EE'=3$,连接BE',DE',则$\tan\angle EDE'=\frac{EE'}{ED}=\frac{1}{2}$.因为$\frac{AD}{AB}=\tan\angle ABD=2$,所以$\tan\angle ADB=\frac{AB}{AD}=\frac{1}{2}$.所以$\angle EDE'=\angle ADB$,所以$\angle EDA=\angle E'DB$.又易证$\frac{ED}{E'D}=\frac{AD}{BD}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,所以$\triangle ADE\backsim\triangle BDE'$,所以$\frac{AE}{BE'}=\frac{AD}{BD}$,即$\frac{4}{BE'}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,所以$BE'=2\sqrt{5}$,所以点$B$在以点$E'$为圆心,$2\sqrt{5}$为半径的圆上运动,且点$E$在$\odot E'$内.当$B$,$E'$,$E$三点共线时,$BE$的长取得最大值,则$BE$长的最大值为$BE'+EE'=2\sqrt{5}+3$.



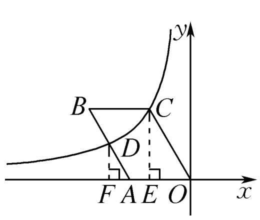
3. B　**提示:**设EH交AF于点N.因为四边形$ABCD$是正方形,所以$\angle C=90°$,$BC=DC$.因为$BE=DF=1$,所以$CE=CF$,即$\triangle CEF$是等腰直角三角形.因为$EF=2+\sqrt{2}$,所以$CE=CF=\sqrt{2}+1$,所以$AD=DC=CF+DF=2+\sqrt{2}$.因为$\angle DAB=\angle ABC=\angle AHE=90°$,所以四边形$ABEH$是矩形,所以$AH=BE=1$,$EH=AB=AD$.因为$EG\perp AF$,$\angle ENF=\angle ANH$,所以$\angle HEG=90°-\angle ENF=90°-\angle ANH=\angle DAF$.因为$\angle EHG=\angle D=90°$,所以$\triangle EHG\cong\triangle ADF$(ASA),所以$HG=DF=1$,所以$DG=AD-AH-HG=\sqrt{2}$.在$Rt\triangle DGF$中,$GF=\sqrt{DG^2+DF^2}=\sqrt{3}$,所以$\sin\angle FGD=\frac{DF}{GF}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. $\frac{4}{5}$　**提示:**因为AB是$\odot O$的直径,所以

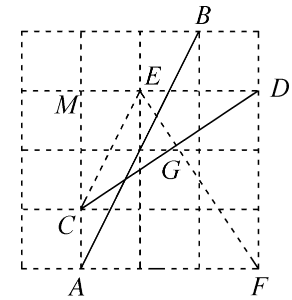
$\angle ACB=90°$，易得 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=10$. 因为 $CD\perp AB$，所以 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}$，所以 $\angle ABD=\angle ABC$，所以 $\sin\angle ABD=\sin\angle ABC=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{4}{5}$.

5. $\dfrac{4}{3}$ **提示**：过点 A 作 $AE\perp BC$ 于点 E. 因为 $AB=AC=5$，所以 $BE=\dfrac{1}{2}BC=4$，$\angle BAE=\dfrac{1}{2}\angle BAC$. 因为 $\angle BPC=\dfrac{1}{2}\angle BAC$，所以 $\angle BPC=\angle BAE$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BAE$ 中，易得 $AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=3$. 所以 $\tan\angle BPC=\tan\angle BAE=\dfrac{BE}{AE}=\dfrac{4}{3}$.

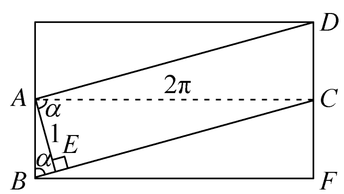
6. $-4\tan\alpha$ **提示**：如图，过点 C 作 $CE\perp OA$ 于点 E，过点 D 作 $DF\perp x$ 轴于点 F. 因为 D 为边 AB 的中点，所以 $OC=AB=2AD$. 易证 $CE=2DF$，$OE=2AF$. 设 $AF=a$，则 $OE=2a$. 因为点 C，D 都在反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k<0)$ 的图像上，所以点 $C\left(-2a,-\dfrac{k}{2a}\right)$. 因为点 $A(-3,0)$，所以点 $D\left(-a-3,\dfrac{k}{-a-3}\right)$，所以 $-\dfrac{k}{2a}=2\times\dfrac{k}{-a-3}$，解得 $a=1$，所以 $OE=2$，$CE=-\dfrac{k}{2}$. 因为四边形 $ABCO$ 是平行四边形，所以 $\angle COA=\angle B=\alpha$，所以 $\tan\alpha=\tan\angle COA=\dfrac{CE}{OE}=-\dfrac{k}{2\times2}$，所以 $k=-4\tan\alpha$.



7. $\dfrac{4}{7}$ **提示**：如图，取格点 E，使得 $CE/\!/AB$，过点 E 作 $EG\perp CD$ 于点 G，延长 EG，由网格可知，延长线过格点 F（可由 $\triangle MDC\cong\triangle DFE$ 证得）. 因为 $\angle EDF=\angle EGD=90°$，$\angle GED=\angle DEF$，所以 $\triangle DEG\backsim\triangle FED$，所以 $\dfrac{EG}{ED}=\dfrac{DG}{FD}=\dfrac{DE}{FE}$，即 $\dfrac{EG}{2}=\dfrac{DG}{3}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，所以 $EG=\dfrac{4\sqrt{13}}{13}$，$DG=\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$. 所以 $CG=CD-DG=\dfrac{7\sqrt{13}}{13}$. 所以 $\tan\angle ECG=\dfrac{EG}{CG}=\dfrac{4}{7}$. 因为 $CE/\!/AB$，所以 $\alpha=\angle ECG$，所以 $\tan\alpha=\dfrac{4}{7}$.



8. $\dfrac{1}{2\pi}$ **提示**：水管平面展开图如图所示. 因为 $AC/\!/BF$，所以 $\angle CAB=180°-\angle ABF=90°$. 因为 $\angle BAE+\angle ABE=90°=\angle BAE+\angle CAE$，所以 $\angle CAE=\angle ABE=\alpha$. 因为水管直径为 2，所以 $AC=2\pi$. 所以 $\cos\alpha=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{1}{2\pi}$.



9. 解：(1) 如图 1，线段 AD 即为所求. **提示**：取格点 G，连接 AG，与 BC 交于点 D，则 AD 即为所求.

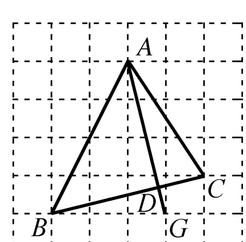


图 1

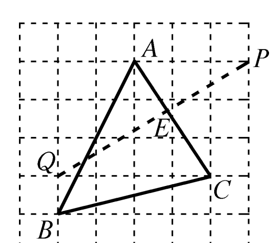


图 2

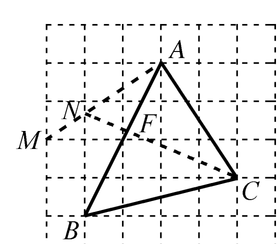


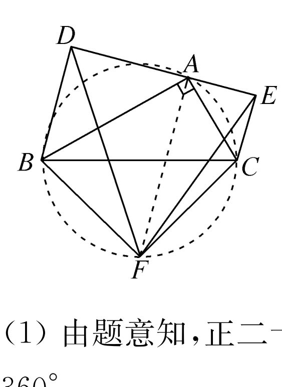
图 3

(2) 如图 2，点 E 即为所求. **提示**：取格点 P，Q，连接 PQ，交 AC 于点 E，则易证 $\triangle AEP\backsim\triangle CEQ$，可得 $\dfrac{AE}{CE}=\dfrac{AP}{CQ}=\dfrac{3}{4}$.

(3) 如图 3，点 F 即为所求. **提示**：取格点 M，连接 AM，交网格线于点 N，此时 $AM=AC$，$\angle CAM=90°$，$\dfrac{AN}{MN}=2$，所以 $\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{AN}{AM}=\dfrac{2}{3}$，再连接

CN，交 AB 于点 F，可得 $\tan\angle ACF=\tan\angle ACN=\frac{AN}{AC}=\frac{2}{3}$.

10. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$　**提示**：设 $AC=a$，$AB=b$，$BC=c$. 由题意可知，$\angle BDA=\angle BFC=\angle AEC=90^\circ$，$\angle FBC=\angle EAC=45^\circ$. 因为 $\angle BAC=90^\circ$，所以 $\angle BAC+\angle BFC=180^\circ$，所以 A，B，F，C 四点共圆. 如图，连接 AF. 易知 $\angle FAC=\angle FBC=45^\circ$. 所以 $\angle FAE=\angle EAC+\angle FAC=90^\circ$，所以 $\angle BDA=\angle FAE=90^\circ$，$\angle AEC+\angle FAE=180^\circ$，所以 $DB/\!/AF$，$AF/\!/EC$. 所以 $\triangle ADF$ 和 $\triangle ABF$ 的公共边 AF 上的高相等，所以 $S_{\triangle ADF}=S_{\triangle ABF}$. 同理可得 $S_{\triangle AFE}=S_{\triangle AFC}$，所以 $S_{\triangle DEF}=S_{\triangle ADF}+S_{\triangle AEF}=S_{\triangle ABF}+S_{\triangle AFC}=S_{\text{四边形}ABFC}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle BFC}=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}c\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}c=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}c^2$. 因为 $S_{\triangle DEF}:S_{\triangle ABC}=5:2$，所以 $\left(\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{2}ab\right):\frac{1}{2}ab=5:2$，所以 $3ab=c^2$. 因为 $a^2+b^2=c^2$，所以 $a^2+b^2=3ab$，所以 $\frac{a^2+b^2}{ab}=3$，所以 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=3$. 令 $\frac{a}{b}=x$，所以 $x+\frac{1}{x}=3$，所以 $x^2-3x+1=0$，解得 $x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. 因为 $AB>AC$，即 $b>a$，所以 $x=\frac{a}{b}<1$，所以 $\frac{a}{b}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$，所以 $\tan\angle ABC=\frac{a}{b}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.



11. 解：(1) 由题意知，正二十四边形中心角的度数为 $\frac{360^\circ}{24}=15^\circ$. 如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle A=15^\circ$. 在边 AC 上取点 D，连接 BD，使 $\angle ABD=\angle A=15^\circ$，所以 $\angle BDC=\angle ABD+\angle A=30^\circ$. 设 $BC=a$，则 $AD=BD=2BC=2a$，所以 $CD=\sqrt{BD^2-BC^2}=\sqrt{3}a$，所以 $AC=(2+\sqrt{3})a$. 由勾股定理，得 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=(\sqrt{6}+\sqrt{2})a$，所以 $\cos 15^\circ=\frac{AC}{AB}=\frac{(2+\sqrt{3})a}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})a}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

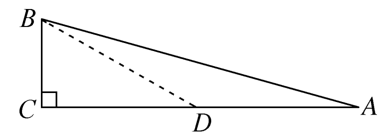


图 1

(2) 设正多边形的边数为 n，则对角线条数为 $\frac{n(n-3)}{2}$. 根据题意，得 $\frac{n(n-3)}{2}=n$，解得 $n=5$ 或 $n=0$(舍去). 所以对角线条数和边数相同的正多边形是正五边形，其中心角为 $\frac{360^\circ}{5}=72^\circ$. 如图 2，作等腰三角形 ABC，使 $\angle A=36^\circ$，$\angle ABC=\angle ACB=72^\circ$，作 $\angle ABC$ 的平分线 BF，交 AC 于点 F，过点 B 作 $BE\perp AC$ 于点 E，则 $\angle ABF=\angle CBF=36^\circ$. 所以 $\angle BFC=\angle A+\angle ABF=72^\circ$，所以 $\angle A=\angle ABF$，$\angle BFC=\angle ACB$，所以 $AF=BF$，$BF=BC$，所以 $AF=BF=BC$. 因为 $BE\perp FC$，$BF=BC$，所以 $\angle BEC=90^\circ$，$CE=FE$. 设 $AF=x$，$CE=y$，则 $BC=x$，$CF=2y$，$AB=AC=x+2y$. 因为 $\angle CBF=\angle A=36^\circ$，$\angle ABC=\angle BCF=72^\circ$，所以 $\triangle ABC\backsim\triangle BCF$，所以 $\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{CF}$，即 $\frac{x+2y}{x}=\frac{x}{2y}$. 整理，得 $x^2=4y^2+2xy$，所以 $x^2-2xy+y^2=5y^2$，即 $(x-y)^2=5y^2$. 因为 $x>y>0$，所以 $x-y=\sqrt{5}y$，所以 $x=(\sqrt{5}+1)y$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BEC$ 中，$\cos\angle BCE=\frac{CE}{BC}$，即 $\cos 72^\circ=\frac{y}{x}=\frac{y}{(\sqrt{5}+1)y}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

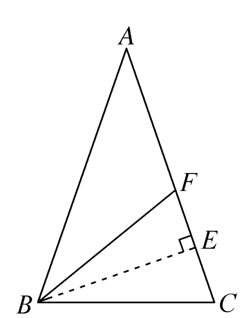


图 2

巅峰训练 15　特殊角的三角函数、由三角函数值求锐角、解直角三角形

1. C　**提示**：因为 $OC=BC$，$OC=OB$，所以 $OC=OB=BC$，所以△OBC 是等边三角形，所以 $\angle B=\angle OCB=60^\circ$，所以 $\angle ADC=\angle B=60^\circ$. 因为 E 是弦 CD 的中点，所以 $\angle BCD=\frac{1}{2}\angle OCB=30^\circ$，所以 $\angle BAD=\angle BCD=30^\circ$. 所以 $\tan\angle ADC=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$，$\cos\angle BAD=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $2\cos\angle BAD+\tan\angle ADC=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}=\sqrt{12}$. 因为 $9<12<16$，所以 $3<\sqrt{12}<4$，所以 $3<2\cos\angle BAD+\tan\angle ADC<4$.

2. C　**提示**：如图 1，当 $AP\perp AC$ 时，因为 $AB=AC$，所以 $\angle B=\angle C=30^\circ$，所以 $\angle APC=60^\circ$，$\angle BAP=30^\circ$，所以 $AP=BP$，因为 $AC=\sqrt{3}$，所以 $AP=\frac{AC}{\tan\angle APC}=1$，所以 $BP=1$；如图 2，当 $AP\perp AB$ 时，因为 $AB=AC$，所以 $\angle B=\angle C=30^\circ$，所以 $\angle APB=60^\circ$，因为 $AB=\sqrt{3}$，所以 $BP=\frac{AB}{\sin\angle APB}=2$.

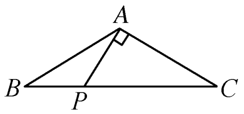


图 1

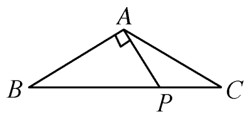
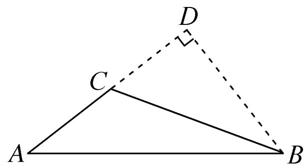


图 2

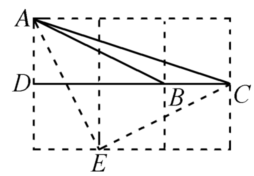
3. C　**提示**：过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D. 在 Rt△BDA 中，因为 $\angle B=60^\circ$，所以 $BD=\frac{1}{2}c$，$AD=AB\cdot\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}c$. 在 Rt△$ADC$ 中，由勾股定理，得 $DC^2=AC^2-AD^2$，即 $\left(a-\frac{1}{2}c\right)^2=b^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2$. 整理，得 $a^2+c^2=b^2+ac$. 所以 $\frac{c}{a+b}+\frac{a}{c+b}=\frac{c^2+cb+a^2+ab}{(a+b)(c+b)}=\frac{b^2+ac+ab+bc}{ac+ab+bc+b^2}=1$.

4. C　**提示**：如图，过点 B 作 $BD\perp AC$，交 AC 的延长线于点 D. 所以 $BD^2=BC^2-CD^2=100-CD^2$，$BD^2=AB^2-AD^2=196-(6+CD)^2$，所以 $100-CD^2=196-(6+CD)^2$，所以 $CD=5$，所以 $\cos\angle DCB=\frac{CD}{CB}=\frac{1}{2}$，所以 $\angle DCB=60^\circ$，所以 $\angle ACB=180^\circ-60^\circ=120^\circ$.



5. $\frac{12}{5}$　**提示**：解方程 $10x^2-3x-4=0$，得 $x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=\frac{4}{5}$. 因为 $\sin B=\frac{AD}{AB}>0$，所以 $\sin B=\frac{4}{5}$，即 $\frac{AD}{AB}=\frac{4}{5}$. 因为 $AD=12$，所以 $AB=15$. 由勾股定理，得 $BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=9$. 因为 $BC=14$，所以 $CD=BC-BD=5$. 因为 E 为边 AC 的中点，所以 $AE=EC=DE$，所以 $\angle EDC=\angle ECD$. 所以 $\tan\angle EDC=\tan\angle ECD=\frac{AD}{CD}=\frac{12}{5}$.

6. 45°　**提示**：如图，连接 AE，CE，则 $\tan\angle DCE=\frac{1}{2}=\tan\angle ABD$，所以 $\angle ABD+\angle ACD=\angle DCE+\angle ACD=\angle ACE$. 由图可知，$AE=CE=\sqrt{5}$，$AC=\sqrt{10}$，所以 $AE^2+CE^2=AC^2$，所以△AEC 为等腰直角三角形，且 $\angle AEC=90^\circ$，所以 $\angle ACE=\angle CAE=45^\circ$. 所以 $\angle ABD+\angle ACD=45^\circ$.



7. 解：(1) 如图 1，连接 BC. 由题意，得 $\angle\alpha=\angle BAD$，$\angle\beta=\angle CAD$. 因为 $AB=BC=\sqrt{5}$，$AC=\sqrt{10}$，所以 $AB^2+BC^2=AC^2$，所以 $\angle ABC=90^\circ$，所以 $\angle BAC=45^\circ$，所以 $\angle\alpha+\angle\beta=\angle BAD+\angle CAD=\angle BAC=45^\circ$.

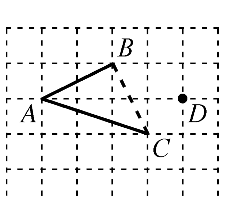


图 1

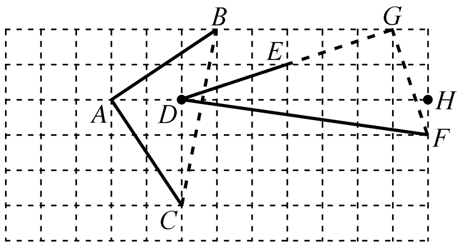


图 2

(2) 90　**提示**：如图 2，连接 BC. 由题意，得 $\angle\alpha=\angle BAD$，$\angle\beta=\angle DAC$. 同(1)可得 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$\angle BAC=90^\circ$，所以 $\angle\alpha+\angle\beta=\angle BAD+\angle DAC=\angle BAC=90^\circ$.

(3) 如图 2，$\angle\alpha=\angle GDH$，$\angle\beta=\angle HDF$，在 $\text{Rt}\triangle DGF$ 中，$\tan\theta=\tan(\alpha+\beta)=\tan\angle GDF=\dfrac{FG}{DG}=\dfrac{1}{2}$.

8. 解：(1) 因为 $\angle AOB=60^\circ$，所以在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中，$OA=OB\cdot\cos\angle AOB=\sqrt{3}$. 因为 OC 平分 $\angle AOB$，所以 $\angle AOC=\angle COB=30^\circ$. 所以 $OC=\dfrac{OA}{\cos 30^\circ}=2$. 因为 $\angle COB=\angle CBO=30^\circ$，所以 $BC=OC=2$.

(2) 当 $0<t<2$ 时，点 P 在线段 BC 上，点 Q 在线段 OC 上，则 $BP=CQ=t$，$CP=OQ=2-t$. 过点 Q 作 $QD\perp AC$ 于点 D，则 $QD/\!/OA$，所以 $\angle CQD=\angle AOC=30^\circ$，所以 $QD=QC\cdot\cos\angle CQD=t\cdot\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$. 所以 $S=\dfrac{1}{2}CP\cdot QD=\dfrac{1}{2}(2-t)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}t=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}t^2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$.

当 $t=0$ 或 $t=2$ 时，$\triangle CPQ$ 不存在，所以 $S=0$.

当 $2<t\leqslant 4$ 时，点 P 在线段 OC 上，点 Q 在 y 轴正半轴上，则 $CP=OQ=t-2$. 过点 Q 作 $QE\perp OC$ 于点 E. 因为 $\angle AOQ=90^\circ-\angle AOB=30^\circ$，所以 $\angle COQ=\angle AOQ+\angle AOC=60^\circ$. 所以 $QE=OQ\cdot\sin\angle COQ=(t-2)\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t-2)$. 所以 $S=\dfrac{1}{2}CP\cdot QE=\dfrac{1}{2}(t-2)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t-2)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(t-2)^2$.

综上所述，S 与 t 之间的函数表达式为 $S=\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}t^2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\,(0\leqslant t\leqslant 2),\\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}(t-2)^2\,(2<t\leqslant 4).\end{cases}$

(3) 此时，$OP=2-CP=4-t$，$OQ=t-2$. 分以下三种情况讨论：

①当 $MO=MP$ 时，$\angle MPO=\angle MOP=30^\circ$. 易得 $PQ\perp OQ$，所以 $OP=2OQ$，即 $4-t=2(t-2)$，解得 $t=\dfrac{8}{3}$，满足 $2\leqslant t\leqslant 4$.

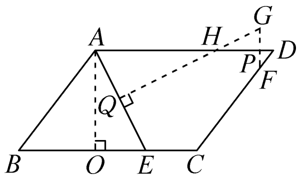
②当 $OP=OM$ 时，$\angle OPM=\angle OMP=75^\circ$. 过点 P 作 $PN\perp OQ$ 于点 N，易得 $\angle OPN=30^\circ$，$\angle PQN=\angle QPN=45^\circ$. 所以 $PN=QN$，$PN=OP\cdot\cos\angle OPN=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(4-t)$，$ON=OP\cdot\sin\angle OPN=\dfrac{1}{2}(4-t)$，所以 $QN=OQ-ON=t-2-\dfrac{1}{2}(4-t)$，所以 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(4-t)=t-2-\dfrac{1}{2}(4-t)$，解得 $t=2+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，满足 $2\leqslant t\leqslant 4$.

③当 $PO=PM$ 时，$\angle OMP=\angle MOP=30^\circ$. 所以 $\angle OMP=\angle AOQ$，所以 $PQ/\!/y$ 轴，这与点 Q 在 y 轴上运动相矛盾，故此情况不成立，舍去.

综上所述，当 $t=\dfrac{8}{3}$ 或 $t=2+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 时，$\triangle OPM$ 为等腰三角形.

9. $\dfrac{68\sqrt{5}}{25}$　**提示**：如图，作点 F 关于 AD 的对称点 G，过点 G 作 $GQ\perp AE$ 于点 Q，交 AD 于点 H，则 $MN+NF$ 的最小值为 GQ 的长. 因为 $\sin B=\dfrac{4}{5}$，所以 $\dfrac{PF}{DF}=\sin D=\dfrac{4}{5}$，所以 $PF=\dfrac{4}{5}$. 由勾股定理，得 $PD=\sqrt{DF^2-PF^2}=\dfrac{3}{5}$. 由对称性，可得 $PG=PF=\dfrac{4}{5}$. 过点 A 作 $AO\perp BC$ 于点 O，所以 $\sin B=\dfrac{AO}{AB}$，即

$\frac{AO}{5}=\frac{4}{5}$，所以 $AO=4$，所以 $BO=\sqrt{AB^2-AO^2}=3$，所以 $OE=2$，$AE=\sqrt{AO^2+OE^2}=2\sqrt{5}$. 因为 $AD/\!/BC$，所以 $\angle HAQ=\angle AEO$，易得 $\angle OAE=\angle QHA=\angle GHP$，所以 $\sin\angle OAE=\sin\angle GHP$，$\tan\angle OAE=\tan\angle GHP$，即 $\frac{PG}{GH}=\frac{OE}{AE}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\frac{PG}{PH}=\frac{OE}{AO}=\frac{1}{2}$，所以 $GH=\sqrt{5}PG=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，$PH=2PG=\frac{8}{5}$，所以 $HD=PH+PD=\frac{11}{5}$. 因为 $AB=BE=5$，$EC=2$，所以 $AD=BC=BE+EC=7$，所以 $AH=AD-HD=\frac{24}{5}$. 因为 $\sin\angle HAQ=\sin\angle OEA$，即 $\frac{HQ}{AH}=\frac{OA}{AE}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $HQ=\frac{2\sqrt{5}}{5}AH=\frac{48\sqrt{5}}{25}$，所以 $GQ=HQ+GH=\frac{48\sqrt{5}}{25}+\frac{4\sqrt{5}}{5}=\frac{68\sqrt{5}}{25}$.



10. 4　**提示**：在 Rt$\triangle AOB$ 中，因为 $\angle ABO=30°$，$AO=1$，所以 $AB=2$，$BO=\sqrt{AB^2-AO^2}=\sqrt{3}$. 分以下情况讨论：①当点 P 从点 $O\to$点 B 时，如图 1、图 2 所示，此过程中点 Q 运动的路程为 $\sqrt{3}$. ②当点 P 从点 $B\to$点 C 时，如图 2、图 3 所示，若 $QC\perp AB$，则 $\angle ACQ=90°$. 因为 $\angle ABO=30°$，所以 $\angle BAO=60°$. 所以 $\angle OQD=90°-60°=30°$，所以 $\cos 30°=\frac{CQ}{AQ}$，所以 $AQ=\frac{CQ}{\cos 30°}=2$. 所以 $OQ=AQ-AO=2-1=1$，此过程中点 Q 运动的路程为 $OQ=1$. ③当点 P 从点 $C\to$点 A 时，如图 3 所示，此过程中点 Q 运动的路程为 $QQ'=2-\sqrt{3}$. ④当点 P 从点 $A\to$点 O 时，如图 3 所示，此过程中点 Q 运动的路程为 $Q'Q''=AO=1$. 综上所述，点 Q 运动的总路程为 $\sqrt{3}+1+2-\sqrt{3}+1=4$.

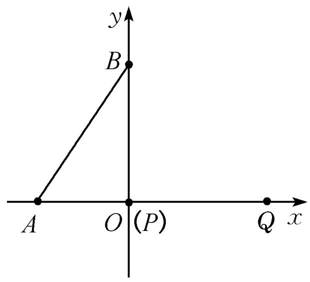


图 1

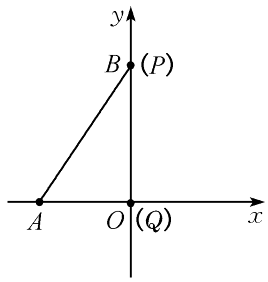


图 2

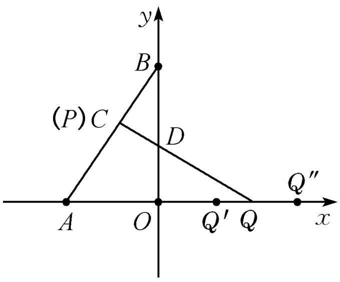
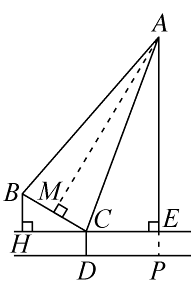


图 3

巅峰训练 16　用锐角三角函数解决问题(1)

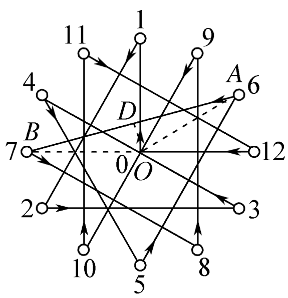
1. D　**提示**：延长 AB 交 DC 的延长线于点 H，过点 E 作 $EG\perp AB$ 于点 G，则 $GH=DE=15$ m，$EG=DH$. 因为梯坎坡度 $i=1:\sqrt{3}$，所以 $BH:CH=1:\sqrt{3}$. 设 $BH=x$ m，则 $CH=\sqrt{3}x$ m. 在 Rt$\triangle BCH$ 中，$BC=12$ m，由勾股定理，得 $x^2+(\sqrt{3}x)^2=12^2$，解得 $x=6$. 所以 $BH=6$ m，$CH=6\sqrt{3}$ m. 所以 $BG=GH-BH=9$ m，$EG=DH=CH+CD=(6\sqrt{3}+20)$ m. 因为 $\alpha=45°$，所以 $\angle EAG=45°$，所以 $\triangle AEG$ 是等腰直角三角形，所以 $AG=EG=(6\sqrt{3}+20)$ m. 所以 $AB=AG+BG=6\sqrt{3}+20+9\approx 39.4$(m).

2. A　**提示**：由题可知，$BH\perp HE$，$AE\perp HE$，$CD=2$ m，$BC=4$ m，$\angle ABC=80°$，$\angle ACE=70°$. 因为 BC 的坡度为 $1:\sqrt{3}$，所以 $\tan\angle BCH=\frac{BH}{CH}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\angle BCH=30°$. 因为 $\angle BCH+\angle ACB+\angle ACE=180°$，所以 $\angle ACB=80°$. 因为 $\angle ABC=80°$，所以 $\angle ABC=\angle ACB$，所以 $AB=AC$. 如图，过点 A 作 $AM\perp BC$ 于点 M，所以 $CM=BM=2$ m. 因为在 Rt$\triangle ACM$ 中，$CM=2$ m，$\angle ACB=80°$，所以 $\frac{CM}{AC}=\cos\angle ACB=\cos 80°\approx 0.17$，所以 $AC=\frac{CM}{0.17}=\frac{2}{0.17}=\frac{200}{17}$(m). 因为在 Rt$\triangle ACE$ 中，$AC=\frac{200}{17}$ m，$\angle ACE=70°$，所以 $\frac{AE}{AC}=\sin\angle ACE=\sin 70°\approx 0.94$，所以 $AE=\frac{200}{17}\times 0.94=\frac{188}{17}\approx 11.1$(m)，所以 $AE+CD=11.1+2=13.1$(m).



3. $\frac{3}{5}$ **4.** $2\sqrt{5}$ **5.** $10\sqrt{3}$

6. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ **提示**:如图,数字0记为圆心O,数字6记为点A,数字7记为点B,过点O作$OD\perp AB$于点D.由图可得,线段AB的长与其他的都不相等.因为其中数字1~12对应的点均匀分布在一个圆上,所以$360^\circ\div12=30^\circ$,所以相邻两个数字与圆心O组成的圆心角为30°,所以$\angle AOB=30^\circ\times5=150^\circ$,所以$\angle OAB=\angle OBA=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle AOB)=15^\circ$.因为$OD\perp AB$,所以$\angle BOD=75^\circ$,所以$\sin\angle BOD=\sin 75^\circ=\frac{BD}{OB}$,即$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{BD}{1}$,所以$BD=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.因为$OA=OB$,$OD\perp AB$,所以$AB=2BD=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$,所以这条线段的长为$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.



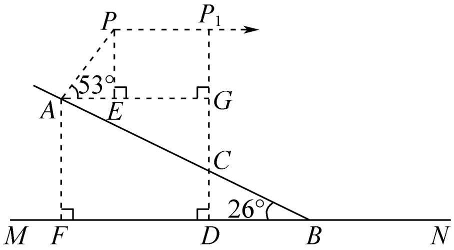
7. 解:因为$\tan\angle BAD=\frac{BD}{BA}$,所以$BD=BA\cdot\tan\angle BAD=10\times\tan 18^\circ\approx3.249$(m).所以$CD=BD-BC=2.749$ m.因为$CE\perp AD$,易得$\angle DCE+\angle CDE=90^\circ=\angle BAD+\angle CDE$,所以$\angle DCE=\angle BAD=18^\circ$.因为$\cos\angle DCE=\frac{CE}{CD}$,所以$CE=CD\cdot\cos\angle DCE\approx2.749\times0.9511\approx2.6$(m).

答:限制高度约为2.6 m.

8. 解:(1) 观察题表数据,可知y应该是x的二次函数,且经过原点(0,0).设此函数的表达式为$y=ax^2+bx(a\neq0)$.把点(1,4.5),(2,14)代入,得$\begin{cases}a+b=4.5,\\4a+2b=14,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2.5,\\b=2.\end{cases}$所以此函数的表达式为$y=2.5x^2+2x$.当$x=3$时,$y=28.5$;当$x=4$时,$y=48$,均满足题意.所以$y$与$x$之间的函数表达式为$y=2.5x^2+2x$.令$y=500$,可得$x=\frac{6\sqrt{139}-2}{5}\approx13.7$(负值已舍),所以$x$的取值范围为$0\leqslant x\leqslant\frac{6\sqrt{139}-2}{5}$.

(2) 设该运动员滑行了t s时,恰好在无人机的正下方.此时运动员滑行的距离为$AC=(2.5t^2+2t)$m,无人机飞行的距离为$PP_1=6.3t$ m.如图,过点P_1作$P_1D\perp MN$交AB于点C,交MN于点D,过点A分别作$AF\perp MN$于点F,$AG\perp P_1D$于点G,过点P作$PE\perp AG$于点E.易证四边形$AFDG$和四边形$PEGP_1$都是矩形.因为$AB=500$ m,$\angle ABF=26^\circ$,所以$GD=AF=AB\cdot\sin 26^\circ\approx220$ m.易知$\angle GAC=\angle ABF=26^\circ$.因为无人机在$AB$上空距地面292 m的点$P$处悬停,所以$PE=P_1G=292-GD=72$(m).因为$AG=AC\cdot\cos 26^\circ\approx(2.25t^2+1.8t)$m,所以$AE=AG-EG=AG-PP_1=(2.25t^2-4.5t)$m.在Rt$\triangle APE$中,因为$\frac{PE}{AE}=\tan 53^\circ\approx\frac{4}{3}$,所以$3PE=4AE$,即$3\times72=4(2.25t^2-4.5t)$.整理,得$t^2-2t-24=0$,解得$t_1=6$,$t_2=-4$(舍去).

答:该运动员滑行6 s时,她恰在无人机的正下方.



巅峰训练17 用锐角三角函数解决问题(2)

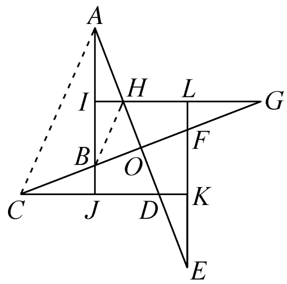
1. C

2. D **提示**:过点N作MA的垂线,垂足为D,连接NM.易证四边形$ABND$为矩形,所以$ND=AB$.又易知$\triangle BNC$为等腰直角三角形,$\triangle CNM$为等边三

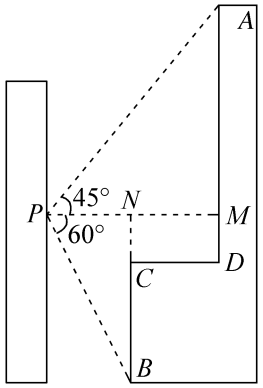
角形,所以$\angle BNC=\angle NCB=45^\circ$,$\angle MNC=60^\circ$,所以$\angle DNC=90^\circ-\angle BNC=45^\circ$. 所以$\angle MND=\angle MNC-\angle DNC=15^\circ$,所以$\cos 15^\circ=\frac{ND}{MN}$. 因为$\angle MCA=75^\circ$,所以$\angle AMC=15^\circ$,所以$\cos 15^\circ=\frac{AM}{MC}$. 所以$\frac{ND}{MN}=\frac{AM}{MC}$. 因为$\triangle CNM$为等边三角形,所以$MN=MC$. 所以$ND=AM=a$ m. 所以$AB=a$ m.

3. A　**提示:**过点E作$EM\perp AD$,垂足为M. 根据题意,可得$\angle ADE=\angle DGB=\alpha$,所以$\tan\angle ADE=\frac{3}{4}$. 易得$AD=0.8$ m. 因为$AE=DE$,所以$AM=DM=0.4$ m. 在$Rt\triangle DME$中,$EM=DM\cdot\tan\angle ADE=0.4\times\frac{3}{4}=0.3$(m),所以$DE=\sqrt{DM^2+EM^2}=\sqrt{0.4^2+0.3^2}=0.5$(m),所以$AE=DE=0.5$ m.

4. B　**提示:**如图,连接AC,BH. 由题意,可得$Rt\triangle AOB\cong Rt\triangle COD\cong Rt\triangle EOF\cong Rt\triangle GOH$,所以$OA=OC$,$\angle OAB=\angle OCD$. 因为$\angle AOC=\angle AOB=90^\circ$,所以$\triangle OAC$为等腰直角三角形. 又因为$\angle OAB=\angle OCD$,所以$\angle AJD=180^\circ-\angle ADJ-\angle OAB=180^\circ-\angle ODC-\angle OCD=90^\circ$,即$AJ\perp CD$. 又因为$CJ=DJ$,所以$AJ$垂直平分$CD$. 所以$AC=AD$,所以$\angle DAJ=\frac{1}{2}\angle CAD=\frac{1}{2}\times 45^\circ=22.5^\circ$. 同理可证$GI$垂直平分$AB$,所以$AH=BH$,所以$\angle ABH=\angle BAH=22.5^\circ$,所以$\angle OBH=OHB=45^\circ$. 设$OB=OH=a$,即$AH=BH=\sqrt{2}OB=\sqrt{2}a$,所以$\tan\angle BAO=\frac{BO}{AO}=\frac{a}{a+\sqrt{2}a}=\sqrt{2}-1$,所以$\frac{IH}{IA}=\tan\angle BAO=\sqrt{2}-1$. 设$IA=x$,则$IH=(\sqrt{2}-1)x$. 易得$IH=BJ$. 又因为$IB=IA$,所以$IA+IH=IB+BJ=IJ=\sqrt{2}$. 所以$x+(\sqrt{2}-1)x=\sqrt{2}$,解得$x=1$. 所以$AB=2IA=2$,$IH=\sqrt{2}-1$,所以$S_{\triangle ABH}=\frac{1}{2}AB\cdot IH=\sqrt{2}-1$. 又因为$\frac{S_{\triangle BOH}}{S_{\triangle ABH}}=\frac{OH}{AH}=\frac{1}{\sqrt{2}}$,所以$S_{\triangle BOH}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以$S_{\triangle AOB}=S_{\triangle ABH}+S_{\triangle BOH}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以$S_{风车}=4S_{\triangle AOB}=2\sqrt{2}$.



5. $(18\sqrt{3}-8)$　**提示:**如图,延长BC,交PM于点N. 设$PM=x$ m. 易得$NM=CD=10$ m,所以$PN=(x-10)$m. 在$Rt\triangle PMA$中,$AM=PM\cdot\tan\angle APM=x\cdot\tan 45^\circ=x$(m);在$Rt\triangle PNB$中,$BN=PN\cdot\tan\angle BPM=(x-10)\cdot\tan 60^\circ=(\sqrt{3}x-10\sqrt{3})$m. 因为$AM+BN=46$ m,所以$x+\sqrt{3}x-10\sqrt{3}=46$,解得$x=18\sqrt{3}-8$,即点$P$到$AD$的距离为$(18\sqrt{3}-8)$m.

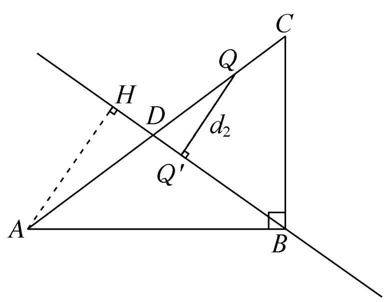


6. $\frac{3}{2}$ m　**提示:**延长OA交BC的延长线于点D. 由题意可知,$\angle ODB=60^\circ$,$\angle ACD=30^\circ$,所以$\angle CAD=180^\circ-\angle ODB-\angle ACD=90^\circ$. 在$Rt\triangle ACD$中,$AD=AC\cdot\tan\angle ACD=\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{3}{2}$(m),所以$CD=2AD=3$ m. 因为$\angle O=60^\circ$,所以$\triangle BOD$是等边三角形,所以$BD=OD=OA+AD=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$(m). 所以$BC=BD-CD=\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}$(m).

7. 解:(1) 55　**提示:**因为$\angle ABC=90^\circ$,$AB=40$ m,$BC=30$ m,所以$AC=\sqrt{30^2+40^2}=50$(m). 因为D为AC的中点,所以$CD=\frac{1}{2}AC=25$ m. 因为$BC+CD=30+25=55$(m),所以机器人乙运动的路线长为55 m.

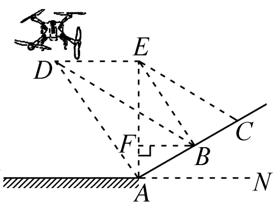
(2) 根据题意,得$v_2=\frac{55}{5.5}=10$(m/min).

因为在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=90°$，D为AC的中点，所以$BD=CD=AD=25$ m，所以$\angle ABD=\angle BAC$，$\angle DBC=\angle C$，所以$\sin\angle ABD=\sin\angle BAC=\frac{3}{5}$，$\sin\angle DBC=\sin C=\frac{4}{5}$. 当点$Q$在$BC$上时，$d_2=BQ\cdot\sin\angle DBC=10t\cdot\frac{4}{5}=8t$，所以$8t_1=16$，解得$t_1=2$. 当点$Q$在$CD$上时，如图，过点$A$作$AH\perp BD$，垂足为$H$，则$AH=AB\cdot\sin\angle ABD=40\times\frac{3}{5}=24$(m). 因为$\angle CDB=\angle ADH$，所以$\sin\angle CDB=\sin\angle ADH=\frac{AH}{AD}=\frac{24}{25}$，所以$d_2=QD\cdot\sin\angle CDB=(55-10t)\times\frac{24}{25}=\left(\frac{264}{5}-\frac{48}{5}t\right)$m，所以$\frac{264}{5}-\frac{48}{5}t_2=16$，解得$t_2=\frac{23}{6}$，所以$t_2-t_1=\frac{23}{6}-2=\frac{11}{6}$.



(3) 当$t=5.5$时，$d_1=7.5$ m，此时，$BP=\frac{PP'}{\sin\angle ABD}=\frac{7.5}{\frac{3}{5}}=12.5$(m)，所以$AP=AB-BP=40-12.5=27.5$(m)，所以$v_1=\frac{AP}{5.5}=\frac{27.5}{5.5}=5$(m/min)，所以$d_1=BP\cdot\sin\angle ABD=(40-5t)\times\frac{3}{5}=(24-3t)$m. 当点$Q$在$BC$上时，由$d_1=d_2$，得$24-3t=8t$，解得$t=\frac{24}{11}$；当点$Q$在$CD$上时，由$d_1=d_2$，得$24-3t=\frac{264}{5}-\frac{48}{5}t$，解得$t=\frac{48}{11}$. 所以当$d_1=d_2$时，$t=\frac{24}{11}$或$t=\frac{48}{11}$.

8. 解：如图，连接DE，AE，过点B作$BF\perp AE$于点F. 易证$BF\parallel MN$，所以$\angle BAN=\angle ABF$. 因为$BC=\frac{6}{7}AB$，所以$\frac{BC}{AB}=\frac{6}{7}$. 因为$AD\parallel BE$，所以$\angle DAB=\angle EBC$. 因为$DB\parallel CE$，所以$\angle DBA=\angle ECB$，所以$\triangle DAB\backsim\triangle EBC$，所以$\frac{AD}{BE}=\frac{AB}{BC}=\frac{7}{6}$. 因为$AD\parallel BE$，所以$\angle DAE=\angle BEA$. 又因为$\angle DEA=\angle BFE=90°$，所以$\triangle ADE\backsim\triangle EBF$，所以$\frac{AD}{EB}=\frac{DE}{BF}=\frac{AE}{EF}$，所以$\frac{7}{6}=\frac{2.5}{BF}=\frac{6}{EF}$，所以$BF=\frac{15}{7}$ m，$EF=\frac{36}{7}$ m，所以$AF=AE-EF=\frac{6}{7}$ m. 在Rt$\triangle ABF$中，$\tan\angle ABF=\frac{AF}{BF}=\frac{\frac{6}{7}}{\frac{15}{7}}=\frac{2}{5}$，所以$\tan\angle BAN=\tan\angle ABF=\frac{2}{5}$.



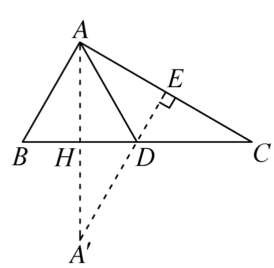
第7章综合练(1)

1. D **提示**：过点E作$EF/\!/CD$交AD于点F. 由题意可知，$AB=AC$，$AD\perp BC$，所以$\angle B=\angle C$，所以$\frac{AD}{AC}=\sin C=\sin B=\frac{4}{5}$. 设$AD=4x$，则$AC=5x$，$CD=3x$. 因为$AE:EC=2:3$，所以$\frac{AE}{AC}=\frac{AE}{AE+EC}=\frac{2}{5}$. 因为$EF/\!/CD$，所以$\frac{AF}{AD}=\frac{EF}{CD}=\frac{AE}{AC}=\frac{2}{5}$. 所以$AF=\frac{8}{5}x$，$EF=\frac{6}{5}x$. 所以$DF=AD-AF=\frac{12}{5}x$. 所以

$\tan\angle ADE=\frac{EF}{DF}=\frac{1}{2}$.

2. D　**提示:**过点 C 作 $CE\perp AD$ 交 AD 的延长于点 E. 因为 $\tan B=\frac{5}{3}$, 即 $\frac{AD}{AB}=\frac{5}{3}$, 所以可设 $AD=5x$, 则 $AB=3x$. 因为 $\angle CDE=\angle BDA$, $\angle CED=\angle BAD$, 所以 $\triangle CDE\backsim\triangle BDA$, 所以 $\frac{CE}{BA}=\frac{DE}{DA}=\frac{CD}{BD}=\frac{1}{2}$, 所以 $CE=\frac{3}{2}x$, $DE=\frac{5}{2}x$. 所以 $AE=AD+DE=\frac{15}{2}x$. 所以 $\tan\angle CAD=\frac{CE}{AE}=\frac{1}{5}$.

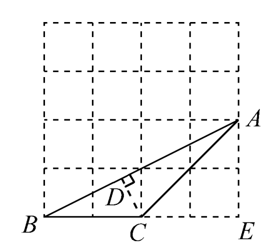
3. B　**提示:**如图,作点 A 关于 BC 的对称点 A', 连接 AA', $A'D$, 过点 D 作 $DE\perp AC$ 于点 E. 因为 $\angle BHA=90^\circ$, $\angle B=60^\circ$, 所以 $\angle BAH=30^\circ$. 又因为 $AB=2$, 所以 $BH=\frac{1}{2}AB=1$, $AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{3}$, 所以 $AA'=2AH=2\sqrt{3}$. 易知 $\angle C=30^\circ$, 所以 $DE=\frac{1}{2}CD$, 即 $2DE=CD$. 因为点 A 与点 A' 关于 BC 对称, 所以 $AD=A'D$, 所以 $2AD+CD=2(AD+DE)=2(A'D+DE)$, 所以当 A', D, E 三点在同一直线上时, $A'D+DE$ 的最小值等于 $A'E$ 的长. 易得 $\angle A'AE=60^\circ$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AA'E$ 中, $A'E=AA'\cdot\sin\angle A'AE=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$, 所以 $A'D+DE$ 的最小值为 3, 所以 $2AD+CD$ 的最小值为 6.



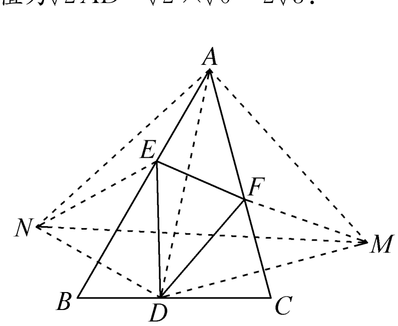
4. $\frac{6}{5}$　**提示:**延长 AD, BC 交于点 E. 因为在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中, $\tan A=\frac{BE}{AB}=\frac{4}{3}$, $AB=3$, 所以 $BE=4$. 所以 $AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=5$, $CE=2$. 易证 $\triangle ABE\backsim\triangle CDE$, 所以 $\frac{CD}{AB}=\frac{CE}{AE}$, 即 $\frac{CD}{3}=\frac{2}{5}$, 所以 $CD=\frac{6}{5}$.

5. $4\sqrt{3}+3$　**提示:**过点 B 作 $BF\perp DE$ 于点 F. 在 $\mathrm{Rt}\triangle CBD$ 中, $CD=BC\cdot\cos\angle BCD=10\times\frac{3}{5}=6$. 由勾股定理, 得 $BD=\sqrt{BC^2-CD^2}=8$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BCE$ 中, 因为 $BC=10$, $\angle BCE=30^\circ$, 所以 $BE=5$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BDF$ 中, 因为 $\angle BDF=\angle BCE=30^\circ$, $BD=8$, 所以 $DF=BD\cdot\cos\angle BDF=4\sqrt{3}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BEF$ 中, 因为 $\angle BEF=\angle BCD$, 所以 $\cos\angle BEF=\cos\angle BCD$, 即 $\frac{EF}{BE}=\frac{3}{5}$. 又因为 $BE=5$, 所以 $EF=3$. 所以 $DE=DF+EF=4\sqrt{3}+3$.

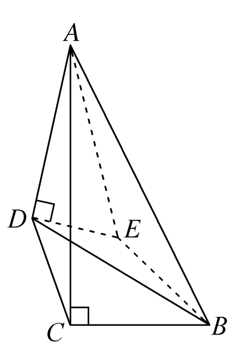
6. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$　**提示:**如图,过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D. 设每个小正方形的边长为 1. 由勾股定理, 得 $AB=\sqrt{AE^2+BE^2}=2\sqrt{5}$, $AC=\sqrt{CE^2+AE^2}=2\sqrt{2}$. 因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}BC\cdot AE$, 所以 $CD=\frac{BC\cdot AE}{AB}=\frac{2\times2}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 由勾股定理, 得 $AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$. 所以 $\cos\angle BAC=\frac{AD}{AC}=\frac{\frac{6\sqrt{5}}{5}}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.



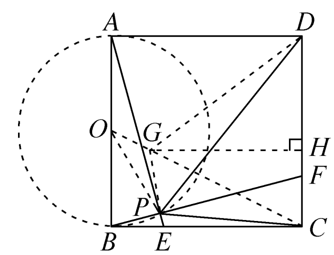
7. $2\sqrt{3}$　**提示:**如图,作点 D 关于 AB, AC 的对称点 N, M, 连接 AM, AN, EN, FM, MN, AD. 因为 $\angle MAN=2\angle BAC=90^\circ$, $AN=AD=AM$, 所以 $\triangle AMN$ 是等腰直角三角形. 因为 $\triangle DEF$ 的周长为 $DE+EF+DF=NE+EF+FM\geqslant MN=\sqrt{2}AN=\sqrt{2}AD$, 所以当 $AD\perp BC$ 时, AD 取得最小值, 即 $\triangle DEF$ 的周长取得最小值. 又因为 $\angle B=60^\circ$, $AB=2\sqrt{2}$, 所以 $AD_{最小值}=AB\cdot\sin60^\circ=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}$, 所以 $\triangle DEF$ 周长的最小值为 $\sqrt{2}AD=\sqrt{2}\times\sqrt{6}=2\sqrt{3}$.



8. $\sqrt{5}+\frac{3}{2}$ **提示**：因为 $\angle ACB=90^\circ$，$\tan\angle ABC=2$，所以 $\frac{AC}{BC}=2$. 设 $BC=a$，则 $AC=2a$. 由勾股定理，得 $AB=\sqrt{5}a$，所以 $\cos\angle BAC=\frac{AC}{AB}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 如图，作 $\angle ADE=90^\circ$，且 $DE=\frac{1}{2}AD=\frac{3}{2}$，连接 AE，BE. 由 $DE=\frac{1}{2}AD=\frac{3}{2}$，可知 $\tan\angle DAE=\frac{DE}{AD}=\frac{1}{2}$. 因为 $\tan\angle BAC=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{2}$，所以 $\tan\angle BAC=\tan\angle DAE$，即 $\angle BAC=\angle DAE$，则 $\angle BAC-\angle CAE=\angle DAE-\angle CAE$，所以 $\angle EAB=\angle DAC$. 又因为 $\angle BAC=\angle DAE$，所以 $\cos\angle DAE=\cos\angle BAC=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，即 $\frac{AD}{AE}=\frac{AC}{AB}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 所以 $\triangle ADC\backsim\triangle AEB$，所以 $\frac{DC}{EB}=\frac{AC}{AB}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 因为 $DC=2$，所以 $EB=\sqrt{5}$，所以 $BD\leqslant BE+DE=\sqrt{5}+\frac{3}{2}$. 当 B,E,D 三点在同一直线上时，BD 取得最大值，最大值为 $\sqrt{5}+\frac{3}{2}$.



9. 2 **提示**：因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $AB=BC=CD=2$，$\angle ABC=\angle BCD=90^\circ$. 又因为 $BE=CF$，所以 $\triangle ABE\cong\triangle BCF$(SAS)，所以 $\angle BAE=\angle CBF$，所以 $\angle BAE+\angle ABP=\angle CBF+\angle ABP=90^\circ$，所以 $\angle APB=90^\circ$. 如图，记 AB 的中点为 O，则点 P 在以点 O 为圆心，AB 为直径的圆上运动. 连接 OP，OC. 由勾股定理，得 $OC=\sqrt{BC^2+OB^2}=\sqrt{5}$. 在 OC 上取点 G，使 $OG=\frac{\sqrt{5}}{5}$，则 $CG=\frac{4\sqrt{5}}{5}$. 连接 PG，GD. 因为 $\frac{OG}{OP}=\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{OP}{OC}$，$\angle GOP=\angle POC$，所以 $\triangle GOP\backsim\triangle POC$，所以 $\frac{PG}{CP}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，即 $PG=\frac{\sqrt{5}}{5}PC$，所以 $PD+\frac{\sqrt{5}}{5}PC=PD+PG$. 所以当 G,P,D 三点共线时，$PD+\frac{\sqrt{5}}{5}PC$ 的值最小，最小值为 GD 的长. 过点 G 作 $GH\perp CD$ 于点 H. 所以 $GH\parallel BC$，所以 $\angle CGH=\angle OCB$，所以 $\sin\angle CGH=\sin\angle OCB$，所以 $\frac{CH}{CG}=\frac{OB}{OC}$，即 $\frac{CH}{\frac{4\sqrt{5}}{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$，所以 $CH=\frac{4}{5}$，所以 $DH=\frac{6}{5}$. 由勾股定理，得 $GH=\sqrt{CG^2-CH^2}=\frac{8}{5}$. 由勾股定理，得 $DG=\sqrt{DH^2+GH^2}=2$.



10. 解：因为甲的飞行速度是 $3\sqrt{2}$ m/s，所以 $AC=6\sqrt{2}$ m，所以 $AC=AB$. 又因为 $\angle BAC=60^\circ$，所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形，所以 $\angle BCA=60^\circ$. 由题意，得 $\angle BNC=\angle MCN=75^\circ$，$\angle DBN=15^\circ$，所以 $\angle BDC=\angle BNC-\angle DBN=60^\circ$，$\angle BCD=180^\circ-\angle MCN-\angle BCA=45^\circ$. 过点 B 作 CD 的垂线，垂足为 E，则 $\triangle BEC$ 是等腰直角三角形. 因为 $BC=AB=6\sqrt{2}$ m，所以 $BE=EC=\frac{\sqrt{2}}{2}BC=6$ m，所以 $BD=\frac{BE}{\sin\angle BDE}=\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4\sqrt{3}$(m). 所以乙无人机的飞行速度是 $4\sqrt{3}\div2=2\sqrt{3}$(m/s).

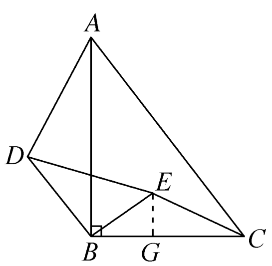
答：乙无人机的飞行速度是 $2\sqrt{3}$ m/s.

11. 解：(1) $\sqrt{2}BD=CE$. 证明如下：

因为 $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}$. 根据旋转的性质，可得 $\angle BAD=\angle CAE$，所以 $\triangle ABD\backsim\triangle ACE$. 易得 $AC=\sqrt{2}AB$，所以 $\frac{BD}{CE}=\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\sqrt{2}BD=CE$.

(2) 因为$\angle ADE=\angle ABC=90^{\circ}$，所以当$DE$所在直线经过点$B$时，$AD\perp BE$. 根据勾股定理，可得$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$. 由(1)，可得$\dfrac{BD}{CE}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\dfrac{2\sqrt{3}}{CE}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以$CE=2\sqrt{6}$.

(3) 如图，过点E作$EG\perp BC$于点G. 根据题意，可得$BE=\dfrac{1}{2}BC=3$，$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=10$，所以$\sin\angle CAB=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{3}{5}$. 因为$AC/\!/BD$，所以$\angle CAB=\angle ABD$. 根据旋转的性质，可得$\angle ABD=\angle EBG$，所以$\angle CAB=\angle EBG$，所以$\sin\angle EBG=\sin\angle CAB=\dfrac{3}{5}$，所以$EG=BE\cdot\sin\angle EBG=3\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{9}{5}$，所以$S_{\triangle ECB}=\dfrac{1}{2}BC\cdot EG=\dfrac{1}{2}\times6\times\dfrac{9}{5}=\dfrac{27}{5}$.



第 7 章综合练(2)

1. B

2. B 提示：因为在 Rt$\triangle ABC$中，$\angle C$为直角，所以$\sin A=\dfrac{BC}{AB}=\cos B$，$\sin B=\dfrac{AC}{AB}=\cos A$，所以$\sin A+\cos A=\cos B+\sin B$. 又因为$x=\sin A+\cos A$，$y=\sin B+\cos B$，所以$x=y$.

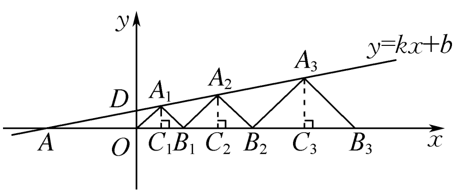
3. D 提示：过点A作$AN\perp DF$于点N. 因为四边形$ABCD$是菱形，所以$AB=CD=AD$，$\angle ABE=\angle D$. 设$AD=4x$. 因为F是CD的中点，所以$DF=FC=2x$. 根据翻折的性质，可知$AB=AF$，所以$\triangle AFD$是等腰三角形. 因为$AN\perp DF$，所以AN平分DF，则有$DN=NF=x$. 在 Rt$\triangle AND$中，由勾股定理，可得$AN=\sqrt{AD^2-DN^2}=\sqrt{15}x$，所以$\tan D=\dfrac{AN}{DN}=\dfrac{\sqrt{15}x}{x}=\sqrt{15}$，所以$\tan\angle ABE=\sqrt{15}$.

4. 3.8 m 提示：延长BA，交PD于点E. 由题意，得$BE\perp PC$. 设$PE=x$ m，则$AE=x$ m. 因为在 Rt$\triangle BPE$中，$\tan 37^{\circ}=\dfrac{PE}{BE}$，$\sin 37^{\circ}=\dfrac{PE}{PB}$，所以$BE=\dfrac{PE}{\tan 37^{\circ}}\approx\dfrac{4}{3}x$ m，$PB=\dfrac{PE}{\sin 37^{\circ}}\approx\dfrac{5}{3}x$ m. 因为$AB=BE-AE$，即$1=\dfrac{4}{3}x-x$，解得$x=3$. 所以$PB=\dfrac{5}{3}x=5$(m). 在 Rt$\triangle APE$中，$PA=\sqrt{2}PE=\sqrt{2}\times3\approx4.23$(m). 因为绳子总长不变，所以$CD=PB-PA=5-4.23=0.77$(m)，所以$PD=PE+DE=PE+(AM-CD)=3+(1.6-0.77)\approx3.8$(m).

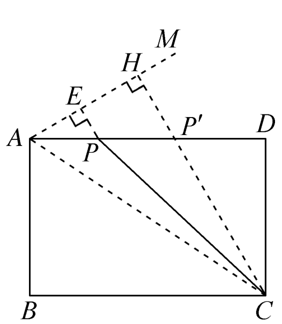
5. $(8\sqrt{3}-5.5)$ 提示：过点B作$BE\perp AC$交CA的延长线于点E，延长DG交CA的延长线于点H，则$\triangle ABE$是直角三角形，四边形$BEHG$是矩形. 因为$i=\dfrac{BE}{AE}=\dfrac{4}{3}$，$AB=8$ m，所以$BE=6.4$ m，$AE=4.8$ m. 因为$DG=1.6$ m，$BG=0.7$ m，所以$DH=DG+GH=DG+BE=1.6+6.4=8$(m)，$AH=AE+EH=AE+BG=4.8+0.7=5.5$(m). 在Rt$\triangle CDH$中，因为$\angle C=\angle FDC=30^{\circ}$，$DH=8$ m，$\dfrac{DH}{CH}=\tan 30^{\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以$CH=8\sqrt{3}$ m，所以$CA=CH-AH=(8\sqrt{3}-5.5)$m.

6. $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$ 提示：因为点$A_1(1,1)$，$A_2\left(\dfrac{7}{2},\dfrac{3}{2}\right)$在直线$y=kx+b$上，所以$\begin{cases}k+b=1,\\ \dfrac{7}{2}k+b=\dfrac{3}{2},\end{cases}$解得$\begin{cases}k=\dfrac{1}{5},\\ b=\dfrac{4}{5}.\end{cases}$所以该直线的函数表达式为$y=\dfrac{1}{5}x+\dfrac{4}{5}$. 如图，设直线$y=\dfrac{1}{5}x+\dfrac{4}{5}$与$x$轴、$y$轴的交点分别为$A$，$D$. 当$x=0$时，$y=\dfrac{4}{5}$，当$y=0$时，$\dfrac{1}{5}x+\dfrac{4}{5}=0$，解得$x=-4$. 所以点$A$，$D$的坐标分别为$(-4,0)$，$\left(0,\dfrac{4}{5}\right)$. 所以$\tan\angle DAO=\dfrac{DO}{AO}=\dfrac{\frac{4}{5}}{4}=\dfrac{1}{5}$. 作$A_1C_1\perp x$轴于点$C_1$，$A_2C_2\perp x$轴于点$C_2$，$A_3C_3\perp x$轴于点$C_3$. 因为点$A_1(1,1)$，$A_2\left(\dfrac{7}{2},\dfrac{3}{2}\right)$，所以$OB_2=OB_1+B_1B_2=2\times1+2\times\dfrac{3}{2}=2+3=5$. 易

知 $\tan\angle DAO=\frac{A_3C_3}{AC_3}$，即 $\frac{A_3C_3}{4+5+B_2C_3}=\frac{1}{5}$. 因为 $\triangle B_2A_3B_3$ 是等腰直角三角形，所以 $A_3C_3=B_2C_3$. 所以 $A_3C_3=\frac{9}{4}=\left(\frac{3}{2}\right)^2$. 同理可得，第四个等腰直角三角形的高 $A_4C_4=\frac{27}{8}=\left(\frac{3}{2}\right)^3$. 依此类推，点 A_n 的纵坐标是 $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$.



7. $9+6\sqrt{3}$ **提示**：如图，作 $\angle DAM=30°$，过点 P 作 $PE\perp AM$，垂足为 E，过点 C 作 $CH\perp AM$，垂足为 H，交 AD 于点 P'，所以 $PE=\frac{1}{2}PA$，$PC+\frac{1}{2}PA=PC+PE$. 因为 $PC+PE\geqslant CH$，所以当 C，P，E 三点在同一直线上时，$PC+PE$ 的值最小，最小值为 CH 的长. 因为 $\angle AP'H=\angle CP'D$，且 $\angle P'CD+\angle CP'D=90°=\angle P'AH+\angle AP'H$，所以 $\angle P'CD=\angle P'AH=30°$. 因为 $CD=AB=12$，所以 $P'C=\frac{CD}{\cos\angle P'CD}=\frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=8\sqrt{3}$，$P'D=CD\cdot\tan\angle P'CD=12\times\frac{\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}$，所以 $AP'=AD-P'D=18-4\sqrt{3}$，所以 $P'H=\frac{1}{2}AP'=9-2\sqrt{3}$，所以 $CH=P'H+P'C=9-2\sqrt{3}+8\sqrt{3}=9+6\sqrt{3}$，即 $PC+\frac{1}{2}PA$ 的最小值为 $9+6\sqrt{3}$.



8. 解：(1) 8　16

(2) 如图 1，易得 $\angle MON=2\angle MAN=90°$，$\triangle MON$ 是等腰直角三角形. 因为 $MN=2x$，所以 $OH=MH=NH=x$，则 $OM=ON=\sqrt{2}x$. 因为 $AB\perp MN$，所以 $AO+OH\geqslant AH\geqslant AB$，当 B 为 MN 的中点时，等号同时成立. 所以 $\sqrt{2}x+x\geqslant 4$，解得 $x\geqslant 4(\sqrt{2}-1)$. 所以 $S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}AB\cdot MN\geqslant 16\sqrt{2}-16$. 所以 $\triangle AMN$ 面积的最小值为 $16\sqrt{2}-16$.

(3) $\frac{m^2\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ (或 $\frac{m^2}{\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\tan\alpha}}$ 或 $\frac{m^2\sin\alpha\tan\alpha}{\sin\alpha+\tan\alpha}$) **提示**：如图 1，设 $OA=OM=r$. 易得 $MN=2MH$. 因为 $\angle MON=2\angle MAN=2\alpha$，$OM=ON=r$，所以 $\angle MOH=\frac{1}{2}\angle MON=\alpha$，所以 $OH=r\cdot\cos\alpha$，$MH=r\cdot\sin\alpha$. 因为 $OA+OH\geqslant AB$，所以 $r+r\cdot\cos\alpha\geqslant m$，所以 $r\geqslant\frac{m}{1+\cos\alpha}$，所以 $S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}AB\cdot MN=m\cdot MH=mr\cdot\sin\alpha\geqslant\frac{m^2\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$. 所以 $\triangle AMN$ 面积的最小值为 $\frac{m^2\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

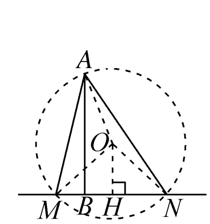


图 1

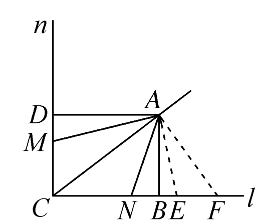


图 2

(4) 如图 2，过点 A 作 $AE\perp AM$，$AF\perp AC$，分别交直线 l 于点 E，F. 易证 $\triangle ADM\backsim\triangle ABE$，可得 $\frac{AM}{AE}=\frac{AD}{AB}=\frac{3}{2}$，$\angle AMD=\angle AEB$. 易得 $\angle AMC=\angle AEF$，$\angle MAC=\angle EAF$，所以 $\triangle AMC\backsim\triangle AEF$，所以 $\frac{S_{\triangle AMC}}{S_{\triangle AEF}}=\left(\frac{AM}{AE}\right)^2=\frac{9}{4}$，所以 $S_{\triangle AEF}=\frac{4}{9}S_{\triangle AMC}$. 由勾股定理，得 $AC=2\sqrt{13}$ m. 因为 $\frac{AC}{CF}=\cos\angle ACF=\frac{CB}{AC}$，即 $\frac{2\sqrt{13}}{CF}=\frac{6}{2\sqrt{13}}$，所以 $CF=\frac{26}{3}$ m，所以 $S_{\triangle ACF}=\frac{1}{2}CF\cdot AB=\frac{52}{3}$ m^2. 设 $\angle MAN=$

α，则$\angle EAN=90°-\alpha$. 由题目条件，易得$\sin\angle EAN=\frac{3}{5}$，$\tan\angle EAN=\frac{3}{4}$. 当$S_{\triangle ANE}$最小时，由（3）可知，最小值为$\frac{4^2\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}}{\frac{3}{5}+\frac{3}{4}}=\frac{16}{3}$时，$S_{\triangle AEF}+S_{\triangle ACN}=\frac{4}{9}S_{\triangle AMC}+S_{\triangle ACN}$最大，最大值为$S_{\triangle ACF}-\frac{16}{3}=12(\text{m}^2)$. 所以$4S_1+9S_2=9\left(\frac{4}{9}S_{\triangle AMC}+S_{\triangle ACN}\right)$的最大值为$9\times12=108(\text{m}^2)$.

第 8 章　统计和概率的简单应用

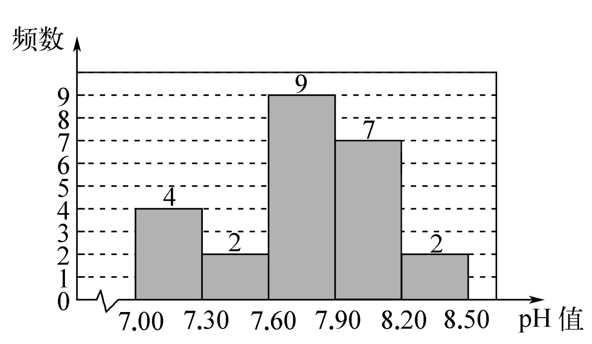
巅峰训练 18　中学生的视力情况调查、货比三家、统计分析帮你做预测

1. D　**2.** 800

3. 32　**提示：**因为中间1个小长方形的面积等于其他10个小长方形面积之和的$\frac{1}{4}$，所以中间1个小长方形的面积占总面积的$\frac{1}{4+1}=\frac{1}{5}$，即中间一组的频率为$\frac{1}{5}$. 因为数据有160个，所以中间一组的频数为$160\times\frac{1}{5}=32$.

4. 解：（1）由题意，得$a=24-4-2-9-2=7$. 补全频数分布直方图如下：

乙基地水体 pH 值数据的频数分布直方图



（2）7.67　7.79

（3）甲基地水体的 pH 值更稳定. 理由如下：

因为甲基地水体的 pH 值的方差比乙基地水体的 pH 值的方差小，所以甲基地水体的 pH 值更稳定.

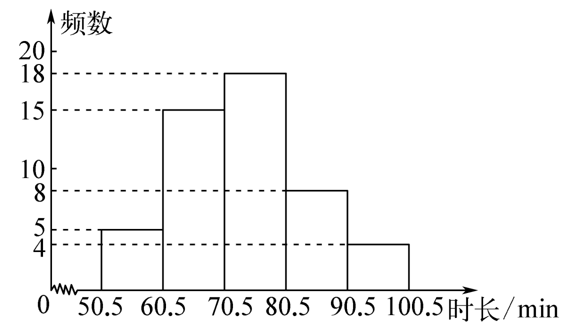
（4）因为甲基地水体的 pH 值的日变化量为$8.26-7.27=0.99<1$，乙基地水体的 pH 值的日变化量为$8.21-7.11=1.1>1$，所以甲基地的 pH 值符合要求，乙基地的 pH 值不符合要求.

5. 解：（1）抽样调查

（2）18　74.5

（3）补全频数分布直方图如下：

A 校课后书面作业时长的频数分布直方图



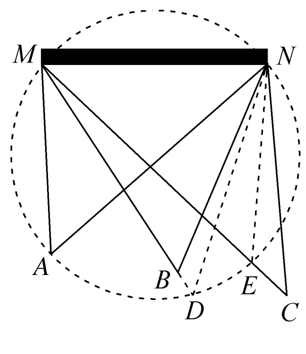
（4）A

（5）$\frac{50\times2-4-4}{50\times2}\times1\,000=920$. 所以估计两校1 000名九年级学生中，能在90 min内完成当日课后书面作业的学生人数为920.

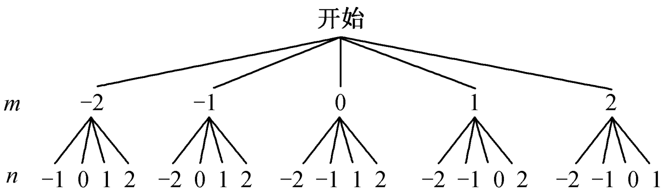
巅峰训练 19　抽签方法合理吗、概率帮你做估计、收取多少保险费才合理

1. C　**2.** B

3. B　**提示：**如图，延长MB交圆于点D，设MC与圆交于点E，连接DN，EN，则$\angle MAN=\angle MDN=\angle MEN$. 根据外角的性质，可得$\angle MBN=\angle MDN+\angle BND$，$\angle MEN=\angle MCN+\angle CNE$，所以$\angle MBN>\angle MAN>\angle MCN$，所以进球概率最大的是点$B$处.



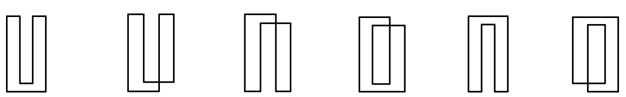
4. A　**提示**：画树状图如下：



由树状图可知，在$-2,-1,0,1,2$这五个数中任取两数m,n，一共有20种等可能的结果，其中m或n取到0的有8种，所以顶点在坐标轴上的概率为$\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$.

5. $\frac{3}{10}$　6. 8

7. $\frac{2}{3}$　**提示**：由题意可知，绳子一端的四个头两两相接有3种可能的情况，同理，另一端的四个尾两两相接也有3种可能的情况，所以四根绳子共有9种连接方法，其中有6种能连成一个圈，如图所示．所以四条绳子依次首尾相接，恰好连成一个圈的概率为$\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.



8. $\frac{3}{7}$　**提示**：因为$\frac{2}{x-1}+\frac{x+m}{1-x}=2$，所以$2-(x+m)=2(x-1)$，解得$x=\frac{4-m}{3}$．因为关于$x$的方程$\frac{2}{x-1}+\frac{x+m}{1-x}=2$的解为正数，所以$\frac{4-m}{3}>0$，且$\frac{4-m}{3}\neq1$，解得$m<4$且$m\neq1$．因为关于$x$的不等式组$\begin{cases}2x+3>5,\\x-m<0\end{cases}$无解，所以$m\leqslant1$．所以$m$的取值可能为$-1,-2,0$．所以所求概率是$\frac{3}{7}$.

9. **解**：(1) 0.50　0.5

(2) 盒子里白球的个数为$40\times0.5=20$，黑球的个数为$40-20=20$.

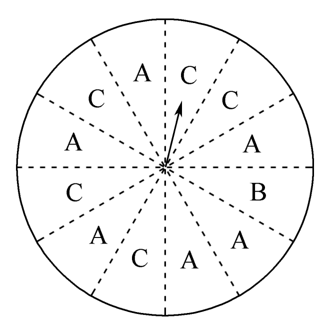
(3) 设需要再往盒子里放入x个白球．根据题意，得$\frac{20+x}{40+x}=\frac{3}{5}$，解得$x=10$．所以需要再往盒子里放入10个白球.

10. $\frac{1}{4}$　**提示**：因为D是BC的中点，所以$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD}$．因为$E$是$AD$的中点，所以$S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABD}$，$S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ACD}$．所以$S_{\triangle BCE}=S_{\triangle BDE}+S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}(S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD})=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$．因为$F$是$CE$的中点，所以$S_{\triangle BEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle BCE}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$．所以弹丸击中阴影区域的概率是$\frac{1}{4}$.

11. **解**：(1) $\frac{7}{12}$

(2) 因为$360=200\times0.9+200\times0.9=200+200\times0.8$，所以小明这两次获得优惠的情况为两次都打九折或一次不打折，一次打八折.

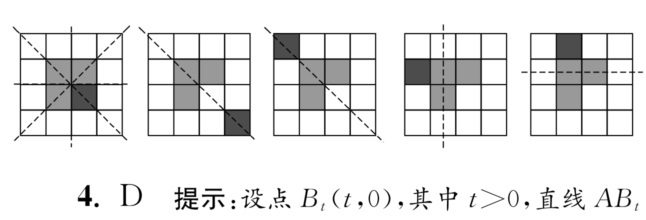
(3) 因为打九折的概率是$\frac{1}{2}$，打八折的概率是$\frac{1}{12}$，不打折的概率是$\frac{5}{12}$，所以转盘中字母“A”有6个，字母“B”有1个，字母“C”有5个，如图所示(字母排列分布不唯一).



第8章综合练

1. D　2. A

3. B　**提示**：根据轴对称图形的概念，知轴对称图形两部分沿对称轴折叠后可重合．题图中白色的小正方形有13个，而任选1个涂上阴影后仍是一个轴对称图形的有5种情况，如图所示．所以所求概率是$\frac{5}{13}$.



4. D　**提示**：设点$B_t(t,0)$，其中$t>0$，直线AB_t的函数表达式为$y=kx+4$，将点$B_t(t,0)$代入，得$0=tk+4$，解得$k=-\frac{4}{t}$，所以直线AB_t的函数表达式为

$y=-\frac{4}{t}x+4$. 联立，得$\frac{4}{x}=-\frac{4}{t}x+4$. 整理，得 $x^2-tx+t=0$. 因为该直线与反比例函数 $y=-\frac{4}{x}(x>0)$的图像有两个交点，所以根的判别式$(-t)^2-4t=t^2-4t=t(t-4)>0$. 因为 $t>0$，所以 $t-4>0$，解得 $t>4$. 所以直线 AB_5，AB_6 符合题意. 所以该直线与反比例函数 $y=\frac{4}{x}(x>0)$的图像有两个交点的概率是$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

5. ②③④ **提示**：因为三条线段要能够组成一个三角形，必须满足“两边之和大于第三边，两边之差小于第三边”的条件，所以①是随机事件；因为一年最多只有 366 天，所以 400 人中至少有 2 人的生日在同一天，所以②是必然事件；由绝对值的性质，得$|a|\geqslant 0$，所以③是必然事件；因为三角形的内角和是 180°，所以④是不可能事件. 因为必然事件和不可能事件都属于确定事件，所以确定事件有②③④.

6. 9 **提示**：由条形统计图可知，中间的两个数据分别是 9 环、9 环，所以射击成绩的中位数是$(9+9)\div 2=9$(环).

7. $\frac{1}{5}$ **提示**：因为随机地闭合开关 S_1，S_2，S_3，S_4，S_5 中的三个共有 10 种等可能的结果，能够使灯泡 L_1，L_2 同时发光有 2 种结果(闭合开关 S_1，S_2，S_4 或闭合开关 S_1，S_2，S_5)，所以所求概率是$\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$.

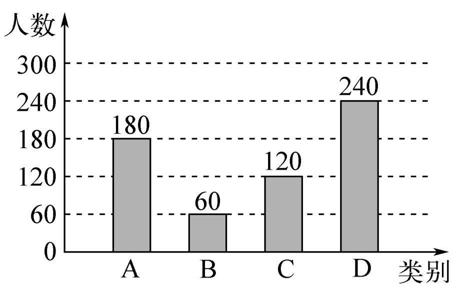
8. $\frac{\pi}{6}$ **提示**：因为 $AB=15$，$BC=12$，$AC=9$，所以 $AB^2=BC^2+AC^2$，所以$\triangle ABC$ 为直角三角形，且$\angle C=90°$. 所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}\times 9\times 12=54$. 设圆心为点 O，与边 AC，BC，AB 的切点分别为 D，E，F，连接 OA，OB，OC，OD，OE，OF，则 $OD\perp AC$，$OE\perp BC$，$OF\perp AB$. 设$\odot O$ 的半径为 r，则 $OD=OE=OF=r$. 因为 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle OAC}+S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}AC\cdot r+\frac{1}{2}BC\cdot r+\frac{1}{2}AB\cdot r$，所以 $r=\frac{2S_{\triangle ABC}}{AC+BC+AB}=\frac{2\times 54}{9+12+15}=3$. 所以 $S_{\odot O}=\pi r^2=9\pi$. 所以小鸟落在花圃上的概率为$\frac{9\pi}{54}=\frac{\pi}{6}$.

9. $\frac{2}{5}$ **提示**：因为使关于 x 的一元二次方程 $x^2-2(a-1)x+a(a-3)=0$ 有两个不相等的实数根，所以$[-2(a-1)]^2-4a(a-3)>0$，解得 $a>-1$. 因为以 x 为自变量的二次函数 $y=x^2-(a^2+1)x-a+2$ 的图像不经过点$(1,0)$，所以 $1^2-(a^2+1)-a+2\neq 0$. 整理，得 $a^2+a-2\neq 0$，所以 $a\neq 1$ 且 $a\neq -2$. 所以满足条件的 a 的值只有 0 和 2. 所以所求概率是$\frac{2}{5}$.

10. $\frac{1}{9}$ **提示**：若第一次摸到红球，则两次摸出的球都是白球的概率为 $P'=0$；若第一次摸到白球，根据题意，第一次和第二次摸出白球的概率都是$\frac{1}{3}$，则两次摸出的球都是白球的概率为 $P''=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$. 故所求概率为 $0+\frac{1}{9}=\frac{1}{9}$.

11. 解：(1) 600　108°

(2) $600-(180+60+240)=120$(人)，补全条形统计图如下：



(3) 估计最喜欢兴趣爱好类的学生有 $1\ 800\times\frac{240}{600}=720$(人).

(4) 列表如下：

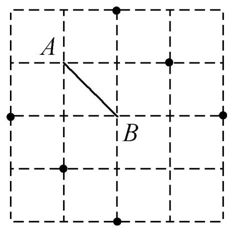
类别	B	C	D
B	(B,B)	(C,B)	(D,B)
C	(B,C)	(C,C)	(D,C)
D	(B,D)	(C,D)	(D,D)

由表可知，共有 9 种等可能的结果，其中两位同学选到同一类别的有(B,B)，(C,C)，(D,D)，共 3 种. 所以两位同学选到同一类别的概率为$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

期末综合练(1)

1. C **提示**：如图，因为在格点中任意放置点 C，共有 25 种等可能的结果，恰好能使$\triangle ABC$ 的面积为 1 的有

6 种情况，所以恰好能使$\triangle ABC$的面积为 1 的概率为$\frac{6}{25}$.



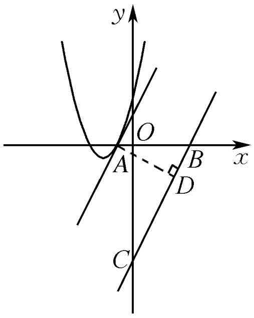
2. D　**提示**：连接 AP，QB. 由网格图，易知$\angle PAM=\angle QBM=90^\circ$. 因为$\angle PMA=\angle QMB$，所以$\triangle PAM\backsim\triangle QBM$，所以$\frac{AP}{BQ}=\frac{AM}{BM}$. 因为 $AP=3\sqrt{2}$，$BQ=\sqrt{2}$，$AB=2\sqrt{2}$，所以$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{AM}{2\sqrt{2}-AM}$，所以 $AM=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 所以 $\tan\angle QMB=\tan\angle PMA=\frac{AP}{AM}=\frac{3\sqrt{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}}=2$.

3. D　**提示**：因为函数图像开口方向向上，所以$a>0$. 因为对称轴在原点右侧，所以$-\frac{b}{2a}>0$，即 $b<0$. 因为抛物线与 y 轴的交点在 y 轴负半轴上，所以 $c<0$. 所以 $abc>0$，故①正确. 因为图像与 x 轴交于点$A(-1,0)$，对称轴为直线 $x=1$，所以图像与 x 轴的另一个交点为$(3,0)$. 所以当 $x=2$ 时，$y<0$，即 $4a+2b+c<0$，故②错误. 因为图像与 x 轴交于点 $A(-1,0)$，所以当 $x=-1$ 时，$y=a-b+c=0$，即 $a=b-c$，$c=b-a$. 因为对称轴为直线 $x=1$，所以$-\frac{b}{2a}=1$，即 $b=-2a$. 所以 $c=b-a=(-2a)-a=-3a$，所以 $4ac-b^2=4a\cdot(-3a)-(-2a)^2=-16a^2<0$. 因为 $8a>0$，所以 $4ac-b^2<8a$，故③正确. 因为图像与 y 轴的交点 B 在点$(0,-2)$和点$(0,-1)$之间(不包括这两点)，所以$-2<c<-1$，即$-2<-3a<-1$，所以$\frac{1}{3}<a<\frac{2}{3}$，故④正确. 因为 $a>0$，所以 $b-c>0$，即 $b>c$，故⑤正确.

4. $\frac{5}{3}$　**提示**：在题图 2 中，过点 P 作$\odot O_2$ 的切线 PT，切点是 T，则由题意可知，$PT^2=PA\cdot PB=PC\cdot PD$. 因为 $PA=2$，$PB=7$，$PC=3$，所以 $2\times7=3PD$，所以 $PD=\frac{14}{3}$. 所以 $CD=PD-PC=\frac{14}{3}-3=\frac{5}{3}$.

5. 4　**提示**：因为 $DE\parallel BC$，所以$\angle DEB=\angle EBC$. 因为 BE 平分$\angle ABC$，所以$\angle EBC=\angle DBE$. 所以$\angle DBE=\angle DEB$，所以 $DB=DE$. 因为 $DE=2AD$，所以 $DB=2AD$. 又因为 $DE\parallel BC$，所以$\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}=\frac{1}{2}$，所以 $EC=2AE=4$.

6. $2\sqrt{5}$　**提示**：如图，易得直线 $y=2x-8$ 与 x 轴、y 轴的交点分别为 $B(4,0)$，$C(0,-8)$. 将点 P，Q 分别看成抛物线 $y=x^2+4x+3$ 与直线 $y=2x-8$ 上的动点，则 PQ 的最小值即为抛物线上的点到直线的最短距离. 设与直线 $y=2x-8$ 平行，且与抛物线 $y=x^2+4x+3$ 只有 1 个交点的直线的函数表达式为 $y=2x+b$. 令 $2x+b=x^2+4x+3$. 整理，得 $x^2+2x+3-b=0$，由根的判别式 $2^2-4\times(3-b)=-8+4b=0$，解得 $b=2$. 此时交点 A 的坐标为$(-1,0)$. 过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D，此时 AD 的长即为 PQ 长的最小值. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BOC$ 中，由勾股定理，得 $BC=\sqrt{OB^2+OC^2}=4\sqrt{5}$. 所以$\sin\angle ABD=\frac{AD}{AB}=\frac{OC}{BC}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 又因为 $AB=OA+OB=5$，所以 $AD=2\sqrt{5}$，即 PQ 长的最小值为 $2\sqrt{5}$.



7. $(3,0)$　**提示**：易得点 $A(0,4)$，$B(-2,0)$，$C(8,0)$，所以 $BC=10$，$OA=4$. 设点 $N(n,0)(-2<n<8)$，则 $BN=n+2$，$CN=8-n$，则 $S_{\triangle ABN}=\frac{1}{2}BN\cdot OA=2n+4$. 因为 $NM\parallel AC$，所以$\frac{AM}{AB}=\frac{NC}{BC}=\frac{8-n}{10}$，所以 $S_{\triangle AMN}=\frac{8-n}{10}S_{\triangle ABN}=\frac{8-n}{10}\cdot(2n+4)=-\frac{1}{5}(n-3)^2+5$. 因为$-\frac{1}{5}<0$，所以当 $n=3$ 时，$\triangle AMN$ 的面积最大. 此时，点 N 的坐标为$(3,0)$.

8. (1) 8　**提示**：如图 1，延长 CB 至点 K，使 $BK=DF$，连接 AK. 易证$\triangle ABK\cong\triangle ADF$(SAS)，$\triangle AEK\cong\triangle AEF$(SAS)，所以 $EK=EF$，所以 $EF=BE+BK=BE+DF$，所以$\triangle CEF$ 的周长为 $CE+CF+EF=CE+CF+BE+DF=BC+CD=8$ cm.

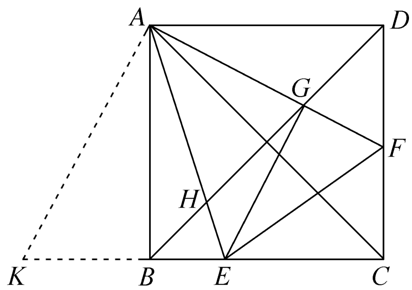


图 1

（2）**证明**：因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $\angle ACE=\angle ADG=\angle DAC=45°$，所以 $\angle CAE=45°-\angle CAF=\angle DAG$，所以 $\triangle ACE\backsim\triangle ADG$.

（3）**解**：$AF\perp EG$. 理由如下：

因为 $\angle GAH=\angle EBH=45°$，$\angle AHG=\angle BHE$，所以 $\triangle AGH\backsim\triangle BEH$，所以 $\dfrac{AH}{BH}=\dfrac{GH}{EH}$，即 $\dfrac{AH}{GH}=\dfrac{BH}{EH}$. 因为 $\angle AHB=\angle GHE$，所以 $\triangle ABH\backsim\triangle GEH$，所以 $\angle GEH=\angle ABH=45°$，所以 $\angle AGE=180°-\angle EAF-\angle GEH=90°$，所以 $AF\perp EG$.

（4）**证明**：由（2）知，$\triangle ACE\backsim\triangle ADG$，所以 $\dfrac{CE}{DG}=\dfrac{AC}{AD}=\sqrt{2}$，所以 $CE=\sqrt{2}\,DG$，同理可证 $\triangle ABH\backsim\triangle ACF$，所以 $\dfrac{CF}{BH}=\dfrac{AC}{AB}=\sqrt{2}$，所以 $CF=\sqrt{2}\,BH$，所以 $\angle AHB=\angle AFC$，所以 $\angle BHE=\angle DFG$. 因为 $\angle FDG=\angle HBE=45°$，所以 $\triangle DFG\backsim\triangle BHE$，所以 $\dfrac{DG}{BE}=\dfrac{DF}{BH}$，所以 $BE\cdot DF=BH\cdot DG$，所以 $2BE\cdot DF=2BH\cdot DG=\sqrt{2}BH\cdot\sqrt{2}DG=CF\cdot CE$，所以 $\dfrac{BE}{CE}\cdot\dfrac{DF}{CF}=\dfrac{1}{2}$，为定值.

9. 解：（1）令 $y=0$，即 $-x^2-2x+3=0$，解得 $x_1=1$，$x_2=-3$，所以点 $A(1,0)$，$B(-3,0)$. 把 $x=0$ 代入 $y=-x^2-2x+3$，得 $y=3$，所以点 $C(0,3)$. 因为 $y=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$，所以抛物线的对称轴是直线 $x=-1$，顶点 $D(-1,4)$. 所以 $BF=2$，$DF=4$，$BD=\sqrt{BF^2+DF^2}=2\sqrt{5}$. 由 $CE\parallel BD$，得 $\angle BDF=\angle DEC$，所以 $\sin\angle DEC=\sin\angle BDF=\dfrac{BF}{BD}=\dfrac{2}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

（2）如图 1，当点 E 在 BC 的上方时，连接 BC，过点 B 作 $BG\perp BC$，交 CE 的延长线于点 G，过点 G 作 $GK\perp x$ 轴于点 K. 由 $\angle BCE=\angle BDF$，得 $\tan\angle BCE=\tan\angle BDF$，即 $\dfrac{GB}{BC}=\dfrac{BF}{DF}=\dfrac{1}{2}$. 因为 $\angle GBC=\angle COB=90°$，所以 $\angle GBK=\angle BCO$，所以 $\triangle GKB\backsim\triangle BOC$，所以 $\dfrac{GK}{BO}=\dfrac{BK}{CO}=\dfrac{GB}{BC}=\dfrac{1}{2}$. 易得 $CO=3$，$BO=3$，所以 $BK=\dfrac{3}{2}$，$GK=\dfrac{3}{2}$. 所以点 $G\left(-\dfrac{9}{2},\dfrac{3}{2}\right)$. 易得直线 GC 的函数表达式为 $y=\dfrac{1}{3}x+3$，所以点 E 的坐标为 $\left(-1,\dfrac{8}{3}\right)$.

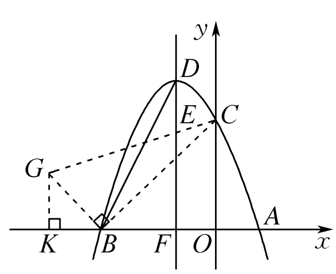


图 1

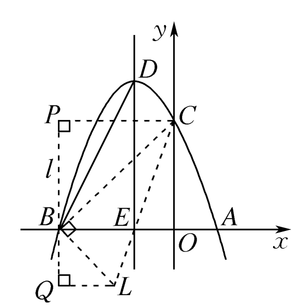


图 2

如图 2，当点 E 在 BC 的下方时，连接 BC，过点 B 作 $BL\perp BC$，交 CE 的延长线于点 L，过点 B 作 x 轴的垂线 l，过点 C 作 $CP\perp l$ 于点 P，过点 L 作 $LQ\perp l$ 于点 Q. 同理可得，$\triangle CPB\backsim\triangle BQL$，点 $L\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{2}\right)$. 易得直线 LC 的函数表达式为 $y=3x+3$，所以点 E 的坐标为 $(-1,0)$.

综上所述，点 E 的坐标为 $\left(-1,\dfrac{8}{3}\right)$ 或 $(-1,0)$.

（3）$AM=\dfrac{7\sqrt{5}}{4}$. **提示**：如图 3，过点 A 作

$AH\perp DB$ 于点 H，交 DF 于点 E'，过点 E 作 $EG\perp BD$ 于点 G. 在 $\mathrm{Rt}\triangle DGE$ 中，$GE=DE\cdot\sin\angle GDE=DE\cdot\sin\angle BDF=\frac{\sqrt{5}}{5}DE$，所以 $AE+\frac{\sqrt{5}}{5}DE=AE+GE\geqslant AH$. 当 A,E,G 三点共线，即点 E 与点 E' 重合，点 G 与点 H 重合时取等号，此时 $AE+\frac{\sqrt{5}}{5}DE$ 的值最小. 在 $\mathrm{Rt}\triangle DHE'$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle E'FA$ 中，易证 $\angle HDE'=\angle FAE'$，所以 $\tan\angle BDF=\tan\angle FAE'$，即 $\frac{2}{4}=\frac{E'F}{AF}=\frac{E'F}{2}$，所以 $E'F=1$，故点 $E'(-1,1)$. 延长 AH 交第二象限抛物线于点 M，过点 M 作 $MN\perp x$ 轴于点 N. 易得 $\frac{MN}{AN}=\frac{E'F}{AF}=\frac{1}{2}$. 设点 $M(1-2m,m)$，代入抛物线的函数表达式，得 $m=-(1-2m)^2-2(1-2m)+3$，解得 $m_1=\frac{7}{4}$，$m_2=0$（舍去）. 所以点 $M\left(-\frac{5}{2},\frac{7}{4}\right)$，易求得 $AM=\frac{7\sqrt{5}}{4}$.

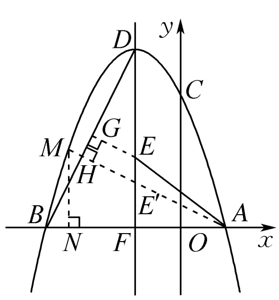


图 3

期末综合练(2)

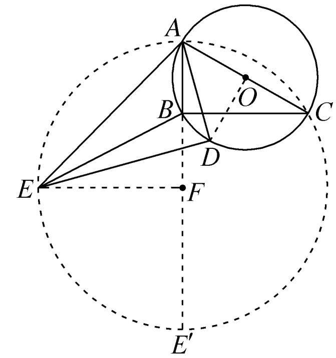
1. C

2. A　**提示**：易得抛物线 $y=-2(x-k)\cdot(x-k-6)$ 与 x 轴的两个交点横坐标分别为 $x_1=k$，$x_2=k+6$，所以二次函数 $y=-2(x-k)(x-k-6)$ 与 x 轴的两个交点的距离为 6. 因为二次函数 $y=-2(x-k)(x-k-6)$ 的图像与其向下平移 m 个单位长度所得的图像都与 x 轴有两个交点，且这四个交点中每相邻两点间的距离都相等，所以每相邻两点间的距离为 $6\div3=2$. 所以平移后的抛物线与 x 轴有两个交点其横坐标分别为 $k+2,k+4$，所以平移后的抛物线函数表达式为 $y=-2(x-k-2)(x-k-4)$. 因为平移后的函数表达式为 $y=-2(x-k)(x-k-6)-m$，所以 $-2(x-k)\cdot(x-k-6)-m=-2(x-k-2)(x-k-4)$，解得 $m=16$.

3. A　**提示**：连接 CE. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形，E 为 AD 的中点，所以 $AB=CD$，$AE=DE$，$AE/\!/BF$. 由折叠的性质，得 $GH=AB=CD$，$HF=BF$，$GE=AE=DE$，$\angle H=\angle B=90^\circ$，$\angle HGE=\angle A=90^\circ$，$GE/\!/HF$. 因为 HG 的延长线过点 C，所以 $\angle CGE=90^\circ$. 易证 $\mathrm{Rt}\triangle CGE\cong\mathrm{Rt}\triangle CDE$(HL)，所以 $CG=CD$，所以 $CG=GH$. 又因为 $GE/\!/FH$，所以 $\frac{CO}{OF}=\frac{CG}{GH}$，所以 $CO=OF=\frac{1}{2}CF$，所以 $\frac{BF}{CO}=\frac{HF}{\frac{1}{2}CF}=\frac{2}{3}$，所以 $\sin\angle BCH=\frac{HF}{CF}=\frac{1}{3}$.

4. $4\sqrt{2}$　**提示**：过点 P 作 $PE\perp AD$ 交 AD 的延长线于点 E. 因为 $AB/\!/CD$，所以 $\angle EDP=\angle DAB=45^\circ$，所以 $\sin\angle EDP=\frac{PE}{PD}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $PE=\frac{\sqrt{2}}{2}PD$. 所以 $PB+\frac{\sqrt{2}}{2}PD=PB+PE$，所以当 B,P,E 三点共线且 $BE\perp AD$ 时，$PB+PE$ 取得最小值，最小值为 BE 的长. 因为 $\sin\angle DAB=\frac{BE}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $BE=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=4\sqrt{2}$.

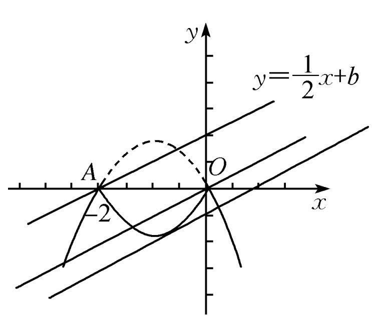
5. 6　**提示**：如图，延长 AB 至点 F，使 $AF=2AO$，连接 OD,EF. 因为 $\angle EAF=\angle DAE-\angle FAD=\angle BAC-\angle FAD=\angle DAO$，$\frac{AE}{AD}=\frac{AF}{AO}=2$，所以 $\triangle AEF\backsim\triangle ADO$，所以 $\frac{EF}{DO}=\frac{AE}{AD}=2$，所以 $EF=2DO$. 因为 $\angle ABC=90^\circ$，所以 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=4$，所以 $DO=\frac{1}{2}AC=2$，所以 $EF=4$. 所以点 E 在以点 F 为圆心，4 为半径的圆上运动，所以当点 E 在 AF 的延长线上，即点 E 在点 E' 的位置上时，BE 长取得最大值，最大值为 BE' 的长，$BE'=BF+E'F=2+4=6$.



6. $\frac{4}{3}$　**提示**：因为 $\triangle ABC$，$\triangle DCE$，$\triangle FEG$，

$\triangle HGI$ 是 4 个全等的等腰三角形，所以 $HI=AB=2$，$GI=BC=1$，$BI=4BC=4$. 所以 $\frac{AB}{BI}=\frac{1}{2}$，$\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{AB}{CB}=\frac{BI}{BA}$. 又因为 $\angle ABI=\angle CBA$，所以 $\triangle ABI\backsim\triangle CBA$，所以 $\frac{CA}{AI}=\frac{BA}{BI}$. 因为 $AB=AC$，所以 $AI=BI=4$. 易得 $\angle ACB=\angle FGE$，所以 $AC\parallel FG$，所以 $\frac{QI}{AI}=\frac{GI}{CI}=\frac{1}{3}$，所以 $QI=\frac{1}{3}AI=\frac{4}{3}$.

7. $0<b<1$ 或 $b<-\frac{9}{16}$　**提示：**如图，当直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ 经过点 $A(-2,0)$ 时，$b=1$；当直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ 经过点 $O(0,0)$ 时，$b=0$. 易知当 $0<b<1$ 时，直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ 与新图像有两个交点. 翻折后，易得抛物线翻折部分的函数表达式为 $y=x^2+2x(-2<x<0)$，由关于 x 的方程组 $\begin{cases}y=x^2+2x,\\ y=\frac{1}{2}x+b\end{cases}$ 只有一组解，得 $2x^2+3x-2b=0$ 有两个相等的实数根，所以 $9+16b=0$，解得 $b=-\frac{9}{16}$. 由图像可知，当 $b<-\frac{9}{16}$ 时，直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ 与新图像有两个交点. 综上所述，当 $0<b<1$ 或 $b<-\frac{9}{16}$ 时，直线 $y=\frac{1}{2}x+b$ 与新图像有两个交点.



8. $\left(-\frac{3^n}{2^n},\frac{3^n}{2^{n+1}}\right)$　**提示：**根据题意可知，矩形 $A_1OC_1B_1$ 与矩形 $AOCB$ 是位似图形，点 B 的对应点是 B_1. 因为 $OA=2$，$OC=1$，所以点 $B(-2,1)$，所以点 $B_1\left(-2\times\frac{3}{2},1\times\frac{3}{2}\right)$. 同理，点 $B_2\left(-2\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2},1\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\right)$……以此类推，可得点 $B_n\left(-2\times\frac{3^n}{2^n},1\times\frac{3^n}{2^n}\right)$. 易知矩形 $A_nOC_nB_n$ 的对角线交点的坐标为 $\left(-2\times\frac{3^n}{2^n}\times\frac{1}{2},1\times\frac{3^n}{2^n}\times\frac{1}{2}\right)$，即 $\left(-\frac{3^n}{2^n},\frac{3^n}{2^{n+1}}\right)$.

9. 1　**提示：**如图 1，连接 BD 交 AC 于点 O，连接 OF. 因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $AC\perp BD$，所以 $\angle AOD=90°$. 因为 $\angle ABC=60°$，$AB=BC$，所以 $\angle ACB=60°$. 又因为 $AD\parallel BC$，所以 $\angle OAD=60°$. 易证 $\triangle AOD\backsim\triangle EFD$，所以 $\frac{AD}{ED}=\frac{OD}{FD}$，即 $\frac{AD}{OD}=\frac{ED}{FD}$，$\angle ADO=\angle EDF$，所以 $\angle ADE=\angle ODF$. 所以 $\triangle ADE\backsim\triangle ODF$，所以 $\angle DOF=\angle DAE=60°$，所以点 F 在与 OD 夹角为 $60°$ 的直线上. 当 $CF\perp OF$ 时，CF 的长有最小值，易得此时点 F 在 CD 上，如图 2 所示. 易得 $CD=AD=4$，$\angle CDO=\angle COF=30°$，所以 $OC=\frac{1}{2}CD=2$，$CF=\frac{1}{2}OC=1$. 即 CF 长的最小值为 1.

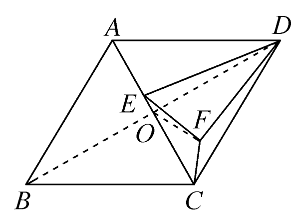


图 1

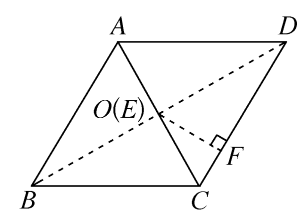


图 2

10. 解：(1) 将点 $A(-1,0)$，$B(3,0)$ 代入 $y=ax^2+bx-2$，得 $\begin{cases}a-b-2=0,\\ 9a+3b-2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{2}{3},\\ b=-\frac{4}{3},\end{cases}$ 所以二次函数的表达式为 $y=\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x-2$.

(2) 由题意，得 $y=\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x-2=\frac{2}{3}(x-1)^2-\frac{8}{3}$，所以顶点 $D\left(1,-\frac{8}{3}\right)$. 设直线 BD 的函数表达式为 $y=kx+d$. 将点 $B(3,0)$，$D\left(1,-\frac{8}{3}\right)$ 代入 $y=kx+d$，得 $\begin{cases}3k+d=0,\\ k+d=-\frac{8}{3},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{4}{3},\\ d=-4,\end{cases}$ 所以直线 BD 的函数表达式为 $y=\frac{4}{3}x-4$. 设直线 BD 与 y 轴交于点 E，过点

C 作 $CP\perp BE$ 于点 P，如图 1 所示. 易得点 $E(0,-4)$，$C(0,-2)$，所以 $OE=4$，$OC=2$，所以 $CE=2$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle OBE$ 中，由勾股定理，得 $BE=\sqrt{OB^2+OE^2}=5$. 因为 $S_{\triangle CBE}=\frac{1}{2}BE\cdot CP=\frac{1}{2}CE\cdot OB$，所以 $\frac{1}{2}\times 5CP=\frac{1}{2}\times 2\times 3$，所以 $CP=\frac{6}{5}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle OBC$ 中，由勾股定理，得 $BC=\sqrt{OB^2+OC^2}=\sqrt{13}$. 所以 $\sin\angle CBD=\frac{CP}{BC}=\frac{\frac{6}{5}}{\sqrt{13}}=\frac{6\sqrt{13}}{65}$.

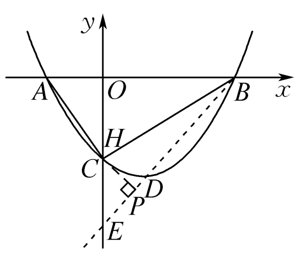


图 1

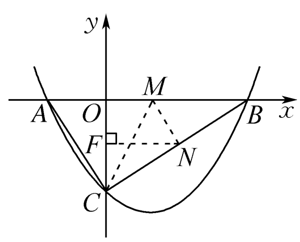


图 2

（3）存在. 点 N 的坐标为 $\left(\frac{12}{7},-\frac{6}{7}\right)$ 或 $\left(\frac{3}{4},-\frac{3}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{15}{7},-\frac{4}{7}\right)$. **提示**：假设存在 $\triangle CMN$ 与 $\triangle AOC$ 相似，因为 $\triangle AOC$ 是直角三角形，且 $OA=1$，$OC=2$，所以 $\triangle CMN$ 一定是直角三角形，且两直角边之比为 $1:2$. 分情况讨论如下：

①当 $\angle CNM=90^\circ$ 时，若 $MN:CN=1:2$，如图 2 所示. 设 $MN=m$，则 $CN=2m$，$CM=\sqrt{CN^2+MN^2}=\sqrt{5}m$. 由 $S_{\triangle OCM}=S_{\triangle OCB}-S_{\triangle BCM}$，即 $\frac{1}{2}OC\cdot OM=\frac{1}{2}OB\cdot OC-\frac{1}{2}BC\cdot MN$，所以 $\frac{1}{2}\times 2OM=\frac{1}{2}\times 3\times 2-\frac{1}{2}\times\sqrt{13}m$，所以 $OM=3-\frac{\sqrt{13}}{2}m$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle OMC$ 中，由 $OC^2+OM^2=CM^2$，即 $2^2+\left(3-\frac{\sqrt{13}}{2}m\right)^2=(\sqrt{5}m)^2$，解得 $m_1=\frac{2\sqrt{13}}{7}$，$m_2=-2\sqrt{13}$（舍去），所以 $CN=2m=\frac{4\sqrt{13}}{7}$. 过点 N 作 $NF\perp y$ 轴于点 F，易知 $\triangle CNF\backsim\triangle CBO$，所以 $\frac{CN}{CB}=\frac{CF}{CO}=\frac{NF}{BO}$，即 $\frac{\frac{4\sqrt{13}}{7}}{\sqrt{13}}=\frac{CF}{2}=\frac{FN}{3}$，所以 $CF=\frac{8}{7}$，$FN=\frac{12}{7}$. 易得 $OF=OC-CF=\frac{6}{7}$. 所以点 $N\left(\frac{12}{7},-\frac{6}{7}\right)$. 若 $CN:MN=1:2$，如图 3 所示，此时点 M 在点 O 左侧. 设 $CN=m$，则 $MN=2m$，同理可得 $CM=\sqrt{5}m$，$OM=\sqrt{13}m-3$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle OMC$ 中，由 $OC^2+OM^2=CM^2$，即 $2^2+(\sqrt{13}m-3)^2=(\sqrt{5}m)^2$，解得 $m_1=\frac{\sqrt{13}}{4}$，$m_2=\frac{\sqrt{13}}{2}$（此时 $CM>\sqrt{5}=AC$，点 M 不在线段 AB 上，舍去），所以 $CN=\frac{\sqrt{13}}{4}$. 过点 N 作 $NG\perp y$ 轴于点 G. 易知 $\triangle CNG\backsim\triangle CBO$，所以 $\frac{CN}{CB}=\frac{CG}{CO}=\frac{NG}{BO}$，即 $\frac{\frac{\sqrt{13}}{4}}{\sqrt{13}}=\frac{CG}{2}=\frac{NG}{3}$，所以 $CG=\frac{1}{2}$，$NG=\frac{3}{4}$. 易得 $OG=OC-CG=\frac{3}{2}$，所以点 $N\left(\frac{3}{4},-\frac{3}{2}\right)$.

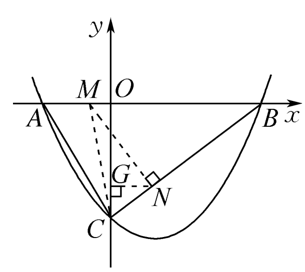


图 3

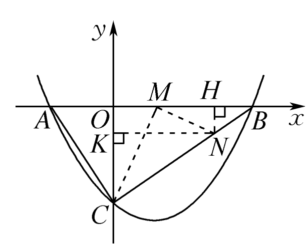


图 4

②当 $\angle CMN=90^\circ$ 时，过点 N 作 $NH\perp x$ 轴，$NK\perp y$ 轴分别交于点 H，K，如图 4 所示. 由题意，可得 $\triangle COM\backsim\triangle MHN$，所以 $\frac{CO}{MH}=\frac{OM}{HN}=\frac{CM}{MN}=\frac{2}{1}\left(\text{不可能为}\frac{1}{2}\right)$，所以 $MH=1$. 设 $NH=n$，则 $OM=2n$. 易知 $\triangle BNH\backsim\triangle BCO$，所以 $\frac{NH}{CO}=\frac{BH}{BO}$，即 $\frac{n}{2}=\frac{BH}{3}$，所以 $BH=\frac{3n}{2}$. 由 $OB=OM+MH+BH$，得 $3=2n+1+\frac{3n}{2}$，解得 $n=\frac{4}{7}$，即 $OK=NH=\frac{4}{7}$，所以 $CK=OC-OK=\frac{10}{7}$. 易知 $\triangle CKN\backsim\triangle COB$，所以 $\frac{CK}{CO}=\frac{KN}{OB}$，即 $\frac{\frac{10}{7}}{2}=\frac{KN}{3}$，所以 $KN=\frac{15}{7}$. 所以点 $N\left(\frac{15}{7},-\frac{4}{7}\right)$.

③当 $\angle MCN=90^\circ$ 时，由题意，得 $\triangle BOC\backsim\triangle COM$，所以 $\frac{BO}{CO}=\frac{CO}{MO}$，即 $\frac{3}{2}=\frac{2}{MO}$，得 $MO=\frac{4}{3}$，所以点 M 的

坐标为$\left(-\frac{4}{3},0\right)$,此时点$M$在线段$AB$之外,故此种情况不满足题意,舍去.

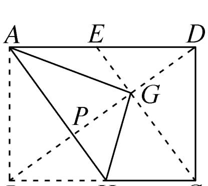
综上所述,点N的坐标为$\left(\frac{12}{7},-\frac{6}{7}\right)$或$\left(\frac{3}{4},-\frac{3}{2}\right)$或$\left(\frac{15}{7},-\frac{4}{7}\right)$.

2025年江苏13大市中考模拟压轴题精选

中考模拟压轴1

2025年南京市玄武区中考模拟压轴题

1. B **提示**:如图,设AH交BD于点P,连接CG并延长交AD于点E. 由题图2中矩形及折叠的性质,得$AE=DE=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC$,$AD/\!/BC$,所以$\triangle DEG\backsim\triangle BCG$,所以$\frac{DG}{BG}=\frac{DE}{BC}=\frac{1}{2}$,所以$DG=\frac{1}{2}BG$. 由折叠的性质可知,点$G$与点$B$关于直线$AH$对称,所以$AH$垂直平分$BG$,所以$\angle APB=\angle APD=90^\circ$,$PG=PB=\frac{1}{2}BG=DG$. 设$DG=PG=PB=m(m>0)$,则$PD=2m$. 由题可知,在$\text{Rt}\triangle ABD$中,$\tan\angle ABD=\frac{AD}{AB}$,在$\text{Rt}\triangle ABP$中,$\tan\angle ABD=\frac{PA}{PB}$,在$\text{Rt}\triangle ADP$中,$\tan\angle PAD=\frac{PD}{PA}$. 因为$\angle ABD+\angle ADB=90^\circ$,$\angle PAD+\angle ADB=90^\circ$,所以$\angle ABD=\angle PAD$,所以$\tan\angle ABD=\tan\angle PAD$,即$\frac{AD}{AB}=\frac{PA}{PB}=\frac{PD}{PA}$(也可通过$\triangle ABD\backsim\triangle PBA\backsim\triangle PAD$证得),所以$PA^2=PD\cdot PB=2m^2$,所以$PA=\sqrt{2}m$(负值舍去),所以$\frac{AD}{AB}=\frac{PA}{PB}=\frac{\sqrt{2}m}{m}=\sqrt{2}$.



2. 解:(1) 由$n=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$,即$\sqrt{3}=\frac{\sin 60^\circ}{\sin\beta}$,得$\sin\beta=\frac{1}{2}$,所以$\beta=30^\circ$.

(2) 如图1,折射光线AQ即为所求. 作法:①在入射光线PA上任取一点B,以点A为圆心,AB长为半径作$\odot A$;②过点B作$BC\perp$法线于点C;③作线段BC的垂直平分线MN,交$\odot A$于点D;④作射线DA,交$\odot A$于点Q. 则射线AQ就是所求作的折射光线.

理由:设MN交BC于点E,交直线l于点F. 易证四边形$EFAC$为矩形,所以$AF=CE$,$AC/\!/EF$,所以$\angle CAD=\angle ADF$. 在$\text{Rt}\triangle ABC$中,$\sin\alpha=\sin\angle BAC=\frac{BC}{AB}$. 在$\text{Rt}\triangle ADF$中,$\sin\angle ADF=\frac{AF}{AD}$. 因为$BC=2CE=2AF$,$AB=AD$,所以$\sin\alpha=2\sin\angle ADF$. 因为$\beta=\angle CAD=\angle ADF$,所以$\sin\alpha=2\sin\beta$,即$n=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=2$.

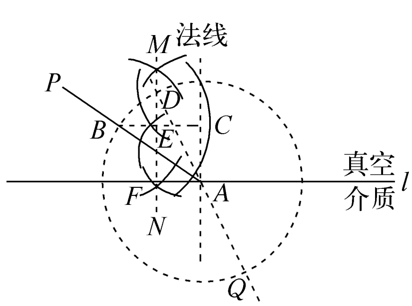


图1

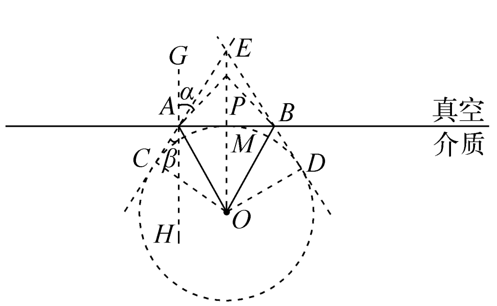


图2

(3) ①$\frac{\sqrt{5}}{2}$ **提示**:如图2,分别过点A,B作$\odot O$的切线,交于点E,连接EM. 因为M为AB的中点,$AB=2$,所以$AM=BM=\frac{1}{2}AB=1$. 因为$\odot O$与AB相切于点M,所以$OM=\sqrt{3}$. 在$\text{Rt}\triangle AOM$中,$\tan\angle MAO=\frac{OM}{AM}=\sqrt{3}$,所以$\angle MAO=60^\circ$. 易得

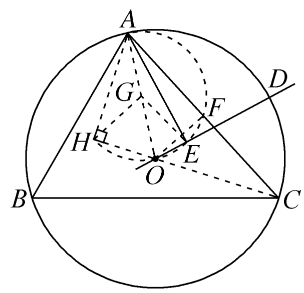
$\angle CAO=\angle MAO=60°$. 所以$\angle BAE=180°-\angle CAO-\angle MAO=60°$，同理可得$\angle ABE=60°$，所以$\triangle ABE$为等边三角形，则$EM\perp AB$. 由题意可知，当折射率为定值时，折射角随着入射角的增大而增大，所以当光源点P发出的光线经折射后的光线恰好是AC和BD时，光源点P到直线l的距离有最大值，此时光源点P位于线段EM上，最大值为PM的长. 连接PA，PB，则满足条件的光源点P所形成的区域为$\triangle ABP$. 过点A作法线$GH\perp AB$，则入射角$\alpha=\angle APM$，折射角$\beta=\angle CAO-\angle HAO=\angle CAO-(90°-\angle MAO)=30°$. 因为$n=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{4}{3}$，即$\dfrac{\sin\alpha}{\sin 30°}=\dfrac{4}{3}$，所以$\sin\alpha=\dfrac{2}{3}=\sin\angle APM$. 在$\text{Rt}\triangle APM$中，$\sin\angle APM=\dfrac{AM}{AP}=\dfrac{2}{3}$，$AM=1$，所以$AP=\dfrac{3}{2}$，所以$PM=\sqrt{AP^2-AM^2}=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-1^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

②变小　提示：在$\text{Rt}\triangle APM$中，$\tan\angle APM=\dfrac{AM}{PM}$，所以$PM=\dfrac{AM}{\tan\angle APM}=\dfrac{1}{\tan\alpha}$. 因为$n=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$，所以当折射角$\beta$不变时，随着折射率$n$的值变大，入射角$\alpha$的值变大，$\tan\alpha$也变大，$PM$的长则变小. 由①可知，$S_{区域}=S_{\triangle ABP}=\dfrac{1}{2}AB\cdot PM=PM$，所以满足条件的光源点$P$所形成的区域面积随着折射率$n$的值变大而变小.

中考模拟压轴 2

2025 年南京市鼓楼区、秦淮区中考模拟压轴题

1. B　提示：如图，取AC的中点F，连接OF，OA，OC. 因为$\angle B=60°$，所以$\angle AOC=2\angle B=120°$. 因为$F$是弦$AC$的中点，所以$AF=\dfrac{1}{2}AC=3$. 又因为$OA=OC$，所以$\angle AOF=\dfrac{1}{2}\angle AOC=60°$. 在$\text{Rt}\triangle AOF$中，$\sin\angle AOF=\dfrac{AF}{OA}$，即$\sin 60°=\dfrac{3}{OA}$，所以$OA=2\sqrt{3}$. 过点$A$作$AH\perp OC$，交$CO$的延长线于点$H$，取$OA$的中点$G$，连接$EG$，$HG$. 因为$AE\perp OD$，所以$\angle AEO=90°$，所以点$E$在以点$G$为圆心，$OG$长为半径的圆上运动. 当点$D$与点$A$重合时，点$E$也与点$A$重合；当点$D$运动到$OD\perp OA$时，点$E$与点$O$重合；当点$D$继续运动时，点$E$位于线段$DO$的延长线上，直至点$D$运动到与点$C$重合时，点$E$与点$H$重合. 所以点$E$运动的路径为$\overset{\frown}{AOH}$. 因为$\angle AOC=120°$，所以$\angle AOH=180°-\angle AOC=60°$，所以$\angle OAH=90°-\angle AOH=30°$，所以$\angle OGH=2\angle OAH=60°$，所以点$E$经过的路径长为$\dfrac{180+60}{180}\times\pi\times\sqrt{3}=\dfrac{4\sqrt{3}\pi}{3}$.



2. ＝　提示：将点$(1,m+1)$，$(2,m)$，$(3,m+1)$分别代入$y_1=a_1x^2+b_1x+c_1$，得$\begin{cases}m+1=a_1+b_1+c_1①,\\ m=4a_1+2b_1+c_1②,\\ m+1=9a_1+3b_1+c_1③.\end{cases}$ ①＋③－②×2，得$2=2a_1$. 解得$a_1=1$. 将点$(1,n)$，$(2,n+2)$，$(3,n+6)$分别代入$y_2=a_2x^2+b_2x+c_2$，得$\begin{cases}n=a_2+b_2+c_2,\\ n+2=4a_2+2b_2+c_2,\\ n+6=9a_2+3b_2+c_2,\end{cases}$同理可得$a_2=1$. 所以$a_1=a_2$.

3. 解：(1) ①$\dfrac{4\sqrt{3}}{5}$　提示：如图 1，设小明头顶处为点E. 由题意，得$AE=1.6$ m，$AE\perp AB$，$\angle BAP=\angle MBN=30°$. 在$\text{Rt}\triangle ABE$中，$\tan\angle ABE=\dfrac{AE}{AB}$，即$\tan 30°=\dfrac{1.6}{AB}$，所以$AB=\dfrac{8\sqrt{3}}{5}$ m. 在$\text{Rt}\triangle ABC$中，$BC=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{4\sqrt{3}}{5}$ m.

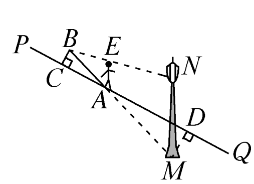


图 1

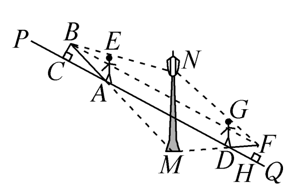


图 2

②**解法 1**　如图 1，过点M作$MD\perp PQ$，垂足为D. 由题意，得$AE/\!/MN$，所以$\triangle BAE\backsim\triangle BMN$，所以$\dfrac{BA}{BM}=\dfrac{AE}{MN}=\dfrac{1.6}{4.8}=\dfrac{1}{3}$，所以$\dfrac{BA}{AM}=$

$\frac{1}{2}$. 因为 $MD\perp PQ$，$BC\perp PQ$，所以$\angle BCA=\angle MDA=90^\circ$. 又因为$\angle BAC=\angle MAD$，所以$\triangle BAC\backsim\triangle MAD$，所以$\frac{BC}{MD}=\frac{BA}{MA}=\frac{1}{2}$，所以$BC=\frac{1}{2}MD$. 因为 MD 的长是定值，所以 BC 的长是定值，即影子顶端到步道的距离不变.

解法 2 如图 2，当小明走到 PQ 上任意位置(记为点 D)时，设他的头顶处为点 G，影子为 DF，连接 BF，过点 F 作 $FH\perp PQ$，垂足为 H. 由题意，得 $AE/\!/MN/\!/DG$，$BC/\!/FH$，所以$\triangle BAE\backsim\triangle BMN$，所以$\frac{BA}{BM}=\frac{AE}{MN}$，同理$\frac{FD}{FM}=\frac{DG}{MN}$. 又因为 $AE=DG$，所以$\frac{BA}{BM}=\frac{FD}{FM}$，所以$\frac{MA}{MB}=\frac{MD}{MF}$，又因为$\angle AMD=\angle BMF$，所以$\triangle AMD\backsim\triangle BMF$，所以$\angle MAD=\angle MBF$，所以 $AD/\!/BF$. 又因为 $BC/\!/FH$，所以四边形 $BCHF$ 是平行四边形，所以 $FH=BC$，所以 FH 是定值，即影子顶端到步道的距离不变.

(2) 影子顶端处点 D 运动的路径长为 12π m. **提示**：如图 3，设小明头顶处为点 E，连接 OA，过点 D 作$GD/\!/OA$，交 MO 的延长线于点G. 由题意，得 $AE/\!/MN$，所以$\triangle DAE\backsim\triangle DMN$，所以$\frac{DA}{DM}=\frac{AE}{MN}=\frac{1.6}{4.8}=\frac{1}{3}$，所以$\frac{DA}{AM}=\frac{1}{2}$. 因为 $GD/\!/OA$，所以$\triangle MDG\backsim\triangle MAO$，所以$\frac{AO}{DG}=\frac{MO}{MG}=\frac{MA}{MD}=\frac{2}{3}$，所以$DG=\frac{3}{2}AO$，$MO=\frac{2}{3}MG$. 因为 MO 的长是定值，所以 MG 的长是定值，即点 G 的位置固定不变. 因为$AO=4$ m，所以 $DG=\frac{3}{2}AO=6$ m. 所以点 D 的运动轨迹是以点G 为圆心，半径为 6 m 的圆，所以小明在步道上散步一周，影子顶端处点 D 运动的路径长为 $2\pi\times6=12\pi$(m).

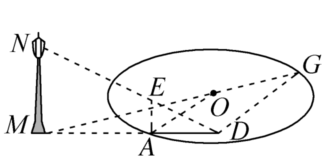


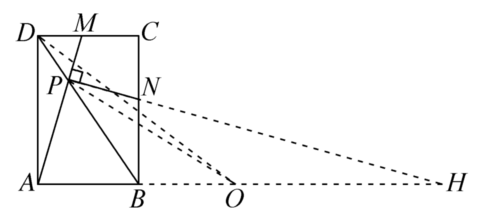
图 3

中考模拟压轴 3

2025 年南京市联合体中考模拟压轴题

1. A **提示**：由题意，设 $y_1=a(x+1)(x-3)=ax^2-2ax-3a(a\neq0)$. 令 $x=0$，则 $y=-3a$. 所以点$A(0,-3a)$，所以 $OA=-3a$. 因为 $OA=OB$，所以点$B(0,3a)$. 设 $y_2=kx+3a(k\neq0)$，将点$(-1,0)$代入，得$-k+3a=0$，解得 $k=3a$. 所以 $y_2=3ax+3a=3a(x+1)$ $(a\neq0)$. 所以 $y=\frac{y_1}{y_2}=\frac{a(x+1)(x-3)}{3a(x+1)}$. 当$x+1\neq0$，即 $x\neq-1$ 时，$y=\frac{1}{3}(x-3)=\frac{1}{3}x-1$. 令 $x=0$，则 $y=-1$；令 $y=0$，则 $x=3$. 所以函数 $y=\frac{y_1}{y_2}$的图像为过点$(0,-1)$，$(3,0)$的直线，不含点$\left(-1,-\frac{4}{3}\right)$.

2. 2 **提示**：如图，延长 AB 至点 H，使得 $BH=2AD=12$，取 AH 的中点O，连接 OP，OD，HN. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以$\angle ADC=\angle ABC=\angle C=90^\circ$，所以$\angle NBH=180^\circ-\angle ABC=90^\circ=\angle MDA$. 因为$BN=2DM$，$BH=2AD$，所以$\frac{BN}{DM}=\frac{BH}{DA}$，所以$\triangle NBH\backsim\triangle MDA$，所以$\angle BNH=\angle DMA$. 因为 $NP\perp AM$，所以$\angle NPM=90^\circ$，所以$\angle PMC+\angle PNC=360^\circ-\angle C-\angle NPM=180^\circ$. 因为$\angle DMA+\angle PMC=180^\circ$，所以$\angle DMA=\angle PNC$. 因为$\angle PNC+\angle PNB=180^\circ$，所以$\angle DMA+\angle PNB=180^\circ$，所以$\angle BNH+\angle PNB=180^\circ$，所以 P，N，H 三点共线. 在 $Rt\triangle APH$ 中，O 为 AH 的中点，且 $AH=AB+BH=16$，所以 $OA=OP=\frac{1}{2}AH=8$(点 P 在以点O 为圆心，AH 为直径的圆上运动). 在 $Rt\triangle ADO$ 中，由勾股定理，得 $OD=\sqrt{AD^2+OA^2}=10$. 因为 $DP\geqslant OD-OP$，所以当点 P 在线段OD 上时，DP 的长有最小值，最小值为 $OD-OP=2$.



3. 解：(1) 2 **提示**：以点 O 为坐标原点，建立如图 1 所示的平面直角坐标系，则 $OA=3$，$OP=3$，$OB=m$，所以点$A(-3,0)$，$P(0,3)$，$B(m,0)$. 设抛物线

的函数表达式为 $y=-\frac{1}{2}(x+3)(x-m)$，将点 $P(0,3)$ 代入，得 $3=-\frac{1}{2}(0+3)(0-m)$，解得 $m=2$.

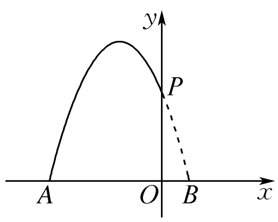


图 1

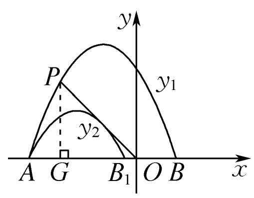


图 2

(2) 以点 O 为坐标原点，建立如图 2 所示的平面直角坐标系，则点 $A(-3,0)$. 过点 P 作 $PG\perp OA$ 于点 G. 因为 $OP=2\sqrt{2}$，$\angle AOP=45°$，所以 $PG=OP\cdot\sin 45°=2$，$OG=OP\cdot\cos 45°=2$，所以点 $P(-2,2)$. 设当粒子经过点 P，落在点 B 处时，轨迹的函数图像为 y_1，当粒子的轨迹与 OP 相切(有唯一交点)，刚好落在点 B_1 处时，函数图像为 y_2. 由于挡板 OP 的遮挡，粒子无法落到线段 BB_1 上. 设点 $B(t,0)(t>0)$，则 $y_1=-\frac{1}{2}(x+3)(x-t)$. 将点 $P(-2,2)$ 代入，得 $2=-\frac{1}{2}(-2+3)(-2-t)$，解得 $t=2$. 所以点 $B(2,0)$. 设直线 OP 的函数表达式为 $y=kx(k\neq 0)$，将点 $P(-2,2)$ 代入，得 $-2k=2$，解得 $k=-1$. 所以 $y=-x$. 设点 $B_1(n,0)(-3<n<0)$，则 $y_2=-\frac{1}{2}(x+3)\cdot(x-n)$. 联立，得 $\begin{cases}y=-x,\\ y=-\frac{1}{2}(x+3)(x-n).\end{cases}$ 整理，得 $x^2+(1-n)x-3n=0$. 因为直线 OP 与函数图像 y_2 有唯一的交点，所以关于 x 的方程 $x^2+(1-n)x-3n=0$ 有两个相等的实数根，所以根的判别式 $(1-n)^2-4\cdot(-3n)=0$，解得 $n=2\sqrt{6}-5$ 或 $n=-2\sqrt{6}-5$(舍去). 所以点 $B_1(2\sqrt{6}-5,0)$. 所以 $BB_1=2-(2\sqrt{6}-5)=7-2\sqrt{6}$，即 m 的值为 $7-2\sqrt{6}$.

(3) ①$\tan\alpha=\frac{3}{2}$. **提示**：以点 O 为坐标原点，建立如图 3 所示的平面直角坐标系，则点 $A(-3,0)$，$O(0,0)$，$B(3,0)$. 由题可知，当 OP 与函数图像 y_1 在点 O 处相切时，$\angle AOP$ 最小，此时 $y_1=-\frac{1}{2}x(x+3)$. 设直线 OP 的函数表达式为 $y=kx(k\neq 0)$，联立，得 $\begin{cases}y=kx,\\ y=-\frac{1}{2}x(x+3),\end{cases}$ 整理，得 $x^2+(3+2k)x=0$. 因为直线 OP 与函数图像 y_1 有唯一的交点，所以关于 x 的方程 $x^2+(3+2k)x=0$ 有两个相等的实数根，所以根的判别式 $(3+2k)^2=0$，解得 $k=-\frac{3}{2}$，所以 $y=-\frac{3}{2}x$. 过点 P 作 $PH\perp OA$ 于点 H. 设点 $P\left(x,-\frac{3}{2}x\right)$，则 $OH=-x$，$PH=-\frac{3}{2}x$，此时 $\tan\alpha=\frac{PH}{OH}=\frac{3}{2}$.

②OP 长的最小值为 $2\sqrt{2}$. **提示**：如图 4，由①可知，当 $\tan\angle AOP_0=\frac{3}{2}$ 时，$\angle AOP_0$ 是满足题意的最小角 α. 由点 $A(-3,0)$，$B(3,0)$，得函数图像 y_2 的函数表达式为 $y_2=-\frac{1}{2}(x+3)(x-3)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{2}$. 由题可知，点 P 必定在函数图像 y_2 上. 设点 $P\left(x,-\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{2}\right)$. 由两点间的距离公式，得 $OP^2=x^2+\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(x^2-7)^2+8$，所以当 $x^2=7$，即 $x=\sqrt{7}$ 或 $x=-\sqrt{7}$ 时，OP^2 有最小值，最小值为 $OP_1^2=OP_2^2=8$. 此时发现 $\angle AOP_1<\angle AOP_0$，$OP_1$ 不符合题意，舍去. 所以 OP 长的最小值为 $OP_2=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

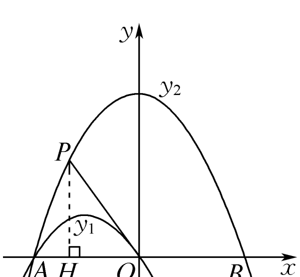


图 3

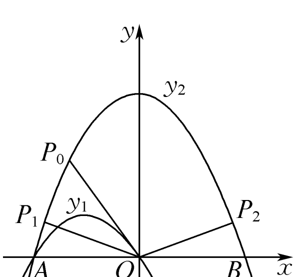


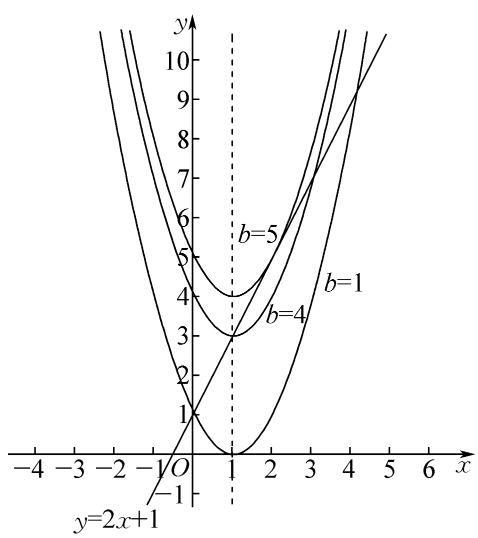
图 4

中考模拟压轴 4

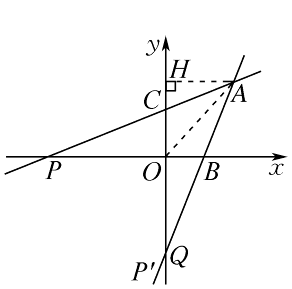
2025 年苏州市高新区中考模拟压轴题

1. B **提示**：由题意，得 $2-(-1)=k\cdot(3-4)$，解得 $k=-3$. 所以点 $(3,2)$ 与点 $(4,-1)$ 互为“-3 阶点”，故①正确. 若直线 $y=2x-1$ 上存在某点 $(x,2x-$

1)与动点 $A(1,m)$ 互为“m 阶点”，则 $m-(2x-1)=m(1-x)$，整理，得 $(m-2)x=-1$. 当 $m-2\neq0$，即 $m\neq2$ 时，解得 $x=-\frac{1}{m-2}$；当 $m-2=0$，即 $m=2$ 时，方程无解. 所以当 $m=2$ 时，直线 $y=2x-1$ 上的点都不与点 A 互为“2 阶点”[设与点 $A(1,m)$ 互为“m 阶点”的点的坐标为 (x,y)，则 $m-y=m(1-x)$，即 $y=mx(m\neq0)$. 若直线 $y=2x-1$ 上始终存在一点与点 A 互为“m 阶点”，则直线 $y=2x-1$ 与直线 $y=mx(m\neq0)$ 一定相交，易知当 $m=2$ 时，两直线平行，无交点]，故②错误. 设点 (x,y) 与点 $(0,-5)$ 互为“k 阶点”，则 $y+5=k(x-0)$，即 $y=kx-5$. 因为点 A,B 都与点 $(0,-5)$ 互为“k 阶点”，所以直线 AB 的函数表达式为 $y=kx-5$. 联立，得 $\begin{cases}y=x^2-2x-3,\\y=kx-5,\end{cases}$ 整理，得 $x^2-(k+2)x+2=0$. 因为抛物线 $y=x^2-2x-3$ 上存在两点 A,B 都与点 $(0,-5)$ 互为“k 阶点”，所以该方程有两个不相等的实数根，所以根的判别式 $[-(k+2)]^2-4\times1\times2=(k+2)^2-8>0$，即 $(k+2+2\sqrt{2})(k+2-2\sqrt{2})>0$，转化，得 $\begin{cases}k+2+2\sqrt{2}>0,\\k+2-2\sqrt{2}>0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k+2+2\sqrt{2}<0,\\k+2-2\sqrt{2}<0,\end{cases}$ 解得 $k>2\sqrt{2}-2$ 或 $k<-2\sqrt{2}-2$[也可根据二次函数的性质解之，即令 $y=(k+2)^2-8$，则易知该抛物线开口向上. 当 $(k+2)^2-8=0$ 时，解得 $k_1=2\sqrt{2}-2$，$k_2=-2\sqrt{2}-2$. 当 $(k+2)^2-8>0$ 时，该抛物线位于 x 轴上方的部分所对应的 k 的取值范围为 $k>2\sqrt{2}-2$ 或 $k<-2\sqrt{2}-2$]. 因为 $N(n,m)$ 是线段 AB 的中点，且点 A,B 的横坐标为 $x^2-(k+2)x+2=0$ 的解，所以 $n=\frac{1}{2}(x_A+x_B)=\frac{1}{2}\left(-\frac{-(k+2)}{1}\right)=\frac{k+2}{2}$. 因为 $k>2\sqrt{2}-2$ 或 $k<-2\sqrt{2}-2$，所以 $k+2>2\sqrt{2}$ 或 $k+2<-2\sqrt{2}$，所以 $\frac{k+2}{2}>\sqrt{2}$ 或 $\frac{k+2}{2}<-\sqrt{2}$，即 $n>\sqrt{2}$ 或 $n<-\sqrt{2}$，故③正确. 设与点 $A(0,1)$ 互为“2 阶点”的点的坐标为 (x,y)，则 $1-y=2(0-x)$，即 $y=2x+1$. 若抛物线 $y=x^2-2x+b$ 在 $1<x<4$ 范围内有且只有一个点与点 $A(0,1)$ 互为“2 阶点”，则抛物线 $y=x^2-2x+b$ 在 $1<x<4$ 范围内与直线 $y=2x+1$ 有且只有一个交点. 对于直线 $y=2x+1$，令 $x=1$，则 $y=3$；令 $x=4$，则 $y=9$. 对于抛物线 $y=x^2-2x+b$，令 $x=1$，则 $y=b-1$；令 $x=4$，则 $y=b+8$. 易求该抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{-2}{2\times1}=1$. 如图，当 $1<x<4$ 时，抛物线 $y=x^2-2x+b$ 与直线 $y=2x+1$ 有且只有一个交点时，分为两种情况：一是当 $x=1$ 时，抛物线位于直线下方（含交点），且当 $x=4$ 时，抛物线位于直线上方（不含交点），即 $\begin{cases}b-1\leqslant3,\\b+8>9,\end{cases}$ 解得 $1<b\leqslant4$. 二是抛物线全部位于直线上方，且与直线相切（有唯一交点），即 $\begin{cases}b-1>3,\\b+8>9,\end{cases}$ 解得 $b>4$. 联立，得 $\begin{cases}y=x^2-2x+b,\\y=2x+1,\end{cases}$ 整理，得 $x^2-4x+b-1=0$，则根的判别式 $16-4\times1\times(b-1)=0$，解得 $b=5$. 综上所述，若抛物线 $y=x^2-2x+b$，在 $1<x<4$ 范围内有且只有一个点与点 $A(0,1)$ 互为“2 阶点”，则 $1<b\leqslant4$ 或 $b=5$. 故④错误.



2. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　**提示**：如图，过点 A 作 $AH\perp y$ 轴于点 H，连接 OA. 因为点 $A(2,2)$，所以 $AH=OH=2$，所以 $\triangle AOH$ 是等腰直角三角形，所以 $\angle AOC=45°$. 由旋转的性质可知，$\angle QAC=45°$，所以 $\angle AOC=\angle QAC$. 又因为 $\angle ACO=\angle QCA$，所以 $\triangle COA\backsim\triangle CAQ$，所以 $\frac{OC}{AC}=\frac{AC}{QC}$. 因为 $\frac{OC}{AC}=\frac{AC}{OC+OQ}$，$AC=OQ$，所以 $\frac{OC}{AC}=\frac{AC}{OC+AC}$，整理，得 $OC^2+OC\cdot AC-AC^2=0$，等式两边同时除以 AC^2，得 $\left(\frac{OC}{AC}\right)^2+\frac{OC}{AC}-1=0$，解得 $\frac{OC}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（负值舍去）.



3. (1) 如图 1,EF 即为所求.

证明:因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $AD/\!/BC$,所以 $\angle DAE=\angle AEB$. 因为 AE 平分$\angle BAD$,所以$\angle BAE=\angle DAE$,所以$\angle BAE=\angle AEB$,所以 $BE=AB$. 由作图方法,得 $AF=AB$. 所以 $AF=BE$,所以四边形 $ABEF$ 是平行四边形. 又因为 $AF=AB$,所以平行四边形 $ABEF$ 是菱形.

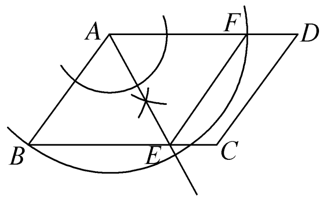


图 1

(2) **解**:分情况讨论:如图 2,以点 A 为圆心,AE 长为半径作弧,当该弧与直线 BC 相切时,只有一个交点,即为切点 G. 由题意及切线的性质可知,$AG\perp BC$,且 $AE=AG=8$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABG$ 中,$BG=\sqrt{AB^2-AG^2}=6<8$. 所以此时要满足 $GF=AG=8$,则点 F 一定在点 G 的右侧,即当 $AE=8$ 时,只能作出一个以 AE,AG 为邻边的菱形. 如图 3,以点 A 为圆心,AE 长为半径作弧,当该弧与边 BC 有两个交点,且其中一个交点 G_1 与点 B 重合时,则 $AE=AG_2=AB=10$. 过点 A 作 $AH\perp BC$ 于点 H. 同理可得 $BH=G_2H=6$. 所以 $BG_2=BH+G_2H=12$,所以 $CG_2=BC-BG_2=26-12=14>10$. 所以当 $AE=10$ 时,能作出两个菱形,即以 AE,AB 为邻边的菱形和以 AE,AG_2 为邻边的菱形. 当 $8<AE\leqslant 10$ 时,以点 A 为圆心,AE 长为半径作弧,则该弧与边 BC 均有两个交点,均能作出两个菱形. 如图 4,当点 F 恰好与点 C 重合时,过点 A 作 $AH\perp BC$ 于点 H. 同理可得 $AH=8$,$BH=6$,所以 $CH=BC-BH=20$. 设 $AE=AG=CG=x$,则 $HG=20-x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AGH$ 中,由勾股定理,得 $AG^2=AH^2+HG^2$,即 $x^2=8^2+(20-x)^2$,解得 $x=\frac{58}{5}$. 所以 $AE=\frac{58}{5}$. 当 $10<AE\leqslant\frac{58}{5}$时,以点 A 为圆心,AE 长为半径作弧,则该弧与边 BC 只有 1 个交点,且只能作出一个菱形.

综上所述,当 $AE=8$ 或 $10<AE\leqslant\frac{58}{5}$时,只能作出一个菱形.

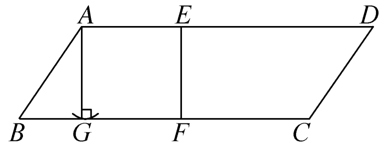


图 2

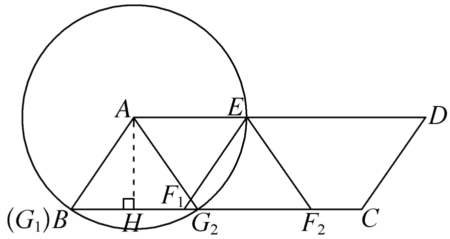


图 3

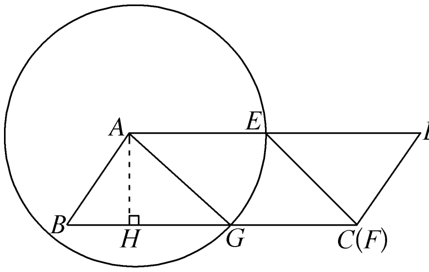


图 4

(3) $\frac{80}{27}$ **提示**:如图 5,过点 C 作 $CH\perp AB$ 于点 H,交 DG 于点 M. 由勾股定理,得 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=5$. 因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot CH$,所以 $CH=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{12}{5}$. 因为四边形 $DEFG$ 是菱形,所以 $DG/\!/AB$,所以$\triangle CDG\backsim\triangle CAB$,所以$\frac{CD}{CA}=\frac{CG}{CB}$,所以$\frac{CD}{CG}=\frac{CA}{CB}=\frac{3}{4}$. 设 $CD=3m(m>0)$,则 $CG=4m$,$DG=\sqrt{CD^2+CG^2}=5m$. 因为 $CH\perp AB$,$DG/\!/AB$,所以 $CH\perp DG$,即 $CM\perp DG$. 同理,由等积法,得 $CM=\frac{12}{5}m$. 所以 $MH=CH-CM=\frac{12}{5}-\frac{12}{5}m$,所以 $S_{菱形DEFG}=DG\cdot MH=5m\left(\frac{12}{5}-\frac{12}{5}m\right)=12m-12m^2=-12\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+3$. 因为 $-12<0$,所以当 $m<\frac{1}{2}$时,菱形 $DEFG$ 的面积随 m 的增大而增大. 易知 $\begin{cases}CG+GF\leqslant BC,\\GF\geqslant MH,\end{cases}$即$\begin{cases}4m+5m\leqslant 4,\\5m\geqslant\frac{12}{5}-\frac{12}{5}m,\end{cases}$所以$\frac{12}{37}\leqslant m\leqslant\frac{4}{9}$.

所以当 $m=\frac{4}{9}$ 时，菱形的面积最大，最大值为 $-12\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{2}\right)^2+3=\frac{80}{27}$.

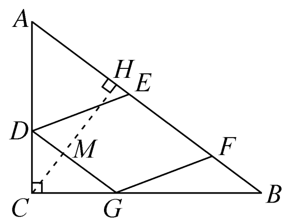


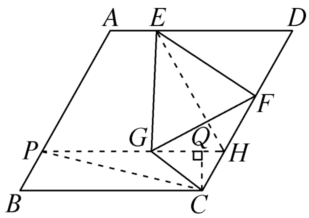
图 5

中考模拟压轴 5

2025 年苏州市昆山市、常熟市、太仓市、张家港市中考模拟压轴题

1. D **提示**：因为二次函数 $y=ax^2-4ax+3$ 的对称轴是直线 $x=-\frac{-4a}{2a}=2$，点 $C(2,y_3)$，且 $y_3\leqslant y_2\leqslant y_1$，所以该抛物线开口向上，即 $a>0$. 所以该抛物线上的点离对称轴越近，其函数值越小，所以 $|m+3-2|\leqslant|m-1-2|$，即 $|m+1|\leqslant|m-3|$. 分情况讨论：①当 $m\leqslant-1$ 时，$-1-m\leqslant3-m$，此时符合题意；②当 $-1<m\leqslant3$ 时，$m+1\leqslant3-m$. 解得 $m\leqslant1$. 此时 $-1<m\leqslant1$；③当 $m>3$ 时，$m+1\leqslant m-3$，此时无解. 综上所述，$m\leqslant1$.

2. $\sqrt{3}\leqslant d\leqslant2\sqrt{13}$ **提示**：如图，在边 CD 上截取 $DH=DE$，连接 HG 并延长，交 AB 于点 P，连接 EH. 因为四边形 $ABCD$ 是菱形，$AB=8$，$\angle B=60^\circ$，所以 $BC=CD=AD=AB=8$，$\angle D=\angle B=60^\circ$，所以 $\triangle EDH$ 是等边三角形，所以 $EH=DH=ED=AD-AE=6$，$\angle DEH=\angle DHE=60^\circ$. 因为 $\triangle EFG$ 是等边三角形，所以 $EG=EF$，$\angle FEG=60^\circ$. 易证 $\angle HEG=\angle DEF$. 在 $\triangle HEG$ 和 $\triangle DEF$ 中，$\begin{cases}EH=ED,\\ \angle HEG=\angle DEF,\\ EG=EF,\end{cases}$ 所以 $\triangle HEG\cong\triangle DEF$（SAS），所以 $\angle EHG=\angle D=60^\circ$，$GH=FD$，所以 $\angle GHC=180^\circ-\angle EHG-\angle DHE=60^\circ=\angle D$，所以 $PH/\!/AD/\!/BC$. 因为 $PB/\!/CH$，所以四边形 $PBCH$ 是平行四边形，所以 $PH=BC=8$，$PB=CH=CD-DH=2$. 连接 PC，过点 C 作 $CQ\perp PH$ 于点 Q. 在 $\mathrm{Rt}\triangle CQH$ 中，$\sin\angle QHC=\frac{CQ}{CH}$，即 $\frac{CQ}{2}=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $CQ=\sqrt{3}$；$\cos\angle QHC=\frac{QH}{CH}$，即 $\frac{QH}{2}=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$，所以 $QH=1$. 所以 $PQ=PH-QH=7$. 由勾股定理，得 $CP=\sqrt{PQ^2+CQ^2}=\sqrt{7^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{13}$. 因为 $\angle GHC=60^\circ$，H 为定点，且 $GH=FD$，$PH=CD$，点 F 在边 CD 上运动，所以点 G 在线段 PH 上运动. 因为 $CQ\leqslant CG\leqslant CP$，所以 CG 的长度 d 的取值范围是 $\sqrt{3}\leqslant d\leqslant2\sqrt{13}$.

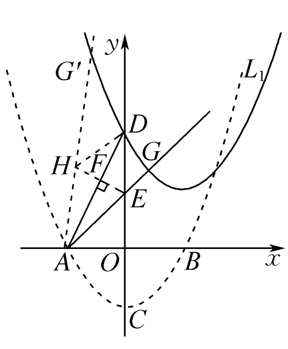


3. 解：(1) $(0,-2)$

(2) ①对于 $y=\frac{1}{2}x^2-2$，令 $y=0$，即 $\frac{1}{2}x^2-2=0$，解得 $x_1=2$，$x_2=-2$. 所以点 $B(2,0)$，$A(-2,0)$. 设点 $E(m,n)$. 由点 A 平移到点 E，点 $D(0,4)$ 平移到点 F，得 $\begin{cases}m-(-2)=x_F-0,\\ n-0=y_F-4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_F=m+2,\\ y_F=n+4,\end{cases}$ 所以点 $F(m+2,n+4)$. 因为点 E,F 均在抛物线 L_1 上，代入，得 $\begin{cases}\frac{1}{2}m^2-2=n,\\ \frac{1}{2}(m+2)^2-2=n+4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=1,\\ n=-\frac{3}{2}.\end{cases}$ 所以点 $E\left(1,-\frac{3}{2}\right)$.

②如图，将点 A 向右平移 2 个单位长度，再向上平移 4 个单位长度得到点 D，故抛物线 L_2 的函数表达式为 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-2+4=\frac{1}{2}x^2-2x+4$. 假设抛物线 L_2 上存在点 G，满足 $\angle GAD=45^\circ-\angle ADO$，即 $\angle GAD+\angle ADO=45^\circ$. 分情况讨论：当射线 AG 位于射线 AD 的右侧时，设直线 AG 交 y 轴于点 E. 由三角形外角的性质，得 $\angle AEO=\angle GAD+\angle ADO=45^\circ$. 所以 $\angle EAO=90^\circ-\angle AEO=45^\circ$，所以 $\angle EAO=\angle AEO$，所以 $OE=OA=2$，所以点 $E(0,2)$. 由

待定系数法，得直线 AE 的函数表达式为 $y=x+2$. 联立，得 $\begin{cases}y=x+2,\\ y=\frac{1}{2}x^2-2x+4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=3+\sqrt{5},\\ y_1=5+\sqrt{5},\end{cases}\begin{cases}x_2=3-\sqrt{5},\\ y_2=5-\sqrt{5}.\end{cases}$ 所以点 $G_1(3+\sqrt{5},5+\sqrt{5})$，$G_2(3-\sqrt{5},5-\sqrt{5})$. 当射线 AG' 位于射线 AD 的左侧时，若要满足 $\angle G'AD=45^\circ-\angle ADO$，则 $\angle G'AD=\angle GAD$，即射线 AG' 与射线 AG 关于射线 AD 对称. 过点 E 作 $EF\perp AD$ 于点 F，延长 EF 交 AG' 于点 H，连接 DH. 易证 $FH=EF$，即 AD 垂直平分 EH，所以 $AE=AH$，$DE=DH$. 设点 $H(a,b)(a<0,b>0)$. 由点 $A(-2,0)$，$D(0,4)$，$E(0,2)$ 及平面直角坐标系内两点间的距离公式，得 $\begin{cases}(a+2)^2+b^2=2^2+2^2,\\ (b-4)^2+a^2=(4-2)^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=0,\\ b_1=2,\end{cases}\begin{cases}a_2=-\frac{8}{5},\\ b_2=\frac{14}{5},\end{cases}$ 所以点 $H\left(-\frac{8}{5},\frac{14}{5}\right)$. 由待定系数法，得直线 AH 的函数表达式为 $y=7x+14$，联立，得 $\begin{cases}y=7x+14,\\ y=\frac{1}{2}x^2-2x+4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_3=9+\sqrt{101},\\ y_3=77+7\sqrt{101},\end{cases}\begin{cases}x_4=9-\sqrt{101},\\ y_4=77-7\sqrt{101}.\end{cases}$ 所以点 $G_3(9+\sqrt{101},77+7\sqrt{101})$，$G_4(9-\sqrt{101},77-7\sqrt{101})$. 综上所述，点 G 的坐标为 $(3+\sqrt{5},5+\sqrt{5})$ 或 $(3-\sqrt{5},5-\sqrt{5})$ 或 $(9+\sqrt{101},77+7\sqrt{101})$ 或 $(9-\sqrt{101},77-7\sqrt{101})$.

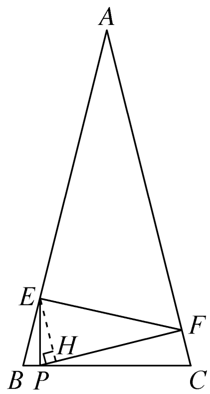


中考模拟压轴 6

2025 年无锡市惠山区中考模拟压轴题

1. C　提示：连接 AP. 若 P 为 BC 的中点，则 $AP\perp BC$，$BP=\frac{1}{2}BC=1$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABP$ 中，$\tan B=\frac{AP}{BP}$，即 $\frac{AP}{1}=4$，所以 $AP=4$，所以 $AB=\sqrt{AP^2+BP^2}=\sqrt{17}$. 由垂线段最短可知，当 $PE\perp AB$ 时，PE 的长有最小值，此时 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}BP\cdot AP=\frac{1}{2}AB\cdot PE$，所以 PE 长的最小值为 $\frac{BP\cdot AP}{AB}=\frac{1\times 4}{\sqrt{17}}=\frac{4\sqrt{17}}{17}$，故①正确. 因为 $AB=AC$，所以 $\angle B=\angle C$. 因为 $\angle EPF=\angle C$，所以 $\angle EPF=\angle B$. 因为 $\angle BEP+\angle BPE=180^\circ-\angle B$，$\angle BPE+\angle CPF=180^\circ-\angle EPF$，所以 $\angle BEP=\angle CPF$，所以 $\triangle BPE\backsim\triangle CFP$，所以 $\frac{BE}{CP}=\frac{BP}{CF}$. 设 $BP=x$，则 $CP=2-x$. 所以 $\frac{BE}{2-x}=\frac{x}{3}$，所以 $BE=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x=-\frac{1}{3}(x-1)^2+\frac{1}{3}$. 因为 $-\frac{1}{3}<0$，所以当 $x=1$，即 $BP=1$ 时，BE 的长有最大值，最大值为 $\frac{1}{3}$，故②正确. 因为 $\triangle BPE\backsim\triangle CFP$，所以 $\frac{BE}{CP}=\frac{BP}{CF}=\frac{PE}{FP}$. 因为 $PE=2PF$，所以 $BE=2CP$，$BP=2CF$，所以 $BE+2CF=2CP+BP=CP+BC=CP+2<4$，故③错误. 当 $\angle EPB=90^\circ$ 时，如图，过点 E 作 $EH\perp PF$ 于点 H. 设 $BP=a$，则 $CP=2-a$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BPE$ 中，$\tan B=\frac{PE}{BP}$，即 $\frac{PE}{a}=4$，所以 $PE=4a$，所以 $BE=\sqrt{PE^2+BP^2}=\sqrt{17}a$，所以 $\sin B=\frac{PE}{BE}=\frac{4a}{\sqrt{17}a}=\frac{4\sqrt{17}}{17}$. 因为 $\angle EPH=\angle B$，所以 $\sin B=\sin\angle EPH=\frac{EH}{PE}$，$\tan B=\tan\angle EPH=\frac{EH}{PH}$，即 $\frac{EH}{4a}=\frac{4\sqrt{17}}{17}$，$\frac{EH}{PH}=4$，所以 $EH=\frac{16\sqrt{17}}{17}a$，$PH=\frac{4\sqrt{17}}{17}a$. 因为 $\triangle BPE\backsim\triangle CFP$，所以 $\frac{BE}{CP}=\frac{PE}{FP}$，即 $\frac{\sqrt{17}a}{2-a}=\frac{4a}{FP}$，所以 $FP=\frac{4\sqrt{17}(2-a)}{17}$，所以 $FH=FP-PH=\frac{4\sqrt{17}(2-a)}{17}-\frac{4\sqrt{17}a}{17}=\frac{8\sqrt{17}(1-a)}{17}$. 在

Rt $\triangle EHF$ 中，$EF^2=EH^2+FH^2$，所以 $EF^2=\left(\frac{16\sqrt{17}a}{17}\right)^2+\left[\frac{8\sqrt{17}(1-a)}{17}\right]^2=\frac{320a^2-128a+64}{17}=\frac{320}{17}\left(a^2-\frac{2}{5}a\right)+\frac{64}{17}=\frac{320}{17}\left(a-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{256}{85}$. 因为 $\frac{320}{17}>0$，当 $a=\frac{1}{5}$，即 $BP=\frac{1}{5}$ 时，EF^2 有最小值，即 EF 的长有最小值，故④正确.



2. $\frac{2}{3}$　$y=\frac{\sqrt{3}(2x-1)^2}{2x}\left(\frac{1}{2}<x<1\right)$

提示：因为正三角形的边长为 1，所以 $AB=BC=AC=1$，$\angle A=\angle ABC=\angle C=60°$. 若 $BE=x$，则 $CE=1-x$. 易得 $\frac{1}{2}<x<1$. 在 Rt$\triangle CDE$ 中，$\angle C=60°$，所以 $\angle CDE=30°$，所以 $CD=2CE=2-2x$，$DE=\sqrt{3}CE=\sqrt{3}(1-x)$. 因为 $AB=AC$，$BM=AD$，所以 $AB-BM=AC-AD$，所以 $AM=CD=2-2x$. 当 $AM=BE$ 时，$BE=CD$，即 $x=2-2x$，解得 $x=\frac{2}{3}$. 延长 MN 交 BC 于点 G. 由题可知，$BM=AB-AM=1-(2-2x)=2x-1$. 因为 $MN/\!/DE$，$DE\perp BC$，所以 $MG\perp BC$. 在 Rt$\triangle BMG$ 中，$\angle MBG=60°$，所以 $\angle BMG=30°$，所以 $BG=\frac{1}{2}BM=\frac{1}{2}(2x-1)$，$MG=\sqrt{3}BG=\frac{\sqrt{3}}{2}(2x-1)$. 因为 $MN/\!/DE$，所以 $\triangle BGN\backsim\triangle BED$，所以 $\frac{BG}{BE}=\frac{NG}{DE}$，即 $\frac{\frac{2x-1}{2}}{x}=\frac{NG}{\sqrt{3}(1-x)}$，所以 $NG=\frac{\sqrt{3}(1-x)(2x-1)}{2x}$，所以 $y=MN=MG-NG=\frac{\sqrt{3}}{2}(2x-1)-\frac{\sqrt{3}(1-x)(2x-1)}{2x}=\frac{\sqrt{3}(2x-1)^2}{2x}\left(\frac{1}{2}<x<1\right)$.

3. 解：(1) 由题可知，抛物线 $y=ax^2-3x+c$ 的对称轴为直线 $x=-\frac{3}{2}$，即 $-\frac{-3}{2a}=-\frac{3}{2}$，解得 $a=-1$. 所以 $y=-x^2-3x+c$，把点 $B(1,0)$ 代入，得 $0=-1-3+c$，解得 $c=4$. 所以该二次函数的表达式为 $y=-x^2-3x+4$.

(2) ①如图 1，连接 AE，交 BP 于点 Q. 设点 E 的坐标为 $(m,-3)\left(m<-\frac{3}{2}\right)$. 对于 $y=-x^2-3x+4$，令 $y=0$，即 $0=-x^2-3x+4$，解得 $x_1=1$，$x_2=-4$. 所以点 $A(-4,0)$，$B(1,0)$，所以 $AB=1-(-4)=5$. 由折叠的性质可知，BP 垂直平分 AE，Q 为 AE 的中点，$BE=AB=5$. 由两点间的距离公式，得 $(m-1)^2+(-3-0)^2=5^2$，解得 $m=-3$ 或 $m=5$（舍去）. 所以点 $E(-3,-3)$，由中点坐标公式，得点 $Q\left(\frac{-3-4}{2},\frac{-3+0}{2}\right)$，即 $\left(-\frac{7}{2},-\frac{3}{2}\right)$. 由点 $B(1,0)$，$Q\left(-\frac{7}{2},-\frac{3}{2}\right)$ 及待定系数法，得直线 BP 的函数表达式为 $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$. 联立，得 $\begin{cases}y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3},\\ y=-x^2-3x+4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-\frac{13}{3},\\ y_2=-\frac{16}{9}.\end{cases}$ 所以点 P 的坐标为 $\left(-\frac{13}{3},-\frac{16}{9}\right)$.

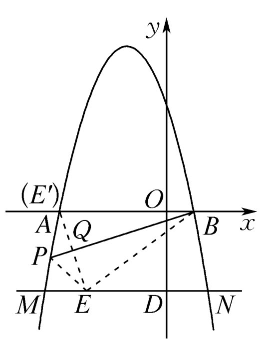


图 1

②点 E' 的坐标为 $(-2,-\sqrt{10}-1)$ 或 $(-2,\sqrt{10}-1)$ 或 $(4,\sqrt{15}-6)$ 或 $(4,-\sqrt{15}-6)$.

提示：当以 B,E,P,E' 为顶点的四边形是矩形时，$\triangle BPE$ 为直角三角形. 因为 $\triangle BPE$ 沿直线 BP 翻折得到 $\triangle BPE'$，所以 BP 为对角线，且 $BE=BE'$，所以 $PE=$

BE，$\triangle BPE$ 为等腰直角三角形，且 $\angle BEP=90^\circ$，所以点 P 可看作点 B 绕点 E 旋转 90° 得到的.设点 $E(m,-3)$.如图 2，当点 B 绕点 E 逆时针旋转 90° 得到点 P 时，易知 $x_P-x_E=y_E-y_B$，$y_P-y_E=x_B-x_E$，即 $x_P-m=-3-0$，$y_P-(-3)=1-m$，所以 $x_P=m-3$，$y_P=-m-2$，代入二次函数表达式 $y=-x^2-3x+4$，得 $-m-2=-(m-3)^2-3(m-3)+4$，解得 $m_1=2+\sqrt{10}$，$m_2=2-\sqrt{10}$.设点 $E'(x_e,y_e)$，易知 EE' 的中点与 BP 的中点重合，根据中点坐标公式，得 $\begin{cases}x_e+m=x_P+1,\\y_e-3=y_P+0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_e=-2,\\y_e=-m+1,\end{cases}$ 代入 m，得点 $E'_1(-2,-\sqrt{10}-1)$，$E'_2(-2,\sqrt{10}-1)$.如图 3，当点 B 绕点 E 顺时针旋转 90° 得到点 P 时，易知 $x_P-x_E=y_B-y_E$，$y_P-y_E=x_E-x_B$，即 $x_P-m=0-(-3)$，$y_P-(-3)=m-1$，所以 $x_P=m+3$，$y_P=m-4$，代入 $y=-x^2-3x+4$，得 $m-4=-(m+3)^2-3(m+3)+4$，解得 $m_3=\sqrt{15}-5$，$m_4=-\sqrt{15}-5$，同理可得，此时 $\begin{cases}x_e=4,\\y_e=m-1,\end{cases}$ 所以点 $E'_3(4,\sqrt{15}-6)$，$E'_4(4,-\sqrt{15}-6)$.综上所述，点 E' 的坐标为 $(-2,-\sqrt{10}-1)$ 或 $(-2,\sqrt{10}-1)$ 或 $(4,\sqrt{15}-6)$ 或 $(4,-\sqrt{15}-6)$.

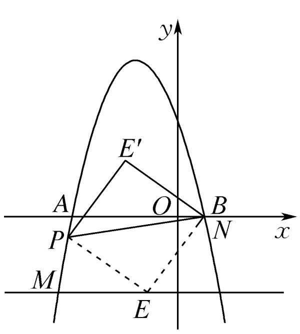


图 2

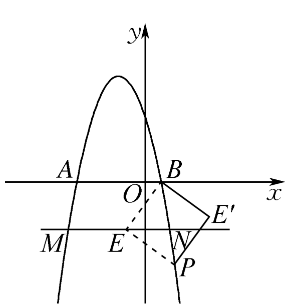


图 3

中考模拟压轴 7

2025 年无锡市江阴市、锡山区中考模拟压轴题

1. B　提示：由 $y=\frac{x^2-m}{3}$，得 $m=x^2-3y$.由 $x=\frac{y^2-m}{3}$，得 $m=y^2-3x$.所以 $x^2-3y=y^2-3x$，整理，得 $x^2-y^2+3x-3y=(x+y)(x-y)+3(x-y)=(x+y+3)(x-y)=0$，所以 $x+y+3=0$ 或 $x-y=0$，即“和谐点”M 在直线 $y=-x-3$ 或直线 $y=x$ 上.因为点 $P(2,2)$ 在直线 $y=x$ 上，所以 $P(2,2)$ 是“和谐点”，故①正确.因为直线 $y=-2x+5$ 与直线 $y=-x-3$ 或直线 $y=x$ 均相交，且交点不重合，所以直线上有两个“和谐点”[也可把 $y=-2x+5$ 代入 $y=\frac{x^2-m}{3}$，得 $m=x^2+6x-15$，再把 $y=-2x+5$，$m=x^2+6x-15$ 代入 $x=\frac{y^2-m}{3}$，得 $3x^2-29x+40=0$.根据 $(-29)^2-4\times3\times40>0$，判断出该方程有两个不相等的实数根，即 $x=8$ 或 $x=\frac{5}{3}$.从而得解]，故②错误.画出草图，观察发现直线 $y=x$ 和双曲线 $y=\frac{k}{x}(k>2)$ 一定有两个交点[或联立，得 $\begin{cases}y=x,\\y=\frac{k}{x}(k>2),\end{cases}$ 得 $x^2-k=0$.根据 $0-4\times(-k)=4k>0$，判断出该方程有两个不相等的实数根，即此时反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像上有两个“和谐点”].联立，得 $\begin{cases}y=-x-3,\\y=\frac{k}{x}(k>2),\end{cases}$ 得 $x^2+3x+k=0$.根的判别式为 $9-4k$，当 $2<k<\frac{9}{4}$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $k=\frac{9}{4}$ 时，方程有两个相等的实数根；当 $k>\frac{9}{4}$ 时，方程没有实数根.所以直线 $y=-x-3$ 和双曲线 $y=\frac{k}{x}(k>2)$ 的交点个数为 2 或 1 或 0.所以反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像上最多有四个“和谐点”，故③错误.若二次函数 $y=x^2+x+a$ 的图像上有 3 个“和谐点”，则二次函数 $y=x^2+x+a$ 的图像与直线 $y=-x-3$ 或直线 $y=x$ 相交，共有 3 个交点.分情况讨论：联立，得 $\begin{cases}y=-x-3,\\y=x^2+x+a,\end{cases}$ 得 $x^2+2x+a+3=0$，当根的判别式 $4-4\times1\times(a+3)=0$ 时，解得 $a=-2$.联立，得 $\begin{cases}y=x,\\y=x^2+x+a,\end{cases}$ 得 $x^2+a=0$，根的判别式 $0-4a=-4a$，当 $a=-2$ 时，$-4a=8>0$，即当 $a=-2$ 时，抛物线 $y=x^2+x+a$ 与直线 $y=-x-3$ 有一个交点，与直线 $y=x$ 有两个交点.当 $-4a=0$ 时，$a=0$.将 $a=0$ 代入 $4-4\times1\times(a+3)$，得 $4-12=-8<0$，即当 $a=0$ 时，抛物线 $y=x^2+x+a$ 与直线 $y=x$ 有一个交点，与直线 $y=-x-3$ 没有交点，不符合题意.联立，得 $\begin{cases}y=x,\\y=-x-3,\end{cases}$ 解得 $x=y=-\frac{3}{2}$.将点 $\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$ 代入

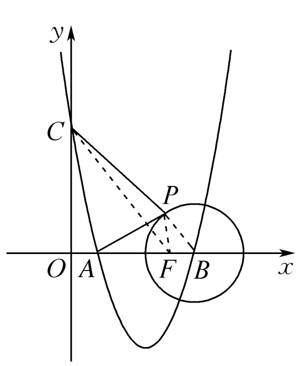
$y=x^2+x+a$，得 $-\frac{3}{2}=\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)+a$，解得 $a=-\frac{9}{4}$. 此时 $\begin{cases}4-4\times1\times(a+3)=1>0,\\-4a=9>0,\end{cases}$ 即抛物线 $y=x^2+x+a$ 与直线 $y=-x-3$，$y=x$ 均有两个交点，但有一个交点重合. 综上所述，若二次函数 $y=x^2+x+a$ 的图像上有 3 个“和谐点”，则 $a=-2$ 或 $a=-\frac{9}{4}$，故④正确.

2. 4∶5∶3　**提示**：过点 F 作 $FM\perp BC$ 于点M. 设 $AE=a$. 因为 E 是 AB 的中点，所以 $BE=AE=a$. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $BC=CD=AD=AB=2a$，$\angle A=\angle ABC=\angle C=90°$，所以 $\angle ADE+\angle AED=90°$. 因为 $EF\perp DE$，所以$\angle GEF+\angle AED=90°$，所以$\angle ADE=\angle GEF$. 因为 $FG\perp AB$，所以$\angle G=90°=\angle A$. 又因为 $EF=DE$，所以$\triangle ADE\cong\triangle GEF$(AAS)，所以 $GF=AE=a$，$GE=AD=2a$，所以 $BG=GE-BE=a=GF$. 易证四边形 $MBGF$ 是正方形，所以 $FM=BM=BG=GF=a$，所以 $FM=EB$. 易证$\triangle FMK\cong\triangle EBK$(AAS)，所以 $MK=BK=\frac{1}{2}BM=\frac{1}{2}a$. 易证 $DC\parallel FM$，所以 $\triangle DCH\backsim\triangle FMH$，所以 $\frac{CH}{MH}=\frac{CD}{MF}=\frac{2a}{a}=2$，所以 $CH=2MH$. 因为 $CH+MH=CM=BC-BM=a$，所以 $CH=\frac{2}{3}a$，$MH=\frac{1}{3}a$，所以 $HK=MH+MK=\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}a=\frac{5}{6}a$，所以 $CH:HK:BK=\frac{2}{3}a:\frac{5}{6}a:\frac{1}{2}a=4:5:3$.

3. 解：(1) 因为抛物线 $y=ax^2+bx+5$ 的对称轴为直线 $x=3$，且 $AB=4$，所以点 $A(1,0)$，$B(5,0)$，则抛物线的函数表达式为 $y=a(x-1)(x-5)=a(x^2-6x+5)=ax^2-6ax+5a=ax^2+bx+5$，所以 $5a=5$，$-6a=b$，所以 $a=1$，$b=-6$. 所以抛物线的函数表达式为 $y=x^2-6x+5$.

(2) 将点 $A(1,0)$代入 $y=kx-1$，得 $k-1=0$，解得 $k=1$. 所以直线 AD 的函数表达式为 $y=x-1$，令 $x=3$，则 $y=2$，所以点 $D(3,2)$. 设点 $M(x,y)$. 由两点间的距离公式，得 $AD^2=(3-1)^2+2^2=8$，$AM^2=(x-1)^2+y^2$，$DM^2=(x-3)^2+(y-2)^2$. 分情况讨论：①当$\angle DAM=90°$时，由 $AD^2+AM^2=DM^2$，得 $8+(x-1)^2+y^2=(x-3)^2+(y-2)^2$，整理，得 $y=-x+1$. 联立，得 $\begin{cases}y=-x+1,\\y=x^2-6x+5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=4,\\y=-3.\end{cases}$ 所以点 M 的坐标为(4，-3).
②当$\angle ADM=90°$时，$AD^2+DM^2=AM^2$，同理，得点 M 的坐标为(0，5)或(5，0). 综上所述，点 M 的坐标为(4，-3)或(0，5)或(5，0).

(3) 如图，在线段 AB 上取点 F，使 $BF=1$，连接 CF，PF，PB. 因为 $PB=2$，所以 $\frac{BF}{PB}=\frac{1}{2}$. 因为 $\frac{PB}{AB}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{BF}{BP}=\frac{PB}{AB}$. 又因为 $\angle PBF=\angle ABP$，所以$\triangle PBF\backsim\triangle ABP$，所以 $\frac{FP}{PA}=\frac{BF}{BP}=\frac{1}{2}$，即 $FP=\frac{1}{2}PA$. 所以 $PC+\frac{1}{2}PA=PC+FP\geqslant CF$，所以当 C，P，F 三点依次共线时，$PC+\frac{1}{2}PA$ 的值最小，最小值为线段 CF 的长. 在 Rt$\triangle OCF$ 中，$OC=5$，$OF=OB-1=5-1=4$，所以 $CF=\sqrt{OC^2+OF^2}=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}$，所以 $PC+\frac{1}{2}PA$ 的最小值为$\sqrt{41}$.



中考模拟压轴 8

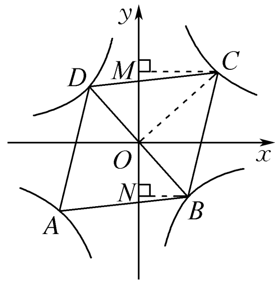
2025 年常州市溧阳市中考模拟压轴题

1. D　**提示**：连接 OD. 设 AC 的中垂线交 x 轴于点 H，则 $AH=CH=\frac{1}{2}AC$. 因为 C 是AO 的中点，所以

$AC=\frac{1}{2}AO$，所以 $AH=\frac{1}{4}AO$. 因为 $FH\perp x$ 轴，$BO\perp x$ 轴，所以 $FH\parallel BO$，所以 $\triangle AFH\backsim\triangle ABO$，所以 $\frac{S_{\triangle AFH}}{S_{\triangle ABO}}=\left(\frac{AH}{AO}\right)^2=\frac{1}{16}$. 因为 $S_{\triangle AFC}=\frac{1}{2}$，$AH=CH$，所以 $S_{\triangle AFH}=\frac{1}{2}S_{\triangle AFC}=\frac{1}{4}$，所以 $S_{\triangle ABO}=16S_{\triangle AFH}=4$，即 $\frac{1}{2}OA\cdot OB=4$. 由折叠的性质，得 $DE=OB$，$CE=OA$，所以 $OE=CE+OC=\frac{3}{2}OA$. 所以 $S_{\triangle ODE}=\frac{1}{2}OE\cdot DE=\frac{3}{4}OA\cdot OB=6$，即 $\frac{|k|}{2}=6$，所以 $k=\pm12$. 因为反比例函数的图像位于第二象限，所以 $k<0$，即 $k=-12$.

2. $16\sqrt{3}$ **提示:解法 1** 如图，连接 OC，过点 C 作 $CM\perp y$ 轴于点 M，过点 B 作 $BN\perp y$ 轴于点 N，则 $\angle OMC=\angle BNO=90°$. 由反比例函数图像的中心对称性可知，$OB=OD$，则 O 为菱形 $ABCD$ 对角线的交点，所以 $OC\perp BD$，所以 $\angle BOC=90°$，所以 $\angle COM+\angle BON=90°$. 因为 $\angle COM+\angle OCM=90°$，所以 $\angle OCM=\angle BON$，所以 $\triangle COM\backsim\triangle OBN$，所以 $\frac{S_{\triangle COM}}{S_{\triangle OBN}}=\left(\frac{OC}{BO}\right)^2$. 因为四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle ABC=120°$，所以 $\angle ABD=\angle CBD=60°$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BOC$ 中，由 $\tan\angle CBO=\frac{OC}{BO}$，得 $\frac{OC}{BO}=\tan 60°=\sqrt{3}$，即 $OC=\sqrt{3}BO$. 所以 $\frac{S_{\triangle COM}}{S_{\triangle OBN}}=\left(\frac{OC}{BO}\right)^2=3$. 由反比例函数 k 的几何意义可知，$S_{\triangle COM}=\frac{k_1}{2}$，$S_{\triangle OBN}=-\frac{k_2}{2}$，所以 $\frac{k_1}{k_2}=-3$. 因为 $k_1+k_2=8$，所以 $k_1=12$，$k_2=-4$. 设点 B 的坐标为 (a,b)，则 $ab=-4$，$a^2+b^2=BO^2$. 因为 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\geqslant0$，所以 $a^2+b^2\geqslant-2ab$，即 $BO^2\geqslant8$. 所以 $S_{菱形ABCD}=2\times\frac{1}{2}BD\cdot OC=2BO\cdot OC=2\sqrt{3}BO^2\geqslant16\sqrt{3}$，即菱形 $ABCD$ 面积的最小值是 $16\sqrt{3}$.

解法 2 由解法 1 可知，$\triangle COM\backsim\triangle OBN$，所以 $\frac{OM}{BN}=\frac{CM}{ON}=\frac{OC}{BO}=\sqrt{3}$，即 $OM=\sqrt{3}BN$，$CM=\sqrt{3}ON$. 设点 B 的坐标为 $\left(m,\frac{k_2}{m}\right)$，则 $BN=m$，$ON=-\frac{k_2}{m}$，所以 $OM=\sqrt{3}m$，$CM=\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{k_2}{m}\right)=-\frac{\sqrt{3}k_2}{m}$，所以点 $C\left(-\frac{\sqrt{3}k_2}{m},\sqrt{3}m\right)$. 因为点 C 在反比例函数 $y=\frac{k_1}{x}(k_1>0)$ 的图像上，所以 $-\frac{\sqrt{3}k_2}{m}\cdot\sqrt{3}m=k_1$，所以 $k_1=-3k_2$. 因为 $k_1+k_2=8$，所以 $k_1=12$，$k_2=-4$. 所以点 $C\left(\frac{4\sqrt{3}}{m},\sqrt{3}m\right)$，$B\left(m,-\frac{4}{m}\right)$. 由两点间的距离公式，得 $OC=\sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3}}{m}\right)^2+(\sqrt{3}m)^2}$，$OB=\sqrt{m^2+\frac{16}{m^2}}$，所以 $S_{菱形ABCD}=2\times\frac{1}{2}BD\cdot OC=2OB\cdot OC=2\sqrt{m^2+\frac{16}{m^2}}\cdot\sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3}}{m}\right)^2+(\sqrt{3}m)^2}=2\sqrt{\left(m^2+\frac{16}{m^2}\right)\left(\frac{48}{m^2}+3m^2\right)}=2\sqrt{3\left(m^2+\frac{16}{m^2}\right)^2}=2\sqrt{3}\left(m^2+\frac{16}{m^2}\right)=2\sqrt{3}\left(m-\frac{4}{m}\right)^2+16\sqrt{3}$，所以当 $m=\frac{4}{m}$ 时，$S_{菱形ABCD}$ 有最小值，最小值为 $16\sqrt{3}$.



3. 解：(1) 24 **提示**：由题意，得点 $A(-2,0)$，$B(6,0)$，$Q(2,0)$. 所以 $BQ=6-2=4$. 因为四边形 $DQBC$ 是平行四边形，所以 $DC=BQ=4$. 因为 P 是对称轴上一动点(不与点 Q 重合)，且 $CD\parallel x$ 轴，所以点 C，D 关于对称轴对称，所以 $\frac{x_C+x_D}{2}=2$，$x_C-x_D=4$，所以 $x_C=4$，$x_D=0$，所以 $y_D=6$，所以 $S_{平行四边形DQBC}=BQ\cdot|y_D|=24$.

(2) 对于 $y=-\frac{1}{2}x^2+2x+6$，令 $y=0$，得 $-\frac{1}{2}x^2+2x+6=0$，解得 $x_1=-2$，$x_2=6$. 所以点 $A(-2,0)$，$B(6,0)$，所以该抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{-2+6}{2}=2$，所以点 $Q(2,0)$，所以 $BQ=6-2=4$. 分情况讨论：如图 1，当点 P 在 x 轴上方时，设点 D 的坐标为 (x,y) $(x<2,y>0)$，则 $PD=2-x$，$PT=y-TQ$. 由题可知，点 C，D 关于对称轴对称，所以 $PC=PD$，$\angle PCT=\angle PDT$. 因为 $CD\parallel x$ 轴，

所以$\angle PDT=\angle DBQ$.所以$\angle PCT=\angle DBQ$.又因为$\angle PCT=\angle QTB$,所以$\angle DBQ=\angle QTB$.所以$\angle PDT=\angle QTB=\angle PTD$,所以$TQ=BQ=4$,$PD=PT$,即$2-x=y-4$,所以$y=-x+6$.令$y=0$,则$x=6$.所以点$B(6,0)$在直线$y=-x+6$上,则直线$BD$的函数表达式为$y=-x+6$.如图2,当点$P$在$x$轴下方时,设点$D$的坐标为$(x,y)(x<2,y<0)$,则$PD=2-x$,$PT=-y-TQ$.同理,得$TQ=BQ=4$,$PD=PT$,则$2-x=-y-4$,所以$y=x-6$.令$y=0$,则$x=6$.所以点$B(6,0)$在直线$y=x-6$上,则直线$BD$的函数表达式为$y=x-6$.综上所述,直线$BD$的函数表达式为$y=x-6$或$y=-x+6$.

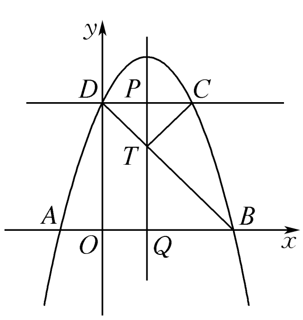


图 1

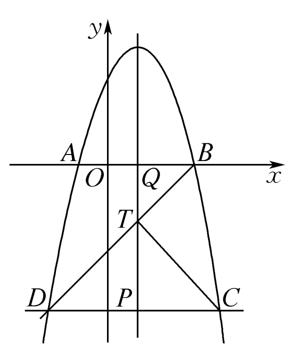


图 2

(3) 点M的坐标为$(1+\sqrt{5},5+\sqrt{5})$或$(1-\sqrt{5},5-\sqrt{5})$或$(3+\sqrt{21},-3-\sqrt{21})$或$(3-\sqrt{21},\sqrt{21}-3)$. **提示**:分情况讨论:如图3,当点$P$在$x$轴上方时,以$BD$为直径作圆,交抛物线于点$M$和点$M_1$,连接$DM$,$BM$,$DM_1$,$BM_1$,过点$M$作$MH\perp x$轴于点$H$,交$CD$于点$G$.联立,得$\begin{cases}y=-x+6,\\ y=-\frac{1}{2}x^2+2x+6,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=6,\\ y=0,\end{cases}$或$\begin{cases}x=0,\\ y=6.\end{cases}$所以点$D(0,6)$,$OD=6$.因为$CD/\!/x$轴,所以$MH\perp CD$.易证四边形$DOHG$是矩形,所以$HG=OD=6$,$OH=DG$.设点$M\left(m,-\frac{1}{2}m^2+2m+6\right)(m>0)$,则$DG=OH=m$,$BH=6-m$,$MH=-\frac{1}{2}m^2+2m+6$,$MG=MH-HG=-\frac{1}{2}m^2+2m$.因为$BD$为圆的直径,所以$\angle DMB=90^\circ$,所以$\angle MDG=90^\circ-\angle DMG=\angle HMB$,所以$\tan\angle MDG=\tan\angle HMB$.所以$\frac{MG}{DG}=\frac{BH}{MH}$,即$\frac{-\frac{1}{2}m^2+2m}{m}=\frac{6-m}{-\frac{1}{2}(m+2)(m-6)}$($M_1$的横坐标也满足该式),整理,得$m^2-2m-4=0$,解得$m_1=1+\sqrt{5}$,$m_2=1-\sqrt{5}$.当$m=1+\sqrt{5}$时,$-\frac{1}{2}m^2+2m+6=5+\sqrt{5}$,此时点$M(1+\sqrt{5},5+\sqrt{5})$;当$m=1-\sqrt{5}$时,$-\frac{1}{2}m^2+2m+6=5-\sqrt{5}$,此时点$M_1(1-\sqrt{5},5-\sqrt{5})$.如图4,当点$P$在$x$轴下方时,以$BD$为直径作圆,交抛物线于点$M_2$和点$M_3$,连接$DM_2$,$BM_2$,$DM_3$,$BM_3$,过点$M_2$作$M_2N\perp x$轴于点$N$,交$CD$于点$T$.联立,得$\begin{cases}y=x-6,\\ y=-\frac{1}{2}x^2+2x+6,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=6,\\ y=0,\end{cases}$或$\begin{cases}x=-4,\\ y=-10.\end{cases}$所以点$D(-4,-10)$,$NT=|y_D|=10$.设点$M_2\left(n,-\frac{1}{2}n^2+2n+6\right)(n<0)$,则$M_2N=-\frac{1}{2}n^2+2n+6$,$BN=6-n$,$M_2T=M_2N+NT=-\frac{1}{2}n^2+2n+16$,$DT=n+4$.因为$BD$为圆的直径,所以$\angle DM_2B=90^\circ$,所以$\angle DM_2T=90^\circ-\angle NM_2B=\angle NBM_2$,所以$\tan\angle DM_2T=\tan\angle NBM_2$,所以$\frac{DT}{M_2T}=\frac{M_2N}{BN}$,即$\frac{n+4}{-\frac{1}{2}(n+4)(n-8)}=\frac{-\frac{1}{2}(n+2)(n-6)}{6-n}$($M_3$的横坐标也满足该式),整理,得$n^2-6n-12=0$,解得$n_1=3+\sqrt{21}$,$n_2=3-\sqrt{21}$.当$n=3+\sqrt{21}$时,$-\frac{1}{2}n^2+2n+6=-\sqrt{21}-3$,此时点$M_3(3+\sqrt{21},-3-\sqrt{21})$;当$n=3-\sqrt{21}$时,$-\frac{1}{2}n^2+2n+6=\sqrt{21}-3$,此时点$M_2(3-\sqrt{21},\sqrt{21}-3)$.综上所述,点$M$的坐标为$(1+\sqrt{5},5+\sqrt{5})$或$(1-\sqrt{5},5-\sqrt{5})$或$(3+\sqrt{21},-3-\sqrt{21})$或$(3-\sqrt{21},\sqrt{21}-3)$.

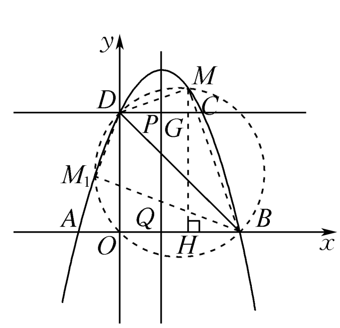


图 3

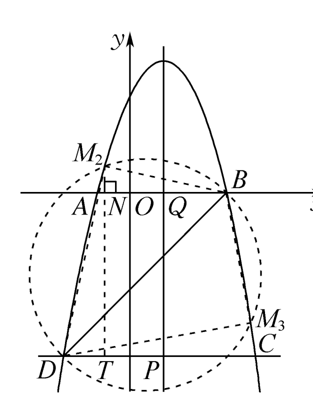


图 4

中考模拟压轴 9

2025 年镇江市中考模拟压轴题

1. $\frac{162}{25}$ **提示**：过点 P 作 $PQ \perp x$ 轴于点 Q. 因为四边形 $ABOC$ 为矩形，所以 $\angle A=\angle B=90°$，$AC=BO$. 因为点 A 的坐标为 $(-6,9)$，所以 $AC=BO=6$，$AB=9$. 由折叠的性质可知，$DE=AE$，$DP=AC=6$，$\angle PDE=\angle A=90°$. 因为 D 为 OB 的中点，所以 $BD=OD=3$. 设 $BE=n$，则 $DE=AE=9-n$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BDE$ 中，$DE^2=BE^2+BD^2$，即 $(9-n)^2=n^2+3^2$，解得 $n=4$. 所以 $BE=4$，$DE=9-4=5$. 因为 $\angle BDE+\angle QDP=90°$，$\angle BDE+\angle BED=90°$，所以 $\angle BED=\angle QDP$. 又因为 $\angle DBE=\angle PQD=90°$，所以 $\triangle DBE \backsim \triangle PQD$，所以 $\frac{PQ}{DB}=\frac{QD}{BE}=\frac{PD}{DE}$，即 $\frac{PQ}{3}=\frac{QD}{4}=\frac{6}{5}$，所以 $PQ=\frac{18}{5}$，$QD=\frac{24}{5}$，所以 $OQ=QD-OD=\frac{24}{5}-3=\frac{9}{5}$，所以点 $P\left(\frac{9}{5},\frac{18}{5}\right)$. 因为点 P 在 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 的图像上，所以 $k=\frac{9}{5}\times\frac{18}{5}=\frac{162}{25}$.

2. 解：(1) 如图 1，点 E，E' 均为所求. 作图原理：由 $BD:CD=1:3$，得 $BD:BC=1:4$. 若满足 $DE:AC=1:4$，则需 $\frac{DE}{CA}=\frac{BD}{BC}$，观察等式，发现 DE，BD 为 $\triangle BDE$ 的两条边，CA，BC 为 $\triangle BCA$ 的两条边，故可根据“两边对应成比例且夹角相等”构造相似三角形，得到点 E. 作 $\angle BDE=\angle C$，交 AB 于点 E. 则 $DE /\!/ AC$，所以 $\triangle BDE \backsim \triangle BCA$，所以 $\frac{DE}{AC}=\frac{BD}{BC}=\frac{1}{4}$. 以点 D 为圆心，DE 长为半径作弧交 AB 于另一点 E'，则 $DE'=DE$，故 $DE':AC=1:4$.

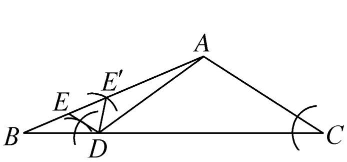


图 1

(2) 当 $\angle A$ 为钝角时，如图 2，直线 BC 即为所求. 作图原理：由题可知，$\angle A$ 只能为等腰三角形的顶角. 由等腰三角形“三线合一”的性质可知，过点 P 的底边所在的直线一定垂直于 $\angle A$ 的平分线. 故先作 $\angle A$ 的平分线，再过点 P 作 $\angle A$ 的平分线的垂线，分别交 $\angle A$ 的两边于点 B，C，连接 BC，则直线 BC 即为所求.

当 $\angle A$ 为锐角时，过点 P 截 $\angle A$ 成等腰三角形的直线有 3 条：①当 $\angle A$ 为等腰三角形的顶角时，如图 3，直线 MN 即为所求. 作图原理同图 2. ②当 $\angle A$ 为等腰三角形的底角时，如图 4，直线 EF 即为所求；如图 5，直线 GH 即为所求. 作图原理：如图 4，在 $\angle A$ 的一边上任取一点 D，连接 PD；作 $\angle 4=\angle 3$，则 $PQ /\!/ AD$，所以 $\angle A=\angle 2$；以点 P 为圆心，PQ 长为半径作弧，交 $\angle A$ 的一边于点 E，连接 EP 并延长，交 $\angle A$ 的另一边于点 F，则 $\angle 1=\angle 2=\angle A$，所以 $\triangle AFE$ 为等腰三角形，直线 EF 即为所求. 同理过点 P 作 $\angle A$ 另一条边的平行线，如图 5，直线 GH 即为所求.

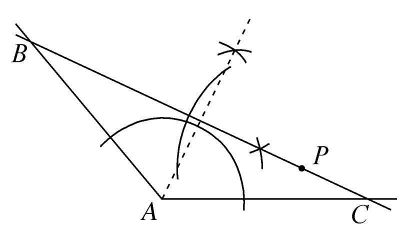


图 2

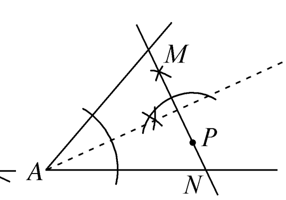


图 3

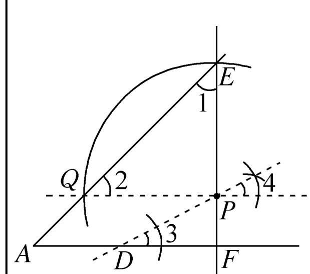


图 4

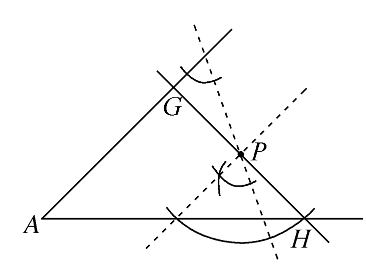


图 5

(3) $\angle A$ 为钝角或直角或 $\angle A=60°$

提示：当 $\angle A$ 为钝角或直角时，因为等腰三角形的两个底角相等，且三角形中不可能有两个钝角或两个直角，所以 $\angle A$ 只能是等腰三角形的顶角，故过点 P 截 $\angle A$ 成等腰三角形的直线只有一条；当 $\angle A=60°$ 时，此时的等腰三角形是等边三角形，故也只有一条直线.

(4) 作法：如图 6，过点 C 作 $MC \perp AC$ 于点 C，且截取 $CM=l$；过点 M 作 $NM \perp CM$，交

AB 所在直线于点 N；作 $\angle ANM$ 的平分线 NP，交 BC 于点 P. 则点 P 即为所求.

理由：如图 7，过点 P 分别作 $PE\perp AB$ 于点 E，$PG\perp MN$ 于点 G，根据角平分线的性质，得 $PG=PE$，延长 GP 交 AC 于点 F. 根据作图，得 $\angle FCM=\angle CMG=\angle MGF=90^\circ$，所以四边形 $FGMC$ 是矩形，故 $PF\perp AC$，且 $PE+PF=PG+PF=FG=MC=l$.

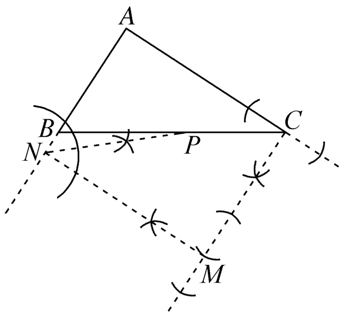


图 6

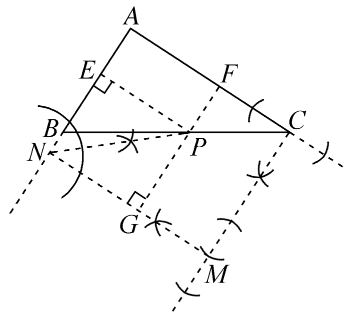
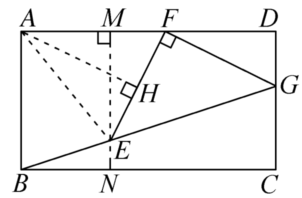


图 7

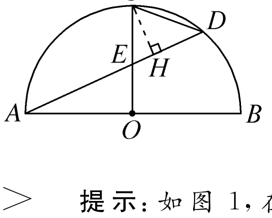
中考模拟压轴 10

2025 年南通市海安市中考模拟压轴题

1. A　**提示：**如图，连接 AE，过点 E 作 $EM\perp AD$ 于点 M，交 BC 于点 N，过点 A 作 $AH\perp EF$ 于点 H. 因为 $AE=AF$，$AH\perp EF$，所以 $FH=EH$. 设 $FH=x$，则 $EH=x$，$EF=2x$. 因为四边形 $ABCD$ 为矩形，所以 $\angle D=\angle C=90^\circ$，$AB=CD$，$AD=BC$. 在 $\text{Rt}\triangle DFG$ 中，$DF=2$，$DG=1$，所以 $FG=\sqrt{DF^2+DG^2}=\sqrt{5}$，所以 $\sin\angle FGD=\dfrac{DF}{FG}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\angle FGD=\dfrac{DG}{FG}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. 因为 $EF\perp FG$，所以 $\angle GFD+\angle AFE=90^\circ=\angle GFD+\angle FGD$，所以 $\angle AFE=\angle FGD$，所以 $\sin\angle AFE=\sin\angle FGD=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\angle AFE=\cos\angle FGD=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. 在 $\text{Rt}\triangle AFH$ 中，由 $\cos\angle AFE=\dfrac{FH}{AF}$，得 $AF=\dfrac{FH}{\cos\angle AFE}=\sqrt{5}x$. 在 $\text{Rt}\triangle EFM$ 中，由 $\cos\angle AFE=\dfrac{FM}{EF}$，得 $FM=EF\cdot\cos\angle AFE=\dfrac{2\sqrt{5}x}{5}$，由 $\sin\angle AFE=\dfrac{EM}{EF}$，得 $EM=EF\cdot\sin\angle AFE=\dfrac{4\sqrt{5}x}{5}$. 易证四边形 $ABNM$ 是矩形，所以 $MN=AB=AF=\sqrt{5}x$. 所以 $EN=MN-EM=\sqrt{5}x-\dfrac{4\sqrt{5}x}{5}=\dfrac{\sqrt{5}x}{5}$，$BN=AM=AF-FM=\sqrt{5}x-\dfrac{2\sqrt{5}x}{5}=\dfrac{3\sqrt{5}x}{5}$. 在 $\text{Rt}\triangle BCG$ 和 $\text{Rt}\triangle BNE$ 中，$CG=CD-DG=AB-DG=\sqrt{5}x-1$，$BC=AD=AF+DF=\sqrt{5}x+2$. $\tan\angle GBC=\dfrac{EN}{BN}=\dfrac{CG}{BC}$，即 $\dfrac{\frac{\sqrt{5}x}{5}}{\frac{3\sqrt{5}x}{5}}=\dfrac{\sqrt{5}x-1}{\sqrt{5}x+2}$，解得 $x=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，经检验，符合题意. 所以 $AB=\sqrt{5}x=\dfrac{5}{2}$.



2. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　**提示：**如图，过点 C 作 $CH\perp AD$ 于点 H. 设 $OE=a$，则 $CE=OE=a$，$OA=OC=2a$，$AB=4a$. 因为 $OC\perp AB$，所以 $\angle AOC=90^\circ$. 由圆周角定理，得 $\angle D=\dfrac{1}{2}\angle AOC=45^\circ$. 在 $\text{Rt}\triangle AOE$ 中，由勾股定理，得 $AE=\sqrt{OA^2+OE^2}=\sqrt{(2a)^2+a^2}=\sqrt{5}a$. $\sin\angle AEO=\dfrac{OA}{AE}=\dfrac{2a}{\sqrt{5}a}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. 因为 $\angle AEO=\angle CEH$，所以 $\sin\angle CEH=\sin\angle AEO=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. 在 $\text{Rt}\triangle CEH$ 中，由 $\sin\angle CEH=\dfrac{CH}{CE}$，得 $CH=CE\cdot\sin\angle CEH=\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. 在 $\text{Rt}\triangle CDH$ 中，由 $\sin D=\dfrac{CH}{CD}$，得 $CD=\dfrac{CH}{\sin 45^\circ}=\dfrac{2\sqrt{10}a}{5}$，所以 $\dfrac{CD}{AB}=\dfrac{\frac{2\sqrt{10}a}{5}}{4a}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.



3. (1) $>$　**提示：**如图 1，在 $\angle ACB$ 内作 $\angle BCD=\angle B$，交 AB 于点 D，所以 $BD=CD$，所以 $AD+CD=AD+BD=AB$. 因为 $AD+CD>AC$，所以 $AB>AC$.

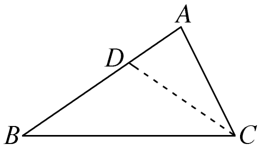


图 1

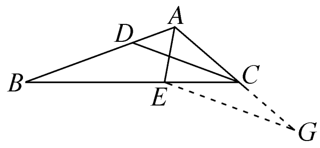


图 2

（2）**证明**：如图 2，延长 AC 至点 G，使 $CG=CE$，连接 EG，则 $\angle G=\angle CEG$，$AC+CE=AC+CG=AG$. 因为 CD 平分 $\angle ACB$，所以 $\angle ACB=2\angle BCD$. 又因为 $\angle ACB=\angle G+\angle CEG=2\angle G$，$\angle ACB=2\angle B$，所以 $\angle B=\angle BCD=\angle G$，所以 $CD=BD$，所以 $AD+CD=AD+BD=AB$. 因为 AE 平分 $\angle BAC$，所以 $\angle BAE=\angle GAE$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle AGE$ 中，$\begin{cases}\angle BAE=\angle GAE,\\ \angle B=\angle G,\\ AE=AE,\end{cases}$ 所以 $\triangle ABE\cong\triangle AGE$（AAS），所以 $AB=AG$，所以 $CD+AD=AC+CE$.

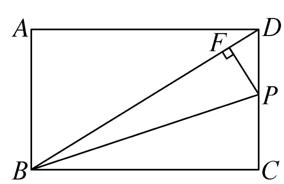
（3）**解**：$CD+AB>AC+BC$. 理由如下：

因为 $\angle ACB=\angle ADC$，$\angle A=\angle A$，所以 $\triangle ABC\backsim\triangle ACD$，所以 $\frac{AC}{AD}=\frac{AB}{AC}=\frac{BC}{CD}$. 设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ACD$ 的相似比为 k，则 $AC=kAD$，$AB=kAC=k^2AD$，$BC=kCD$，所以 $(CD+AB)-(AC+BC)=(CD+k^2AD)-(kAD+kCD)=(k-1)(kAD-CD)=(k-1)(AC-CD)$. 因为 $\angle ACB=\angle ADC>90^\circ$，所以 $\angle ADC>\angle A$，$\angle ACB>\angle B$，所以 $AC>CD$，$AB>AC$，所以 $AC-CD>0$，$\frac{AB}{AC}>1$，即 $k>1$，所以 $(k-1)(AC-CD)>0$，所以 $(CD+AB)-(AC+BC)>0$，即 $CD+AB>AC+BC$.

中考模拟压轴 11

2025 年南通市海门区、通州区、如东县中考模拟压轴题

1. A　**提示**：设 $AB=a$，$AD=b$，$\angle ADB=\alpha$. 分情况讨论：当点 P 在边 AD 上运动，即 $0\leqslant x\leqslant b$ 时，$PD=b-x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle PDF$ 中，$PF=PD\cdot\sin\angle ADB=(b-x)\sin\alpha$，$DF=PD\cdot\cos\angle ADB=(b-x)\cos\alpha$. $BF=BD-DF=\sqrt{a^2+b^2}-(b-x)\cos\alpha$. 此时由 $y=S_{\triangle BPF}=\frac{1}{2}BF\cdot PF=\frac{1}{2}[\sqrt{a^2+b^2}-(b-x)\cos\alpha]\cdot(b-x)\sin\alpha=-\frac{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{2}(b-x)^2+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\cdot(b-x)\sin\alpha$，得 y 是关于 x 的二次函数，且二次项系数小于 0，抛物线开口向下，当 $x=AD$ 时，$y=0$. 如图，当点 P 在边 CD 上运动时（$b<x\leqslant a+b$），$PD=x-b$，$\angle DPF=90^\circ-\angle PDF=\angle ADB=\alpha$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle PDF$ 中，由 $\cos\angle DPF=\frac{PF}{PD}$，得 $PF=PD\cdot\cos\angle DPF=(x-b)\cos\alpha$. 由 $\sin\angle DPF=\frac{DF}{PD}$，得 $DF=PD\cdot\sin\angle DPF=(x-b)\sin\alpha$. 所以 $BF=BD-DF=\sqrt{a^2+b^2}-(x-b)\sin\alpha$，此时由 $y=S_{\triangle BPF}=\frac{1}{2}BF\cdot PF=\frac{1}{2}[\sqrt{a^2+b^2}-(x-b)\cdot\sin\alpha]\cdot(x-b)\cos\alpha=-\frac{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{2}(x-b)^2+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\cdot(x-b)\cos\alpha$，得 y 是关于 x 的二次函数，且二次项系数小于 0，抛物线开口向下. 综上所述，y 关于 x 的函数图像为两段开口向下的抛物线的一部分，符合题意的只有选项 A.



2.（1）**证明**：由旋转的性质，得 $AE=EF$，所以 $\angle EAF=\angle AFE$. 所以 $\angle AEF=180^\circ-\angle EAF-\angle AFE=180^\circ-2\angle EAF$. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $\angle BAD=90^\circ$，所以 $\angle EAF=\angle BAD-\angle BAE=90^\circ-\angle BAE$，所以 $\angle AEF=180^\circ-2\angle EAF=180^\circ-2(90^\circ-\angle BAE)=2\angle BAE$.

（2）**解**：设 AC 交 EF 于点 O. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $\angle B=90^\circ$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AB=3$，$BC=4$，所以 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=5$. 由旋转的性质，得 $\angle EFG=\angle BAE$，$\angle EGF=\angle B=90^\circ$，所以 $\angle EFG+\angle GEF=90^\circ$. 因为 AE 平分 $\angle BAC$，所以 $\angle BAE=$

$\angle OAE$，所以$\angle EFG=\angle OAE$，所以$\angle OAE+\angle GEF=90°$，所以$\angle AOE=90°$，即$OE\perp AC$. 又因为$BE\perp AB$，$AE$平分$\angle BAC$，所以$OE=BE$. 在$\triangle EOC$和$\triangle ABC$中，因为$\angle EOC=\angle B=90°$，$\angle ECO=\angle ACB$，所以$\triangle EOC\backsim\triangle ABC$，所以$\frac{OE}{BA}=\frac{EC}{AC}=\frac{BC-BE}{AC}=\frac{BC-OE}{AC}$，即$\frac{OE}{3}=\frac{4-OE}{5}$，所以$OE=\frac{3}{2}$(也可通过等积法，即$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot BE+\frac{1}{2}AC\cdot OE$或$\sin\angle ACB=\frac{AB}{AC}=\frac{OE}{CE}$得之)，所以$BE=OE=\frac{3}{2}$，所以$EF=AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$. 所以四边形$AECF$的面积为$S_{\triangle AEF}+S_{\triangle CEF}=\frac{1}{2}OA\cdot EF+\frac{1}{2}OC\cdot EF=\frac{1}{2}(OA+OC)\cdot EF=\frac{1}{2}AC\cdot EF=\frac{1}{2}\times5\times\frac{3\sqrt{5}}{2}=\frac{15\sqrt{5}}{4}$.

(3) **解**：DF的长为$\frac{2\sqrt{85}}{5}$或$\frac{4\sqrt{10}}{5}$.

提示：分情况讨论：①如图1，当点G在对角线AC上时，过点D作$DH\perp AC$于点H. 因为AE平分$\angle BAC$，$\angle B=90°$，所以点E到AC的距离等于BE的长度. 由旋转的性质，得$GF=AB=3$，$GE=BE$，所以线段GE的长即为点E到AC的距离，即$GE\perp AC$. 又因为$\angle EGF=\angle ABC=90°$，即$GE\perp GF$，且点$G$在对角线$AC$上，由过直线上一点有且只有一条直线与已知直线垂直可知，点A,G,C,F在同一条直线上. 在$\triangle ABE$和$\triangle AGE$中，$\begin{cases}AE=AE,\\BE=GE,\end{cases}$所以$\triangle ABE\cong\triangle AGE$(HL)，所以$AG=AB=3$，所以$AF=AG+GF=6$. 因为$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AD\cdot CD=\frac{1}{2}AC\cdot DH$，所以$DH=\frac{AD\cdot CD}{AC}=\frac{12}{5}$，所以$AH=\sqrt{AD^2-DH^2}=\frac{16}{5}$，所以$HF=AF-AH=6-\frac{16}{5}=\frac{14}{5}$，所以$DF=\sqrt{HF^2+DH^2}=\frac{2\sqrt{85}}{5}$.

②如图2，当点G在对角线BD上时，过点F作$FM\perp BD$于点M，过点E作$EN\perp BD$于点N. 由(2)可知，$BD=AC=5$，$EG=BE=\frac{3}{2}$. 又因为$EN\perp BG$，所以$BN=GN=\frac{1}{2}BG$. 在$\mathrm{Rt}\triangle BCD$中，$\cos\angle NBE=\cos\angle CBD=\frac{BC}{BD}=\frac{4}{5}$. 在$\mathrm{Rt}\triangle BEN$中，由$\cos\angle NBE=\frac{BN}{BE}$，得$BN=BE\cdot\cos\angle NBE=\frac{6}{5}$. 所以$GN=\frac{6}{5}$，$BG=\frac{12}{5}$，$EN=\sqrt{BE^2-BN^2}=\frac{9}{10}$. 由旋转的性质，得$FG=AB=3$，$\angle EGF=\angle ABE=90°$，所以$\angle NGE+\angle FGM=90°$. 因为$EN\perp BD$，$FM\perp BD$，所以$\angle ENG=\angle GMF=90°$，所以$\angle NGE+\angle GEN=90°$，所以$\angle FGM=\angle GEN$. 所以$\triangle FGM\backsim\triangle GEN$，所以$\frac{FM}{GN}=\frac{GM}{EN}=\frac{FG}{GE}=2$，所以$GM=2EN=\frac{9}{5}$，$FM=2GN=\frac{12}{5}$，所以$DM=BD-BG-GM=5-\frac{12}{5}-\frac{9}{5}=\frac{4}{5}$，所以$DF=\sqrt{FM^2+DM^2}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$.

综上所述，DF的长为$\frac{2\sqrt{85}}{5}$或$\frac{4\sqrt{10}}{5}$.

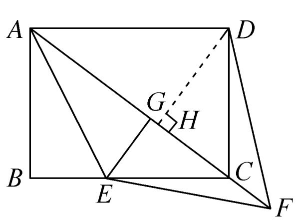


图1

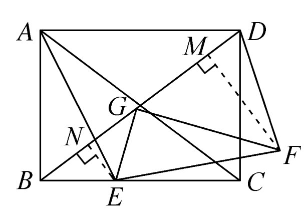


图2

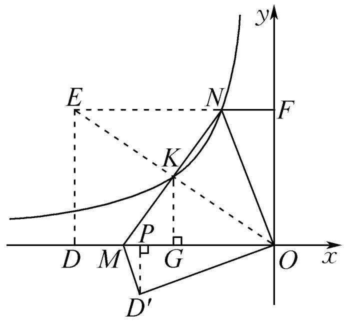
中考模拟压轴 12

2025年盐城市射阳县、阜宁县中考模拟压轴题

1. D **提示**：由题可知，抛物线$y=ax^2+bx+3$的对称轴为直线$x=1$，即$-\frac{b}{2a}=1$，所以$\frac{b}{2a}=-1$. 因为点$A(-1,0)$，所以点$B(3,0)$. 结合题中函数图像可知，当$-1<x<3$时，$y>0$，故选项A，B错误. 将点$A(-1,0)$，$B(3,0)$代入$y=ax^2+bx+3$，得$\begin{cases}a-b+3=0,\\9a+3b+3=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-1,\\b=2.\end{cases}$所以二次函数的表达式为$y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$，所以该抛物线的顶点坐标为$(1,4)$，且抛物线$y=-x^2+2x+3$与直线$y=5$无交点，即方

程 $ax^2+bx+3=5$ 无实数根，故选项 C 错误，D 正确.

2. $\left(-\frac{8}{3},-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ **提示：**如图，连接 OE，交 MN 于点 K，则 MN 垂直平分 OE，故 $KE=KO$，过点 K 作 $KG\perp OD$ 于点 G，过点 D' 作 $D'P\perp OD$ 于点 P. 因为四边形 $ODEF$ 为矩形，所以 $EF\parallel OD$，所以 $\angle NEK=\angle MOK$. 又因为 $\angle EKN=\angle OKM$，所以 $\triangle NEK\cong\triangle MOK$，所以 $NK=MK$，$NE=MO$，所以 K 是 MN 的中点，所以反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 的图像经过点 K. 因为 $KG\perp OD$，$\angle ODE=90°$，$\angle KOG=\angle EOD$，所以 $\triangle OKG\backsim\triangle OED$，所以 $\frac{S_{\triangle OKG}}{S_{\triangle OED}}=\left(\frac{OK}{OE}\right)^2=\frac{1}{4}$. 因为 $S_{\triangle OED}=\frac{1}{2}S_{\text{矩形}ODEF}=\frac{1}{2}\times8\sqrt{2}=4\sqrt{2}$，所以 $S_{\triangle OKG}=\sqrt{2}$，所以 $k=-2\sqrt{2}$，即反比例函数 $y=-\frac{2\sqrt{2}}{x}$，所以 $S_{\triangle NOF}=\sqrt{2}$. 因为 $S_{\triangle OEF}=\frac{1}{2}S_{\text{矩形}ODEF}=4\sqrt{2}$，所以 $EF=4NF$，$NE=3NF$. 设 $NF=a$，则 $EF=4a$，$NE=3a$. 由折叠的性质，得 $\angle OD'M=\angle ODE=90°$，$OD'=ED$，$MD'=MD$，$NO=NE=3a$. 所以 $OF=\sqrt{NO^2-NF^2}=2\sqrt{2}a$，所以 $S_{\triangle NOF}=\frac{1}{2}NF\cdot OF$，即 $\frac{1}{2}a\cdot2\sqrt{2}a=\sqrt{2}$，解得 $a=1$（负值舍去）. 所以 $OD'=ED=OF=2\sqrt{2}$，$MO=NE=3$. 所以 $MD'=MD=DO-MO=EF-MO=1$，在 Rt$\triangle OD'M$ 中，由等积法，得 $\frac{1}{2}MO\cdot PD'=\frac{1}{2}MD'\cdot OD'$，所以 $PD'=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 $OP=\sqrt{OD'^2-PD'^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\frac{8}{3}$，所以点 $D'\left(-\frac{8}{3},-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.



3. 解：(1) $CF\perp AE$　$CF=AE$

(2) CF 与 AE 之间的位置关系是 $CF\perp AE$，数量关系是 $\frac{CF}{AE}=k$. 证明如下：

因为 $\angle ABC=\angle EBF=90°$，所以 $\angle ABE=90°-\angle EBC=\angle CBF$，$\angle A+\angle ACB=90°$. 因为 $\frac{BF}{BE}=\frac{BC}{BA}=k$，所以 $\triangle CBF\backsim\triangle ABE$，所以 $\frac{CF}{AE}=\frac{BF}{BE}=k$，$\angle A=\angle FCB$，所以 $\angle ACF=\angle ACB+\angle FCB=\angle ACB+\angle A=90°$，所以 $CF\perp AE$.

(3) ①因为 $k=1$，所以 $BF=BE$，$BC=BA$. 又因为 $\angle EBF=\angle ABC=90°$，所以 $\triangle ABC$，$\triangle BEF$ 均为等腰直角三角形. 因为点 B 与点 D 关于 EF 对称，所以 $\triangle DFE$ 为等腰直角三角形，$DE=DF=BE=BF$，所以四边形 $BEDF$ 为正方形. 过点 B 作 $BH\perp AC$ 于点 H. 因为 $BC=AB=8$，$\angle ABC=90°$，所以 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=8\sqrt{2}$，$CH=AH=BH=4\sqrt{2}$. 分情况讨论：如图 1，当 $0<x\leqslant4\sqrt{2}$ 时，$EH=4\sqrt{2}-x$. 所以 $y=BE^2=BH^2+EH^2=(4\sqrt{2})^2+(4\sqrt{2}-x)^2=(x-4\sqrt{2})^2+32$. 如图 2，当 $4\sqrt{2}<x\leqslant8\sqrt{2}$ 时，$EH=x-4\sqrt{2}$. 同理，得 $y=BE^2=BH^2+EH^2=(x-4\sqrt{2})^2+32$. 所以 y 与 x 的函数表达式为 $y=(x-4\sqrt{2})^2+32(0<x\leqslant8\sqrt{2})$. 当 $x=4\sqrt{2}$时，y 有最小值，最小值为 32.

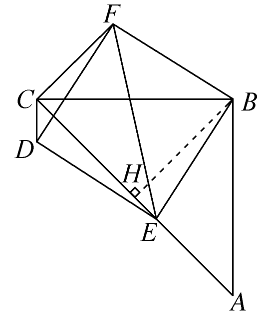


图 1

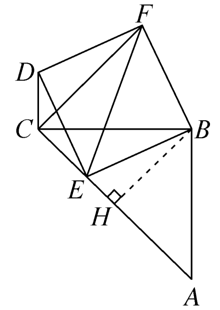


图 2

②AE 的长度为 $3\sqrt{2}$ 或 $5\sqrt{2}$. **提示：**如图 3、图 4，记正方形 $BEDF$ 的中心为 O，连接 OC，OB，OD. 由（1）可知，$AE\perp CF$，则 $\angle ECF=\angle EDF=\angle DEB=90°$，$OC=OF=OE=OB=OD$，所以 D，C，E，B，F 都在$\odot O$ 上，且 EF，BD 为直径，所以$\angle DCB=$

$90°$.过点 O 分别作 $OK\perp CD$ 于点 K，$OG\perp BC$ 于点 G，所以四边形 $OKCG$ 是矩形，所以 $OK=CG=\frac{1}{2}BC=4$，$CK=\frac{1}{2}CD=1$，所以 $OC=\sqrt{OK^2+CK^2}=\sqrt{17}$，所以 $BD=EF=2OC=2\sqrt{17}$，所以正方形 $BEDF$ 的面积为 $\frac{1}{2}BD\cdot EF=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{17})^2=34$. 所以 $y=BE^2=(x-4\sqrt{2})^2+32=34$，解得 $x_1=5\sqrt{2}$，$x_2=3\sqrt{2}$，经检验都符合题意. 综上所述，当 $CD=2$ 时，AE 的长度为 $3\sqrt{2}$ 或 $5\sqrt{2}$.

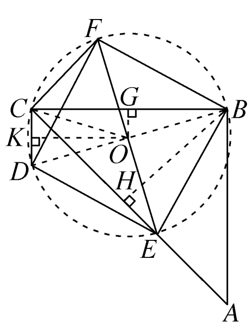


图 3

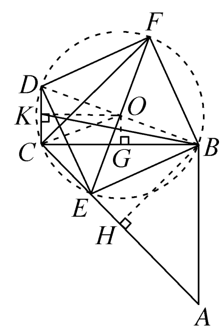


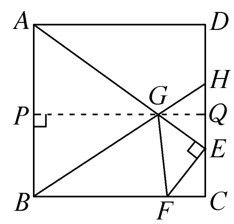
图 4

中考模拟压轴 13

2025 年泰州市兴化市中考模拟压轴题

1. C　**提示**：易知二次函数 $y=ax^2-4ax+3\ (a>0)$ 的对称轴为直线 $x=-\frac{-4a}{2a}=2$，则 $x=4$ 比 $x=1$ 距离对称轴远. 因为 $a>0$，所以该抛物线开口向上. 当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时，易知在 $x=2$ 时，函数取得最小值，在 $x=4$ 时，函数取得最大值. 对于 $y=ax^2-4ax+3$，令 $x=4$，则 $y=16a-16a+3=3$；令 $x=2$，则 $y=4a-8a+3=-4a+3$. 所以 $3-(-4a+3)=8$，解得 $a=2$.

2. $6-2\sqrt{2}$　**提示**：如图，过点 G 作 $GP\perp AB$ 于点 P，延长 PG 交 CD 于点 Q. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形，且边长为 4，所以 $AB=BC=CD=AD=4$，$\angle DAB=\angle ABC=\angle C=\angle D=90°$，$AB/\!/CD$，所以 $\angle QPA=\angle DAB=\angle D=90°$，$\angle QPB=\angle ABC=\angle C=90°$，所以四边形 $APQD$ 和四边形 $BPQC$ 都是矩形，所以 $CQ=BP$，$PQ=BC=4$. 因为 $\angle DHG$ 是 $\triangle BCH$ 的外角，所以 $\angle DHG=\angle GBC+\angle C=\angle GBC+90°$. 因为 $\angle DHG-\angle DAG=90°$，即 $\angle DHG=\angle DAG+90°$，所以 $\angle GBC=\angle DAG$，所以 $\angle DAB-\angle DAG=\angle ABC-\angle GBC$，即 $\angle GAB=\angle GBA$，所以 $GA=GB$. 又因为 $GP\perp AB$，所以 $AP=BP=\frac{1}{2}AB=2$，所以 $CQ=BP=2$. 设 $CE=a$，$QE=b$，则 $a+b=2$. 因为 $\angle C=\angle CQG=90°$，所以 $\angle QGE+\angle QEG=90°$. 因为 $EF\perp AE$，所以 $\angle CEF+\angle QEG=90°$，所以 $\angle CEF=\angle QGE$. 易证 $\triangle CEF\cong\triangle QGE$，所以 $QG=CE=a\ (a<2)$，$CF=QE=b\ (b<2)$，所以 $PG=PQ-QG=4-a$. 因为 $AB/\!/CD$，所以 $\triangle APG\backsim\triangle EQG$，所以 $\frac{AP}{EQ}=\frac{PG}{QG}$，即 $\frac{2}{b}=\frac{4-a}{a}$，解得 $b=\frac{2a}{4-a}$. 因为 $a+b=2$，所以 $a+\frac{2a}{4-a}=2$，整理，得 $a^2-8a+8=0$，解得 $a=4-2\sqrt{2}$ 或 $a=4+2\sqrt{2}>4$（舍去）. 所以 $b=\frac{2a}{4-a}=\frac{2(4-2\sqrt{2})}{4-(4-2\sqrt{2})}=2\sqrt{2}-2$，所以 $CF=2\sqrt{2}-2$，所以 $BF=BC-CF=4-(2\sqrt{2}-2)=6-2\sqrt{2}$，所以 $S_{\triangle BFG}=\frac{1}{2}BF\cdot CQ=\frac{1}{2}\times(6-2\sqrt{2})\times 2=6-2\sqrt{2}$.



3. 解：(1) ①由题意，设二次函数的表达式为 $y=a(x-1)^2+4$. 将点 $A(0,3)$ 代入，得 $a=-1$. 所以 $y=-(x-1)^2+4=-x^2+2x+3$.

②如图 1，过点 B 作 $BH\perp x$ 轴于点 H，过点 B' 作 $B'K\perp x$ 轴于点 K，则 $\angle B'KO=\angle OHB=90°$. 由旋转的性质，得 $OB=B'O$，$\angle BOB'=90°$. 所以 $\angle B'OK=90°-\angle BOH=\angle OBH$，所以 $\triangle OBH\cong\triangle B'OK$，所以 $B'K=OH=1$，$OK=BH=4$，所以点 $B'(-4,1)$.

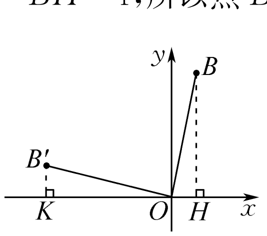


图 1

(2) 由题意，得 $y=ax^2-2ax+c=a(x-1)^2-a+c$，所以点 $B(1,-a+c)$，$C(1,0)$. 当点 $A(0,3)$ 向下平移与原点 $O(0,0)$ 重合时，点 B，C 平移之后的坐标分别为 $(1,-a+c-3)$，

$(1,-3)$. 同(1)可求,平移之后的点 B,C 绕点 O 逆时针旋转 $90°$后得到的点 B',C'的坐标分别为$(a-c+3,1)$,$(3,1)$. 将点 $C'(3,1)$代入 $y=ax^2-2ax+c$, 得 $c=1-3a$. 所以点 $B'(4a+2,1)$,$y=ax^2-2ax+1-3a$. 将点 $B'(4a+2,1)$代入 $y=ax^2-2ax+1-3a$,得 $1=a(4a+2)^2-2a(4a+2)+1-3a$,整理,得 $a[(4a+2-1)^2-4]=0$. 因为 $a\neq0$,所以 $(4a+1)^2=4$,解得 $a=\frac{1}{4}$或 $a=-\frac{3}{4}$. 当 $a=\frac{1}{4}$时,$c=\frac{1}{4}$,$-a+c=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=0$,此时点 $B(1,0)$与点 $C(1,0)$重合,$\triangle ABC$ 不存在,故舍去;当 $a=-\frac{3}{4}$时,$c=\frac{13}{4}$,$-a+c=\frac{3}{4}+\frac{13}{4}=4$,即点 $B(1,4)$,此时 $BC=4$.

(3) 由题意,得 $y=ax^2+(a+2)x+c(a\neq0)$. 因为当 $x\leqslant1$ 时,y 随 x 的增大而增大,所以 $-\frac{a+2}{2a}\geqslant1$ 且 $a<0$,所以 $a+2\geqslant-2a>0$,解得 $-\frac{2}{3}\leqslant a<0$. 将方程 $ax^2+bx+c=ax+n$ 整理,得 $ax^2+2x+c-n=0$. 因为该方程有两个相等的实数根,所以根的判别式 $2^2-4a(c-n)=0$,所以 $c-n=\frac{1}{a}$,所以 $ax^2+2x+\frac{1}{a}=0$. 整理,得 $x^2+\frac{2}{a}x+\frac{1}{a^2}=\left(x+\frac{1}{a}\right)^2=0$,解得 $x_1=x_2=-\frac{1}{a}$. 对于 $y=ax^2+(a+2)x+c\ (a\neq0)$,令 $x=-\frac{1}{a}$,则 $y=-\frac{1}{a}-1+c$. 所以点 $D\left(-\frac{1}{a},-\frac{1}{a}-1+c\right)$.

解法 1 记 $x=-\frac{1}{a}$,则点 $D(x,x+c-1)$. 因为$-\frac{2}{3}\leqslant a<0$,所以 $x\geqslant\frac{3}{2}$. 所以点 D 在直线 $y=x+c-1\left(x\geqslant\frac{3}{2}\right)$上,且 y 随 x 的增大而增大. 分情况讨论:①如图 2,当 $c-1\geqslant0$,即 $c\geqslant1$ 时,易知当 $x=\frac{3}{2}$,$y=\frac{1}{2}+c$ 时,OD 的长最小. 因为 $OD\geqslant3\sqrt{2}$,所以 $OD^2=x_D^2+y_D^2\geqslant(3\sqrt{2})^2$, 即 $\frac{9}{4}+\left(\frac{1}{2}+c\right)^2\geqslant18$,解得 $\frac{1}{2}+c\geqslant\frac{3\sqrt{7}}{2}$或$\frac{1}{2}+c\leqslant-\frac{3\sqrt{7}}{2}$. 因为 $c\geqslant1$,所以 $c\geqslant\frac{3\sqrt{7}-1}{2}$[或要满足 $OD\geqslant3\sqrt{2}$ 始终成立,则 OD 长的最小值为 $3\sqrt{2}$. 此时 $OD^2=x_D^2+y_D^2=(3\sqrt{2})^2$, 即$\frac{9}{4}+\left(\frac{1}{2}+c\right)^2=18$,解得 $c=\frac{3\sqrt{7}-1}{2}$ 或 $c=-\frac{3\sqrt{7}+1}{2}$(舍去),此时点 $M\left(0,\frac{3\sqrt{7}-3}{2}\right)$. 观察图 2 可知,要满足 $OD\geqslant3\sqrt{2}$ 始终成立,则 $c-1\geqslant\frac{3\sqrt{7}-3}{2}$,即 $c\geqslant\frac{3\sqrt{7}-1}{2}$]. ②如图 3,当 $c-1<0$, 即 $c<1$ 时,当 $OD\perp DM$ 时,OD 的长最小,最小值为 $3\sqrt{2}$. 易证$\triangle ODM$ 为等腰直角三角形,此时 $OM_{最小值}=\sqrt{2}\,OD_{最小值}=6$,点 $M(0,-6)$. 因为 $OD\geqslant3\sqrt{2}$始终成立,所以 $c-1\leqslant-6$,所以 $c\leqslant-5$. 综上所述,c 的取值范围为 $c\leqslant-5$ 或 $c\geqslant\frac{3\sqrt{7}-1}{2}$.

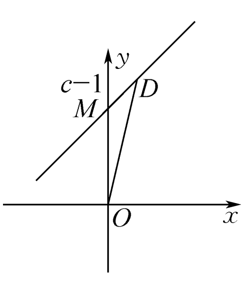


图 2

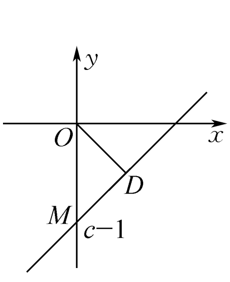


图 3

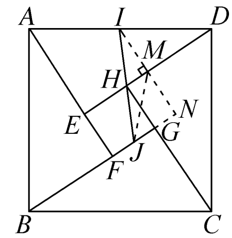
解法 2 根据两点间的距离公式,得 $OD^2=\frac{1}{a^2}+\left(-\frac{1}{a}-1+c\right)^2$,整理,得 $OD^2=\frac{2}{a^2}-\frac{2}{a}(c-1)+(c-1)^2$. 记 $W=OD^2$,$t=\frac{1}{a}$.

因为$-\frac{2}{3}\leqslant a<0$，所以$t\leqslant-\frac{3}{2}$. 当$t\leqslant-\frac{3}{2}$时，$W=2t^2-2(c-1)t+(c-1)^2\geqslant 18$始终成立，分情况讨论：①当抛物线的对称轴$\frac{c-1}{2}\leqslant-\frac{3}{2}$，即$c\leqslant-2$时，在抛物线的顶点处，$W$有最小值，即$t=\frac{c-1}{2}$时，$W_{最小值}=\frac{(c-1)^2}{2}\geqslant 18$，解得$c\leqslant-5$或$c\geqslant 7$(舍去). ②当抛物线的对称轴$\frac{c-1}{2}>-\frac{3}{2}$，即$c>-2$时，此时$W$随$t$的增大而减小. 当$t=-\frac{3}{2}$时，$W_{最小值}=2\times\frac{9}{4}+3(c-1)+(c-1)^2\geqslant 18$，整理，得$\left(c+\frac{1}{2}\right)^2\geqslant\frac{63}{4}$，解得$c\geqslant\frac{3\sqrt{7}-1}{2}$或$c\leqslant-\frac{3\sqrt{7}+1}{2}$(舍去). 综上所述，$c$的取值范围为$c\leqslant-5$或$c\geqslant\frac{3\sqrt{7}-1}{2}$.

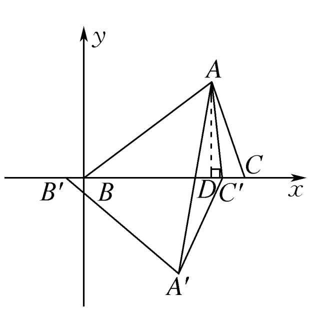
中考模拟压轴 14

2025 年泰州市泰兴市中考模拟压轴题

1. $\frac{2}{3}$ **提示**：如图，过点I作$IM\perp DE$于点M，延长IM交BG的延长线于点N，连接JM. 则$\angle IMD=90^\circ=\angle AED$，所以$IM/\!/AE$，所以$\frac{AI}{ID}=\frac{EM}{MD}$. 因为$I$是$AD$的中点，所以$\frac{EM}{MD}=\frac{AI}{ID}=1$，所以$EM=MD$，所以$IM$是$\triangle ADE$的中位线，所以$IM=\frac{1}{2}AE$. 因为四边形$EHGF$为正方形，所以$EH/\!/FG$，$EF/\!/HG$，所以$IN/\!/HG$，$HM/\!/JN$，所以$\frac{HI}{HJ}=\frac{IM}{MN}$. 因为$HI=HJ$，所以$IM=MN$. 因为$IN/\!/HG$，所以$\triangle HGJ\backsim\triangle INJ$，所以$\frac{HG}{IN}=\frac{HJ}{IJ}=\frac{1}{2}$，所以$HG=\frac{1}{2}IN=IM$. 设$AE=b$，$DE=a$，则$HG=HE=DE-DH=DE-AE=a-b$，$IM=\frac{1}{2}AE=\frac{b}{2}$，所以$a-b=\frac{1}{2}b$，整理，得$\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$. 在$Rt\triangle ADE$中，$\tan\angle ADE=\frac{AE}{DE}=\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$.



2. $\sqrt{10}$或$\frac{\sqrt{82}}{3}$ **提示**：如图，以点B为坐标原点，边BC所在直线为x轴，射线BC方向为正方向建立平面直角坐标系. 过点A作$AD\perp x$轴于点D. 因为$AB=BC=5$，所以点$C(5,0)$. 在$Rt\triangle ABD$中，由$\sin\angle ABD=\frac{AD}{AB}=\frac{3}{5}$，得$AD=3$. 所以$BD=4$，所以点$A(4,3)$. 由题可知，点$A$关于直线$BC$对称的点的坐标为$(4,-3)$. 设$\triangle A'B'C'$沿射线$CB$平移的距离为$k(k>0)$，则平移后的点$A'$的坐标为$(4-k,-3)$，点$C'$的坐标为$(5-k,0)$. 由两点间的距离公式，得$AA'=\sqrt{[4-(4-k)]^2+[3-(-3)]^2}=\sqrt{k^2+36}$，$AC'=\sqrt{[4-(5-k)]^2+(3-0)^2}=\sqrt{10-2k+k^2}$. 因为$AA'=2AC'$，即$\sqrt{k^2+36}=2\sqrt{10-2k+k^2}$，整理，得$3k^2-8k+4=(3k-2)(k-2)=0$，解得$k=2$或$k=\frac{2}{3}$. 经检验，$k=2$或$k=\frac{2}{3}$是原方程的解. 当$k=2$时，$AC'=\sqrt{10-2\times 2+2^2}=\sqrt{10}$；当$k=\frac{2}{3}$时，$AC'=\sqrt{10-2\times\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{82}}{3}$. 综上所述，$AC'$的长为$\sqrt{10}$或$\frac{\sqrt{82}}{3}$.



3. (1) **证明**：因为$\angle BDC=90^\circ$，所以$\angle ADC=90^\circ$，$\angle BCD+\angle B=90^\circ$. 因为$\angle BCD=\angle BAC$，所以$\angle BAC+\angle B=90^\circ$，所以$\angle ACB=90^\circ$. 根据圆内接四边形的对角互补，得$\angle EFG=180^\circ-\angle ACB=90^\circ$，$\angle CGF=180^\circ-\angle ADC=90^\circ$，所以$\angle CGF=\angle EFG=$

$\angle ACB=90^\circ$,所以四边形 $CEFG$ 是矩形.

(2) ①**证明**:由同弧所对的圆周角相等,得$\angle DHE=\angle BCD$.因为$\angle BCD=\angle BAC$,所以$\angle DHE=\angle BAC$.又因为$\angle DHE=\angle ADH+\angle DAH$,$\angle BAC=\angle CAP+\angle DAH$,所以$\angle ADH=\angle CAP$.因为$\angle EPC=\angle DHE$,所以$\angle APC=180^\circ-\angle EPC=180^\circ-\angle DHE=\angle DHA$,又因为$AC=DA$,所以$\triangle ADH\cong\triangle CAP$.

②**解**:因为$S_{\triangle ADH}=2$,$S_{\triangle DHI}=1$,所以$AH:HI=2:1$.由①可知,$\triangle ADH\cong\triangle CAP$,所以$AH=CP$,所以$CP:HI=2:1$.因为$\angle EPC=\angle DHE$,$\angle PEC=\angle HDC$,所以$\triangle EPC\backsim\triangle DHI$,所以$\dfrac{S_{\triangle EPC}}{S_{\triangle DHI}}=\left(\dfrac{PC}{HI}\right)^2=4$,所以$\triangle CEP$ 的面积为 4.

③**解**:成立.证明如下:

由①可知,$\triangle ADH\cong\triangle CAP$,所以$S_{\triangle CAP}=S_{\triangle ADH}=S$,所以$S_{\triangle EPC}=S_{\triangle ACE}-S_{\triangle CAP}=S_2-S$,$S_{\triangle DHI}=S_{\triangle ADI}-S_{\triangle ADH}=S_1-S$.由②可知,$\triangle EPC\backsim\triangle DHI$,所以$\dfrac{S_{\triangle EPC}}{S_{\triangle DHI}}=\left(\dfrac{PC}{HI}\right)^2=\left(\dfrac{AH}{HI}\right)^2=\left(\dfrac{S_{\triangle ADH}}{S_{\triangle DHI}}\right)^2$,即$\dfrac{S_2-S}{S_1-S}=\left(\dfrac{S}{S_1-S}\right)^2$($S_1-S\neq 0$),所以$(S_2-S)\cdot(S_1-S)=S^2$,整理,得$S_1S_2-SS_2-SS_1=0$,等式两边同除以$SS_1S_2$,得$\dfrac{1}{S}=\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}$.

中考模拟压轴 15

2025 年扬州市仪征市、邗江区中考模拟压轴题

1. B **提示**:由正方形的轴对称性,得$EG=BG$.所以$\triangle BFG$ 的周长为$BG+GF+BF=EG+GF+BF=EF+BF$.

解法 1 如图 1,过点 A 作$AP\perp EF$ 于点 P,则$\angle APF=\angle ACB=\angle EFC=90^\circ$,所以四边形 $ACFP$ 为矩形,所以$\angle CAP=90^\circ$.因为四边形 $ABDE$ 为正方形,所以$\angle EAB=90^\circ$,$AE=AB$,所以$\angle BAC=90^\circ-\angle BAP=\angle EAP$.又因为$\angle ACB=\angle APE=90^\circ$,所以$\triangle ACB\cong\triangle APE$,所以$BC=EP$,$AC=AP$.所以矩形 $ACFP$ 为正方形,所以$CF=PF$,所以$EF+BF=EP+PF+BF=BC+CF+BF=2BC$,即$\triangle BFG$ 的周长为 $2BC$.

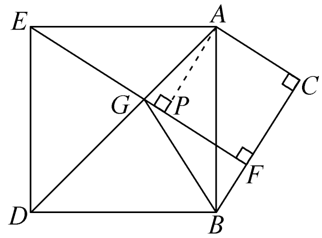


图 1

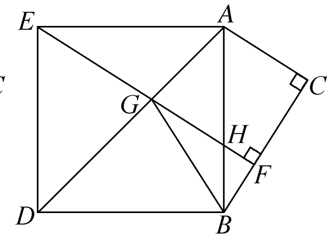
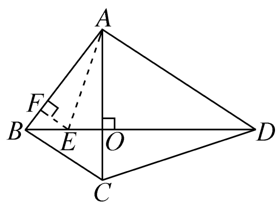


图 2

解法 2 如图 2,设 EF 与 AB 相交于点 H,$AB=c$,$AC=b$,$BC=a$,则$AE=AB=c$.在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,由勾股定理,得$c^2=a^2+b^2$.因为$EF\perp BC$,$AC\perp BC$,所以$EF\parallel AC$,所以$\angle BHF=\angle CAB$.因为$\angle BHF=\angle AHE$,所以$\angle AHE=\angle CAB$.又因为$\angle EAH=\angle C=90^\circ$,所以$\triangle HEA\backsim\triangle ABC$,所以$\dfrac{EH}{BA}=\dfrac{AE}{CB}=\dfrac{AH}{CA}$,即$\dfrac{EH}{c}=\dfrac{c}{a}=\dfrac{AH}{b}$,所以$EH=\dfrac{c^2}{a}$,$AH=\dfrac{bc}{a}$,所以$BH=AB-AH=\dfrac{ac-bc}{a}$.因为$EF\parallel AC$,所以$\triangle BHF\backsim\triangle BAC$,所以$\dfrac{HF}{AC}=\dfrac{BH}{BA}=\dfrac{BF}{BC}$,即$\dfrac{HF}{b}=\dfrac{\frac{ac-bc}{a}}{c}=\dfrac{BF}{a}$,所以$HF=\dfrac{ab-b^2}{a}$,$BF=a-b$,所以$EF+BF=EH+HF+BF=\dfrac{c^2}{a}+\dfrac{ab-b^2}{a}+a-b=\dfrac{c^2+ab-b^2+a^2-ab}{a}=\dfrac{c^2-b^2+a^2}{a}=\dfrac{a^2+b^2-b^2+a^2}{a}=2a=2BC$,即$\triangle BFG$ 的周长为 $2BC$.

2. 243 **提示**:如图,作 AE 平分$\angle BAC$,交 BD 于点 E,过点 E 作$EF\perp AB$ 于点 F.又因为$AC\perp BD$,所以$OE=EF$.在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中,$OA=12$,$OB=9$,所以$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=15$.由等积法,得$S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}OA\cdot OB=\dfrac{1}{2}OE\cdot OA+\dfrac{1}{2}EF\cdot AB=\dfrac{1}{2}OE\cdot(OA+AB)$,即$12\times 9=OE\cdot(12+15)$,所以$OE=4$.因为$2OC=12$,所以$OC=6$,所以$AC=OA+OC=18$.在 $\mathrm{Rt}\triangle AOE$ 中,$\tan\angle OAE=\dfrac{OE}{OA}=\dfrac{1}{3}$.在 $\mathrm{Rt}\triangle COD$ 中,$\tan\angle BDC=\dfrac{OC}{OD}=\dfrac{6}{OD}$.因为$\angle BAC=2\angle OAE$,$\angle BAC=2\angle BDC$,

所以$\angle OAE=\angle BDC$,所以$\tan\angle OAE=\tan\angle BDC$,即$\frac{6}{OD}=\frac{1}{3}$,所以$OD=18$,所以$BD=OB+OD=27$. 所以$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}AC\cdot OB+\frac{1}{2}AC\cdot OD=\frac{1}{2}AC\cdot(OB+OD)=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\times18\times27=243$.



3. 解:(1) $\frac{9}{2}$ $\frac{18}{5}$ **提示**:因为$\angle BAC=\angle MON$,所以$\tan\angle BAC=\tan\angle MON=\frac{3}{4}$. 在$Rt\triangle ABC$中,$\tan\angle BAC=\frac{BC}{AB}$,即$\frac{BC}{6}=\frac{3}{4}$,所以$BC=\frac{9}{2}$. 所以$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\frac{15}{2}$. 因为$D$是边$AC$与射线$ON$的交点,所以当$BD\perp AC$时,$BD$的长最小. 此时$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}AB\cdot BC$,即$\frac{15}{2}BD=6\times\frac{9}{2}$,所以$BD=\frac{18}{5}$. 所以$BD$长的最小值为$\frac{18}{5}$.

(2) 分情况讨论:①如图1,当$\triangle ABD$是以BD为底的等腰三角形时,$AD=AB=6$. 因为$\angle BAC=\angle MON$,$\angle OBA=\angle ABD$,所以$\triangle ABD\backsim\triangle OBA$,所以$\frac{AB}{OB}=\frac{AD}{OA}$,所以$\frac{OB}{OA}=\frac{AB}{AD}=1$,即$OB=OA$. 过点$B$作$BH\perp OM$于点$H$,则$\tan\angle MON=\frac{BH}{OH}=\frac{3}{4}$. 设$BH=3x$,则$OH=4x$,$OA=OB=5x$,所以$AH=OA-OH=x$. 在$Rt\triangle ABH$中,由勾股定理,得$AH^2+BH^2=AB^2$,即$x^2+(3x)^2=6^2$,解得$x=\frac{3\sqrt{10}}{5}$(负值舍去). 所以$OA=5x=3\sqrt{10}$. ②如图2,当$\triangle BCD$是以$BD$为底的等腰三角形时,$CD=BC=\frac{9}{2}$. 由(1)可知,$AC=\frac{15}{2}$,所以$AD=AC-CD=3$. 过点$B$作$BK\perp AC$于点$K$. 由(1)可知,$BK=\frac{18}{5}$. 所以$AK=\sqrt{AB^2-BK^2}=\frac{24}{5}$,所以$DK=AK-AD=\frac{9}{5}$,所以$BD=\sqrt{BK^2+DK^2}=\frac{9\sqrt{5}}{5}$. 同理可证$\triangle ABD\backsim\triangle OBA$,所以$\frac{AD}{OA}=\frac{BD}{BA}$,即$\frac{3}{OA}=\frac{\frac{9\sqrt{5}}{5}}{6}$,所以$OA=2\sqrt{5}$. 综上所述,$OA$的长为$3\sqrt{10}$或$2\sqrt{5}$.

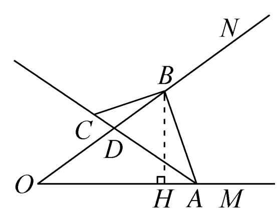


图1

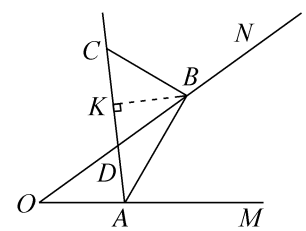


图2

(3) OC长的最大值为$5+\frac{\sqrt{37}}{2}$. **提示**:如图3,因为AB的长为定值,$\tan\angle MON=\frac{3}{4}$也为定值,所以点$A$,$O$,$B$在半径确定的圆上,不妨设$\triangle AOB$外接圆的圆心为$G$. 分别过点$G$作$GE\perp AB$于点$E$,$GF\perp BC$于点$F$,连接$GA$,$GB$,$GO$,$GC$,则$AE=\frac{1}{2}AB=3$,$\angle AGB=2\angle MON$,$\angle AGE=\angle BGE=\frac{1}{2}\angle AGB=\angle MON$,所以$\tan\angle AGE=\tan\angle MON=\frac{3}{4}$. 在$Rt\triangle AGE$中,$\tan\angle AGE=\frac{AE}{EG}$,即$\frac{3}{EG}=\frac{3}{4}$,所以$EG=4$,所以$AG=\sqrt{EG^2+AE^2}=5$,所以$OG=AG=BG=5$. 易证四边形$GEBF$为矩形,所以$BF=EG=4$,$GF=BE=3$,所以$CF=BC-BF=\frac{1}{2}$,所以$CG=\sqrt{CF^2+GF^2}=\frac{\sqrt{37}}{2}$. 因为$OC\leqslant OG+CG$,所以如图4,当$O$,$G$,$C$三点依次共线时,$OC$的长有最大值,最大值为$5+\frac{\sqrt{37}}{2}$.

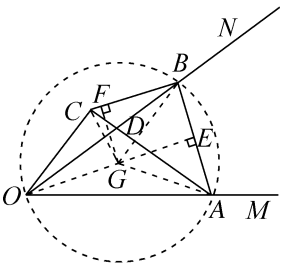


图 3

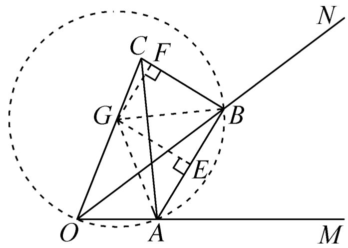
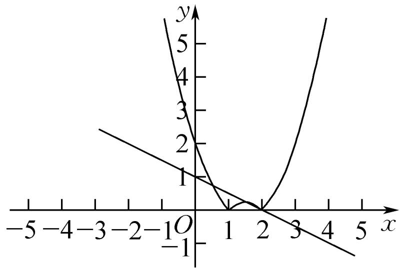


图 4

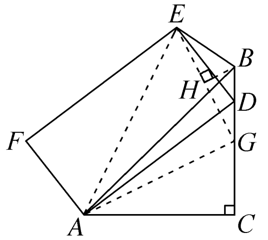
中考模拟压轴 16

2025 年扬州市高邮市中考模拟压轴题

1. C　**提示**:如图,画出函数 $y=|x^2-3x+2|$ 的图像与一次函数 $y=-\frac{1}{2}x+1$ 的图像. 对于 $y=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$,令 $y=0$,则 $x=1$ 或 $x=2$;令 $x=0$,则 $y=2$. 故 $y=x^2-3x+2$ 的图像经过点$(1,0)$,$(2,0)$,$(0,2)$. 因为 $y=x^2-3x+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$,所以该抛物线开口向上,对称轴为 $x=\frac{3}{2}$,顶点坐标为 $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$. 将 $y=x^2-3x+2$ 的图像在 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折到 x 轴上方,得到 $y=|x^2-3x+2|$ 的图像. 对于 $y=-\frac{1}{2}x+1$,令 $x=0$,则 $y=1$;令 $x=\frac{3}{2}$,则 $y=\frac{1}{4}$;令 $y=0$,则 $x=2$. 所以 $y=-\frac{1}{2}x+1$ 的图像经过点$(0,1)$,$\left(\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right)$,$(2,0)$,观察图像可知,交点个数为 3.



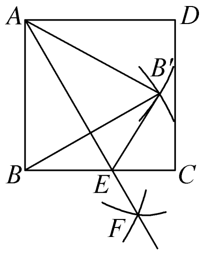
2. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　**提示:解法 1**　如图,取 BC 的中点 G,连接 AG,AE,EG,过点 B 作 $BH\perp EG$ 于点 H. 由题可知,$AC=BC=4$,$\angle C=90^\circ$. 因为 G 是 BC 的中点,所以 $CG=BG=\frac{1}{2}BC=2$,所以$\frac{CG}{AC}=\frac{1}{2}$. 因为四边形 $ADEF$ 是矩形,所以$\angle ADE=90^\circ$,所以$\angle ADE=\angle C$. 因为 $\frac{DE}{AD}=\frac{1}{2}$,所以$\frac{DE}{AD}=\frac{CG}{AC}$,所以$\triangle ACG\backsim\triangle ADE$,所以$\angle CAG=\angle DAE$,$\frac{AC}{AD}=\frac{AG}{AE}$,所以$\frac{AC}{AG}=\frac{AD}{AE}$. 易证$\angle DAC=\angle EAG$,所以$\triangle ACD\backsim\triangle AGE$,所以$\angle AGE=\angle ACD=90^\circ$,所以点 E 在定直线 GE 上运动. 因为 $BE\geqslant BH$,所以当点 E 与点 H 重合时,BE 的长最小,最小值等于 BH 的长. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACG$ 中,$AC=4$,$CG=2$,所以 $AG=\sqrt{AC^2+CG^2}=2\sqrt{5}$. 因为$\angle BGH+\angle AGC=180^\circ-\angle AGE=90^\circ$,$\angle AGC+\angle GAC=90^\circ$,所以$\angle BGH=\angle GAC$,所以$\triangle GHB\backsim\triangle ACG$,所以$\frac{BH}{GC}=\frac{BG}{GA}$,所以 $BH=\frac{GC\cdot BG}{GA}=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,所以 BE 长的最小值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.



解法 2　过点 E 作 $EK\perp BC$,交边 BC(或 CB 的延长线)于点 K. 设 $CD=x(0\leqslant x\leqslant 4)$,则 $BD=4-x$. 因为$\angle EKD=\angle ADE=\angle C=90^\circ$,所以$\angle ADC+\angle DAC=90^\circ$,$\angle ADC+\angle EDK=90^\circ$,所以$\angle EDK=\angle DAC$,所以$\triangle DKE\backsim\triangle ACD$,所以$\frac{DK}{AC}=\frac{EK}{DC}=\frac{DE}{AD}=\frac{1}{2}$,即$\frac{DK}{4}=\frac{EK}{x}=\frac{1}{2}$,所以 $DK=2$,$EK=\frac{1}{2}x$,所以 $BK=|DK-BD|=|2-(4-x)|=|x-2|$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BEK$ 中,由勾股定理,得 $BE^2=BK^2+EK^2=(x-2)^2+\left(\frac{1}{2}x\right)^2=\frac{5}{4}x^2-4x+4=\frac{5}{4}\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{4}{5}$. 当 $x=\frac{8}{5}$时,BE^2 有最小值,最小值为$\frac{4}{5}$,所以 BE 长的最小值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

3. 解:(1) ①$2\sqrt{2}-2$　**提示**:因为四边形 $ABCD$ 为正方形,所以 $BC=AB=2$,$\angle B=90^\circ$,所以 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=2\sqrt{2}$. 由折叠的性质,得 $AB'=AB=2$,$B'E=BE$,$\angle AB'E=\angle B=90^\circ$,所以 $B'C=AC-AB'=2\sqrt{2}-2$,$\angle EB'C=90^\circ$. 设 $BE=x$,则 $B'E=x$,$CE=2-x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle EB'C$ 中,$B'E^2+B'C^2=CE^2$,即 $x^2+(2\sqrt{2}-2)^2=(2-x)^2$,解得 $x=2\sqrt{2}-2$,即 $BE=2\sqrt{2}-2$.

②如图，点 E 即为所求. 作图原理：以点 B 为圆心，BC 长为半径作弧；以点 A 为圆心，AB 长为半径作弧，两弧交于点 B'，连接 AB'；分别以点 B,B' 为圆心，大于 $\frac{1}{2}BB'$ 长为半径作弧交于一点 F，连接 AF，交边 BC 于点 E. 由作图可知，$BB'=BC=AB=AB'$，$BF=B'F$，所以 AE 垂直平分 BB'，所以点 B,B' 关于 AE 对称，所以点 E 符合题意.



(2) $AM\cdot AC-AM\cdot NC$ 为定值. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $\angle BAC=\angle DAC=45°$，$AD=AB=2$，$\angle B=\angle D=90°$. 因为 $\angle EAF=45°$，所以 $\angle EAF=\angle BAC$，所以 $\angle EAF-\angle CAE=\angle BAC-\angle CAE$，即 $\angle FAN=\angle EAB$. 因为 $FN\perp AC$，所以 $\angle FNA=90°=\angle B$，所以 $\triangle AFN\backsim\triangle AEB$，所以 $\frac{AF}{AE}=\frac{AN}{AB}$. 同理可证 $\triangle ADF\backsim\triangle AME$，所以 $\frac{AD}{AM}=\frac{AF}{AE}$，所以 $\frac{AD}{AM}=\frac{AN}{AB}$，所以 $AM\cdot AN=AD\cdot AB=4$. 所以 $AM\cdot AC-AM\cdot NC=AM\cdot(AC-NC)=AM\cdot AN=4$，即 $AM\cdot AC-AM\cdot NC$ 的值为定值 4.

中考模拟压轴 17

2025 年徐州市铜山区中考模拟压轴题

1. A　**提示：**如图 1，连接 DE，过点 D 作 $DG\perp AB$ 于点 G，交 BC 于点 H. 由旋转的性质，得 $AF=AE$，$\angle EAF=60°$. 因为 $\triangle ABD$ 是等边三角形，所以 $AD=BD=AB=4$，$\angle DAB=60°$，所以 $\angle EAF=\angle DAB=60°$，所以 $\angle EAF-\angle EAB=\angle DAB-\angle EAB$，即 $\angle BAF=\angle DAE$，所以 $\triangle DAE\cong\triangle BAF$(SAS)，所以 $DE=BF$. 如图 2，当 $DE\perp BC$ 时，DE 的长有最小值，即线段 BF 的长有最小值. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AB=2AC$，$AB=4$，所以 $AC=2$. 由勾股定理，得 $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=2\sqrt{5}$. 因为 $\triangle ABD$ 等边三角形，且 $DG\perp AB$，由等边三角形"三线合一"的性质，得 $BG=\frac{1}{2}AB=2$. 因为 $\angle BAC=\angle BGH=90°$，所以 $GH\parallel AC$，所以 $\triangle BGH\backsim\triangle BAC$，所以 $\frac{BH}{BC}=\frac{GH}{AC}=\frac{BG}{BA}=\frac{1}{2}$，所以 $BH=\frac{1}{2}BC=\sqrt{5}$，$GH=\frac{1}{2}AC=1$. 在 Rt$\triangle BDG$ 中，由勾股定理，得 $DG=\sqrt{BD^2-BG^2}=2\sqrt{3}$. 所以 $DH=DG-GH=2\sqrt{3}-1$. 因为 $\angle DEH=\angle BGH=90°$，$\angle DHE=\angle BHG$，所以 $\triangle DHE\backsim\triangle BHG$，所以 $\frac{DE}{BG}=\frac{DH}{BH}$，所以 $DE=\frac{BG\cdot DH}{BH}=\frac{2\times(2\sqrt{3}-1)}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{15}-2\sqrt{5}}{5}$. 所以线段 BF 长的最小值是 $\frac{4\sqrt{15}-2\sqrt{5}}{5}$.

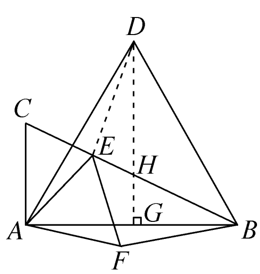


图 1

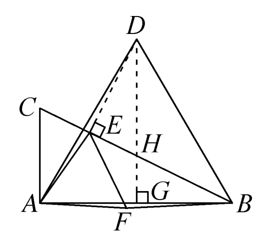
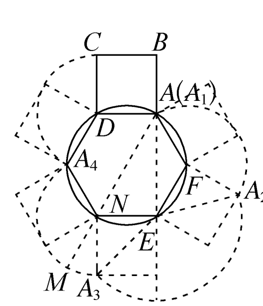


图 2

2. $2\sqrt{3}+2\sqrt{2}$　**提示：**由题可知，当正方形 $ABCD$ 绕正六边形按顺时针方向滚动一周时，点 A 的运动路径如图中弧线所示，且 $AD=NE=EF=2$. 根据正六边形的性质，得 $\angle AEF=\angle EAF=\angle NAE=30°$，$\angle AFE=\angle NEF=120°$，$\angle AEN=90°$. 在 Rt$\triangle ANE$ 中，$AN=2NE=4$，$AE=\frac{NE}{\tan 30°}=2\sqrt{3}$，所以 $AM=AN+MN=6$. 由旋转的性质，得 $EH=EA_2=\sqrt{2}EF=2\sqrt{2}$. 所以 $AH=AE+EH=2\sqrt{3}+2\sqrt{2}>AM$，所以在滚动过程中点 A 距出发点的最大距离为 $2\sqrt{3}+2\sqrt{2}$.



3. **解：**(1) 将点 $A(-2,0)$，$C(0,-4)$ 代入

$y=\frac{1}{2}x^2+bx+c$，得$\begin{cases}2-2b+c=0,\\c=-4,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=-1,\\c=-4.\end{cases}$所以抛物线的函数表达式为 $y=\frac{1}{2}x^2-x-4$.

(2) 对于 $y=\frac{1}{2}x^2-x-4$，令 $y=0$，得 $\frac{1}{2}x^2-x-4=0$，解得 $x_1=-2$，$x_2=4$，所以点 $B(4,0)$. 因为点 A 到直线 EF 的距离为定值，且 EF 为定长线段，所以$\triangle AEF$ 的面积 S_2 为定值，所以当$\triangle ABP$ 的面积 S_1 取最大值时，S_1-S_2 的值最大. 如图 1，当点 P 位于抛物线最低位置，即点 P 与顶点重合时，$\triangle ABP$ 的面积 S_1 最大. 此时过点 F 作 $FM/\!/x$ 轴，过点 E 作 $EM\perp FM$ 于点 M. 因为 $y=\frac{1}{2}x^2-x-4=\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{9}{2}$，所以此时点 $P\left(1,-\frac{9}{2}\right)$. 由待定系数法，得直线 BC 的函数表达式为 $y=x-4$，直线 AP 的函数表达式为 $y=-\frac{3}{2}x-3$. 联立，得$\begin{cases}y=x-4,\\y=-\frac{3}{2}x-3.\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\frac{2}{5},\\y=-\frac{18}{5}.\end{cases}$所以点 $F\left(\frac{2}{5},-\frac{18}{5}\right)$. 易得 $OB=OC$，所以$\angle OBC=45^\circ$. 因为 $FM/\!/x$ 轴，所以$\angle MFE=45^\circ$，所以$\triangle MFE$ 为等腰直角三角形，所以 $EM=FM=\frac{EF}{\sqrt{2}}=2$，所以点 $E\left(\frac{2}{5}-2,-\frac{18}{5}-2\right)$，即点 $E\left(-\frac{8}{5},-\frac{28}{5}\right)$.

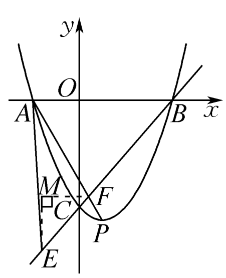


图 1

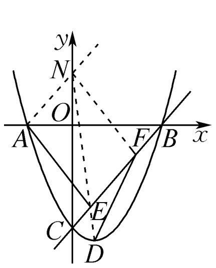


图 2

(3) $AE+EF+DF$ 的最小值为$\frac{\sqrt{173}}{2}+2\sqrt{2}$. **提示**：如图 2，过点 A 作 $AN/\!/EF$，且 $AN=EF$，连接 NF，ND，则四边形 $AEFN$ 为平行四边形，所以 $AE=NF$，所以 $AE+DF+EF=NF+DF+EF\geqslant ND+EF$，当 N，F，D 三点依次共线时，$NF+DF+EF$ 取得最小值，最小值为 $ND+EF$. 由(2)可知，点 F 的横、纵坐标比点 E 的横、纵坐标都大 2，所以点 N 的横、纵坐标比点 A 的横、纵坐标都大 2，所以点 $N(-2+2,0+2)$，即点 $N(0,2)$. 由两点间的距离公式，得 $ND=\sqrt{(0-1)^2+\left(2+\frac{9}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{173}}{2}$. 所以 $ND+EF=\frac{\sqrt{173}}{2}+2\sqrt{2}$，即 $AE+EF+DF$ 的最小值为$\frac{\sqrt{173}}{2}+2\sqrt{2}$.

中考模拟压轴 18

2025 年宿迁市泗洪县中考模拟压轴题

1. B **提示**：如图 1，连接 AC，BD 交于点 O，连接 OF，过点 F 作 $FN\perp CD$ 于点 N. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $CD=AB=3$，$AD=BC=4$，$\angle ADC=\angle ABC=90^\circ$，$BD=AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=5$，$OA=OC=OD=\frac{5}{2}$. 因为 $CF\perp AE$，所以$\angle AFC=90^\circ=\angle ADC$，所以 $OF=OA=OC=OD$，所以 A，C，F，D 四点共圆，且圆心为点 O. 当点 E 在边 CD 上运动时，点 F 在$\overset{\frown}{CD}$上运动. 因为$\angle ADE=\angle FNE=90^\circ$，$\angle AED=\angle FEN$，所以$\triangle ADE\backsim\triangle FNE$，所以$\frac{AE}{EF}=\frac{DA}{NF}=\frac{4}{NF}$，所以当 NF 的长取最大值时，$\frac{AE}{EF}$的值最小. 如图 2，当 F 为$\overset{\frown}{CD}$的中点时，NF 的长最大，此时 $OF\perp CD$，即 O，N，F 三点共线，且 N 为 CD 的中点. 又因为 O 为 AC 的中点，所以 $ON=\frac{1}{2}AD=2$. 所以 $NF=OF-ON=OA-ON=\frac{1}{2}$，所以$\frac{AE}{EF}=\frac{DA}{NF}=8$. 所以$\frac{AE}{EF}$的最小值为 8.

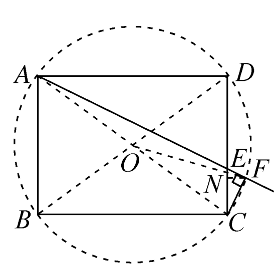


图 1

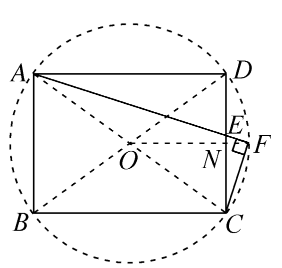
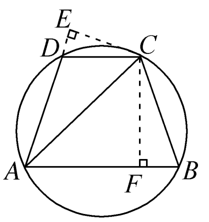


图 2

2. $2\sqrt{6}-2\sqrt{2}$　**提示**：如图，分别过点 C 作 $CE\perp AD$，交 AD 的延长线于点 E，作 $CF\perp AB$ 于点 F. 设 $CE=x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACE$ 中，$\angle CAD=30^\circ$，所以 $AC=2CE=2x$. $AE=\sqrt{3}CE=\sqrt{3}x$. 所以 $DE=AE-AD=\sqrt{3}x-\sqrt{2}$. 因为 $CF\perp AB$，$\angle BAC=45^\circ$，所以 $\triangle ACF$ 是等腰直角三角形，所以 $AF=CF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2x=\sqrt{2}x$，所以 $BF=AB-AF=2-\sqrt{2}x$. 由圆内接四边形的性质，得 $\angle ADC+\angle B=180^\circ$. 又因为 $\angle CDE+\angle ADC=180^\circ$，所以 $\angle CDE=\angle B$，所以 $\tan\angle CDE=\tan B$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle CDE$ 中，$\tan\angle CDE=\dfrac{CE}{DE}=\dfrac{x}{\sqrt{3}x-\sqrt{2}}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle CBF$ 中，$\tan B=\dfrac{CF}{BF}=\dfrac{\sqrt{2}x}{2-\sqrt{2}x}$，所以 $\dfrac{x}{\sqrt{3}x-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}x}{2-\sqrt{2}x}$，解得 $x=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，所以 $AC=2x=2\sqrt{6}-2\sqrt{2}$.



3. 解：(1) 因为抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 的对称轴为直线 $x=1$，所以 $-\dfrac{b}{-2}=1$，解得 $b=2$. 将点 $A(-1,0)$ 代入抛物线 $y=-x^2+2x+c$，得 $-1-2+c=0$，解得 $c=3$. 所以抛物线的函数表达式为 $y=-x^2+2x+3$.

(2) 如图 1，过点 E 作 $GH\perp y$ 轴于点 G，交 DF 于点 H. 对于 $y=-x^2+2x+3$，令 $x=0$，则 $y=3$，所以点 C 的坐标是 $(0,3)$. 因为点 $A(-1,0)$ 和点 B 关于直线 $x=1$ 对称，所以点 B 的坐标为 $(3,0)$. 所以 $OB=OC=3$. 因为 $\angle BOC=90^\circ$，所以 $\angle OCB=\angle OBC=45^\circ$. 因为 $DF /\!/ y$ 轴，所以 $\angle DFC=\angle OCB=45^\circ$. 因为 $DE\perp BC$，所以 $\angle DEF=90^\circ$，所以 $\angle EDF=\angle DFE=45^\circ$，所以 $DE=EF$，即 $\triangle DEF$ 是等腰直角三角形. 由待定系数法，得直线 BC 的函数表达式为 $y=-x+3$. 设点 D 的坐标为 $(x,-x^2+2x+3)$，则 $GH=x$，点 F 的坐标是 $(x,-x+3)$，所以 $DF=-x^2+2x+3-(-x+3)=-x^2+3x$，所以 $DE=EF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}DF=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x^2+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}x$. 因为 $CE=2EF$，所以 $CE=-\sqrt{2}x^2+3\sqrt{2}x$. 易证 $\triangle CEG$，$\triangle DEH$ 均为等腰直角三角形，所以 $EG=\dfrac{\sqrt{2}}{2}CE=-x^2+3x$，$EH=\dfrac{\sqrt{2}}{2}DE=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x$. 因为 $EG+EH=GH=x$，即 $-x^2+3x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x=x$，整理，得 $3x^2-7x=0$，解得 $x_1=\dfrac{7}{3}$，$x_2=0$（舍去）. 当 $x=\dfrac{7}{3}$ 时，$y=-x^2+2x+3=-\left(\dfrac{7}{3}\right)^2+2\times\dfrac{7}{3}+3=\dfrac{20}{9}$，所以点 D 的坐标为 $\left(\dfrac{7}{3},\dfrac{20}{9}\right)$.

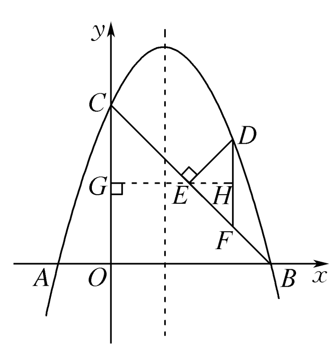


图 1

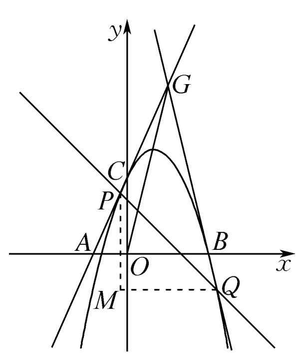


图 2

(3) $\triangle OCG$ 的面积为定值. 如图 2，过点 P 作 $PM\perp x$ 轴，过点 Q 作 $QM\perp PM$ 于点 M. 设点 P 的坐标为 $(p,-p^2+2p+3)$，点 Q 的坐标为 $(q,-q^2+2q+3)$. 对于 $y=-x+m$，令 $x=0$，则 $y=m$；令 $y=0$，则 $x=m$. 所以直线 $y=-x+m$ 与 x 轴、y 轴交点的坐标分别为 $(m,0)$，$(0,m)$. 易知直线 $y=-x+m$ 与 x 轴、y 轴相交所形成的锐角为 45°. 因为点 P，Q 在直线 $y=-x+m$ 上，易证 $\triangle PQM$ 为等腰直角三角形，所以 $QM=PM$，即 $q-p=-p^2+2p+3-(-q^2+2q+3)$，整理，得 $(q-p)(p+q-3)=0$，所以 $p+q=3$ 或 $p=q$（舍去）. 设直线 PC 的函数表达式为 $y=k_1x+b_1(k_1\neq 0)$，

将点 $P(p,-p^2+2p+3)$，$C(0,3)$代入，得 $\begin{cases}k_1p+b_1=-p^2+2p+3,\\b_1=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=-p+2,\\b_1=3.\end{cases}$ 所以直线 PC 的函数表达式为 $y=(-p+2)x+3$. 设直线 BQ 的函数表达式为 $y=k_2x+b_2(k_2\neq0)$，将点 $Q(q,-q^2+2q+3)$，$B(3,0)$ 代入，得 $\begin{cases}k_2q+b_2=-q^2+2q+3,\\3k_2+b_2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_2=-(q+1),\\b_2=3(q+1).\end{cases}$ 所以直线 BQ 的函数表达式为 $y=-(q+1)x+3(q+1)$. 联立，得 $\begin{cases}y=(-p+2)x+3,\\y=-(q+1)x+3(q+1),\end{cases}$ 解得 $x=\frac{3q}{-p+q+3}$. 因为 $p+q=3$，所以 $p=-q+3$，所以 $x=\frac{3q}{-(-q+3)+q+3}=\frac{3q}{2q}=\frac{3}{2}$，所以点 G 的横坐标是 $\frac{3}{2}$ $\Big($也可通过取 PQ 的中点 G_1，则点 G_1 的横坐标为 $\frac{p+q}{2}=\frac{3}{2}$. 连接 GG_1 交 BC 于点 G_2. 易知 $BC/\!/PQ$，可得 $\frac{CG_2}{PG_1}=\frac{GG_2}{GG_1}=\frac{BG_2}{QG_1}$，所以 $CG_2=PG_1\cdot\frac{GG_2}{GG_1}=QG_1\cdot\frac{GG_2}{GG_1}=BG_2$，所以点 G_2 的横坐标为 $\frac{3}{2}$，所以 $G_1G_2/\!/y$ 轴，进而得到点 G 的横坐标$\Big)$，为定值. 所以 $\triangle OCG$ 的面积是 $\frac{1}{2}OC\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\times3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$，即 $\triangle OCG$ 的面积是定值 $\frac{9}{4}$.

中考模拟压轴 19

2025 年淮安市盱眙县中考模拟压轴题

1. C　**提示**：连接 PD，DE. 由正方形的轴对称性，得 $PD=PB$. 所以 $PE+PB=PE+PD\geqslant DE$. 当 D，P，E 三点依次共线时，等号成立，此时 $PE+PB$ 的值最小，最小值为 DE 的长. 由题图 2 可知，$DE=3\sqrt{5}$，此时 $PC=4\sqrt{2}$. 因为 E 为 AB 的中点，所以 $CD=AB=2AE$. 因为 $AE/\!/CD$，所以 $\triangle PCD\backsim\triangle PAE$，所以 $\frac{PC}{PA}=\frac{CD}{AE}=2$. 所以 $PA=\frac{1}{2}PC=2\sqrt{2}$，所以 $AC=PA+PC=6\sqrt{2}$，所以正方形 $ABCD$ 的边长为 6.

2. (1) $\sqrt{2}+1$　(2) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　**提示**：设 $AB=AC=1$，则 $BC=\sqrt{2}$.

(1) 如图 1，当 $DE\perp BC$ 时，$\angle DEB=90°$. 所以 $\angle DEB+\angle BAC=180°$，所以 A，B，E，D 四点在同一个圆上，所以 $\angle BAE=\angle BDE$. 因为 $AE\perp BD$，所以 $\angle BDE+\angle DEF=90°$. 又因为 $\angle BEF+\angle DEF=\angle DEB=90°$. 所以 $\angle BEF=\angle BDE=\angle BAE$，所以 $BE=AB=1$(也可通过证明 $\triangle ADF\backsim\triangle BAF$，$\triangle EDF\backsim\triangle BEF$，得 $AF^2=BF\cdot DF=EF^2$，即 $AF=EF$，进而得到 BD 垂直平分 AE，从而解之). 所以 $CE=BC-BE=\sqrt{2}-1$. 所以 $\frac{BE}{CE}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$.

(2) 如图 2，当 $DE\perp AC$ 时，易证 $\triangle CDE$ 为等腰直角三角形，设 $DE=DC=x(x<1)$，则 $AD=1-x$，$CE=\sqrt{2}x$. 所以 $BE=BC-CE=\sqrt{2}-\sqrt{2}x$. 因为 $\angle CDE=\angle BAC=90°$，所以 $DE/\!/AB$. 所以 $\angle BAE=\angle AED$. 因为 $AE\perp BD$，所以 $\angle DAE+\angle ADB=90°$. 又因为 $\angle BAE+\angle DAE=90°$，所以 $\angle BAE=\angle ADB$，所以 $\angle ADB=\angle AED$. 又因为 $\angle BAD=\angle ADE=90°$，所以 $\triangle ABD\backsim\triangle DAE$. 所以 $\frac{AB}{DA}=\frac{AD}{DE}$，即 $\frac{1}{1-x}=\frac{1-x}{x}$. 解得 $x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$（舍去），$x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. 所以 $\frac{BE}{CE}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}x}{\sqrt{2}x}=\frac{1-x}{x}=\frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

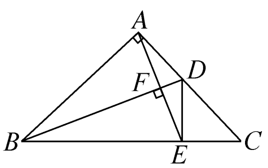


图 1

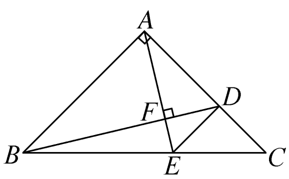


图 2

3. 解：(1) 由抛物线的对称轴是直线 $x=\frac{3}{2}$，得 $-\frac{b}{2\times1}=\frac{3}{2}$，解得 $b=-3$. 将点 $B(3,0)$ 代入 $y=x^2-3x+c$，得 $9-3\times3+c=0$，解得 $c=0$. 所以此抛物线的函数表达式为 $y=x^2-3x$.

（2）存在. 如图 1，对于 $y=x^2-3x$，令 $y=0$，则 $x_1=0$，$x_2=3$. 所以点 A 的坐标为 $(0,0)$，所以 $AB=3$. 设点 M 的坐标为 (m,n)，则 $S_{\triangle AMB}=\frac{1}{2}AB\cdot|n|=\frac{1}{2}\times 3\cdot|n|=3$，解得 $n=2$ 或 $n=-2$. 因为 $\triangle AMB$ 是锐角三角形，所以点 M 位于 x 轴的下方，所以 $n=-2$. 将点 $M(m,-2)$ 代入 $y=x^2-3x$，得 $m^2-3m+2=0$，解得 $m=1$ 或 $m=2$. 因为点 M 在对称轴右侧的图像上，所以 $m=2$. 所以点 M 的坐标为 $(2,-2)$. 此时过点 M 作 $MN\perp x$ 轴于点 N，则 $AN=MN=2$，$BN=1$，所以 $\angle AMN=\angle MAB=45^\circ$，$\angle ABM<90^\circ$，$\angle BMN<45^\circ$，所以 $\angle AMB<90^\circ$，所以 $\triangle AMB$ 是锐角三角形. 故存在点 $M(2,-2)$，使锐角三角形 AMB 的面积等于 3.

（3）如图 2，由（2）可知，$\angle MAB=45^\circ$. 因为 $\angle PAM=90^\circ$，所以 $\angle PAB=\angle PAM-\angle MAB=90^\circ-45^\circ=45^\circ$. 所以点 P 在直线 $y=x$ 上. 联立，得 $\begin{cases}y=x,\\ y=x^2-3x,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=0,\\ y_1=0\end{cases}$（舍去），$\begin{cases}x_2=4,\\ y_2=4.\end{cases}$ 所以点 P 的坐标为 $(4,4)$. 由两点间的距离公式，得 $AM=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$，$PA=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$. 所以 $\triangle APM$ 的面积为 $\frac{1}{2}AM\cdot PA=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}=8$.

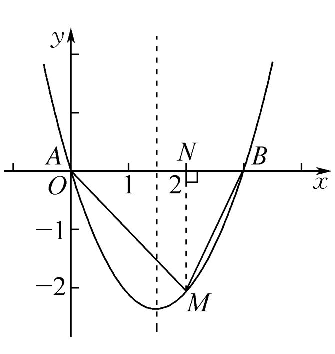


图 1

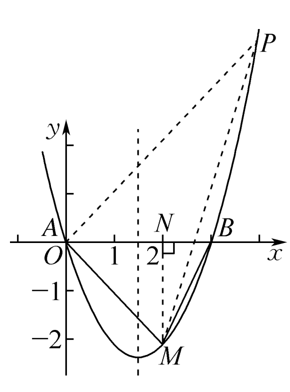


图 2

中考模拟压轴 20

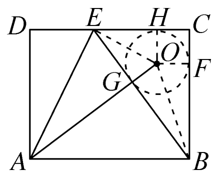
2025 年连云港市灌云县、灌南县中考模拟压轴题

1. D　**提示：**由题意，得点 A_1 在 $y=ax^2(a>0)$ 上，点 B_1 在直线 $y=-ax(a>0)$ 上，所以点 $A_1(1,a)$，$B_1(1,-a)$，所以 $A_1B_1=a-(-a)=2a=1\cdot 2a$；同理，点 $A_2(2,4a)$，$B_2(2,-2a)$，所以 $A_2B_2=4a-(-2a)=6a=2\cdot 3a$；点 $A_3(3,9a)$，$B_3(3,-3a)$，所以 $A_3B_3=9a-(-3a)=12a=3\cdot 4a$……按此规律，$A_nB_n=n(n+1)a$. 所以 $\frac{1}{A_1B_1}+\frac{1}{A_2B_2}+\cdots+\frac{1}{A_nB_n}=\frac{1}{1\cdot 2a}+\frac{1}{2\cdot 3a}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)a}=\frac{1}{a}\left[\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]=\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{a}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{n}{a(n+1)}$.

2. $\frac{25}{4}$　**提示：解法 1**　如图，作 $\triangle BCE$ 的内切圆 O，与 BC，CE 分别相切于点 F，H，连接 OF，OH，则 $OF\perp BC$，$OH\perp CE$. 连接 OB，OE. 设 AO 交 BE 于点 G. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $\angle ABC=\angle D=\angle C=90^\circ$，$BC=AD=5$，$AB=CD$，$CD\parallel AB$，所以 $\angle AED=\angle EAB$. 因为 EA 平分 $\angle DEB$，所以 $\angle AED=\angle AEB$，所以 $\angle EAB=\angle AEB$，所以 $EB=AB=CD$. 因为 $AO=AB$，所以 $\angle AOB=\angle ABO$，所以 $\angle BAO=180^\circ-2\angle ABO=180^\circ-2(\angle ABE+\angle OBE)$. 因为点 O 是 $\triangle BCE$ 的内心，所以 $\angle OBE=\angle OBC=\frac{1}{2}\angle CBE$，所以 $\angle BAO=180^\circ-2\left(\angle ABE+\frac{1}{2}\angle CBE\right)=180^\circ-\angle ABE-(\angle ABE+\angle CBE)=90^\circ-\angle ABE$，所以 $\angle BAO+\angle ABE=90^\circ$. 由三角形外角的性质，得 $\angle AGE=\angle BAO+\angle ABE=90^\circ$，即 $OG\perp BE$. 因为 $\angle AEG=\angle AED$，$\angle AGE=\angle D=90^\circ$，$AE=AE$，所以 $\triangle AED\cong\triangle AEG$（AAS），所以 $AG=AD=5$，$EG=ED$. 因为 $EB=CD$，所以 $EB-EG=CD-ED$，即 $BG=CE$. 因为 $\odot O$ 与 BE 相切，且 $OG\perp BE$ 于点 G，则 G 为切点，所以 $OG=OF=OH$. 由切线长定理，得 $EH=EG$，$BG=BF$，$CH=CF$. 因为 $OH\perp CE$，$OF\perp BC$，所以 $\angle OHC=\angle OFC=\angle C=90^\circ$，所以四边形

$OFCH$ 是矩形. 又因为 $CH=CF$,所以四边形 $OFCH$ 是正方形,所以 $OG=OH=CH=CF$. 所以 $BF=BG=CE=EH+CH=EG+OG$. 所以 $BC=BF+CF=EG+OG+OG=EG+2OG=5$,所以 $EG=5-2OG$. 因为 $\angle AEG=\angle AED=\frac{1}{2}\angle DEG$, $\angle OEG=\angle OEC=\frac{1}{2}\angle CEG$,所以 $\angle AEO=\angle AEG+\angle OEG=\frac{1}{2}(\angle DEG+\angle CEG)=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ$,所以 $\angle OEG=90^\circ-\angle AEG=\angle EAG$. 又因为 $\angle AGE=\angle EGO=90^\circ$,所以 $\triangle AGE\backsim\triangle EGO$,所以 $\frac{AG}{EG}=\frac{EG}{OG}$,即 $EG^2=AG\cdot OG=5OG$. 所以 $(5-2OG)^2=5OG$,解得 $OG=\frac{5}{4}$ 或 $OG=5$(舍去),所以 $AB=AO=AG+OG=5+\frac{5}{4}=\frac{25}{4}$.

解法 2 设 $AB=x$,则 $AO=AB=CD=x$. 同解法 1,可证 $BE=AB=x$, $AG=AD=5$, $ED=EG=EH$, $CH=OG$, $OG\perp BE$. 因为 $CH=CD-ED-EH=x-2EG$, $OG=AO-AG=x-5$,所以 $x-2EG=x-5$,所以 $EG=\frac{5}{2}$. 所以 $BG=BE-EG=x-\frac{5}{2}$. 在 $Rt\triangle ABG$ 中,由勾股定理,得 $AG^2+BG^2=AB^2$,即 $5^2+\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=x^2$,解得 $x=\frac{25}{4}$. 所以 $AB=\frac{25}{4}$.



3. 解:(1) 由题可知,点 A,B 关于直线 $x=1$ 对称,且点 $A(-1,0)$,所以点 $B(3,0)$. 将点 $A(-1,0)$,$B(3,0)$,$C(0,-3)$代入抛物线 $y=ax^2+bx+c$,得 $\begin{cases}0=a-b+c,\\0=9a+3b+c,\\-3=c,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=-2,\\c=-3.\end{cases}$ 所以抛物线的函数表达式为 $y=x^2-2x-3$.

(2) 因为点 $A(-1,0)$,$B(3,0)$,所以 $OA=1$,$OB=3$,所以 $\frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle BOC}}=\frac{\frac{1}{2}OA\cdot OC}{\frac{1}{2}OB\cdot OC}=\frac{OA}{OB}=\frac{1}{3}$.

(3) 存在. 因为点 P 在对称轴上,且点 A,B 关于对称轴对称,所以 $PA=PB$,所以 $\triangle PAC$ 的周长为 $PA+PC+AC=PB+PC+AC\geqslant BC+AC$. 如图,当点 B,P,C 依次共线,即点 P 在线段 BC 上时,$\triangle PAC$ 的周长有最小值,最小值为 $BC+AC$ 的值. 由待定系数法,得直线 BC 的函数表达式为 $y=x-3$. 令 $x=1$,则 $y=-2$. 所以此时点 P 的坐标为 $(1,-2)$.