一、数学思想

(一) 数形结合思想

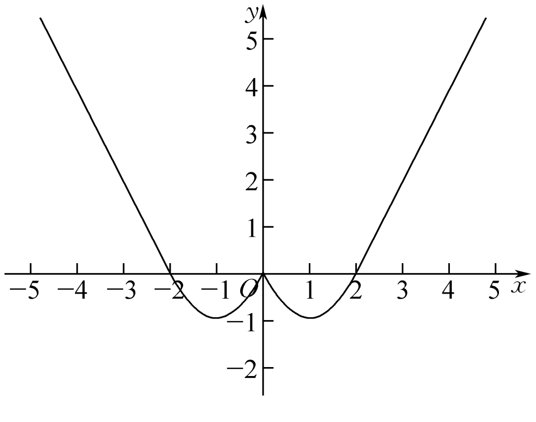
数形结合是数学解题中常用的思想方法，应用数形结合可以使某些抽象的数学问题直观化、生动化，能够变抽象思维为形象思维，有助于简捷、巧妙地解决数学问题.

应用数形结合思想需要以形助数，正确地绘图对题意的理解、思路的探求、方法的选择以及结论的判断都有重要的作用；要善于把作图与计算结合起来，充分发挥图形的作用；要观察图形的形状、大小和位置关系等，寻找图形中蕴含的数量关系，运用推理或计算得出结论. 应用数形结合思想也需要以数解形，挖掘几何图形中的数量关系，用代数方法解几何问题，根据几何图形建立方程或写出函数表达式是常用的方法.

例 1.1 (2025・南充)已知某函数图像关于 y 轴对称，当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，$y=x^2-2x$；当 $x>2$ 时，$y=2x-4$. 若直线 $y=x+b$ 与该函数图像有且仅有四个不同交点，则实数 b 的取值范围是 (　　)

A. $-\frac{1}{4}<b<0$　　B. $-\frac{9}{4}<b<-\frac{1}{4}$　　C. $-\frac{1}{4}\leqslant b\leqslant 0$　　D. $b\leqslant -\frac{1}{4}$或 $b>0$

分析： 由题意可知，函数在 y 轴右侧的函数表达式是：当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，$y=x^2-2x$；当 $x>2$ 时，$y=2x-4$. 因为 $y=x^2-2x=(x-1)^2-1$，所以当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，图像是开口向上，顶点为$(1,-1)$，在点$(0,0)$，$(2,0)$之间的一部分抛物线；因为 $y=2x-4$，所以当 $x>2$ 时，图像是以$(2,0)$为端点，且在点$(2,0)$右侧的一条射线. 据此可画出函数在 y 轴右侧的图像. 因为函数图像关于 y 轴对称，由对称性可画出函数在 y 轴左侧的图像. 于是可知，函数在 y 轴左侧的函数表达式是：当 $-2\leqslant x<0$ 时，$y=x^2+2x$；当 $x<-2$ 时，$y=-2x-4$. 函数图像如图所示. 因为直线 $y=x+b$ 与直线 $y=x$ 平行，直线 $y=x$ 经过原点$(0,0)$，所以由函数图像可知，将直线 $y=x$ 沿 y 轴方向向上平移不可能有四个不同交点，所以应将直线 $y=x$ 沿 y 轴方向向下平移，所以 $b<0$. 由函数图像可知，直线 $y=x+b$ 与函数在 y 轴右侧的图像最多有两个不同交点，所以直线 $y=x+b$ 与函数 $y=x^2+2x(-2\leqslant x<0)$ 有两个不同交点. 联立，得$\begin{cases}y=x^2+2x(-2\leqslant x<0),\\ y=x+b.\end{cases}$整理，得关于 x 的方程 $x^2+x-b=0$. 根据题意，得该方程的根的判别式 $1+4b>0$，解得 $b>-\frac{1}{4}$. 综上可知，当 $-\frac{1}{4}<b<0$ 时，直线 $y=x+b$ 与这个函数图像有且仅有四个不同交点.



答案：A

点拨：本题考查了二次函数、一次函数的图像与性质，二次函数与一元二次方程的关系，一次函数图像的平移规律. 解答时先画出已知表达式的函数的图像，再利用数形结合思想，由图形的直观性，确定出直线 $y=x+b$ 与所画函数图像有四个不同交点的情形，进而通过根的判别式求 b 的取值范围.

例 1.2 规定：若函数 y_1 的图像与函数 y_2 的图像有三个不同的公共点，则称这两个函数互为“兄弟函数”，其公共点称为“兄弟点”.

(1) 现有下列三个函数：①$y=x+1$；②$y=-\dfrac{3}{x}$；③$y=-x^2+1$. 其中与二次函数 $y=2x^2-4x-3$ 互为“兄弟函数”的是________（填序号）.

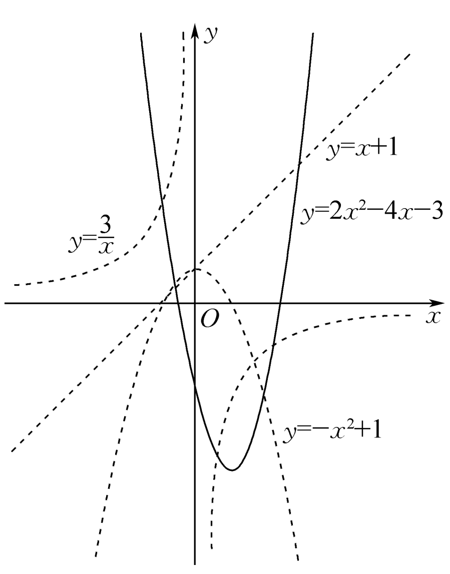
(2) 若函数 $y_1=ax^2-5x+2(a\neq 0)$ 与 $y_2=-\dfrac{1}{x}$ 互为“兄弟函数”，$x=1$ 是其中一个“兄弟点”的横坐标.

①求实数 a 的值；

②另外两个“兄弟点”的横坐标是________，________.

(3) 若函数 $y_1=|x-m|$（m 为常数）与 $y_2=-\dfrac{2}{x}$ 互为“兄弟函数”，三个“兄弟点”的横坐标分别为 x_1,x_2,x_3，且 $x_1<x_2<x_3$，求 $(x_2+x_3-2x_1)^2$ 的取值范围.

分析：(1)**解法 1**　如图，分别画出三个函数①$y=x+1$；②$y=-\dfrac{3}{x}$；③$y=-x^2+1$ 与二次函数 $y=2x^2-4x-3$ 的图像，观察交点个数.



解法 2　分别判别方程①$x+1=2x^2-4x-3$，②$-\dfrac{3}{x}=2x^2-4x-3$，③$-x^2+1=2x^2-4x-3$ 的根的个数，从而得出函数图像的交点个数.

(2) ①把 $x=1$ 代入 $y_2=-\dfrac{1}{x}$，得 $y=-1$. 把 $x=1$，$y=-1$ 代入函数 $y_1=ax^2-5x+2(a\neq 0)$，得 $a-5+2=-1$，解得 $a=2$.

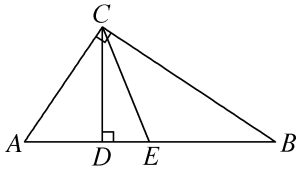


图 1

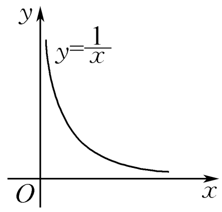


图 2

分析:(1) ①利用相似三角形的性质求出 CD 的长,利用直角三角形斜边中线的性质求出 CE 的长. ②因为 $CD\perp AB$,$0<a<b$,所以点 D,E 不重合,根据“垂线段最短”,可知 $CD<CE$,即 $\frac{1}{2}(a+b)>\sqrt{ab}$,所以 $a+b>2\sqrt{ab}$.

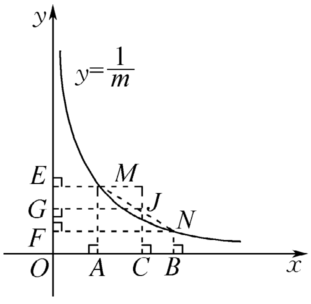
(2) ①当 $m=1$,$n=2$ 时,$l=\frac{9}{8}$;当 $m=3$,$n=3$ 时,$l=1$. ②通过反比例函数的图像,构造出与 l 有关的图形的某一数量特征. 本题可根据反比例函数 k 的几何意义求解.

答案:(1) ①因为 $AC\perp BC$,$CD\perp AB$,所以 $\angle ADC=\angle CDB=\angle ACB=90°$,$\angle ACD+\angle A=90°$,$\angle A+\angle B=90°$,所以 $\angle ACD=\angle B$. 所以 $\triangle ADC\backsim\triangle CDB$,所以 $\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{BD}$,所以 $CD^2=AD\cdot BD$. 因为 $AD=a$,$BD=b$,$CD>0$,所以 $CD=\sqrt{ab}$. 因为 $\angle ACB=90°$,E 是 AB 的中点,所以 $CE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}(a+b)$.

②$>$　$a+b>2\sqrt{ab}$

(2) ①$\frac{9}{8}$　1

②1　该猜想的说明如下:



如图,过点 M 作 $MA\perp x$ 轴于点 A,$ME\perp y$ 轴于点 E,过点 N 作 $NB\perp x$ 轴于点 B,$NF\perp y$ 轴于点 F,连接 MN,取 MN 的中点 J,过点 J 作 $JC\perp x$ 轴于点 C,$JG\perp y$ 轴于点 G,则点 $J\left(\frac{p}{2},\frac{q}{2}\right)$. 因为当 $m\neq n$ 时,点 J 在反比例函数图像的上方,可得 $S_{矩形JCOG}>1$,当 $m=n$ 时,点 J 落在反比例函数的图像上,可得 $S_{矩形JCOG}=1$,所以 $S_{矩形JCOG}\geqslant 1$. 所以 $\frac{p}{2}\cdot\frac{q}{2}\geqslant 1$,即 $l\geqslant 1$,所以 l 的最小值为 1.

点拨:本题属于反比例函数综合题,考查了反比例函数的性质、相似三角形的判定和性质,以及直角三角形斜边中线的性质等知识,解题的关键是理解反比例函数 k 的几何意义,并巧妙地运用数形结合思想.

(二) 整体思想

整体思想就是从问题的整体性质出发,发现问题的整体结构特征,善于用“集成”的眼光,把某些式子或图形看成一个整体,突出对问题的整体结构的分析和改造,把握它们与由已知条件容易得出的结论之间的关联,进行有目的、有意识的整体处理.

整体是与局部对应的,当按常规不容易求某一个(或多个)未知量时,不妨打破常规,通过观察与分析,根据题目的结构特征,把某一组数或某一个代数式看作一个整体,把握整体与局部的联系,从而找到解决问题的新途径.

例 2.1 阅读下列材料,解答问题.

解方程$(x^2-1)^2-5(x^2-1)+4=0$时,我们可以将x^2-1视为一个整体,然后设$x^2-1=y$,则原方程可化为$y^2-5y+4=0$①.解得$y_1=1$,$y_2=4$.当$y=1$时,$x^2-1=1$,$x^2=2$,解得$x=\pm\sqrt{2}$;当$y=4$时,$x^2-1=4$,$x^2=5$,解得$x=\pm\sqrt{5}$.所以$x_1=\sqrt{2}$,$x_2=-\sqrt{2}$,$x_3=\sqrt{5}$,$x_4=-\sqrt{5}$.

(1) 填空:在由原方程得到方程①的过程中,利用________法达到了降次的目的,体现了__________的数学思想.

(2) 用上述方法解方程:$x^4-x^2-6=0$.

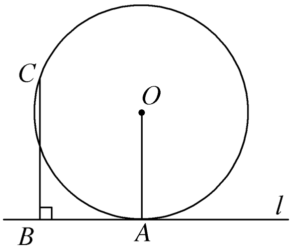
分析:(2) 先设$x^2=y$,则原方程可化为$y^2-y-6=0$.运用因式分解法可解得$y_1=3$,$y_2=-2$.再将$y_1=3$,$y_2=-2$代入$x^2=y$,得到关于x的一元二次方程,然后解两个一元二次方程.最后确定原方程的解.

答案:(1) 换元　整体(或转化)

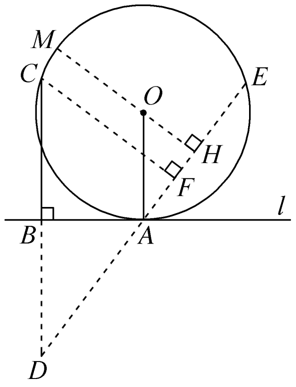
(2) 设$x^2=y$,则原方程可化为$y^2-y-6=0$.解得$y_1=3$,$y_2=-2$.当$y=3$时,$x^2=3$,解得$x=\pm\sqrt{3}$;当$y=-2$时,$x^2=-2$,无实数解.所以$x_1=\sqrt{3}$,$x_2=-\sqrt{3}$.

点拨:本题考查了换元法.当所给方程为高次方程时,可把某部分当作一个整体,用换元法降次求解.

例 2.2 如图,直线l与$\odot O$相切于点A,C为$\odot O$上一动点,过点C作$CB\perp$直线l,垂足为B.已知$\odot O$的半径为6,则$\frac{4}{3}AB+BC$的最大值为________.



分析:如图,延长CB至点D,使$BD=\frac{4}{3}AB$,则$\sin D=\frac{3}{5}$,延长DA与$\odot O$交于另一点E,过点C作$CF\perp DE$,垂足为F,过点O作$OH\perp DE$,垂足为H,延长HO交$\odot O$于点M.由题意可知,$AO/\!/BC$,所以$\angle OAH=\angle D$.则$\frac{4}{3}AB+BC=CD=\frac{5}{3}CF\leqslant\frac{5}{3}MH=\frac{5}{3}(MO+OH)=\frac{5}{3}(MO+OA\cdot\sin\angle OAH)=\frac{5}{3}\times\left(6+6\times\frac{3}{5}\right)=16$.



答案:16

点拨:通过构造将线段的倍分、和(差)转化并整体求解,使问题化繁为简,迎刃而解.

$4(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)=186+x$. 设 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=m$，则 $4m=186+x$，所以 $m=46+\frac{2+x}{4}$. 由题意知 x 是 45，46，47，48 中的某一个，且 m 是正整数，所以 $x=46$，所以 $m=58$，即 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=58$.

答案：58

点拨：本题考查了代数推理，解答时利用整体思想，化不熟悉为熟悉，化复杂为简单，将多参数问题转化为求二元一次方程的整数解问题，使问题获解.

（三）转化（或化归）思想

转化（或化归）不仅是一种重要的解题思想，也是一种基本的思维策略，更是一种有效的思维方式. 所谓的转化（或化归）思想方法，就是在研究和解决有关数学问题时，采用某种手段将问题进行变换使之转化，一般总是将复杂问题转化为简单问题，将难解的问题转化为容易求解的问题，将未解决的问题通过化归转化为已解决的问题，或者归结为一个已为人们所熟知的、具有既定方法或程序的问题.

数学解题的过程，实际上就是把未知转化（或化归）到已知的过程，也就是把不熟悉的问题转化为熟悉的问题，通过对条件和结论的转化最终求得问题的答案. 常见的转化方法有待定系数法、配方法、整体代入法、消元法等，常用的转化策略有化动为静、由抽象到具体、由不等到相等、逆向转化等.

例 3.1 若 $W=5x^2-4xy+y^2-2y+8x+3$（x，y 为实数），则 W 的最小值为________.

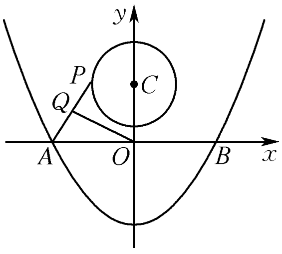
分析：解法 1：配方法 $W=5x^2-4xy+y^2-2y+8x+3=(4x^2-4xy+y^2)-2y+x^2+8x+3=(2x-y)^2+4x-2y+x^2+4x+3=[(2x-y)^2+2(2x-y)+1]+(x^2+4x+4)-2=(2x-y+1)^2+(x+2)^2-2$. 因为 x，y 均为实数，所以 $(2x-y+1)^2\geqslant 0$，$(x+2)^2\geqslant 0$，所以原式 $W\geqslant -2$，即 W 的最小值为 -2.

解法 2：判别式法 由题意可变形得 $5x^2+(8-4y)x+(y^2-2y+3-W)=0$，它可看作是含有参数 y 和 W 且关于 x 的一元二次方程. 因为 x 为实数，方程有实数根，所以 $(8-4y)^2-20(y^2-2y+3-W)\geqslant 0$，即 $5W\geqslant (y+3)^2-10\geqslant -10$，即 $W\geqslant -2$，所以 W 的最小值为 -2.

答案：-2

点拨：解法 1 通过配方法把原式整理为"平方＋常数"的形式，利用偶次幂的非负性求最值；解法 2 将等式转化为关于 x 的一元二次方程，利用方程有实数根列不等式求解，非常快捷简便.

例 3.2 如图，抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2-4$ 与 x 轴交于 A，B 两点，P 是以点 $C(0,3)$ 为圆心，2 为半径的圆上的一个动点，Q 是线段 PA 的中点，连接 OQ，则线段 OQ 长的最大值是（　　）



A. 3　　B. $\frac{\sqrt{41}}{2}$　　C. $\frac{7}{2}$　　D. 4

分析：如图，连接 BP. 当 $y=0$ 时，$\frac{1}{4}x^2-4=0$，解得 $x_1=-4$，$x_2=4$，所以点 $A(-4,0)$，

解法2 如图2,延长CB到点G,使得$CG=AC$,连接AG.又因为$\angle C=60^\circ$,所以$\triangle ACG$是等边三角形,所以$AG=CG=AC=3$,$\angle G=\angle C=60^\circ$.所以$\angle GAD+\angle GDA=180^\circ-\angle G=120^\circ$.因为$\triangle ADE$是等边三角形,所以$\angle ADE=60^\circ$,所以$\angle GDA+\angle CDF=180^\circ-\angle ADE=120^\circ$,所以$\angle GAD+\angle GDA=\angle GDA+\angle CDF$,所以$\angle GAD=\angle CDF$.又因为$\angle G=\angle C$,所以$\triangle GAD\backsim\triangle CDF$,所以$\dfrac{GA}{CD}=\dfrac{GD}{CF}$.设$GD=x$,$CF=y$,则$CD=CG-GD=3-x$.所以$\dfrac{3}{3-x}=\dfrac{x}{y}$,所以$y=\dfrac{1}{3}x(3-x)=-\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$.因为$-\dfrac{1}{3}<0$,所以当$x=\dfrac{3}{2}$时,$y$有最大值为$\dfrac{3}{4}$.即$CF$长的最大值为$\dfrac{3}{4}$.

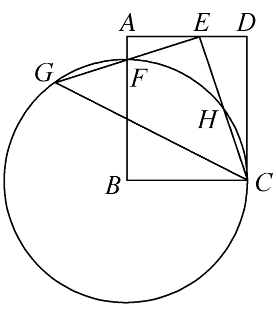
答案:$\dfrac{3}{4}$

点拨:求线段长的最大(小)值的策略主要有两种:一是从形的角度求解,解法1挖掘图中的相似三角形,由相似三角形的对应边成比例,先建立CF与AD之间的等量关系,从而将CF长的最大值转化为AD长的最小值,再利用“垂线段最短”得到AD长的最小值位置,并求出AD长的最小值,最后求出CF长的最大值;二是从数的角度求解,解法2通过构造“一线三等角”相似三角形,由相似三角形的对应边成比例,建立CF与GD之间的等量关系,列出函数表达式,从而将求CF的最大值转化为二次函数的最大值问题,进而利用二次函数的性质求解.

(四)方程思想

方程思想就是从问题中发现或构造等量关系,恰当引入未知量,把已知量和未知量之间的等量关系转化为方程,从而使问题得到解决.在几何计算题中,常利用几何中的定理、公式、性质(勾股定理、三角函数关系式、相似三角形对应边成比例等)作为等量关系来构造方程,或利用图形中某些位置关系所隐含的等量关系(线段和差、面积和差等)来构造方程.

例4.1 (2025·深圳)如图,以矩形$ABCD$的点B为圆心,BC的长为半径作$\odot B$,交AB于点F,E为AD上一点,连接CE,将线段CE绕点E顺时针旋转90°至EG,点G落在$\odot B$上,且F为EG的中点.若$AF=1$,$AE=3$,则CD的长为________.



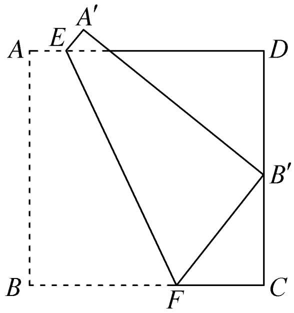
分析:因为四边形$ABCD$是矩形,所以$\angle A=\angle D=90^\circ$.在$\mathrm{Rt}\triangle AEF$中,$AE=3$,$AF=1$,$\angle A=90^\circ$,所以$EF=\sqrt{AE^2+AF^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$.因为$F$是$EG$的中点,所以$EG=2EF=2\sqrt{10}$.由旋转,得$CE=EG=2\sqrt{10}$,$\angle CEG=90^\circ$,所以$\angle AEF+\angle CED=90^\circ$.又因为$\angle CED+\angle DCE=90^\circ$,所以$\angle AEF=\angle DCE$.又因为$\angle D=\angle A=90^\circ$,所以$\triangle EAF\backsim\triangle CDE$,所以

$\frac{CD}{DE}=\frac{AE}{AF}=3$. 设 $DE=m$，则 $CD=3m$. 在$\mathrm{Rt}\triangle CDE$ 中，由勾股定理，得 $DE^2+CD^2=CE^2$，所以 $m^2+(3m)^2=(2\sqrt{10})^2$，解得 $m=2$(负值已舍)，所以 $CD=3m=6$.

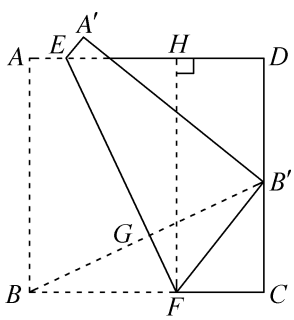
答案：6

点拨：求线段长较为常用的方法是利用勾股定理求解，因此考虑在 $\mathrm{Rt}\triangle CDE$ 中进行探究. 先在 $\mathrm{Rt}\triangle AEF$ 中利用勾股定理求出 EF 的长，结合 F 为 EG 的中点求出 EG 的长. 再由旋转知 $CE=EG$，得到 CE 的长. 进而由"一线三等角"相似模型得$\triangle CDE\backsim\triangle EAF$，于是 $CD=3DE$，最后在 $\mathrm{Rt}\triangle CDE$ 中，利用勾股定理列方程求解.

例 4.2 如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1，点 E，F 分别在边 AD，BC 上，将正方形沿着直线 EF 翻折，点 B 恰好落在边 CD 上的点 B'处. 如果四边形 $ABFE$ 与四边形 $EFCD$ 的面积之比为 3∶5，那么线段 CF 的长为________.



分析：如图，连接 BB'，过点 F 作 $FH\perp AD$ 于点 H. 由题意知，$S_{四边形ABFE}=\frac{3}{8}\times1=\frac{3}{8}$. 设 $CF=x$，则 $DH=x$，$B'F=BF=1-x$. 由 $S_{四边形ABFE}=\frac{1}{2}(AE+BF)\cdot AB=\frac{3}{8}$，即$\frac{1}{2}(AE+1-x)\times1=\frac{3}{8}$，解得 $AE=x-\frac{1}{4}$. 易得 $DE=1-AE=\frac{5}{4}-x$，$EH=DE-DH=\frac{5}{4}-x-x=\frac{5}{4}-2x$. 由折叠的性质，可得 $BB'\perp EF$，所以$\angle B'BC+\angle BFE=\angle BGF=90^\circ$. 又因为$\angle BFE+\angle EFH=90^\circ$，所以$\angle B'BC=\angle EFH$. 易证$\triangle EHF\cong\triangle B'CB$，所以 $B'C=EH=\frac{5}{4}-2x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle B'FC$ 中，$B'F^2=CF^2+B'C^2$，所以$(1-x)^2=x^2+\left(\frac{5}{4}-2x\right)^2$，解得 $x=\frac{3}{8}$，即 $CF=\frac{3}{8}$.



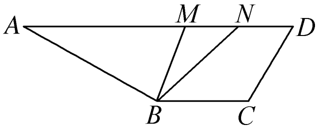
答案：$\frac{3}{8}$

点拨：本题主要考查了正方形的性质、全等三角形的判定与性质、勾股定理以及轴对称的性质. 注意掌握辅助线的作法技巧，以及数形结合思想和方程思想的应用.

（五）函数思想

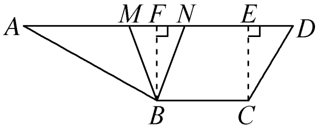
函数思想是用运动和变化的观点，去分析和研究数学问题中的数量关系，建立函数关系或构造函数，再运用函数的图像和性质去分析问题、转化问题，从而使问题获得解决.

例 5.1 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD//BC$，$\angle DAB=30°$，$\angle ADC=60°$，$BC=CD=2$. 若线段 MN 在边 AD 上运动，且 $MN=1$，则 BM^2+2BN^2 的最小值是（　　）



A. $\frac{13}{2}$　　B. $\frac{29}{3}$　　C. $\frac{39}{4}$　　D. 10

分析： 如图，过点 B 作 $BF\perp AD$ 于点 F，过点 C 作 $CE\perp AD$ 于点 E. 易得 $CE=CD\cdot\sin\angle ADC=\frac{\sqrt{3}}{2}CD=\sqrt{3}$，$BF=CE=\sqrt{3}$. 要使 BM^2+2BN^2 的值最小，则 BM 和 BN 的值越小越好，所以点 F 在线段 MN 上. 设 $FM=x(0<x<1)$，$FN=1-x$，则 $BM^2+2BN^2=FM^2+BF^2+2(FN^2+BF^2)=x^2+3+2[(1-x)^2+3]=3x^2-4x+11=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{29}{3}$. 所以当 $x=\frac{2}{3}$ 时，BM^2+2BN^2 有最小值，最小值是 $\frac{29}{3}$.



答案： B

点拨： 本题考查了直角三角形的性质以及二次函数求最值的应用，正确地作出辅助线是解题的关键. 根据勾股定理，构造出 BM^2+2BN^2 与 FM 的长 x 之间的函数表达式，利用二次函数的性质直接求最值，从而使问题得到解决.

例 5.2（2024·扬州市广陵区二模）某公园要在小广场建造一个喷泉景观. 在小广场中央 O 处垂直于地面安装一个高为 1.25 m 的花形柱子 OA，安置在柱子顶端 A 处的喷头向外喷水，水流在各个方向上沿形状相同的抛物线路径落下，且在过 OA 的任一平面上抛物线路径如图 1 所示，为使水流形状较为美观，设计成水流在距 OA 的水平距离为 1 m 时达到最大高度，此时离地面 2.25 m.

（1）以点 O 为原点建立如图 2 所示的平面直角坐标系，水流到 OA 水平距离为 x m，水流喷出的高度为 y m，求出在第一象限内的抛物线的函数表达式（不要求写出自变量的取值范围）.

（2）张师傅在喷泉景观内维修设备期间，喷水管意外喷水，但是身高 1.76 m 的张师傅却没有被水淋到，此时他离花形柱子 OA 的距离为 d m，求 d 的取值范围.

（3）为了美观，在离花形柱子 4 m 处的地面 B，C 处安装射灯，射灯射出的光线与地面成 45°角，如图 3 所示，光线交汇点 P 在花形柱子 OA 的正上方，且 $OP=4$ m，求光线与抛物线水流之间的最小垂直距离.

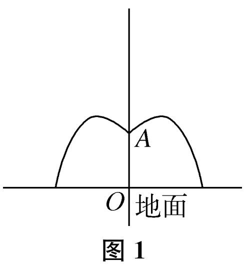


图 1

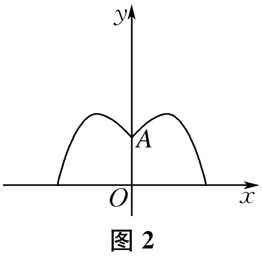


图 2

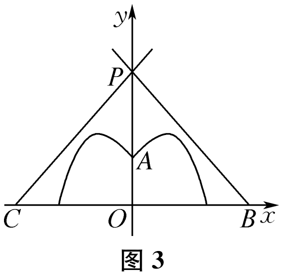


图 3

任务 2:根据题意,得"雅"服装每天获利为 $x[100-2(x-10)]$元,然后将 3 种服装的获利求和即可得出结果.

任务 3:根据任务 2 结果化为顶点式,然后结合题意,求解即可.

答案:任务 1:根据题意,加工"雅"服装的有 x 人,加工"风"服装的有 y 人,所以加工"正"服装的有$(70-x-y)$人.因为"正"服装总件数和"风"服装相等,所以$(70-x-y)\times1=2y$,整理,得 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{70}{3}(10\leqslant x\leqslant70)$.

任务 2:根据题意,"雅"服装每天获利为 $x[100-2(x-10)]$元,所以 $w=2y\times24+(70-x-y)\times48+x[100-2(x-10)]$,整理,得 $w=-2x^2+72x+3\ 360(10\leqslant x\leqslant70)$.

任务 3:由任务 2,得 $w=-2x^2+72x+3\ 360=-2(x-18)^2+4\ 008$,所以当 $x=18$ 时,理论上获得最大利润,但此时 $y=-\frac{1}{3}\times18+\frac{70}{3}=\frac{52}{3}$,不符合题意.因为二次函数图像开口向下,所以取 $x=17$ 或 $x=19$.当 $x=17$ 时,$y=\frac{53}{3}$,不符合题意;当 $x=19$ 时,$y=17$,符合题意.所以 $70-x-y=34$.综上所述,安排 19 名工人加工"雅"服装,17 名工人加工"风"服装,34 名工人加工"正"服装,即可获得最大利润.

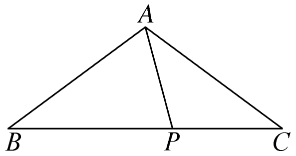
点拨:题目主要考查一次函数、二次函数的应用,理解题意,根据二次函数的性质求解是解题关键.

(六) 分类讨论思想

在解决一个复杂问题时,由于情形的多样性,不便于或无法一次性去解决,常需要用一个标准将原问题划分成几种小问题,将这些小问题一一加以解决,从而使原问题得到完全解决,这就是分类讨论思想.

当数学问题中的条件、结论不明确或题意中含参数或图形不确定时,就应分类讨论.分类的一般原则是:①分类中的每一部分是相互独立的;②一次分类按一个标准;③分类讨论应逐级进行.正确的分类必须是周全的,既不重复,也不遗漏.

例 6.1 (2025·河南)定义:有两个内角的差为 90°的三角形叫作"反直角三角形".如图,在$\triangle ABC$ 中,$AB=AC=5$,$BC=8$,P 为边 BC 上一点,若$\triangle APC$ 为"反直角三角形",则 BP 的长为________.



分析:因为 $AB=AC=5$,所以$\angle B=\angle C$.因为$\angle APC=\angle B+\angle BAP$,所以$\angle APC>\angle B$,所以$\angle APC>\angle C$.因为$\triangle APC$ 为"反直角三角形",所以$\angle APC-\angle C=90°$或$\angle APC-\angle CAP=90°$或$\angle CAP-\angle C=90°$或$\angle CAP-\angle APC=90°$.①当$\angle APC-\angle C=90°$时,如图 1,过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D.因为 $AB=AC=5$,$BC=8$,所以 $BD=CD=\frac{1}{2}BC=4$,所以 $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=3$.因为$\angle B=\angle C$,所以$\angle APC-\angle B=\angle PAB=90°$.因为$\angle B=\angle B$,

$\angle ADB=\angle PAB=90^\circ$，所以$\triangle ADB\backsim\triangle PAB$，所以$\frac{BA}{BP}=\frac{BD}{BA}$，所以$\frac{5}{BP}=\frac{4}{5}$，所以$BP=\frac{25}{4}$.
②当$\angle APC-\angle CAP=90^\circ$时，如图2，过点$P$作$PM\perp BC$交$AC$于点$M$，则$\angle APC-\angle APM=\angle CPM=90^\circ$，所以$\angle CAP=\angle APM$，所以$AM=PM$. 因为$PM\perp BC$，$AD\perp BC$，所以$PM/\!/AD$，所以$\triangle CMP\backsim\triangle CAD$，所以$\frac{CP}{CD}=\frac{PM}{DA}=\frac{CM}{CA}$. 设$CP=x$，则$BP=8-x$，所以$\frac{x}{4}=\frac{PM}{3}=\frac{CM}{5}$，所以$PM=\frac{3}{4}x$，$CM=\frac{5}{4}x$，所以$AC=AM+CM=PM+CM=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}x=5$，所以$x=\frac{5}{2}$，所以$BP=8-\frac{5}{2}=\frac{11}{2}$. ③当$\angle CAP-\angle C=90^\circ$时，因为$\sin C=\frac{AD}{AC}=\frac{3}{5}$，$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$，且$\frac{3}{5}>\frac{1}{2}$，所以$\angle C>30^\circ$，所以$\angle BAC<120^\circ$，若$\angle CAP=\angle C+90^\circ$，则$\angle CAP>120^\circ$，即$\angle CAP>\angle BAC$，所以此种情况不存在. ④当$\angle CAP-\angle APC=90^\circ$时，因为当点$P$与点$B$重合时，$\angle APC$最小，此时$\angle APC=\angle B>30^\circ$，同③可证，此种情况不存在. 综上所述，$BP$的长为$\frac{25}{4}$或$\frac{11}{2}$.

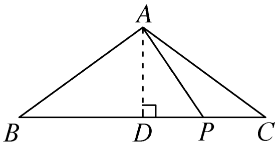


图1

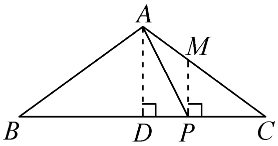
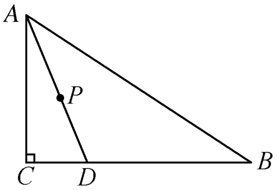


图2

答案：$\frac{25}{4}$或$\frac{11}{2}$

点拨：本题是一道即学即用的“新定义”试题，考查了等腰三角形的判定和性质，解直角三角形的应用，相似三角形的判定和性质等知识. 理解“反直角三角形”的定义，利用分类讨论的思想解决问题是关键.

例 6.2 如图，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，$AC=12$，点D在边BC上，$CD=5$，$BD=13$. P是线段AD上一动点，当半径为6的$\odot P$与$\triangle ABC$的一边相切时，AP的长为________.



分析：因为在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，$AC=12$，$BC=BD+CD=18$，所以$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=6\sqrt{13}$. 在$\mathrm{Rt}\triangle ACD$中，$\angle C=90^\circ$，$AC=12$，$CD=5$，所以$AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=13$.

当$\odot P$与BC相切时，点P到BC的距离为6. 过点P作$PH\perp BC$于点H，则$PH=6$. 因为$\angle C=90^\circ$，所以$AC\perp BC$. 所以$PH/\!/AC$，所以$\triangle DPH\backsim\triangle DAC$，所以$\frac{PD}{AD}=\frac{PH}{AC}$，所以$\frac{PD}{13}=\frac{6}{12}$，所以$PD=6.5$，所以$AP=AD-PD=6.5$.

为$\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}a\right)$,代入直线求得$a=\frac{9}{10}$;③当直线$CM$过线段$AB$的中点时,因为线段$AB$的中点坐标为(3,0),而点$M$的横坐标也为3,所以此种情况一定不成立.

当过点$M(3,1)$的直线将$\triangle ABC$分成三角形和梯形时,过点M的直线ME必与$\triangle ABC$一边平行,则必有A形相似.因为平分面积,所以相似比为$1:\sqrt{2}$.④如图1,由直线$ME/\!/AB$,可得$\frac{CE}{CO}=\frac{CN}{CA}=\frac{1}{\sqrt{2}}$,即$\frac{5a-1}{5a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$,解得$a=\frac{2+\sqrt{2}}{5}$.⑤如图2,过点$M$作$MN\perp AB$于点$N$.由直线$ME/\!/AC$,可得$\frac{BE}{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.因为$AB=4$,所以$BE=2\sqrt{2}$.因为$BN=5-3=2<2\sqrt{2}=BE$,不符合图形实际,所以不成立.⑥如图3,过点$M$作$MN\perp AB$于点$N$.由直线$ME/\!/BC$,可得$\frac{AE}{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}$,$\angle MEN=\angle CBO$.易得$AE=2\sqrt{2}$,$NE=2\sqrt{2}-2$,$\tan\angle MEN=\tan\angle CBO$,即$\frac{1}{2\sqrt{2}-2}=\frac{5a}{5}$,解得$a=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

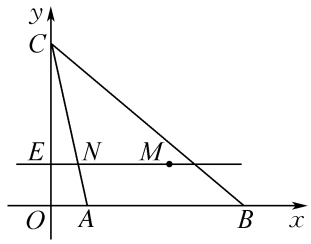


图1

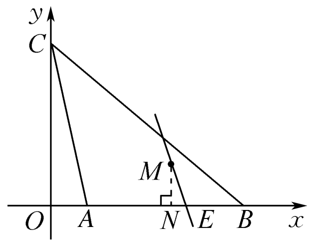


图2

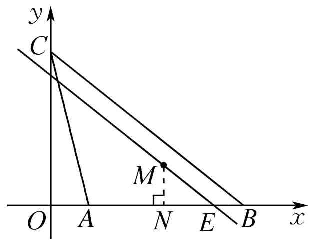


图3

答案:$\frac{9}{10}$或$\frac{2+\sqrt{2}}{5}$或$\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

点拨:本题主要考查相似三角形的性质与判定,以及一次函数的性质等相关知识,涉及平分面积的多种情形.根据题意画出每种情形下的图形,进行正确的计算、推理和判断是解题的关键.

(七)特殊与一般思想

人类认知常常是从特殊到一般,即从诸多具体的、特殊的情况中探究出一般规律.数学也是人类认知的一种,从特殊到一般,能加深对数学问题的理解,有时还能化难为易,打开解题思路.

有时,遇到一个具体的、特殊的,但不便于直接处理的问题,可以通过寻找一般规律,最后再回代到所给定的具体问题中.

例7.1 计算:$1^3+2^3+3^3+\cdots+20^3=$________.

分析:直接计算会很繁琐,不妨先探究一般规律.$1^3+2^3=9=(1+2)^2$,$1^3+2^3+3^3=36=(1+2+3)^2$,$1^3+2^3+3^3+4^3=100=(1+2+3+4)^2$,…,不难发现:$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$.当$n=20$时,$1^3+2^3+3^3+\cdots+20^3=(1+2+3+\cdots+20)^2=210^2=44\ 100$.

答案:44 100

点拨:直接计算有困难时,通常寻找一般规律,再来求特殊情况下的解.