课时训练篇

第 5 章　二次函数

课时训练 1　二次函数

【基础巩固】

1. B　**2.** C　**3.** D　**4.** D

5. $m\neq1$

6. $y=-10x^2+560x-7\ 350$

7. $y=-\frac{3}{2}x^2+4x$

8. $y=x^2-34x+280$

9. **解:**(1) 根据题意,得 $m^2+m-4=2$ 且 $m+3\neq0$,解得 $m=2$,即当 m 的值为 2 时,y 是 x 的二次函数.

(2) 当 $m+3=0$ 且 $m+2\neq0$ 时,即 $m=-3$ 时,y 是 x 的一次函数;当 $m^2+m-4=0$ 且 $m+2\neq0$ 时,y 是 x 的一次函数,解得 $m=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$;当 $m^2+m-4=1$ 且 $m+3+m+2\neq0$ 时,y 是 x 的一次函数,解得 $m=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$.

综上所述,当 m 的值为 -3 或 $\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$ 或 $\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$ 时,y 是 x 的一次函数.

【拓展提优】

1. D

2. $s=-4x^2+24x$　$0<x<6$　**提示:**三间羊圈与旧墙平行的一边的总长为 $(24-4x)$m,则 $s=(24-4x)x=-4x^2+24x$. 因为 $24-4x>0$,$x>0$,所以 $0<x<6$.

3. $y=-x^2+6x(0\leqslant x\leqslant6)$　**提示:**延长 CO 交 AB 于点 G. 易证 $CG\perp AB$. 所以 $y=AE^2-EF^2=AG^2+EG^2-(FG^2+EG^2)=AG^2-FG^2=3^2-(3-x)^2=-x^2+6x(0\leqslant x\leqslant6)$.

4. $y=\frac{2}{5}x^2$　**提示:**过点 D 作 $DE\perp AC$ 于点 E. 设 $BC=a(a>0)$,则 $AC=4a$. 根据"等角的余角相等",得 $\angle ADE=\angle BAC$. 易证 $\triangle ABC\cong\triangle DAE$,所以 $AE=BC=a$,$DE=AC=4a$,所以 $EC=AC-AE=3a$. 在 Rt$\triangle DEC$ 中,根据勾股定理,得 $DC=5a$. 所以 $x=5a$,即 $a=\frac{1}{5}x$. 所以 $y=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot4a+\frac{1}{2}\cdot4a\cdot4a=10a^2=\frac{2}{5}x^2$.

5. -1　**提示:**因为函数 $y=-x^2+\frac{4}{3}mx-2$ 与 $y=x^2-2nx+n$ 互为"旋转函数",所以 $\begin{cases}\frac{4}{3}m=-2n,\\-2+n=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-3,\\n=2.\end{cases}$ 所以 $(m+n)^{2\ 025}=(-3+2)^{2\ 025}=-1$.

6. 2 025　**提示:**由题意,可知 $2x_1^2+2\ 025=2x_2^2+2\ 025$,且 $x_1\neq x_2$,所以 $x_1=-x_2$. 所以 $2x_1+2x_2=2(x_1+x_2)=0$. 所以当 x 取 $2x_1+2x_2$ 时,$y=2\times0+2\ 025=0+2\ 025=2\ 025$.

7. **解:**当 $0<x\leqslant2$ 时,如图 1,设 AB 与 $A'C'$ 的交点为 D,两个三角形重叠部分为 $\triangle BC'D$,由题意,得 $BC'=x$. 因为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 是边长分别为 5 和 2 的等边三角形,所以 $\triangle BC'D$ 是边长为 x 的等边三角形. 过点 D 作 $DE\perp BC$ 于点 E,所以 $DE=\frac{\sqrt{3}}{2}x$,所以 $S_{\triangle BC'D}=\frac{1}{2}\cdot BC'\cdot DE=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$,即 $y=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$. 当 $2<x\leqslant5$ 时,如图 2,两个三角形重叠部分为 $\triangle A'B'C'$,由题意,得 $B'C'=2$. 过点 A' 作 $A'F\perp B'C'$ 于点 F,所以 $A'F=\sqrt{3}$,所以 $S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{2}\cdot B'C'\cdot A'F=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$,即 $y=\sqrt{3}$. 当 $5<x\leqslant7$ 时,如图 3,设 $A'B'$ 与 AC 的交点为 M,两个三角形重叠部分为 $\triangle B'CM$,由题意,得 $BC'=x$. 同理可知 $\triangle BC'M$ 是等边三角形,且 $B'C=7-x$,过点 M 作 $MN\perp BC$ 于点 N,所以 $MN=\frac{\sqrt{3}}{2}(7-x)$,所以 $S_{\triangle B'CM}=\frac{1}{2}\cdot$

$B'C \cdot MN=\frac{1}{2} \cdot (7-x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(7-x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(7-x)^2$，即 $y=\frac{\sqrt{3}}{4}(7-x)^2$.

综上所述，y 与 x 之间的函数表达式为 $y=\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{4}x^2(0<x\leqslant 2),\\ \sqrt{3}(2<x\leqslant 5),\\ \frac{\sqrt{3}}{4}(7-x)^2(5<x\leqslant 7).\end{cases}$

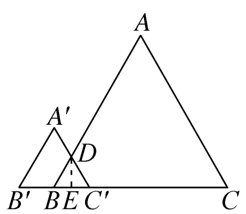


图 1

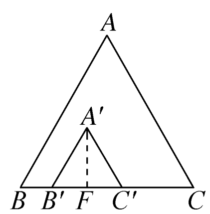


图 2

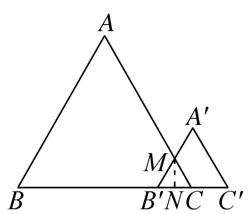


图 3

课时训练 2　二次函数的图像和性质(1)

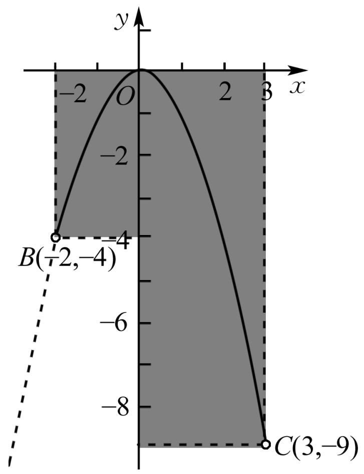
【基础巩固】

1. A　**2.** D　**3.** 原点和 x 轴　原点

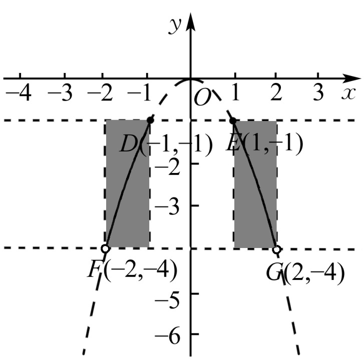
4. $0<y<9$　**5.** ②③

6. $(1,1)$　**提示**：设点 $A(t,t^2)$，则 $AB=BC=t^2$，点 $B(t,0)$，所以 $OB=t$. 所以 $OC=OB+BC=t+t^2$. 因为点 $C(2,0)$，所以 $OC=2$，所以 $t+t^2=2$，解得 $t_1=-2$(不符合题意，舍去)，$t_2=1$. 所以点 $A(1,1)$.

7. **解**：(1) 如图，点 $B(-2,-4)$，$C(3,-9)$. 当 $-2<x<3$ 时，抛物线只能取图中阴影区域的部分，由图可知，此时 y 的取值范围是 $-9<y\leqslant 0$.



(2) 如图，点 $D(-1,-1)$，$E(1,-1)$，$F(-2,-4)$，$G(2,-4)$. 当 $-4<y\leqslant -1$ 时，抛物线只能取图中两个阴影区域的部分，由图可知，此时 x 的取值范围是 $-2<x\leqslant -1$ 或 $1\leqslant x<2$.



8. **解**：(1) 将点 $A(2,m)$，$B(n,1)$ 代入 $y=x^2$，得 $m=2^2=4$，$1=n^2$，所以 $m=4$，$n=\pm 1$. 因为点 B 在第一象限，所以 $n=1$. 所以 $m=4$，$n=1$.

(2) 作点 B 关于 y 轴的对称点 $B'(-1,1)$，连接 AB' 交 y 轴于点 P. 易证此时点 P 到 A，B 两点的距离之和最小. 设直线 AB' 的函数表达式为 $y=kx+b(k\neq 0)$. 将点 A，B' 的坐标代入，得 $\begin{cases}4=2k+b,\\ 1=-k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1,\\ b=2.\end{cases}$ 所以直线 AB' 的函数表达式为 $y=x+2$. 令 $x=0$，得 $y=2$，所以此时点 $P(0,2)$.

【拓展提优】

1. A

2. C　**提示：**因为 $45^2=2\ 025$，$2\ 026>2\ 025$，所以点 $M(m,2\ 026)$ 比点 $(45,2\ 025)$ 离对称轴（y 轴）远. 所以当点 M 在对称轴（y 轴）左侧时，$m<-45$；当点 M 在对称轴（y 轴）右侧时，$m>45$. 所以 $|m|>45$.

3. π

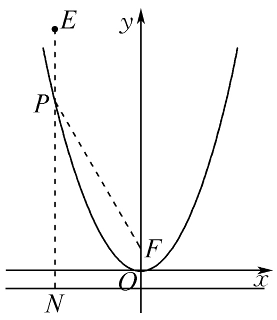
4. $-2<x<\frac{3}{2}$　**提示：**当 $y_1=y_2$ 时，$x^2=-\frac{1}{2}x+3$，解得 $x_1=-2$，$x_2=\frac{3}{2}$. 若 $y_1<y_2$，则在图像中反映的是直线在抛物线的上方，此时 x 的取值范围是 $-2<x<\frac{3}{2}$.

5. 2　**提示：**过点 B 作 $BE\perp y$ 轴于点 E，过点 A 作 $AD\perp y$ 轴于点 D. 因为 A，B 两点的横坐标分别为 1 和 $b(b>1)$，所以 $AD=1$，$BE=b$. 因为点 A，B 在抛物线 $y=x^2$ 上，所以点 $A(1,1)$，$B(b,b^2)$. 因为 $\angle ACB=90^\circ$，所以 $\angle ACD+\angle BCE=90^\circ$，易知 $\angle ACD+\angle CAD=90^\circ$，所以 $\angle BCE=\angle CAD$. 因为 $\angle BEC=\angle ADC=90^\circ$，$AC=BC$，所以 $\triangle BEC\cong\triangle CDA(\text{AAS})$，所以 $CE=AD=1$，$CD=BE=b$. 因为 $OE=OD+CD+CE=1+b+1=2+b$，所以 $b^2=2+b$，解得 $b=2$ 或 $b=-1$（舍去），所以 b 的值为 2.

6. $(1\ 013,1\ 013^2)$　**提示：**由点 $A(1,1)$ 易得，直线 OA 的函数表达式为 $y=x$. 由 $AA_1/\!/x$ 轴易得，点 A_1 与点 A 关于 y 轴对称，所以点 $A_1(-1,1)$. 因为 $A_1A_2/\!/OA$，所以可设直线 A_1A_2 的函数表达式为 $y=x+b$. 将点 $A_1(-1,1)$ 代入，可得 $b=2$. 所以直线 A_1A_2 的函数表达式为 $y=x+2$. 令 $x^2=x+2$，解得 $x_1=-1$，$x_2=2$，所以点 $A_2(2,4)$. 同理，可得点 $A_3(-2,4)$，$A_4(3,9)$，$A_5(-3,9)$. 根据坐标的变化规律可知，点 $A_{2\,024}(1\ 013,1\ 013^2)$.

7. (1) **证明：**因为 P 是抛物线 $y_1=x^2$ 上的一个动点，所以设点 P 的坐标为 (p,p^2). 因为点 $F\left(0,\frac{1}{4}\right)$，所以 $PF=\sqrt{(p-0)^2+\left(p^2-\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\left(p^2+\frac{1}{4}\right)^2}=p^2+\frac{1}{4}$；因为 $PN\perp l$，直线 l 的函数表达式是 $y_2=-\frac{1}{4}$，所以 $PN=p^2-\left(-\frac{1}{4}\right)=p^2+\frac{1}{4}$. 所以 $PF=PN$.

(2) **解：**因为 $(-2)^2=4<6$，所以点 $E(-2,6)$ 在抛物线 $y_1=x^2$ 的内部. 由(1)，知 $PF=PN$，所以 $PE+PF=PE+PN\geqslant EN$，当 E，P，N 三点共线时，等号成立，如图. 因为 $EN=6-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{25}{4}$，当 $x=-2$ 时，$y_1=x^2=4$，所以 $PE+PF$ 的最小值为 $\frac{25}{4}$，此时点 P 的坐标为 $(-2,4)$.



课时训练 3　二次函数的图像和性质(2)

【基础巩固】

1. A　2. A　3. 0　4. $a>b>d>c$

5. $y_1<y_2<y_3$　6. -2　7. $(2,2)$ 或 $(-2,2)$

8. $-2+2\sqrt{5}$　**提示：**易知抛物线的函数表达式为 $y=x^2$. 设点 C 的横坐标为 m，则 $CD=CE=2m$. 所以点 E 的坐标为 $(m,4-2m)$. 因为点 E 在抛物线 $y=x^2$ 上，所以 $m^2=4-2m$，解得 $m=-1-\sqrt{5}$（舍去）或 $m=-1+\sqrt{5}$. 所以 $CD=2m=-2+2\sqrt{5}$.

9. **解：**(1) 由题意，得 $m^2+3m-2=2$，且 $m+3\neq0$，解得 $m=-4$ 或 $m=1$，所以当 $m=-4$ 或 $m=1$ 时，该函数为二次函数.

(2) 因为函数的图像开口向下，所以 $m+3<0$，解得 $m<-3$. 再结合(1)，可知 $m=-4$，所以当 $m=-4$ 时，该函数的图像开口向下.

(3) 因为函数有最小值，所以 $m+3>0$，解得 $m>-3$. 再结合(1)，可知 $m=1$，所以当 $m=1$ 时，该函数有最小值.

【拓展提优】

1. C

2. B　**提示：**当 $a>0$ 时，函数图像如图 1 所示；当 $a<0$ 时，函数图像如图 2 所示. 所以交点不可能在第二象限.

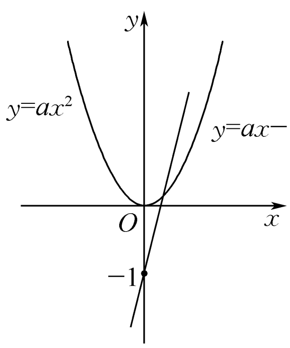


图 1

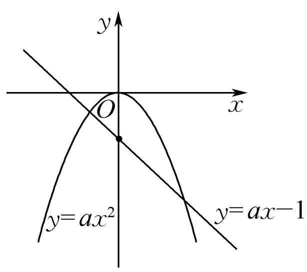


图 2

3. -1

4. $\frac{1}{9}\leqslant a<1$　**提示：**易知点 B 的坐标为$(-2,4)$. 将点 $A(6,4)$和点 $B(-2,4)$分别代入 $y=ax^2$，得 $a=\frac{1}{9}$，$a=1$. 所以$\frac{1}{9}\leqslant a<1$.

5. $4\sqrt{3}$　**提示：**设边长为 $2a(a>0)$. 因为 $AB/\!/x$ 轴，$\triangle ABO$ 为等边三角形，所以 $OF\perp AB$，$AF=BF=\frac{1}{2}AB=a$，$OF=\sqrt{OA^2-AF^2}=\sqrt{3}a$，所以点 $A(-a,-\sqrt{3}a)$，代入 $y=-\frac{1}{2}x^2$，得 $-\sqrt{3}a=-\frac{1}{2}(-a)^2$，解得 $a=0$(舍去)或 $a=2\sqrt{3}$. 所以 $\triangle ABO$ 的边长为 $4\sqrt{3}$.

6. 2　**提示：**设点 $A(0,a)(a>0)$，则点 $B(\sqrt{a},a)$，$C(2\sqrt{a},a)$，所以 $AB=\sqrt{a}$. 因为 $CD/\!/y$ 轴，所以点 D 的横坐标与点 C 的横坐标相同，所以点 $D(2\sqrt{a},4a)$. 因为 $DE/\!/AC$，所以点 E 的纵坐标与点 D 的纵坐标相同，所以点 $E(4\sqrt{a},4a)$. 所以 $DE=2\sqrt{a}$. 所以$\frac{DE}{AB}=\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=2$.

7. **解：**(1) 设直线 AB 的函数表达式为 $y=kx+b(k\neq 0)$. 因为点 $A(2,0)$，$B(1,1)$都在直线 $y=kx+b(k\neq 0)$上，所以 $\begin{cases}0=2k+b,\\1=k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=2.\end{cases}$ 所以直线 AB 的函数表达式为 $y=-x+2$. 因为点 $B(1,1)$在抛物线 $y=ax^2$ 上，所以 $1=a\cdot 1^2$，解得 $a=1$. 所以抛物线的函数表达式为 $y=x^2$.

(2) 由 $\begin{cases}y=x^2,\\y=-x+2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-2,\\y=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$ 所以点 C 的坐标为$(-2,4)$. 设点 D 的坐标为(m,m^2)，则 $S_{\triangle OAD}=\frac{1}{2}OA\cdot|y_D|=\frac{1}{2}\times 2\cdot m^2=m^2$. 因为 $S_{\triangle OBC}=S_{\triangle OAC}-S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times 2\times 4-\frac{1}{2}\times 2\times 1=3$，$S_{\triangle OAD}=S_{\triangle OBC}$，所以 $m^2=3$，解得 $m=\pm\sqrt{3}$. 所以存在符合题意的点 D，点 D 的坐标为$(\sqrt{3},3)$或$(-\sqrt{3},3)$.

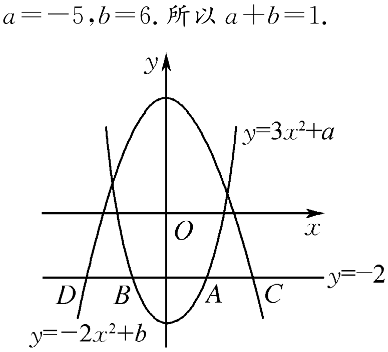
课时训练 4　二次函数的图像和性质(3)

【基础巩固】

1. D　2. D　3. D

4. D　**提示：**因为 $y=a(x-m)^2(a>0)$，所以抛物线开口向上，对称轴为直线 $x=m$，所以当抛物线上的点与直线 $x=m$ 的距离越小，对应的 y 值就越小. 因为点 $A(-1,p)$，$B(3,q)$，且 $p<q$，所以点 A 到直线 $x=m$ 的距离小于点 B 到直线 $x=m$ 的距离，所以 $m\leqslant -1$ 或 $m+1<3-m$，解得 $m<1$，所以 m 的值不可能为 2.

5. A　**提示：**如图，由题意可知，点 $A(1,-2)$，$C(2,-2)$. 将点 A 的坐标代入 $y=3x^2+a$，点 C 的坐标代入 $y=-2x^2+b$，得 $-2=3+a$，$-2=-8+b$，解得 $a=-5$，$b=6$. 所以 $a+b=1$.



6. (1) 不在　(2) 不在

7. (1) 3　(2) $-2<a<0$

8. 4　**9.** $0\leqslant y\leqslant 4$　**10.** $(-2,1)$

11. $y=\frac{1}{2}(x-4)^2$　**提示:**设原来抛物线的函数表达式为 $y=ax^2(a\neq 0)$. 将点 $P(2,2)$代入,得 $a=\frac{1}{2}$,故原来抛物线的函数表达式为 $y=\frac{1}{2}x^2$. 设平移后抛物线的函数表达式为 $y=\frac{1}{2}(x-b)^2(b>0)$. 将点 $P(2,2)$代入,得 $2=\frac{1}{2}(2-b)^2$,解得 $b=0$(舍去)或 $b=4$. 所以平移后所得抛物线的函数表达式为 $y=\frac{1}{2}(x-4)^2$.

12. $(-\sqrt{10},2)$或$(\sqrt{10},2)$或$(-\sqrt{2},-2)$或$(\sqrt{2},-2)$　**提示:**因为$\odot P$ 与 x 轴相切,所以点 P 到 x 轴的距离为 2,即点 P 的纵坐标为 2 或 -2. 由$\frac{1}{2}x^2-3=2$,解得 $x=\pm\sqrt{10}$;由$\frac{1}{2}x^2-3=-2$,解得 $x=\pm\sqrt{2}$. 所以圆心 P 的坐标为$(-\sqrt{10},2)$或$(\sqrt{10},2)$或$(-\sqrt{2},-2)$或$(\sqrt{2},-2)$.

13. **解:**(1) 2

(2) 易得 $OB=OA=2$,所以$\angle OBA=\angle OAB=45°$. 又因为 $CD\perp BA$,所以$\angle CBO=45°$,所以 $OC=OB=2$,所以点 $C(-2,0)$. 易求得直线 CB 的函数表达式为 $y=x+2$. 联立直线 CB 与抛物线的函数表达式,得 $\begin{cases} y=x+2, \\ y=\frac{1}{2}(x-2)^2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_1=0, \\ y_1=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2=6, \\ y_2=8. \end{cases}$ 所以点 $D(6,8)$. 由点 $A(2,0)$易求得直线 AD 的函数表达式为 $y=2x-4$. 因为线段 EF 由线段 AB 平移得到,所以 $EF\mathbin{/\!/}AB$,且 $EF=AB$,所以四边形 $ABFE$ 是平行四边形,所以 $BF\mathbin{/\!/}AE$,即 $BF\mathbin{/\!/}AD$. 所以可设直线 BF 的函数表达式为 $y=2x+n$,将点 $B(0,2)$代入,解得 $n=2$. 所以直线 BF 的函数表达式为 $y=2x+2$. 当 $x=2$ 时,$y=2x+2=6$,所以点 $F(2,6)$. 所以 $AF=6$.

【拓展提优】

1. C　**2.** D

3. B　**提示:**函数的对称轴为直线 $x=h$,分以下几种情况讨论:①若 $h\geqslant 3$,则 $x=3$ 时,函数取得最小值 1,即$(3-h)^2=1$,解得 $h=4$ 或 $h=2$(舍去);②若 $h\leqslant 1$,则 $x=1$ 时,函数取得最小值 1,即$(1-h)^2=1$,解得 $h=0$ 或 $h=2$(舍去);③若 $1<h<3$,则 $x=h$ 时,函数取得最小值 0,与 y 的最小值为 1 矛盾,舍去. 综上所述,$h=4$ 或 $h=0$.

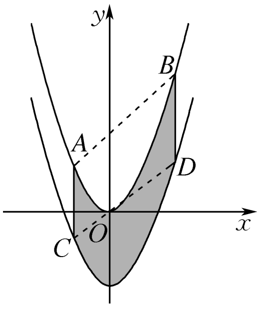
4. $-2<x<0$ 或 $x>2$

5. $y=-a(x-h)^2$　$y=a(x+h)^2$

$y=-a(x+h)^2$

6. $m\geqslant 3$

7. 24　**提示:**如图,分别连接 AB,CD. 因为点 A,C 的横坐标均为 -2,点 B,D 的横坐标均为 4,所以 $BD\mathbin{/\!/}AC\mathbin{/\!/}y$ 轴. 因为抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向下平移 4 个单位长度可得抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-4$,所以 $AC=BD=4$. 所以四边形 $ACDB$ 为平行四边形. 所以 $S_{阴影}=S_{\square ACDB}=AC\cdot|x_B-x_A|=4\times(4+2)=24$.



8. $(-2,2)$或$(1,5)$　**提示:**过点 A 作 $AD\perp x$ 轴,交直线 $y=x$ 于点 D,连接 BD. 由对称可知,$\triangle ABD$ 是等腰直角三角形,因为 $AB=4\sqrt{2}$,所以 $AD=4$. 设点 $D(a,a)$,则点 $A(a,-a^2+6)$. 所以$-a^2+6-a=4$,解得 $a_1=-2$,$a_2=1$. 所以点 A 的坐标是$(-2,2)$或$(1,5)$.

9. **解:**(1) 因为点 $B(-\sqrt{3},2)$在直线 AB 上,所以 $2=\frac{\sqrt{3}}{3}\times(-\sqrt{3})+b$,解得 $b=3$. 所以直线 AB 的函数表达式为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+3$.

(2) 设点 $P(t,0)$,则抛物线 C 的函数表达

式为 $y=\frac{1}{3}(x-t)^2$，所以点 $E\left(0,\frac{1}{3}t^2\right)$. 因为 $EF/\!/x$ 轴，所以点 E,F 关于抛物线 C 的对称轴对称，所以点 $F\left(2t,\frac{1}{3}t^2\right)$. 因为点 F 在直线 AB 上，所以 $\frac{1}{3}t^2=\frac{\sqrt{3}}{3}\times 2t+3$，解得 $t_1=3\sqrt{3}$，$t_2=-\sqrt{3}$. 所以抛物线 C 对应的函数表达式为 $y=\frac{1}{3}(x-3\sqrt{3})^2$ 或 $y=\frac{1}{3}(x+\sqrt{3})^2$.

10. **解**:(1) 对于 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2$，令 $y=0$，得 $x=2\sqrt{3}$；令 $x=0$，得 $y=-2$. 故点 B,C 的坐标分别为 $(2\sqrt{3},0)$，$(0,-2)$. 将点 B,C 的坐标代入 $y=ax^2+c$，得 $\begin{cases}0=12a+c,\\-2=c,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{6},\\c=-2.\end{cases}$ 所以抛物线的函数表达式为 $y=\frac{1}{6}x^2-2$.

(2) 令 $y=\frac{1}{6}x^2-2=0$，解得 $x=\pm 2\sqrt{3}$，所以点 $A(-2\sqrt{3},0)$，$B(2\sqrt{3},0)$. 当 $x=0$ 时，$y=\frac{1}{6}x^2-2=-2$，所以点 $C(0,-2)$，即 $OC=2$. 因为 $S_{\triangle ABD}=3S_{\triangle ABC}$，所以 $y_D=3OC=6=\frac{1}{6}x^2-2$，解得 $x=-4\sqrt{3}$(舍去)或 $x=4\sqrt{3}$，所以点 D 的坐标为 $(4\sqrt{3},6)$. 易求得直线 AD 的函数表达式为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$. 因为直线 AD 和直线 BC 函数表达式中的 k 值相同，所以 $AD/\!/BC$.

(3) 设直线 CP 交 x 轴于点 H. 因为点 $A(-2\sqrt{3},0)$，$C(0,-2)$，所以 $OA=2\sqrt{3}$，$OC=2$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOC$ 中，由勾股定理，得 $AC=\sqrt{OA^2+OC^2}=4$. 所以 $\angle CAO=30^\circ$，所以 $\angle ACO=60^\circ$，所以 $\angle HCO=\angle ACO-\angle PCA=60^\circ-15^\circ=45^\circ$. 故可设直线 CP 的函数表达式为 $y=-x+t$. 将点 C 的坐标代入，解得 $t=-2$. 所以直线 CP 的函数表达式为 $y=-x-2$. 又由(1)知，抛物线的函数表达式为 $y=\frac{1}{6}x^2-2$. 联立方程组可解得 $\begin{cases}x=-6,\\y=4\end{cases}$(不合题意的值已舍去). 所以点 $P(-6,4)$.

课时训练 5　二次函数的图像和性质(4)

【基础巩固】

1. D　**2.** C　**3.** A　**4.** D

5. C　**提示**:因为点 $A(a-1,y_1)$，$B(a+1,y_2)$ 在 $y=(x-3)^2+2m+1$ 的图像上，所以 $y_1=(a-4)^2+2m+1$，$y_2=(a-2)^2+2m+1$. 因为 $y_1>y_2$，所以 $(a-4)^2+2m+1>(a-2)^2+2m+1$，所以 $a^2-8a+16+2m+1>a^2-4a+4+2m+1$，解得 $a<3$.

6. $y=3(x-2)^2+1$　**提示**:抛物线 C_1 的函数表达式为 $y=-3(x+2)^2-1$，所以抛物线 C_1 的开口向下，顶点坐标为 $(-2,-1)$，因为抛物线 C_1，抛物线 C_2 关于原点中心对称，所以抛物线 C_2 的开口向上，顶点坐标为 $(2,1)$，函数表达式为 $y=3(x-2)^2+1$.

7. $1\leqslant y<37$　**提示**:因为二次函数表达式为 $y=(x+2)^2+1$，所以抛物线开口向上，对称轴为直线 $x=-2$. 在 $-3<x<4$ 范围内，当 $x=-2$ 时，函数有最小值，最小值为 1；当 x 接近于 4 时，函数的最大值接近于 $y=(4+2)^2+1=37$，所以 y 的取值范围为 $1\leqslant y<37$.

8. ①②④

9. $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+4$　**提示**:因为函数 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$ 的图像过点 $A(1,m)$，$B(4,n)$，所以 A,B 两点间的水平距离为 $4-1=3$. 因为曲线段 AB 扫过的面积为 9，所以 $3AA'=9$，所以 $AA'=3$，即将函数 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$ 的图像沿 y 轴向上平

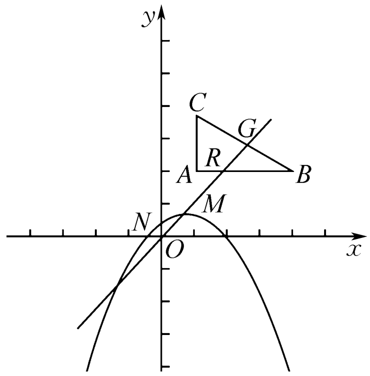
移 3 个单位长度得到一个新图像,所以新图像的函数表达式是 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+4$.

10. 解:(1) 抛物线不可能经过点 A,理由如下:

将点 $A(1,2)$代入 $y=-\frac{1}{2}(x-t)^2+t(t>0)$,得 $2=-\frac{1}{2}(1-t)^2+t$,整理,得 $t^2-4t+5=0$,此方程无解,故抛物线不可能经过点 A.

(2) 当 $x=0$ 时,$y_N=-\frac{1}{2}(x-t)^2+t=-\frac{1}{2}(0-t)^2+t=-\frac{1}{2}t^2+t=-\frac{1}{2}(t-1)^2+\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}$,即 $y_N=-\frac{1}{2}(t-1)^2+\frac{1}{2}$,且 y_N 的最大值为$\frac{1}{2}$.

(3) 点 M 在$\triangle ABC$ 内部所经过的路线的长为$\sqrt{6}-\sqrt{2}$. **提示:**如图,由 $y=-\frac{1}{2}(x-t)^2+t$,得顶点 $M(t,t)$,所以在 L 的位置随 t 的值变化而变化的过程中,点 M 都在直线 $y=x$ 上移动.设直线 $y=x$ 分别交 AB 于点 R,交 BC 于点 G,则点 M 在$\triangle ABC$ 内部所经过路线的长即为线段 RG 的长.由点 $B(4,2)$,$A(1,2)$,得 $AB=4-1=3$,$AB/\!/x$ 轴,当 $y=2$ 时,由 $y=x$ 得到 $x=2$,所以点 $R(2,2)$.由$\angle ABC=30°$,$\angle BAC=90°$,得 $AC=\frac{\sqrt{3}}{3}AB=\sqrt{3}$,所以点 $C(1,2+\sqrt{3})$.设直线 BC 的函数表达式为 $y=mx+n$,将点 B,C 的坐标代入,得 $\begin{cases}m+n=2+\sqrt{3},\\4m+n=2.\end{cases}$解得$\begin{cases}m=-\frac{\sqrt{3}}{3},\\n=2+\frac{4\sqrt{3}}{3}.\end{cases}$所以直线 BC 的函数表达式为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+2+\frac{4\sqrt{3}}{3}$.联立直线 BC 的函数表达式和 $y=x$,得 $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+2+\frac{4\sqrt{3}}{3}$,解得 $x=\sqrt{3}+1$,则点 $G(\sqrt{3}+1,\sqrt{3}+1)$,所以 $RG=\sqrt{(\sqrt{3}+1-2)^2+(\sqrt{3}+1-2)^2}=\sqrt{2\times(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{2}\times(\sqrt{3}-1)=\sqrt{6}-\sqrt{2}$,所以点 M 在$\triangle ABC$ 内部所经过路线的长为$\sqrt{6}-\sqrt{2}$.



【拓展提优】

1. D **提示:**易知二次函数 $y=a(x-1)^2-a(a\neq0)$的对称轴为直线 $x=1$,分以下几种情况讨论:①若 $a>0$,则当 $-1\leqslant x\leqslant1$ 时,y 随 x 的增大而减小,当 $1\leqslant x\leqslant4$,y 随 x 的增大而增大,所以当 $x=1$ 时,y 取得最小值,所以 $y=a(1-1)^2-a=-4$,所以 $a=4$;②若 $a<0$,则当 $-1\leqslant x\leqslant1$ 时,y 随 x 的增大而增大,当 $1\leqslant x\leqslant4$,y 随 x 的增大而减小,所以当 $x=4$ 时,y 取得最小值,所以 $y=a(4-1)^2-a=-4$,所以 $a=-\frac{1}{2}$.综上所述,a 的值为$-\frac{1}{2}$或 4.

2. C **提示:**由题意,得$\begin{cases}1=a(1+m)^2+n①,\\6=a(6+m)^2+n②,\end{cases}$②$-$①,得 $5=a[(6+m)^2-(1+m)^2]$.整理,得 $5=a\cdot5(7+2m)$,所以 $a=\frac{1}{7+2m}$.若 $m=-3$,则 $a=\frac{1}{7+2\times(-3)}=1>0$,故选项 A 错误;若 $m=-4$,则 $a=\frac{1}{7+2\times(-4)}=-1<0$,故选项 B 错误;若 $m=-5$,则 $a=\frac{1}{7+2\times(-5)}=-\frac{1}{3}<0$,故选项 C 正确;若 $m=-6$,则 $a=\frac{1}{7+2\times(-6)}=-\frac{1}{5}<0$,故选项 D 错误.

3. A **提示:**易知该抛物线的对称轴为直线 $x=h$.设点 A 关于抛物线对称轴对称的点 A'坐标为$(m,4)$,则 $h=\frac{m}{2}$,因为二次函数 $y=a(x-h)^2+k(a<0)$,所以抛物线开口向下,在对称轴右侧,y 随 x 的增大而减小,所以 $m<20$,所以 $h=\frac{m}{2}<10$.

4. -1 **提示**:因为该二次函数图像的对称轴为直线 $x=4$,且该函数的图像在 $2<x<3$ 范围内位于 x 轴的上方,所以由对称性可知,该函数的图像在 $5<x<6$ 范围内位于 x 轴的上方.又因为该函数的图像在 $6<x<7$ 范围内位于 x 轴的下方,所以该二次函数的图像过点$(6,0)$.代入 $y=a(x-4)^2+4$,解得 $a=-1$.

5. **解**:(1) 4

(2) 8 **提示**:抛物线 $y=a(x-m)^2+n$ 的顶点坐标为(m,n),因为顶点在线段 AB 上运动,点 A,B 的坐标分别为$(1,4)$和$(4,4)$,所以 $n=4$,$AB=4-1=3$.当点 C 的横坐标最小值为-3 时,抛物线顶点在线段 AB 的最左端点 $A(1,4)$处,即对称轴为 $x=1$,此时点 D 的横坐标为 5;当抛物线顶点在线段 AB 的最右端点 $B(4,4)$处,此时点 D 的横坐标有最大值,此时顶点向右平移了与线段 AB 等长的距离.因为 $AB=3$,平移前点 D 的横坐标为 5,所以平移后点 D 的横坐标为 $5+3=8$,即点 D 的横坐标最大值为 8.

6. (1) $\frac{7}{4}$ **提示**:因为 $y_1=y_2$,所以点 M,N 关于直线 $x=2$ 对称,所以$\frac{x_1+x_2}{2}=2$.因为 $x_2-x_1=3$,所以联立,得$\begin{cases}\frac{x_1+x_2}{2}=2,\\ x_2-x_1=3.\end{cases}$解得$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2},\\ x_2=\frac{7}{2}.\end{cases}$所以 $x_1\cdot x_2=\frac{1}{2}\times\frac{7}{2}=\frac{7}{4}$.

(2) **解**:因为点 M,N 在直线$x=2$ 两侧,且 $x_2-x_1=3$,所以点 M 在对称轴左侧,点 N 在对称轴右侧,所以 $x_1<2$,$x_2>2$.因为 $x_2-x_1=3$,所以 $x_1+3>2$,即 $x_1>-1$.因为 $y_1>y_2$,所以点 M 到对称轴的距离比点 N 到对称轴的距离远,即 $x_2-2<2-x_1$,所以 $x_1+3-2<2-x_1$,解得 $x_1<\frac{1}{2}$,所以$-1<x_1<\frac{1}{2}$.由题意知,当 $x=x_1$ 时,y 有最大值 0,所以$\frac{1}{a}(x_1-2)^2-1=0$,即$(x_1-2)^2=a$.易得$-1-2<x_1-2<\frac{1}{2}-2$,所以$(-3)^2>(x_1-2)^2>\left(-\frac{3}{2}\right)^2$,即$\frac{9}{4}<(x_1-2)^2<9$.所以 a 的取值范围是$\frac{9}{4}<a<9$.

课时训练 6 二次函数的图像和性质(5)

【基础巩固】

1. D **提示**:因为抛物线的顶点坐标为$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$,由图像顶点可知$\frac{4ac-b^2}{4a}>0$,由图像开口可知 $a<0$,所以 $4ac-b^2<0$,所以 $b^2-4ac>0$.因为抛物线对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=1$,所以 $b=-2a$,当 $x=-2$ 时,$y=4a-2b+c=8a+c<0$,所以点$(b^2-4ac,8a+c)$在第四象限.

2. A **提示**:因为点 $A(0,a)$,$B(1,b)$在二次函数 $y=x^2-mx+m^2-m+2$(m 为常数)的图像上,且 $a=b$,所以该函数图像的对称轴为直线 $x=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$,所以 $x=-\frac{-m}{2}=\frac{1}{2}$,所以 $m=1$,所以该函数表达式为 $y=x^2-x+2$.因为 $1>0$,所以该函数图像的开口向上,所以当 $x=\frac{1}{2}$时,该二次函数有最小值,最小值为$\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+2=\frac{7}{4}$.

3. D **提示**:因为抛物线与 y 轴的交点位于 x 轴上方,所以 $c>0$,选项 B 错误.因为抛物线的顶点为$(-2,-1)$,所以可设抛物线为 $y=a(x+2)^2-1$.所以 $y=ax^2+4ax+4a-1$.所以 $b=4a$,$c=4a-1$.因为 $c>0$,所以 $4a-1>0$,所以 $a>\frac{1}{4}>0$,选项 A 错误.因为顶点为$(-2,-1)$,所以当 $x=-2$ 时,$y=4a-2b+c=-1$,选项 D 正确.因为 $b=4a$,$c=4a-1$,所以 $b^2-4ac=16a^2-4a(4a-1)=4a>0$,选项 C 错误.

4. D **提示**:因为二次函数 $y=-x^2+2cx+c$ 的图像经过点 $A(a,c)$,$B(b,c)$,所以抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{a+b}{2}$.因为 $y=-x^2+2cx+c=-(x-$

$c)^2+c^2+c$，所以抛物线的对称轴为直线 $x=c$. 所以 $\frac{a+b}{2}=c$，所以 $a+b=2c$. 因为 $0<a+b<2$，所以 $0<2c<2$，所以 $0<c<1$. 因为函数的对称轴为直线 $x=c$，且易知抛物线开口向下，所以 $m=-c^2+2c^2+c=c^2+c$，$n=-1-2c+c=-1-c$，所以 $c=-1-n$，所以 $m=(-1-n)^2+(-1-n)=n^2+n$.

5. 0 或 2　**提示：**因为点 $P(m,3)$ 在二次函数 $y=-ax^2+2ax+3(a>0)$ 的图像上，所以 $3=-am^2+2am+3$，所以 $-am(m-2)=0$，因为 $a>0$，所以 $m(m-2)=0$，解得 $m=0$ 或 $m=2$.

6. $(-1,2)$　**提示：**$y=x^2+(m-1)x+m=x^2+mx-x+m=x^2+m(x+1)-x$，所以当 $x+1=0$，即 $x=-1$ 时，y 的值与 m 无关，此时 $y=(-1)^2-(-1)=2$，即无论 m 为何实数，二次函数 $y=x^2+(m-1)x+m$ 的图像总是过定点 $(-1,2)$.

7. $m\leqslant 0$

8. $\frac{13}{2}$　**提示：**因为 $y=\frac{1}{2}x^2-ax+a+3$，所以该函数图像顶点的纵坐标为 $\frac{4\times\frac{1}{2}(a+3)-(-a)^2}{4\times\frac{1}{2}}=\frac{2a+6-a^2}{2}=\frac{-(a-1)^2+7}{2}<10$，所以函数图像的顶点在直线 $y=10$ 的下方. 所以点 P 到直线 $y=10$ 的距离为 $10-\frac{2a+6-a^2}{2}=\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{13}{2}$，所以当 $a=1$ 时，点 P 到直线 $y=10$ 的距离取得最小值 $\frac{13}{2}$.

9. 解：(1) 根据题意可知，抛物线 $y=ax^2-2x+1(a\neq 0)$ 的对称轴为直线 $x=-\frac{-2}{2a}=\frac{1}{a}=1$，解得 $a=1$.

(2) $y_1>y_2$. 理由如下：

由(1)可知，抛物线的函数表达式为 $y=x^2-2x+1=(x-1)^2$. 因为 $a=1>0$，所以当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x<1$ 时，y 随 x 的增大而减小. 因为 $-1<x_1<0$，$1<x_2<2$，所以 $1<|x_1-1|<2$，$0<|x_2-1|<1$. 结合函数图像可知，当抛物线开口向上时，抛物线上的点距离对称轴越远，则该点纵坐标的值越大，所以 $y_1>y_2$.

(3) 联立 $y=m(m>0)$ 与 $y=x^2-2x+1=(x-1)^2$，解得 $x_1=1+\sqrt{m}$，$x_2=1-\sqrt{m}$，所以 $AB=|x_1-x_2|=2\sqrt{m}$；联立 $y=m(m>0)$ 与 $y=3(x-1)^2$，解得 $x_3=1+\sqrt{\frac{m}{3}}$，$x_4=1-\sqrt{\frac{m}{3}}$，所以 $CD=|x_3-x_4|=2\sqrt{\frac{m}{3}}$. 所以 $\frac{AB}{CD}=\sqrt{3}$.

【拓展提优】

1. D　**提示：**先将原二次函数化成顶点式，得 $y=(x-2)^2-4+a$，故平移后得到的图像的函数表达式为 $y=(x-2+1)^2-4+a+1=(x-1)^2+a-3$，所以该函数图像开口向上，当 $x=1$ 时，y 取最小值 $a-3$，根据题意，可得 $a-3<2$，解得 $a<5$.

2. C　**提示：**当 $x=-\frac{-6}{2\times 1}=3$ 时，y 有最小值 1，故①错误. 因为 $\frac{3+n+3-n}{2}=3$，所以横坐标分别为 $3+n$，$3-n$ 的两点关于抛物线 $y=x^2-6x+10$ 的对称轴对称，所以 $x=3+n$ 时的函数值与 $x=3-n$ 时的函数值相等，故②错误. 若 $n>3$，则当 $x=n$ 时，$y=n^2-6n+10$；当 $x=n+1$ 时，$y=(n+1)^2-6(n+1)+10=n^2-4n+5$. 因为 $n^2-4n+5-(n^2-6n+10)=2n-5$，且当 n 为整数时，$n^2-6n+10$ 是整数，$2n-5$ 也是整数，n^2-4n+5 也是整数，所以 y 的整数值有 $2n-5+1=(2n-4)$ 个，故③正确. 当 $x<3$ 时，y 的值随 x 值的增大而减小. 当 $0<a<3$，$0<b<3$ 时，因为 $y_0<y_0+1$，所以 $a>b$，故④错误.

3. C　**提示：**因为 $y=ax^2-2ax+4(a>0)$，所以抛物线对称轴为直线 $x=1$，抛物线开口向上，因为 $m-1<m<m+2$，$y_1>y_3>y_2$，所以 A，B 两点位于对称轴左侧，点 C 位于对称轴右侧，且点 A 到对称轴的距离大于点 C 到对称轴的距离，点 C 到对称轴的距离大于点 B 到对称轴的距离，所以 $1-(m-1)>m+2-1>1-m$，解得 $0<m<\frac{1}{2}$.

4. $\frac{7}{2}$　**提示：**$\begin{cases}a+2b=m^2-6m-5①,\\3a+4b=-m^2+2m-6②,\end{cases}$ ②－①，得

$2a+2b=-2m^2+8m-1$，所以 $a+b=-m^2+4m-\frac{1}{2}=-(m-2)^2+\frac{7}{2}$. 所以当 $m=2$ 时，$a+b$ 有最大值，最大值为 $\frac{7}{2}$.

5. -5 或 1　**提示**：$y=2x^2+4x+1=2(x+1)^2-1$，所以该抛物线开口向上，对称轴为直线 $x=-1$，故抛物线上的点离对称轴越远，其纵坐标越大. ①当 $|-1-t|>|t+3|$，即 $t<-2$ 时，$2t^2+4t+1=31$，解得 $t_1=-5$，$t_2=3$(舍去). ②当 $|-1-t|<|t+3|$，即 $t>-2$ 时，$2(t+2)^2+4(t+2)+1=31$，解得 $t_1=-7$(舍去)，$t_2=1$. 综上所述，t 的值为 -5 或 1.

6. $-\frac{1}{5}$　**提示**：因为抛物线对称轴为直线 $x=-\frac{-4a}{2a}=2$. 当 $x\leqslant-2$ 时，y 随 x 的增大而增大，所以 $a<0$. 又因为 $-6\leqslant x\leqslant5$ 时，y 的最小值为 -7，所以当 $x=-6$ 时，$y=-7$. 将 $x=-6$，$y=-7$ 代入 $y=ax^2-4ax+5$，得 $36a+24a+5=-7$，解得 $a=-\frac{1}{5}$.

7. 解：(1) 因为 $y=-x^2+6x-5=-(x-3)^2+4$，所以顶点坐标为(3，4).

(2) 因为 $a=-1<0$，所以抛物线开口向下. 因为顶点坐标为(3，4)，所以当 $x=3$ 时，y 的最大值为 4. 因为当 $1\leqslant x\leqslant3$ 时，y 的值随着 x 值的增大而增大，所以当 $x=1$ 时，y 的最小值为 0. 因为当 $3<x\leqslant4$ 时，y 的值随着 x 值的增大而减小，所以当 $x=4$ 时，y 的最小值为 3. 综上所述，当 $1\leqslant x\leqslant4$ 时，函数的最大值为 4，最小值为 0.

(3) 对 t 进行分类讨论.

①当 $t+3<3$，即 $t<0$ 时，y 的值随着 x 值的增大而增大. 所以 $m=-(t+3)^2+6(t+3)-5=-t^2+4$，$n=-t^2+6t-5$. 所以 $m-n=-t^2+4-(-t^2+6t-5)=-6t+9$，所以 $-6t+9=3$，解得 $t=1$(不合题意，舍去).

②当 $0\leqslant t<3$ 时，顶点的横坐标在取值范围内，所以 $m=4$. (ⅰ)若 $0\leqslant t\leqslant\frac{3}{2}$，则 $n=-t^2+6t-5$，所以 $m-n=4-(-t^2+6t-5)=t^2-6t+9$，所以 $t^2-6t+9=3$，解得 $t_1=3-\sqrt{3}$，$t_2=3+\sqrt{3}$(不合题意，舍去)；(ⅱ)若 $\frac{3}{2}<t<3$，则 $n=-t^2+4$，所以 $m-n=4-(-t^2+4)=t^2$，所以 $t^2=3$，解得 $t_1=\sqrt{3}$，$t_2=-\sqrt{3}$(不合题意，舍去).

③当 $t\geqslant3$ 时，y 的值随着 x 值的增大而减小. 所以 $m=-t^2+6t-5$，$n=-t^2+4$. 所以 $m-n=-t^2+6t-5-(-t^2+4)=6t-9$，所以 $6t-9=3$，解得 $t=2$(不合题意，舍去).

综上所述，t 的值为 $3-\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}$.

课时训练 7　用待定系数法确定二次函数表达式

【基础巩固】

1. B　**2.** C

3. $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$

4. $y=\frac{2}{9}x^2+\frac{4}{9}x-\frac{16}{9}$

5. $y_2=x^2-2x+1$　**提示**：把点 $A(1,1)$ 代入 y_1，得 $2-4m+2m^2+1=1$，即 $m^2-2m+1=0$，解得 $m=1$，所以 $y_1=2x^2-4x+3$. 所以 $y_1+y_2=2x^2-4x+3+ax^2+bx+1=(a+2)x^2+(b-4)x+4$. 因为 $y_1=2x^2-4x+3=2(x-1)^2+1$，所以函数 y_1 图像的顶点坐标为(1，1)，开口向上. 因为 y_1+y_2 与 y_1 是“和谐二次函数”，所以 y_1+y_2 的顶点坐标为(1，1)，$a+2>0$，所以 $-\frac{b-4}{2(a+2)}=1$，$\frac{16(a+2)-(b-4)^2}{4(a+2)}=1$，$a>-2$，解得 $a=1$，$b=-2$，所以函数 y_2 的表达式为 $y_2=x^2-2x+1$.

6. $\frac{5}{2}$　**提示**：要求 a 的最大值，则抛物线开口向上，即 $a>0$，故只需比较经过点 A，B，D 和点 A，B，C 的抛物线对应的 a 的值即可，而抛物线开口越小，$|a|$ 越大，因此经过点 A，B，D 的抛物线对应的 a 的值最大. 将点 A，B，D 的坐标分别代入 $y=ax^2+$

$bx+c$，可得 a 的最大值为 $\frac{5}{2}$.

7. $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)^2+\frac{4\sqrt{3}}{3}$ **提示**：由题意得，抛物线 $y=a(x-1)^2+k$ 的对称轴为直线 $x=1$. 因为 $CB/\!/x$ 轴，所以点 B，C 关于抛物线的对称轴对称，即点 B，C 关于直线 $x=1$ 对称，所以点 B 的横坐标为 2. 所以 $CA=CB=2$. 由 $OA=1$，求得 $OC=\sqrt{3}$，所以点 $C(0,\sqrt{3})$. 将点 $A(-1,0)$ 和点 $C(0,\sqrt{3})$ 代入 $y=a(x-1)^2+k$，得 $\begin{cases}0=4a+k,\\ \sqrt{3}=a+k,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{\sqrt{3}}{3},\\ k=\frac{4\sqrt{3}}{3}.\end{cases}$ 所以该抛物线的函数表达式为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)^2+\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

8. $y=\frac{7}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2$ **提示**：因为 $a+b+c=0$，所以图像过点 $(1,0)$，所以点 $C(1,1)$ 不在抛物线的图像上. 所以抛物线过点 $A(-1,3)$，$B(0,-2)$. 所以点 $\begin{cases}a+b+c=0,\\ a-b+c=3,\\ c=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{7}{2},\\ b=-\frac{3}{2},\\ c=-2.\end{cases}$ 所以 $y=\frac{7}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2$.

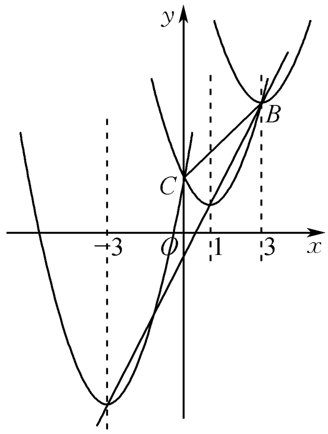
9. **解**：(1) 将点 $B(3,5)$ 代入 $y=x^2-2mx+m^2+2m-1$，得 $9-6m+m^2+2m-1=5$，整理，得 $m^2-4m+3=0$，解得 $m_1=1$，$m_2=3$. 当 $m=1$ 时，抛物线的函数表达式为 $y=x^2-2x+2$，化为顶点式为 $y=(x-1)^2+1$，此时顶点 A 的坐标为 $(1,1)$；当 $m=3$ 时，抛物线的函数表达式为 $y=x^2-6x+14$，化为顶点式为 $y=(x-3)^2+5$，此时顶点 A 的坐标为 $(3,5)$. 综上所述，抛物线过点 B 时顶点 A 的坐标为 $(1,1)$ 或 $(3,5)$.

(2) 因为 $y=x^2-2mx+m^2+2m-1=(x-m)^2+2m-1$，所以顶点 A 的坐标为 $(m,2m-1)$. 因为点 A 的坐标记为 (x_1,y_1)，所以 $x_1=m$，$y_1=2m-1$. 所以 y_1 关于 x_1 的函数表达式为 $y_1=2x_1-1$.

(3) 由(2)可知，抛物线的顶点 A 在直线 $y=2x-1$ 上运动，且抛物线的形状不变. 由(1)可知，当 $m=1$ 或 $m=3$ 时，抛物线经过点 $B(3,5)$. 将点 $C(0,2)$ 代入 $y=x^2-2mx+m^2+2m-1$，得 $m^2+2m-1=2$，整理，得 $m^2+2m-3=0$，解得 $m=1$ 或 $m=-3$. 所以当 $m=1$ 或 $m=-3$ 时，抛物线经过点 $(0,2)$.

如图，当 $m=-3$ 时，抛物线与线段 BC 只有一个交点(点 C)；当 $m=3$ 时，抛物线与线段 BC 也只有一个交点(点 B)；当 $m=1$ 时，抛物线同时过 B，C 两点，不符合题意，舍去.

综上所述，满足题意的 m 的取值范围为 $-3\leqslant m\leqslant 3$ 且 $m\neq 1$.



【拓展提优】

1. B

2. A **提示**：因为 $y_1^2=y_2^2=y_3^2=1$，所以 y_1，y_2，y_3 的值为 1 或 -1. 因为 $a>0$，$b>0$，所以抛物线开口向上，抛物线的对称轴在 y 轴的左侧. 所以 $(0,y_1)$，$(1,y_2)$ 在对称轴右侧. 在对称轴右侧，y 随 x 的增大而增大，所以 $y_1=-1$，$y_2=1$. 因为 $y_3=1$ 或 -1，所以点 $(-1,y_3)$ 不在对称轴右侧. 若 $y_3=1$，因为 $y_2=1$，所以点 $(-1,y_3)$ 与点 $(1,y_2)$ 是一对对称点，所以对称轴为 y 轴，此时 $b=0$(不符合题意). 所以 $y_3=-1$. 所以二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像经

过$(-1,-1)$，$(0,-1)$和$(1,1)$三点，所以$\begin{cases}a-b+c=-1,\\c=-1,\\a+b+c=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\b=1,\\c=-1.\end{cases}$所以$y=x^2+x-1$.

3. $-\dfrac{3}{5}$　**提示：**将点$A(0,m)$，$B(1,-m)$，$D(3,-m)$代入$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$，得$\begin{cases}c=m,\\a+b+c=-m,\\9a+3b+c=-m,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\dfrac{2}{3}m,\\b=-\dfrac{8}{3}m,\\c=m,\end{cases}$所以$y=\dfrac{2}{3}mx^2-\dfrac{8}{3}mx+m$.将点$C(2,n)$代入$y=\dfrac{2}{3}mx^2-\dfrac{8}{3}mx+m$，得$n=\dfrac{2}{3}m\times2^2-\dfrac{8}{3}m\times2+m$，所以$n=-\dfrac{5}{3}m$，所以$\dfrac{m}{n}=\dfrac{m}{-\dfrac{5}{3}m}=-\dfrac{3}{5}$.

4. $-\dfrac{1}{2}$　**提示：**设点B在点C的右边.因为$y=ax^2-2ax+a+2=a(x-1)^2+2$，所以点$A(1,2)$.根据抛物线的对称性，且$D$为$BC$的中点，可知$AD\perp BC$，$BD=CD$.所以点$D(1,0)$，所以$AD=\dfrac{1}{2}BC=2$，所以$BC=4$，所以$BD=CD=2$，所以$B$，$C$两点的坐标分别为$(3,0)$，$(-1,0)$.将点$C(-1,0)$代入，得$4a+2=0$，解得$a=-\dfrac{1}{2}$.

5. $y=x^2+x$或$y=-\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{3}x$　**提示：**根据题意得，该二次函数与x轴的另一个交点为$(-1,0)$或$(1,0)$，因此要分两种情况讨论：①当图像与x轴的另一个交点为$(-1,0)$时，设该二次函数的表达式为$y=ax(x+1)(a\neq0)$，将点$\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{4}\right)$代入，得$-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{4}a$，解得$a=1$，此时该二次函数的表达式为$y=x^2+x$；②当图像与$x$轴的另一个交点为$(1,0)$时，设该二次函数的表达式为$y=bx(x-1)(b\neq0)$，将点$\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{4}\right)$代入，得$-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}b$，解得$b=-\dfrac{1}{3}$，此时该二次函数的表达式为$y=-\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{3}x$.

6. $y=\dfrac{3}{8}x^2+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{9}{8}$或$y=-3x^2-12x-9$　**提示：**因为$y=ax^2+4ax+3a$，所以抛物线的对称轴为直线$x=-\dfrac{4a}{2a}=-2$.当$a>0$时，抛物线开口向上，抛物线上的点离对称轴越远，函数值越大.因为$|-3-(-2)|<|1-(-2)|$，$-3\leqslant x\leqslant1$，所以当$x=1$时，函数值最大.所以$a+4a+3a=3$，解得$\dfrac{3}{8}$，所以$y=\dfrac{3}{8}x^2+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{9}{8}$.②当$a<0$时，抛物线开口向下，抛物线上的点离对称轴越近，函数值越大.因为$-3\leqslant x\leqslant1$，所以当$x=-2$时，函数值最大.所以$a\times(-2)^2+4a\times(-2)+3a=3$，解得$a=-3$.所以$y=-3x^2-12x-9$.综上所述，二次函数的表达式为$y=\dfrac{3}{8}x^2+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{9}{8}$或$y=-3x^2-12x-9$.

7. **解：**(1) -2　-3

(2) 连接BC，AC.由(1)得，二次函数的表达式为$y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$.所以点$C(0,-3)$，即$OC=3$.设点$D(m,m^2-2m-3)$.因为$OC\perp AB$，$S_{\triangle ABD}=2S_{\triangle ABC}$，所以$|m^2-2m-3|=2OC=6$.由抛物线顶点坐标$(1,-4)$可知，点$D$在$x$轴上方，即$m^2-2m-3=6$，解得$m=1+\sqrt{10}$或$m=1-\sqrt{10}$.所以点$D$的坐标为$(1+\sqrt{10},6)$或$(1-\sqrt{10},6)$.

(3) 点P的坐标为$(4,5)$.　**提示：**设点$P(n,n^2-2n-3)$.因为$\triangle APC$和$\triangle APB$都以AP为底，若要面积相等，则点B和点C到直线AP的距离相等，即$BC/\!/AP$.易求得直线BC的函数表达式为$y=x-3$，所以可设直线AP的函数表达式为$y=x+q$，将点$A(-1,0)$代入，得$-1+q=0$，解得$q=1$.所以直线AP的函数表达式为$y=x+1$.将点$P(n,n^2-2n-3)$代入，得$n^2-2n-3=n+1$，解得$n=4$或$n=-1$(舍去).所以点P的坐标为$(4,5)$.

课时训练8　二次函数与一元二次方程(1)

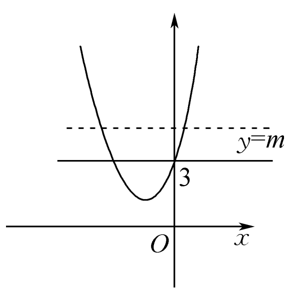
【基础巩固】

1. C　**提示：**当$k\neq0$时，该函数是二次函数，则$36-$

$12k\geqslant 0$，解得 $k\leqslant 3$. 当 $k=0$ 时，该函数是一次函数，与 x 轴交于点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$，满足题意. 所以 k 的取值范围为 $k\leqslant 3$.

2. B **提示：**由 $ax^2+bx+m=0$，得 $ax^2+bx=-m$. 因为关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+m=0$ 有实数根，所以函数 $y=ax^2+bx$ 与函数 $y=-m$ 有交点，所以 $-m\geqslant -3$，所以 $m\leqslant 3$，即 m 的最大值为 3.

3. A **提示：**如图，仅当 $m>3$ 时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $y=m$ 有两个交点，且一个交点的横坐标为正，另一交点的横坐标为负. 所以当关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=m$ 总有一正一负两个实数根时，m 的取值范围是 $m>3$.



4. A **提示：**设抛物线 $y=x^2+mx+n$ 与 x 轴两个交点的坐标为 $(t,0)$，$(t+4,0)$，把抛物线 $y=x^2+mx+n$ 向右平移 5 个单位长度后所得抛物线与 x 轴两个交点的坐标为 $(t+5,0)$，$(t+9,0)$，此时抛物线的函数表达式为 $y=(x-t-5)(x-t-9)$，再把抛物线 $y=(x-t-5)(x-t-9)$ 向上平移 3 个单位长度所得新抛物线的函数表达式为 $y=(x-t-5)(x-t-9)+3$，整理，得 $y=x^2-2(t+7)x+t^2+14t+48$. 当 $y=0$ 时，$x^2-2(t+7)x+t^2+14t+48=0$，解得 $t_1=t+6$，$t_2=t+8$，所以新抛物线与 x 轴的交点坐标为 $(t+6,0)$，$(t+8,0)$，所以新抛物线与 x 轴两个交点间的距离为 $t+8-(t+6)=2$.

5. C **提示：**将点 $A(2,3)$ 代入二次函数 $y=x^2+bx+3$，得 $4+2b+3=3$，解得 $b=-2$. 所以抛物线的函数表达式为 $y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$. 所以一元二次方程 $x^2+bx=t-4$ 有实数根可以看作 $y_1=x^2-2x+3$ 与函数 $y_2=t-1$ 有交点. 易知，当 $x=-1$ 时，$y_1=6$；当 $x=4$ 时，$y_1=11$；当 $x=1$ 时，$y_1=2$，所以在 $-1<x<4$ 的范围内 $2\leqslant y_1<11$. 所以 $2\leqslant t-1<11$，解得 $3\leqslant t<12$.

6. $<$

7. $x_1=-1$，$x_2=5$ **提示：**因为二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像经过点 $A(-4,4)$，$B(2,4)$，所以当 $y=4$ 时，可以得到方程 $4=ax^2+bx+c$ 解为 $x=-4$ 或 $x=2$. 因为 $a(x-3)^2-4=b(3-x)-c$，所以 $a(x-3)^2+b(x-3)+c=4$，所以 $x-3=-4$ 或 $x-3=2$，所以 $x_1=-1$，$x_2=5$.

8. (1) **证明：**因为 $4m^2-4(m^2-1)=4>0$，所以关于 x 的方程 $x^2+2mx+m^2-1=0$ 有两个不相等的实数根，所以不论 m 为何值，该函数图像与 x 轴总有两个公共点.

(2) **解：**当 $y=0$ 时，$x^2+2mx+m^2-1=0$. 解得 $x_1=-m+1$，$x_2=-m-1$. 所以函数图像与 x 轴的交点坐标为 $(-m+1,0)$，$(-m-1,0)$. 因为函数图像与 x 轴的两个公共点分别在原点的两侧，且 $-m+1>-m-1$，所以 $-m+1>0$ 且 $-m-1<0$，解得 $-1<m<1$.

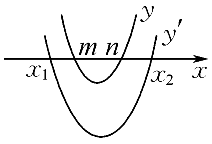
【拓展提优】

1. A **提示：**因为抛物线的顶点坐标为 $\left(\frac{1}{2},m\right)$，$n<\frac{1}{2}$，所以点 (n,y_1) 关于抛物线的对称轴对称的点为 $(1-n,y_1)$，所以点 $(1-n,y_1)$ 与点 $\left(\frac{3}{2}-2n,y_2\right)$ 在该抛物线上. 又因为 $(1-n)-\left(\frac{3}{2}-2n\right)=n-\frac{1}{2}<0$，所以 $\frac{1}{2}<1-n<\frac{3}{2}-2n$. 因为 $a>0$，所以当 $x>\frac{1}{2}$ 时，y 的值随 x 值的增大而增大，所以 $y_1<y_2$，故①正确. 由题意，得 $-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}$，所以 $b=-a$，即 $a+b=0$. 将点 $\left(\frac{1}{2},m\right)$ 代入 $y=ax^2+bx+c$，得 $m=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c$，所以在关于 x 的一元二次方程 $ax^2-bx+c-m+1=0$ 中，$b^2-4ac+4am-4a=b^2-4ac+4a\left(\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c\right)-4a=(a+b)^2-4a=-4a<0$，所以关于 x 的一元二次方程 $ax^2-bx+c-m+1=0$ 无实数解，故②正确.

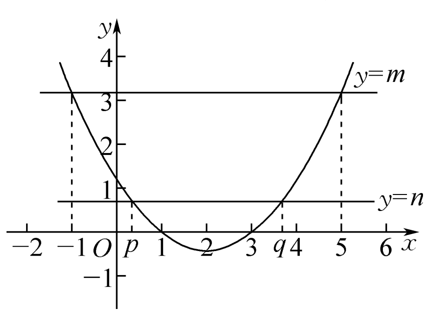
2. C **提示：**因为二次函数 $y=-x^2+bx+c$ 的对称

轴为直线 $x=1$，所以 $-\frac{b}{2\times(-1)}=1$，解得 $b=2$，因为函数图像与 x 轴其中一个交点为 $(3,0)$，所以 $-3^2+2\times3+c=0$，解得 $c=3$. 设二次函数 y_1 表达式为 $y_1=-x^2+bx+c+k$，将 $b=2$，$c=3$ 代入，得 $y=-x^2+2x+3+k$，当 $x=0$ 时，$y=3+k$，当 $x=4$ 时，$y=-5+k$，因为一元二次方程 $-x^2+bx+c+k=0$ 在 $0\leqslant x\leqslant4$ 范围内只有一个解，所以存在两种情况：①当 $x=0$ 时和当 $x=4$ 时，y 的值异号，即当 $(3+k)(-5+k)<0$ 时符合题意，解得 $-3<k<5$. 再讨论端点，当 $k=-3$ 时，方程 $-x^2+2x+3-3=0$ 的解为 $x=0$ 或 $x=2$，不符合题意；当 $k=5$ 时，方程 $-x^2+2x+3+5=0$ 的解为 $x=4$ 或 $x=-2$，在 $0\leqslant x\leqslant4$ 范围内只有一个解，符合题意. 所以 $-3<k\leqslant5$. ② 当一元二次方程 $-x^2+bx+c+k=0$，即 $-x^2+2x+3+k=0$ 只有一个解，即 $2^2-4\times(-1)(3+k)=0$，且该解在 $0\leqslant x\leqslant4$ 范围内时，符合题意，此时，解得 $k=-4$，当 $k=-4$ 时，方程 $-x^2+2x+3-4=0$ 的解为 $x=1$，在 $0\leqslant x\leqslant4$ 范围内. 综上所述，k 的取值范围是 $-3<k\leqslant5$ 或 $k=-4$.

3. A **提示**：设 $y'=(x-x_1)(x-x_2)$，则 x_1，x_2 是函数 y' 和 x 轴的交点的横坐标. 因为 $y=(x-x_1)\cdot(x-x_2)+1=y'+1$，即函数 y' 向上平移 1 个单位长度得到函数 y，如图，由函数图像可得 $x_1<m<n<x_2$.



4. 0 和 4 **提示**：由题意可知，二次函数 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ 与 x 轴的交点分别为 $(1,0)$ 和 $(3,0)$，与直线 $y=m$ 的交点分别为 $(-1,m)$ 和 $(5,m)$，设与直线 $y=n$ 的交点分别为 (p,n) 和 (q,n)，因为 $0<n<m$，所以直线 $y=n$ 在 x 轴和直线 $y=m$ 之间，可画出函数图像如图. 由图，可知 $-1<p<1$，$3<q<5$，若 p，q 都为整数，则 $p=0$，$q=4$，所以关于 x 的方程 $a(x-x_1)(x-x_2)=n$ 的两个整数解分别为 0 和 4.



5. $f<d<e<g$ **提示**：因为 d，$e(d<e)$ 是关于 x 的方程 $1+(x-f)(x-g)=0$ 的两根，所以二次函数 $y=(x-f)(x-g)+1$ 的图像与 x 轴交于点 $(d,0)$，$(e,0)$，所以将二次函数 $y=(x-f)\cdot(x-g)+1$ 的图像向下平移 1 个单位长度可得二次函数 $y=(x-f)(x-g)$ 的图像，二次函数 $y=(x-f)(x-g)$ 的图像与 x 轴交于点 $(f,0)$，$(g,0)$. 画出两函数图像的草图（图略）. 观察函数图像，可知 $f<d<e<g$.

6. **解**：(1) -4

(2) 因为函数的图像经过点 $(m,9n)$，将 $x=m$，$y=9n$ 代入 $y=x^2+mx+n$，得 $m^2+m^2+n=9n$，即 $m^2-4n=0$. 当 $y=0$ 时，$x^2+mx+n=0$，所以根的判别式 $m^2-4n=0$，所以 $x^2+mx+n=0$ 有两个相等的实数根，所以函数 $y=x^2+mx+n$ 的图像与 x 轴只有一个交点.

(3) **解法 1** 因为函数的图像经过点 $(x_1,0)$，$(x_2,0)$，所以 x_1，x_2 是 $x^2+mx+n=0$ 的两根，所以 $x_1+x_2=-m$，$x_1x_2=n$，因为 $x_2-x_1=1$，所以由 $(x_1+x_2)^2-(x_2-x_1)^2=4x_1x_2$，得 $m^2-1=4n$. 将点 $(1,a)$，$(5,b)$ 代入 $y=x^2+mx+n$，得 $a=1+m+n$，$b=25+5m+n$，所以 $a+b=6m+2n+26=6m+\frac{m^2-1}{2}+26=\frac{1}{2}(m+6)^2+\frac{15}{2}$，

所以 $a+b\geqslant\frac{15}{2}$.

解法 2 由 $x_2-x_1=1$ 可得函数图像与 x 轴两交点之间的距离为 1，将函数向右（当 $m>0$ 时）或向左（当 $m<0$ 时）平移 $\left|\frac{m}{2}\right|$ 个单位长度到以 y 轴为对称轴，此时新图像的函数表达式为 $y=x^2+n'$，$x_2=\frac{1}{2}$，$x_1=-\frac{1}{2}$，将点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 代入，得 $\frac{1}{4}+n'=0$，解得 $n'=-\frac{1}{4}$，所以新图像的函数表达

式为 $y=x^2-\frac{1}{4}$，点 $(1,a)$，$(5,b)$ 平移后为点 $\left(1+\frac{m}{2},a\right)$，$\left(5+\frac{m}{2},b\right)$，代入 $y=x^2-\frac{1}{4}$，得 $a+b=\left(1+\frac{m}{2}\right)^2+\left(5+\frac{m}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(m+6)^2+\frac{15}{2}$，所以 $a+b\geqslant\frac{15}{2}$.

课时训练 9　二次函数与一元二次方程(2)

【基础巩固】

1. C

2. C　**提示：** 二次函数 $y=ax^2-4ax+c$ 的对称轴为直线 $x=-\frac{-4a}{2a}=2$，所以点 $(0.12,-1.5)$ 关于对称轴的对称点为 $(3.88,-1.5)$，点 $(0.13,0.9)$ 关于对称轴的对称点为 $(3.87,0.9)$. 由表格可知，当 x 取 0.12 与 0.13 之间的某个数时，$y=0$，所以当 x 取 3.87 与 3.88 之间的某个数时，$y=0$. 所以方程 $ax^2-4ax+c=0$ 的一个较大的根的范围是 $3.87<x<3.88$.

3. B　**提示：** 因为抛物线开口向下，所以 $a<0$. 因为抛物线交 y 轴于正半轴，所以 $c>0$. 因为 $-\frac{b}{2a}=1>0$，所以 $b>0$，且 $b=-2a$. 又因为一个交点在点 $(3,0)$ 和点 $(4,0)$ 之间，且抛物线的对称轴为直线 $x=1$，所以另一个交点在点 $(-2,0)$ 和点 $(-1,0)$ 之间. 将 $x=-1$ 代入，得 $y=a-b+c>0$，故选项 A 正确. $3a+b=3a-2a=a<0$，故选项 B 错误. 将顶点 $(1,n)$ 代入，得 $n=a+b+c$，所以 $4a(c-n)=4a(c-a-b-c)=4a(-a+2a)=4a^2=(-2a)^2=b^2$，故选项 C 正确. 因为 $ax^2+bx+c=n-1$，所以 $ax^2+bx+c=a+b+c-1$，所以 $ax^2+bx+a+1=0$. 因为 $b^2-4a(a+1)=4a^2-4a^2-4a=-4a>0$，所以一元二次方程 $ax^2+bx+c=n-1$ 有两个不相等的实数根，故选项 D 正确.

4. $-3<x<-2$　**提示：** 因为 $x=-2$ 和 $x=0$ 时，$y=-2$，所以对称轴为直线 $x=-1$. 因为当 $x=1$ 时，$y>0$，当 $x=0$ 时，$y<0$，所以当 $0<x<1$ 时，存在一个数使 $y=0$. 根据抛物线的对称性，当 $-3<x<-2$ 时，也存在一个数使 $y=0$，所以一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的一个较小根的范围是 $-3<x<-2$.

5. ①②④　**提示：** 因为对称轴为直线 $x=-1$，即 $-\frac{b}{2a}=-1$，所以 $b=2a$，所以 a，b 同号. 又因为二次函数图像与 y 轴的交点在点 $(0,0)$ 和点 $(0,3)$（不包括这两点）之间，所以 $0<c<3$. 所以 $\frac{ab}{c}>0$，故①正确. 由对称性可知，二次函数图像与 x 轴的两个交点分别为 $(-4,0)$，$(2,0)$，且图像与 y 轴交于正半轴，所以图像开口向下，即 $a<0$，$b<0$，所以 $y=ax^2+bx+c$ 和 $y=b$ 有两个不同的交点，故②正确. 将点 $(-4,0)$ 代入二次函数的表达式，得 $16a-4b+c=0$，结合 $b=2a$，得 $a=-\frac{1}{8}c$，$b=-\frac{1}{4}c$，所以 $y_{\max}=a-b+c=\frac{9}{8}c<\frac{27}{8}$，故③错误. 因为 $b=-\frac{1}{4}c$，$0<c<3$，所以 $-\frac{3}{4}<b<0$，故④正确. 综上所述，正确的有①②④.

6. (1) **解：** 将点 $(1,0)$，$(2,1)$ 代入 ax^2+bx+1，得 $\begin{cases}a+b+1=0,\\4a+2b+1=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=-2,\end{cases}$ 所以该函数的表达式为 $y=x^2-2x+1$，顶点坐标为 $(1,0)$.

(2) **解：** $a=1$，$b=3$，此时 $y=x^2+3x+1$. 因为根的判别式为 $3^2-4\times1\times1=5>0$，所以函数 $y=x^2+3x+1$ 的图像与 x 轴有两个不同的交点.（答案不唯一）

(3) **证明：** 由题意，得 $P=p^2+p+1$，$Q=q^2+q+1$，所以 $P+Q=p^2+p+1+q^2+q+1=p^2+q^2+p+q+2=p^2+q^2+4=(2-q)^2+q^2+4=2(q-1)^2+6\geqslant6$. 因为 $p\neq q$，所以 $q\neq1$，所以 $P+Q>6$.

【拓展提优】

1. C

2. A　**提示：** 由题图，可知 $a<0$，$-\frac{b}{2a}=-\frac{3}{2}$，所以 $b=3a<0$，所以 $3a-b=0$，故②正确；因为该二次函数的图像与 x 轴有两个交点，所以 $b^2-4ac>0$，故③正确；因为当 $x=-1$ 时，$y=a-b+c>0$，当

$x=-3$ 时，$y=9a-3b+c>0$，所以 $10a-4b+2c>0$，所以 $5a-2b+c>0$，故④正确；又因为该函数图像的对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{3}{2}$，且当 $x=-3$ 时，$y>0$，所以由对称性可知，当 $x=0$ 时，$y>0$，即 $c>0$，所以 $abc>0$，故①正确；同理可知，当 $x=1$ 时，$y=a+b+c<0$，由②，得 $b=3a$，所以 $y=\frac{1}{3}b+b+c<0$，所以 $4b+3c<0$，故⑤错误．综上所述，错误结论的个数是 1．

3. ②⑤

4. 8　**提示：**因为抛物线 $y=x^2+2x-n$ 与抛物线 $y=x^2-2x-n$ 关于 y 轴对称，所以 $AB=CD$．因为 $AD=2BC$，所以抛物线 $y=x^2+2x-n$ 与 x 轴的交点 A 在点 B 的左侧，抛物线 $y=x^2-2x-n$ 与 x 轴的交点 C 在点 D 的左侧．令 $y=x^2+2x-n=0$，解得 $x=-1\pm\sqrt{n+1}$；令 $y=x^2-2x-n$，解得 $x=1\pm\sqrt{n+1}$．易得点 $A(-1-\sqrt{n+1},0)$，$B(-1+\sqrt{n+1},0)$，$C(1-\sqrt{n+1},0)$，$D(1+\sqrt{n+1},0)$．因为 $AD=2BC$，所以 $2+2\sqrt{n+1}=2\times(-2+2\sqrt{n+1})$，所以 $n=8$．

5. **解：**(1) $y=\frac{6}{|x|}$

(2) $y=-x+2$ 的"绝对函数"是 $y=-|x|+2$，即 $y=\begin{cases}-x+2(x\geqslant 0),\\ x+2(x<0).\end{cases}$ $y=-x+2$ 的"绝对函数"的图像如图 1 所示．

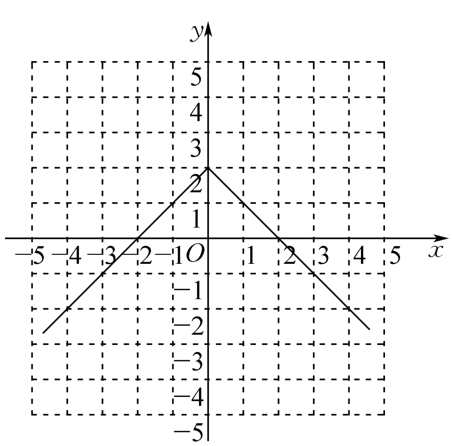


图 1

(3) 如图 2，令 $x=0$，得 $y=3$，则函数图像与 y 轴的交点是 $(0,3)$．当直线 $y=-x+m$ 经过点 $(0,3)$ 时，直线与图像有三个交点，此时 $m=3$．当直线向下平移，使直线与函数 $y=x^2-4x+3$ 只有一个交点时，可得方程 $-x+m=x^2-4x+3$ 有两个相等的实数根，则 $9-4(3-m)=0$，解得 $m=\frac{3}{4}$．所以当函数 $y=x^2-4x+3$ 的"绝对函数"与直线 $y=-x+m$ 有四个交点时，m 的取值范围是 $\frac{3}{4}<m<3$．

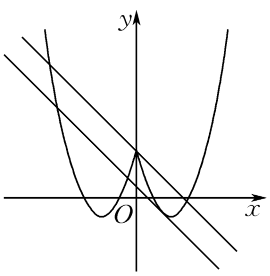


图 2

课时训练 10　二次函数与一元二次方程(3)

【基础巩固】

1. A

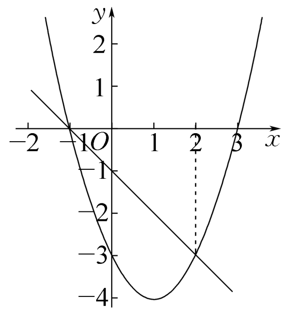
2. A　**提示：**由图可知，抛物线的对称轴为直线 $x=2$，与 x 轴的一个交点为 $(5,0)$，所以抛物线与 x 轴的另一个交点坐标为 $(-1,0)$，所以不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $-1<x<5$．

3. C

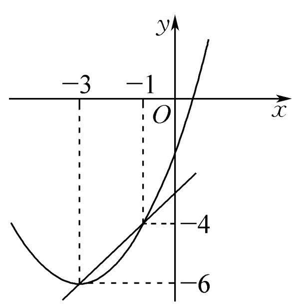
4. $-1\leqslant x\leqslant 1$　**提示：**由函数 $y=ax^2+bx+c$ 图像可知，当 $1\leqslant x\leqslant 3$ 时，函数图像在 x 轴的下方(包括交点)，所以函数 $y=a(x+2)^2+b(x+2)+c$ 的图像与 x 轴的交点为 $(-1,0)$，$(1,0)$(将 $x+2$ 作为一个整体，代入上面的函数中)，所以不等式 $a(x+2)^2+b(x+2)+c\leqslant 0$ 的解集为 $-1\leqslant x\leqslant 1$．

5. $-1\leqslant x\leqslant 2$　**提示：**将点 $(2,-3)$ 代入 $y=ax^2-2ax+c$，得 $4a-4a+c=-3$，即 $c=-3$，将 $x=3$ 代入 $ax^2-2ax+c=0$，得 $9a-6a+c=0$，即 $3a-3=0$，解得 $a=1$，所以抛物线的函数表达式为 $y=x^2-2x-3$．解方程 $x^2-2x-3=-x-1$，解得 $x_1=-1$，$x_2=2$，所以抛物线 $y=x^2-2x-3$ 与直线 $y=-x-1$ 的交点的横坐标分别为 -1 和 2，如图，根据图像可知，不等式 $ax^2-2ax+c\leqslant -x-1$ 的解

集为$-1\leqslant x\leqslant 2$.



6. 1　**提示:**因为当$x=-3$时,y有最小值-6,所以对于任意的m,均有$am^2+bm+c\geqslant -6$,故①错误;因为抛物线的对称轴为直线$x=-3$,所以当$x=-1$或$x=-5$时,$y=-4$,所以当$ax^2+bx+c\geqslant -4$时,$x\leqslant -5$或$x\geqslant -1$,故②错误;因为点$(-3,-6)$,$(-1,-4)$在直线$y=x-3$上,所以抛物线$y=ax^2+bx+c$与直线$y=x-3$的图像如图所示.所以不等式$ax^2+bx+c\leqslant x-3$的解集为$-3\leqslant x\leqslant -1$,故③正确.



7. ③④　**提示:**因为抛物线$y=ax^2+bx+c$经过点$(-1,1)$,所以$a-b+c=1$,所以$b=a+c-1$,因为抛物线$y=ax^2+bx+c(a<0)$经过$(-1,1)$,$(m,0)$两点,且$2<m<3$,所以$\begin{cases}4a+2b+c>0,\\9a+3b+c<0,\end{cases}$将$b=a+c-1$代入,得$\begin{cases}6a+3c>2,\\12a+4c<3,\end{cases}$所以$-12a-6c<-4$,所以$-6c+4c<-4+3$,解得$c>\frac{1}{2}$,故①错误;设抛物线与$x$轴的另一个交点为$(n,0)$,则$n<-1$,所以抛物线的对称轴为直线$x=\frac{m+n}{2}<\frac{3-1}{2}=1$,若抛物线对称轴为直线$x=\frac{3}{4}$,则当$\frac{1}{2}<x<\frac{3}{4}$时,$y$随$x$的增大而增大,故②错误;因为$ax^2+bx<(c-1)x$,所以$ax^2+(a+c-1)x<(c-1)x$,所以$ax^2+ax<0$,又因为$a<0$,结合$y=ax^2+ax(a<0)$的图像可知,不等式$ax^2+ax<0$的解集为$x>0$或$x<-1$,所以关于$x$的不等式$ax^2+bx<(c-1)x$的解集为$x>0$或$x<-1$,故③正确;因为$b=a+c-1$,$4a+2b+c>0$,所以$6a+3c>2$,所以$2a+c>\frac{2}{3}$,故④正确.

8. 解:(1) 设这个二次函数的表达式为$y=a(x-0)(x-2)$,将点$(1,-1)$代入,得$a\cdot 1\times(1-2)=-1$,解得$a=1$,所以这个二次函数的表达式为$y=x(x-2)=x^2-2x$.

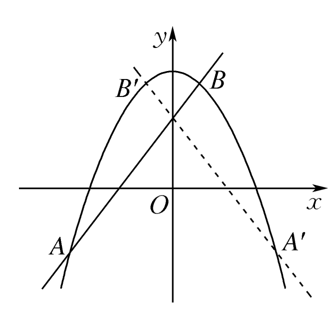
(2) 根据图像可得,当$y>0$时,$x<0$或$x>2$.

(3) 因为二次函数表达式为$y=x^2-2x$,所以$y=(x-1)^2-1$.所以当$x=1$时,y有最小值-1;当$x=0$时,$y=0$;当$x=\frac{3}{2}$时,$y=-\frac{3}{4}$.所以当$0\leqslant x\leqslant \frac{3}{2}$时,$-1\leqslant y\leqslant 0$.

【拓展提优】

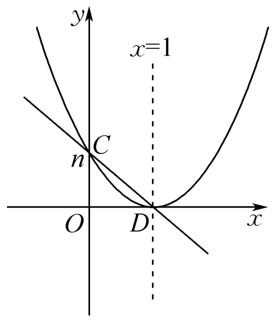
1. C

2. D　**提示:**因为$y=kx+m$与$y=-kx+m$的图像关于y轴对称,所以直线$y=-kx+m$与抛物线$y=ax^2+c$的交点A',B'与点A,B分别关于y轴对称(如图所示).因为点$A(-3,y_1)$,$B(1,y_2)$,所以点$A'(3,y_1)$,$B'(-1,y_2)$,根据函数图像可得,不等式$ax^2+c\geqslant -kx+m$的解集是$-1\leqslant x\leqslant 3$.



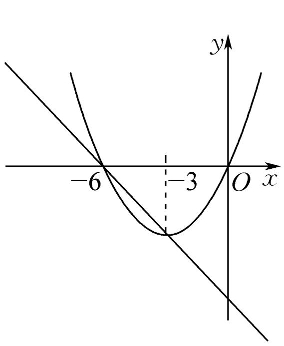
3. C　**提示:**如图,由题意可知,抛物线的对称轴为直线$x=-\frac{-2n}{2n}=1$,抛物线$y_1=nx^2-2nx+n$与直线$y_2=-nx+n$均经过点$C(0,n)$和点$D(1,0)$.因为$n>0$,所以抛物线$y_1=nx^2-2nx+n$开口向上,直线$y_2=-nx+n$经过第一、二、四象限.当$x_1=$

$x_2<1$ 时，$y_1<y_2$ 或 $y_1=y_2$ 或 $y_1>y_2$，当 $x_1=x_2>1$ 时，$y_1>y_2$，故选项 A，B 错误；当 $y_1=y_2>n$ 时，直线图像位于 y 轴的左侧，可知 $x_1>x_2$，故选项 C 正确；当 $y_1=y_2<n$ 时，直线与抛物线图像均位于 y 轴的右侧，可知 $x_1>x_2$ 或 $x_1=x_2$ 或 $x_1<x_2$，故选项 D 错误.



4. $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$ **提示：**当 $x=-1$ 时，$y=0$，即 $a-b+c=0$，所以 $a+c=b$；当 $x=1$ 时，$1\leqslant y\leqslant\frac{1+1^2}{2}=1$，即 $y=1$，则有 $a+b+c=1$. 故 $2b=1$，解得 $b=\frac{1}{2}$，则 $c=\frac{1}{2}-a$，所以 $y=ax^2+\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}-a\right)$. 由于对任意 x 的取值都有 $x\leqslant y$，即 $ax^2-\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}-a\right)\geqslant0$ 恒成立，则 $a>0$，且 $\frac{1}{4}-4a\left(\frac{1}{2}-a\right)\leqslant0$，即 $\left(2a-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant0$，而 $\left(2a-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant0$，所以 $\left(2a-\frac{1}{2}\right)^2=0$，解得 $a=\frac{1}{4}$，则 $c=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$，所以 $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$.

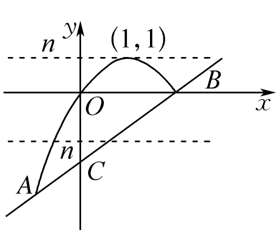
5. $-6<x<-3$ **提示：**由 $y_2=bx^2+6bx=b(x+3)^2-9b$ 易知，该抛物线的顶点坐标为 $(-3,-9b)$. 将点 $(-3,-9b)$ 代入 $y_1=ax+6a$ 并整理，得 $a=-3b$. 因为 $y_2=bx^2+6bx=bx(x+6)$，所以抛物线和 x 轴的交点为 $(0,0)$ 和 $(-6,0)$. 因为 $y_1=ax+6a=a(x+6)$，所以直线 y_1 过点 $(-6,0)$. 因为当 $x>0$ 时，总有 $y_1<y_2$，所以 $b>0$. 直线和抛物线的大致图像如图所示，由图像知，当 $y_1>y_2$ 时，x 的取值范围是 $-6<x<-3$.



6. 解：(1) 将点 $C(0,-2)$ 代入 $y=x+b$，得 $b=-2$，所以 $y=x-2$. 当 $y=0$ 时，$x-2=0$，解得 $x=2$，所以点 $B(2,0)$. 将点 $B(2,0)$ 代入 $y=-x^2+mx$，得 $-2^2+2m=0$，解得 $m=2$，所以抛物线的函数表达式为 $y=-x^2+2x$. 因为 $y=-x^2+2x=-(x-1)^2+1$，所以顶点坐标为 $(1,1)$.

(2) 因为直线 $y=x-2$ 与抛物线 $y=-x^2+2x$ 的交点 A 在第三象限，所以令 $-x^2+2x=x-2$，解得 $x=2$（不符合题意，舍去）或 $x=-1$，所以 $x_A=-1$，所以 $y_A=-3$，所以点 A 的坐标为 $(-1,-3)$. 观察图像得，不等式 $-x^2+mx\leqslant x+b$ 的解集为 $x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant2$.

(3) $-3\leqslant n<0$ 或 $n=1$. **提示：**方程 $-x^2+mx=n$ 在 $-1\leqslant x\leqslant2$ 的范围内只有一个实数根，可以理解为抛物线 $y=-x^2+2x$ 与直线 $y=n$ 在 $-1\leqslant x\leqslant2$ 的范围内只有一个交点. 如图，当 $-3\leqslant n<0$ 时，直线 $y=n$ 与抛物线 $y=-x^2+2x$ 始终有一个交点；当直线 $y=n$ 经过抛物线顶点时，直线 $y=n$ 与抛物线 $y=-x^2+2x$ 也只有一个交点. 所以 n 的取值范围为 $-3\leqslant n<0$ 或 $n=1$.



课时训练 11　用二次函数解决问题(1)

【基础巩固】

1. D　**2.** C　**3.** B

4. C　**提示：**设运动时间为 t s，则 $AP=CQ=t$ cm，$CP=(6-t)$cm. 在 Rt$\triangle PQC$ 中，根据勾股定理，得 $PQ^2=PC^2+CQ^2=(6-t)^2+t^2=2(t-3)^2+18$. 当 $t\leqslant3$ 时，PQ^2 随 t 的增大而减小. 易知 $t\leqslant2$，所以当 $t=2$ 时，PQ^2 有最小值，最小值为 20，所以线段 PQ 的最小值是 $2\sqrt{5}$ cm.

5. 3　$\frac{45}{4}$

6. 1 556　**提示**:因为 $y=-2x^2+80x+758=-2\cdot(x-20)^2+1\ 558$,所以抛物线的对称轴为直线 $x=20$,开口向下,所以当 $x>20$ 时,y 随 x 的增大而减小.因为 $21\leqslant x\leqslant 25$,所以 $x=21$ 时,y 取最大值,此时 $y_{最大}=-2\times(21-20)^2+1\ 558=1\ 556$.

7. $\dfrac{25}{2}$　**提示**:设其中一个正方形的边长为 x cm,则另一个正方形的边长为 $(5-x)$cm,两个正方形的面积之和为 S cm^2,则 $S=x^2+(5-x)^2=2\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{25}{2}$,所以当 $x=\dfrac{5}{2}$ 时,S 取得最小值,最小值是 $\dfrac{25}{2}$.

8. 2　**提示**:因为 $T=-0.1t^2+2.4t+5=-0.1(t-12)^2+19.4$,所以当 $t=12$ 时,T 有最大值为 19.4,故②不正确.当 $t=0$ 时,$T=5$.因为 $0\leqslant t\leqslant 24$,且当 $t<12$ 时,T 随 t 的增大而增大,所以 $5\leqslant T\leqslant 19.4$,所以蔬菜大棚内当天的温度 T 可以是 16 ℃,故①正确.当 $T=19$ 时,$19=-0.1(t-12)^2+19.4$.解得 $t=10$ 或 $t=14$.又因为 $T=-0.1(t-12)^2+19.4$ 的图像开口向下,所以蔬菜大棚内当天的温度 T 不低于 19 ℃的时长为 $14-10=4$(h),故③正确.所以正确的结论有 2 个.

9. 180 m^2　**提示**:因为点 P 在矩形花园 $ABCD$ 内(含边界),所以 $AB=m\geqslant 6$,$BC=28-m\geqslant 18$,所以 $6\leqslant m\leqslant 10$.矩形花园的面积为 $S=m(28-m)=-m^2+28m=-(m-14)^2+196$,所以当 $m=10$ 时,S 取得最大值,代入解得 $S=180$.所以花园面积的最大值为 180 m^2.

10. **解**:(1) 当 $20\leqslant x\leqslant 32$ 时,设 y 关于 x 的函数表达式为 $y=kx+b(k\neq 0)$.将点(20,100),(32,40)代入,得 $\begin{cases}20k+b=100,\\32k+b=40,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-5,\\b=200.\end{cases}$ 所以当 $20\leqslant x\leqslant 32$ 时,y 关于 x 的函数表达式为 $y=-5x+200$.

(2) 设获得利润 w 元.当 $20\leqslant x\leqslant 32$ 时,$w=(x-12)y=(x-12)(-5x+200)=-5x^2+260x-2400=-5(x-26)^2+980$.所以当 $x=26$ 时,w 有最大值,最大值为 980.当 $32\leqslant x\leqslant 36$ 时,$y=40$,$w=(x-12)y=(x-12)\times 40=40x-480$.所以当 $x=36$ 时,w 最大,最大值为 960.因为 $980>960$,所以当售价为 26 元/kg 时,获得的利润最大,最大利润是 980 元.

【拓展提优】

1. C　**提示**:设每张床位提高 $20x$ 元,每天收入为 y 元,则 $y=(100+20x)(100-10x)=-200(x-2.5)^2+11\ 250$.所以当 $x=2.5$ 时,可使 y 有最大值.因为 x 为整数,所以当 $x=2$ 时,$y=11\ 200$;当 $x=3$ 时,$y=11\ 200$.所以为使租出的床位少且每天收入高,每张床位每天最合适的收费是 $100+3\times 20=160$(元).

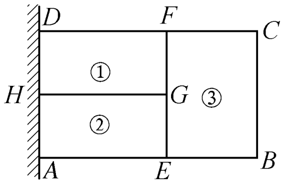
2. C　**提示**:对于方案 1:设矩形的宽为 x m,则矩形的长为 $(8-2x)$m,此时菜园面积为 $x(8-2x)=-2x^2+8x=[-2(x-2)^2+8]m^2$,所以当 $x=2$ 时,菜园的面积有最大值,最大面积为 8 m^2.对于方案 2:作一腰上的高,则由"垂线段最短"可知,该高小于等于腰长,所以当等腰三角形为等腰直角三角形时,菜园的面积最大,最大面积为 $\dfrac{1}{2}\times 4\times 4=8(m^2)$.对于方案 3:菜园的面积为 $\dfrac{\pi\times\left(\dfrac{8}{\pi}\right)^2}{2}=\dfrac{32}{\pi}(m^2)$.因为 $\dfrac{32}{\pi}>\dfrac{32}{4}=8$,所以最佳方案是方案 3.

3. C　**提示**:因为△ABC 为等边三角形,所以 $\angle A=\angle B=\angle C=60°$,$AB=BC=AC$.因为折叠后是一个三棱柱,所以 $DO=PE=PF=QG=QH=OK$,四边形 $ODEP$、四边形 $PFGQ$、四边形 $QHKO$ 都为矩形.所以 $\angle ADO=\angle AKO=90°$.连接 AO,在 Rt△AOD 和 Rt△AOK 中,$\begin{cases}AO=AO,\\OD=OK,\end{cases}$ 所以 Rt△AOD≌Rt△AOK(HL).所以 $\angle OAD=\angle OAK=30°$.设 $OD=x$,则 $AO=2x$,$AD=\sqrt{3}x$,所以 $DE=6-2\sqrt{3}x$,所以纸盒侧面积 $=3x(6-2\sqrt{3}x)=-6\sqrt{3}x^2+18x=-6\sqrt{3}\cdot\left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$,所以当 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时,纸盒侧面积最大,最大值为 $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ cm^2.

4. 1 264　**提示**:设每份 A 种快餐降价 a 元,则每天

卖出$(40+2a)$份；每份B种快餐提高b元，则每天卖出$(80-2b)$份. 由题意可得，$40+2a+80-2b=40+80$，解得$a=b$. 故总利润为$W=(12-a)\cdot(40+2a)+(8+a)(80-2a)=-4a^2+48a+1\ 120=-4(a-6)^2+1\ 264$. 所以当$a=6$时，$W$取得最大值1 264，即两种快餐一天的总利润最多是1 264元.

5. 300 **提示**:如图，因为三块矩形区域的面积相等，所以矩形$AEFD$的面积是矩形$BCFE$面积的2倍，所以$AE=2BE$. 设$BC=x$ m，$BE=FC=a$ m，则$AE=HG=DF=2a$ m. 因为$DF+FC+HG+AE+EB+EF+BC=80$ m，即$8a+2x=80$，所以$a=-\frac{1}{4}x+10$，所以$3a=-\frac{3}{4}x+30$，故矩形区域$ABCD$的面积$S=x\left(-\frac{3}{4}x+30\right)=-\frac{3}{4}x^2+30x=\left[-\frac{3}{4}(x-20)^2+300\right]\text{m}^2$. 因为$a=-\frac{1}{4}x+10>0$，所以$0<x<40$，故当$x=20$时，$S$有最大值，最大值是300 m^2.



6. 解:(1) 80 **提示**:设垂直于墙的边长为x m，则当$n=4$时，平行于墙的边长为$(40-5x)$m. 设菜园的面积为y m^2. 所以$y=x(40-5x)=-5x^2+40x=-5(x-4)^2+80$. 因为$40-5x>0$，所以$x<8$. 因为$-5<0$，所以当$x=4$时，$y$最大，最大值为80 m^2.

(2) 设垂直于墙的边长为x m，则平行于墙的边长为$[40-(n+1)x]$m，菜园的面积为y m^2. 所以$y=x[40-(n+1)x]=-(n+1)x^2+40x$. 因为$-(n+1)<0$，所以当$x=-\frac{40}{-2(n+1)}=\frac{20}{n+1}$时，$y$有最大值，最大值为$\frac{-1\ 600}{4\times[-(n+1)]}=\frac{400}{n+1}$.

答:菜园面积的最大值为$\frac{400}{n+1}$ m^2.

(3) $a=4,b=19$或$a=5,b=11$或$a=7,b=7$ **提示**:当$n=a$时，菜园的最大面积是$\frac{400}{a+1}$；当$n=b$时，菜园的最大面积是$\frac{400}{b+1}$. 由题意，得$\frac{400}{a+1}+\frac{400}{b+1}=100$，化简，得$ab-3a-3b-7=0$，故$(a-3)(b-3)=16$. 因为$a,b$是正整数且$a\leqslant b$，$16=1\times16=2\times8=4\times4$，所以当$a-3=1,b-3=16$时，$a=4,b=19$；当$a-3=2,b-3=8$时，$a=5,b=11$；当$a-3=4,b-3=4$时，$a=7,b=7$.

7. 解:(1) 设$y=kx+b$. 将点$(40,180)$，$(70,90)$代入，得$\begin{cases}180=40k+b,\\90=70k+b,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-3,\\b=300.\end{cases}$所以$y$关于$x$的函数表达式为$y=-3x+300$.

(2) 由(1)，得$W=(-3x+300)(x-a)$. 又由题表格知，当$x=40$时，$W=3\ 600$，代入上式，得$3\ 600=(-3\times40+300)(40-a)$，解得$a=20$. 所以$W=(-3x+300)(x-20)=-3x^2+360x-6\ 000=-3(x-60)^2+4\ 800$，所以当$x=60$时，$W$取得最大值，即售价为60元/件时，周销售利润$W$最大，最大利润为4 800元.

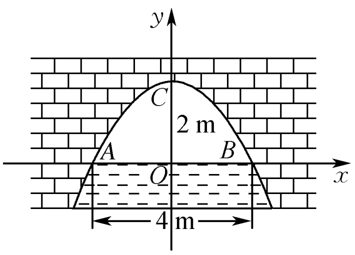
(3) 由题意，得$W=-3(x-100)\cdot(x-20-m)(x\leqslant55)$，该函数图像的对称轴为直线$x=60+\frac{m}{2}>60$，所以当$0<x\leqslant55$时，$W$的值随$x$值的增大而增大，所以当$x=55$时周销售利润最大，所以$4\ 050=-3(55-100)(55-20-m)$，解得$m=5$.

课时训练 12 用二次函数解决问题(2)

【基础巩固】

1. B **提示**:如图，以AB所在直线为x轴，线段AB的垂直平分线为y轴建立平面直角坐标系. 由题意，得点$A(-2,0)$，$B(2,0)$，$C(0,2)$. 设经过A,B,C三点的抛物线的函数表达式为$y=a(x-2)\cdot(x+2)(a\neq0)$. 因为点$C(0,2)$在此抛物线上，代入求得$a=-\frac{1}{2}$，所以此抛物线的函数表达式为$y=$

$-\frac{1}{2}(x-2)(x+2)$. 因为水面下降 2 m，所以 $-\frac{1}{2}(x-2)(x+2)=-2$，解得 $x_1=2\sqrt{2}$，$x_2=-2\sqrt{2}$. 所以下降之后的水面宽为 $4\sqrt{2}$ m，所以水面宽度增加了 $(4\sqrt{2}-4)$m.



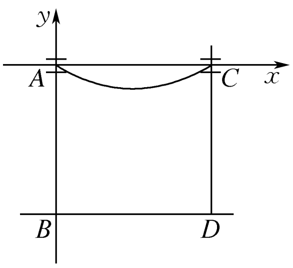
2. C　**提示:** 当 $y=3.05$ 时，$3.05=-0.2x^2+3.5$，解得 $x=1.5$（负值舍去）. 所以 $4-1.5=2.5$(m). 当 $x=-2.5$ 时，$y=-0.2\times(-2.5)^2+3.5=2.25$. 所以球出手时，运动员跳离地面的高度为 $2.25-0.25-1.8=0.2$(m).

3. 6　**4.** ①③

5. $\frac{4}{3}$　**提示:** 由题意得，在调整喷头高度的过程中，水柱的形状不发生变化. 当喷头高 2.5 m 时，设 $y=ax^2+bx+2.5$，将点 $(2.5,0)$ 代入，得 $2.5a+b+1=0$①；喷头高 4 m 时，设 $y=ax^2+bx+4$，将点 $(3,0)$ 代入，得 $9a+3b+4=0$②. 联立①②，解得 $a=-\frac{2}{3}$，$b=\frac{2}{3}$. 设喷头高为 t m 时，水柱落点与点 O 处的距离为 2 m，则 $y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x+t$. 将点 $(2,0)$ 代入，得 $-\frac{2}{3}\times2^2+\frac{2}{3}\times2+t=0$，解得 $t=\frac{4}{3}$.

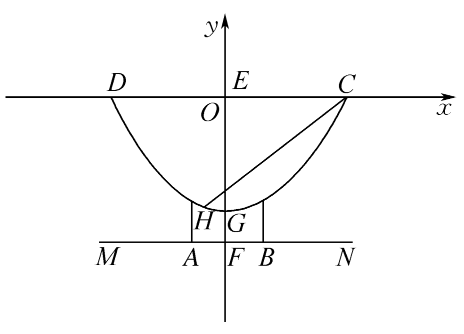
6. **解:** (1) 如图，以 A 为原点，AB 所在直线为 y 轴，AC 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系. 因为 $5.5-6=-0.5$，两电线杆间的距离为 10 m，所以抛物线的顶点为 $(5,-0.5)$. 设抛物线的函数表达式为 $y=a(x-5)^2-0.5$，将点 $C(10,0)$ 代入 $y=a(x-5)^2-0.5$，得 $25a-0.5=0$. 解得 $a=0.02$. 所以 $y=0.02(x-5)^2-0.5$.

(2) 由题意得，左侧抛物线的顶点为 $(2,-1)$，且过点 $A(0,0)$. 设左侧抛物线的函数表达式为 $y=k(x-2)^2-1$，将点 $A(0,0)$ 代入 $y=k(x-2)^2-1$，得 $4k-1=0$. 解得 $k=0.25$. 所以左侧抛物线的函数表达式为 $y=0.25(x-2)^2-1$，所以当 $x=3$ 时，$y=0.25(3-2)^2-1=-0.75$，因为 $6-0.75=5.25$(m)，所以电线杆 EF 上的电线离地面的距离为 5.25 m.



【拓展提优】

1. A　**提示:** 如图，以 CD 为 x 轴，EG 为 y 轴建立平面直角坐标系. 因为 $CD=12$ m，所以点 $D(-6,0)$，$C(6,0)$. 因为 $EG=8$ m，所以点 $G(0,-8)$. 设抛物线的函数表达式为 $y=ax^2-8$，将点 $C(6,0)$ 代入，得 $36a-8=0$，解得 $a=\frac{2}{9}$. 所以抛物线的函数表达式为 $y=\frac{2}{9}x^2-8$. 由题意可知，当 $\angle ABM=45^\circ$ 时，则旋转前 CH 与水平方向的夹角为 45°. 设直线 CH 的函数表达式为 $y=x+b$，将点 C 的坐标代入，可得 $6+b=0$，所以 $b=-6$. 所以直线 CH 的函数表达式为 $y=x-6$. 联立方程组 $\begin{cases}y=x-6,\\ y=\frac{2}{9}x^2-8,\end{cases}$ 所以 $\frac{2}{9}x^2-x-2=0$. 设点 $C(x_1,y_1)$，$H(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{9}{2}$，$x_1x_2=-9$. 所以 $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\frac{225}{4}$. 所以 $|x_1-x_2|=\frac{15}{2}$，所以 $CH=\sqrt{(y_1-y_2)^2+(x_1-x_2)^2}=\sqrt{2}\,|x_1-x_2|=\frac{15\sqrt{2}}{2}$(m).



2. $5<m<4+\sqrt{7}$ 提示：令 $h=-\frac{1}{12}m^2+\frac{2}{3}m+\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$，解得 $m_1=4+\sqrt{7}$，$m_2=4-\sqrt{7}$. 因为扣球点必须在球网右边，即 $m>5$，所以 $m_2=4-\sqrt{7}$ 应舍去. 因为乙原地起跳，并且因球的高度高于乙扣球的最大高度而导致接球失败，所以 m 的取值范围是 $5<m<4+\sqrt{7}$.

3. 解：(1) 易知顶点 $C(0,11)$，点 $B(8,8)$. 设该抛物线的函数表达式为 $y=ax^2+c(a\neq 0)$. 根据题意，得 $\begin{cases}8=64a+c,\\11=c,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{3}{64},\\c=11.\end{cases}$

所以该抛物线的函数表达式为 $y=-\frac{3}{64}x^2+11$.

(2) 令 $-\frac{1}{128}(t-19)^2+8=11-5$，解得 $t_1=35$，$t_2=3$. 画出函数 $h=-\frac{1}{128}(t-19)^2+8(0\leqslant t\leqslant 40)$ 的图像(图略)，由图像可知，当 $3\leqslant t\leqslant 35$ 时，水面到顶点 C 的距离不大于 5 m，需禁止船只通行，所以禁止船只通行的时间为 $35-3=32$(h).

4. 解：(1) 将点 $A(0,4)$ 和 $(4,8)$ 代入 $y=-\frac{1}{8}x^2+bx+c$，得 $\begin{cases}4=c,\\8=-\frac{1}{8}\times 4^2+4b+c,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=\frac{3}{2},\\c=4,\end{cases}$ 所以抛物线 C_2 的函数表达式为 $y=-\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{2}x+4$.

(2) 由题意，得 $-\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{2}x+4-\left(-\frac{1}{12}x^2+\frac{7}{6}x+1\right)=1$. 整理，得 $(x-12)(x+4)=0$，解得 $x_1=-4$(舍去)，$x_2=12$. 所以当运动员运动的水平距离为 12 m 时，运动员与小山坡的竖直距离为 1 m.

(3) 因为 C_1：$y=-\frac{1}{12}x^2+\frac{7}{6}x+1=-\frac{1}{12}(x-7)^2+\frac{61}{12}$，所以当 $x=7$ 时，运动员到达坡顶正上方. 根据题意，得 $-\frac{1}{8}\times 7^2+7b+4>3+\frac{61}{12}$，解得 $b>\frac{35}{24}$.

5. 解：(1) 根据题意，得点 $B(0,4)$，$C\left(3,\frac{17}{2}\right)$. 将点 B,C 的坐标代入抛物线的函数表达式，得 $\begin{cases}4=c,\\\frac{17}{2}=-\frac{1}{6}\times 3^2+3b+c,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=2,\\c=4.\end{cases}$

所以该抛物线的函数表达式为 $y=-\frac{1}{6}x^2+2x+4$. 因为 $y=-\frac{1}{6}x^2+2x+4=-\frac{1}{6}(x-6)^2+10$，所以点 $D(6,10)$，即拱顶 D 到地面 OA 的距离为 10 m.

(2) 能. 理由如下：

由题意可知，货运汽车最外侧与地面 OA 的交点为 $(2,0)$ 或 $(10,0)$，当 $x=2$ 或 $x=10$ 时，$y=\frac{22}{3}>6$，所以这辆货车能安全通过.

(3) 当 $y=8$ 时，$-\frac{1}{6}x^2+2x+4=8$，解得 $x_1=6+2\sqrt{3}$，$x_2=6-2\sqrt{3}$. 所以两排灯的水平距离最小是 $(6+2\sqrt{3})-(6-2\sqrt{3})=4\sqrt{3}$(m).

第 6 章 图形的相似

课时训练 13 图上距离与实际距离

【基础巩固】

1. C 2. A 3. A 4. D

5. 4 6. 240 000 m^2 7. $\frac{1}{3}$ 8. $2\sqrt{3}$

9. 15∶12∶10 10. $\frac{2}{3}$

11. 解：因为 $a:b:c=3:5:6$，所以可设 $a=$

$3k, b=5k, c=6k$. 因为 $2a+b-c=10$,所以 $2\times 3k+5k-6k=10$,解得 $k=2$. 所以 $a=6, b=10, c=12$. 所以 $5a-2b-3c=5\times 6-2\times 10-3\times 12=-26$.

12. 解:(1) 因为 b 是 a, c 的比例中项,所以 $a:b=b:c$,所以 $b^2=ac, b=\pm\sqrt{ac}$. 因为 $a=4, c=9$,所以 $b=\pm 6$.

(2) 因为线段 MN 是线段 AB, CD 的比例中项,所以 $AB:MN=MN:CD$,所以 $MN^2=AB\cdot CD$. 因为 $AB=4$ cm, $CD=5$ cm,所以 $MN^2=20$ cm^2,又因为线段 MN 的长不可能为负值,所以 $MN=2\sqrt{5}$ cm.

通过解答(1)(2)两小题发现,b,MN 同时作为比例中项出现,b 可以取负值,而 MN 不可以取负值.

【拓展提优】

1. D

2. A　**提示:**设原矩形 $ABCD$ 的长为 x,宽为 y,则第一次裁剪后所得矩形的长为 $\frac{1}{2}x$,宽为 $\frac{2}{3}y$,所以第二次裁剪后所得矩形的长为 $\left(\frac{1}{2}\right)^2x$,宽为 $\left(\frac{2}{3}\right)^2y$,所以第三次裁剪后所得矩形的长为 $\left(\frac{1}{2}\right)^3x$,宽为 $\left(\frac{2}{3}\right)^3y$,所以第四次裁剪后所得矩形的长为 $\left(\frac{1}{2}\right)^4x$,宽为 $\left(\frac{2}{3}\right)^4y$,所以第五次裁剪后所得矩形的长为 $\left(\frac{1}{2}\right)^5x$,宽为 $\left(\frac{2}{3}\right)^5y$. 因为第五次裁剪后所得图形恰好是正方形,所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^5x=\left(\frac{2}{3}\right)^5y$,所以 $\frac{x}{y}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^5}{\left(\frac{1}{2}\right)^5}=\frac{2^{10}}{3^5}$.

3. D　**提示:**设 $QY=x$,则 $XQ=1-x$. 因为 PQ 恰好将该图形分成两个面积相等的部分,所以 PQ 下方部分的面积为 $S_{三角形}+S_{正方形}=\frac{1}{2}\times 5\cdot(1+x)+1=5$,解得 $x=\frac{3}{5}$,所以 $QY=\frac{3}{5}$,则 $XQ=1-x=\frac{2}{5}$,所以 $\frac{XQ}{QY}=\frac{2}{3}$.

4. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $2\sqrt{3}$

5. -1 或 2　**提示:**因为 $\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=k$,所以 $a+b=kc, b+c=ka, c+a=kb$. 所以 $2(a+b+c)=k(a+b+c)$,所以 $(a+b+c)(2-k)=0$,所以 $a+b+c=0$ 或 $2-k=0$. 当 $a+b+c=0$ 时,$k=\frac{a+b}{c}=\frac{-c}{c}=-1$. 当 $2-k=0$ 时,$k=2$. 所以 k 的值为 -1 或 2.

6. 解:设上面尺子的刻度 16 在下面尺子对应的刻度是 x. 根据题意,得 $\frac{16-10}{x-10}=\frac{15-10}{18-10}$,解得 $x=19.6$,即上面尺子的刻度 16 在下面尺子上对应的刻度是 19.6.

7. 【定理应用】$\frac{1}{6}$　**提示:**因为 $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$,且 $\frac{BD}{EA}=2, \frac{CE}{FB}=3$,所以 $2\times 3\cdot\frac{AF}{DC}=1$,所以 $\frac{AF}{DC}=\frac{1}{6}$.

【方法领悟】2 026　**提示:**设 $S_{\triangle ABG}=a, S_{\triangle ACG}=b, S_{\triangle BCG}=c$,则 $\frac{AG}{GE}=\frac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle BEG}}=\frac{S_{\triangle ACG}}{S_{\triangle CEG}}=\frac{S_{\triangle ABG}+S_{\triangle ACG}}{S_{\triangle BEG}+S_{\triangle CEG}}=\frac{S_{\triangle ABG}+S_{\triangle ACG}}{S_{\triangle BCG}}=\frac{a+b}{c}$,同理可得 $\frac{BG}{GF}=\frac{a+c}{b}, \frac{CG}{DG}=\frac{b+c}{a}$. 因为 $\frac{AG}{GE}+\frac{BG}{GF}+\frac{CG}{GD}=2\ 024$,所以 $\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}=2\ 024$,所以 $\frac{AG}{GE}\cdot\frac{BG}{GF}\cdot\frac{CG}{GD}=\frac{a+b}{c}\cdot\frac{a+c}{b}\cdot\frac{b+c}{a}=\frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{abc}=\frac{a^2b+a^2c+abc+ac^2+ab^2+abc+b^2c+bc^2}{abc}=\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}+2=2\ 024+2=2\ 026$.

课时训练 14　黄金分割

【基础巩固】

1. D　**2.** D

3. $6-2\sqrt{5}$ 或 $2\sqrt{5}-2$　**4.** 0.618

5. C　**提示:**易知 $AC=AB-BC=2-(3-\sqrt{5})=$

$\sqrt{5}-1$, $BD=AB-AD=2-0.7=1.3$. 因为$\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,所以 C 是线段 AB 的黄金分割点. 因为 $\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{1.3}{2}=0.65\neq\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,且$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{0.7}{2}=0.35\neq\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,所以 D 不是线段 AB 的黄金分割点.

6. $34.38^\circ\sim55.62^\circ$

7. (1) **证明:**连接 OP. 因为 $OA=OP$,所以 $\angle PAO=\angle APO$. 由折叠的性质,得 $\angle PAO=\angle PAB$. 所以$\angle PAB=\angle APO$,所以 $AB/\!/OP$. 所以$\angle OPC=90^\circ$. 又因为点 P 在$\odot O$ 上,所以 BC 是$\odot O$ 的切线.

(2) **解:**F 是线段 BC 的黄金分割点. 理由如下:

在矩形 $ABCD$ 中,$BC=AD=4$, $AB=CD=2$,所以 $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$. 由折叠的性质,得 $AE=AB=2$,所以 $CF=CE=AC-AE=2\sqrt{5}-2$. 所以$\dfrac{CF}{BC}=\dfrac{2\sqrt{5}-2}{4}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,所以 F 是线段 BC 的黄金分割点.

【拓展提优】

1. A　**提示:**因为五边形 $ABCDE$ 为正五边形,所以 $AE=AB=2$, $\angle EAB=\angle ABC=\dfrac{180^\circ\times(5-2)}{5}=108^\circ$,所以 $\angle AEB=\angle ABE=36^\circ$,同理可得 $\angle CBD=36^\circ$,所以$\angle ABD=108^\circ-36^\circ=72^\circ$. 因为 $\angle EAB+\angle ABD=108^\circ+72^\circ=180^\circ$,所以 $AE/\!/BD$,同理可得 $EC/\!/AB$,所以四边形 $ABME$ 为平行四边形,所以 $EM=AB=2$, $BM=AE=2$,同理可得 $DN=2$. 因为 M, N 为 BD 的黄金分割点,所以 $BD=2\div\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=\sqrt{5}+1$,所以 $DM=BD-BM=\sqrt{5}-1$,所以 $MN=DN-DM=2-(\sqrt{5}-1)=3-\sqrt{5}$.

2. D　**提示:**因为 $c-a=x(b-a)$, $b-c=(b-a)-x(b-a)$, $\dfrac{b-a}{c-a}=\dfrac{c-a}{b-c}$,所以$[x(b-a)]^2=(b-a)^2-x(b-a)^2$. 因为 $b>a$,所以 $x^2+x-1=0$,解得 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. 又因为 $0<x<1$,所以 $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

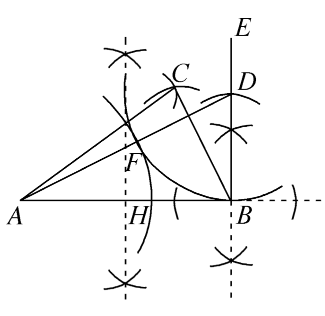
3. $S_1=S_2$

4. 8　**提示:**由条件可知,她下半身的长是 $160\times0.6=96$(cm). 设她应穿的高跟鞋的高度为 y cm,则根据题意,得$\dfrac{96+y}{160+y}=0.618$,解得 $y\approx8$.

5. $4\sqrt{3}+2\sqrt{5}-2$　**提示:**连接 AN. 由折叠,得 $AB=NB$, EF 垂直平分 AB,所以 $NA=NB$,所以 $AB=NA=NB$,所以$\triangle ABN$ 为等边三角形,所以 $\angle ABN=60^\circ$. 因为四边形 $ABCD$ 为矩形,所以 $\angle ABC=90^\circ$,所以$\angle GBH=\angle ABC-\angle NBA=90^\circ-60^\circ=30^\circ$. 因为 $ABCD$ 是矩形纸片,$GH\perp BC$,所以 $AB=GH=DC=4$,因为黄金矩形 $GHCD$ 以 DG 为宽,$GH=4$,所以$\dfrac{DG}{GH}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,所以 $DG=2\sqrt{5}-2=CH$,因为 $\angle GBH=30^\circ$,所以 $BG=2GH=8$. 由勾股定理,得 $BH=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$,所以 $BC=BH+HC=4\sqrt{3}+2\sqrt{5}-2$.

6. 2　**提示:**因为 P 是线段 AB 的黄金分割点,$AP>BP$,所以 $AP=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}AB=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\times2=\sqrt{5}-1$,所以 $PB=AB-AP=2-(\sqrt{5}-1)=3-\sqrt{5}$. 因为 $BQ=AP$,所以 $BQ=\sqrt{5}-1$. 因为 QP 平分$\angle AQB$,所以点 P 到边 AQ, BQ 的距离相等. 所以$\dfrac{S_{\triangle PAQ}}{S_{\triangle PBQ}}=\dfrac{AQ}{BQ}=\dfrac{AP}{PB}$. 所以 $AQ=\dfrac{AP\cdot BQ}{PB}=\dfrac{(\sqrt{5}-1)^2}{3-\sqrt{5}}=2$.

7. **解:**如图,$\triangle ABC$ 即为所求.　**提示:**①过点 B 作 $BE\perp AB$,在 BE 上截取 $BD=\dfrac{1}{2}AB$,连接 AD;②以点 D 为圆心,DB 的长为半径画弧交 AD 于点 F;③以点 A 为圆心,AF 的长为半径画弧交 AB 于点 H;④以点 B 为圆心,AH 的长为半径画弧,以点 A 为圆心,AB 的长为半径画弧,两弧相交于点 C;⑤连接 AC, BC,则$\triangle ABC$ 为所求作的三角形.



课时训练 15　相似图形

【基础巩固】

1. A　**2.** D　**3.** B

4. B　**提示**:在等腰直角三角形 ABC 中,因为 $AB=1,BC=\sqrt{2}$,所以 BC 为斜边. 在等腰直角三角形 $A'B'C'$ 中,因为 $B'C'-A'B'=2-\sqrt{2}>0$,所以 $B'C'$ 为斜边. 因为等腰直角三角形 ABC 相似于等腰直角三角形 $A'B'C'$,所以 $\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$,即 $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{A'B'}{B'C'}$. 设 $A'B'=x$,则 $B'C'=\sqrt{2}x$. 代入 $B'C'-A'B'=2-\sqrt{2}$,得 $\sqrt{2}x-x=2-\sqrt{2}$,解得 $x=\sqrt{2}$. 所以 $B'C'=2$.

5. A　**提示**:因为四边形 $AEFD$ 是正方形,所以 $AD=AE=EF=DF$. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形,所以 $AD=BC$. 因为矩形 $ABCD\backsim$矩形 $BCFE$,所以 $\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{CF}$,所以 $\frac{CD}{DF}=\frac{DF}{CF}$,所以 $DF^2=CF\cdot CD$,所以 F 是线段 CD 的黄金分割点,故①正确. 因为 $AB=\sqrt{2}BC$,所以可设 $BC=m,AB=\sqrt{2}m$. 因为矩形 $ABCD\backsim$矩形 $BCFE$,所以 $\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{CF}$,所以 $\sqrt{2}=\frac{m}{CF}$,所以 $CF=\frac{\sqrt{2}}{2}m$,所以 $DF=CD-CF=\sqrt{2}m-\frac{\sqrt{2}}{2}m=\frac{\sqrt{2}}{2}m$,所以 $\frac{EF}{BC}=\frac{DF}{CF}$,所以矩形 $EFDA$ 与矩形 $BCFE$ 的各边对应成比例. 又因为矩形 $EFDA$ 与矩形 $BCFE$ 的各角相等,所以矩形 $EFDA\backsim$矩形 $BCFE$,故②正确.

6. 8　**7.** $\frac{3}{2}$或 2　**8.** 90°

9. 解:(1) 因为$\triangle PCD$ 是等边三角形,所以$\angle PCD=60^\circ$,所以$\angle A+\angle APC=60^\circ$. 因为 $\triangle ACP\backsim\triangle PDB$,所以 $\angle APC=\angle PBD$. 所以 $\angle A+\angle B=60^\circ$,所以$\angle APB=120^\circ$.

(2) $CD^2=AC\cdot BD$. 理由如下:

因为$\triangle ACP\backsim\triangle PDB$,所以$\frac{AC}{PD}=\frac{PC}{BD}$,所以 $AC\cdot BD=PD\cdot PC$. 因为$\triangle PCD$ 是等边三角形,所以 $PC=PD=CD$. 所以 $CD^2=AC\cdot BD$.

【拓展提优】

1. B

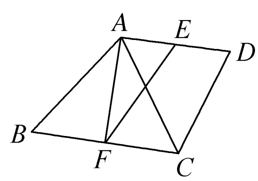
2. C　**提示**:设小正方形的边长为 a,大正方形的边长为 b,则 $AG=b,BG=b+a,BE=2b-a,CE=2b$,所以 $AB=2b+a,BC=2b+2b-a=4b-a$. 因为矩形 $BEFG\backsim$矩形 $ABCD$,所以$\frac{BG}{AD}=\frac{BE}{AB}$,即$\frac{b+a}{4b-a}=\frac{2b-a}{2b+a}$,所以 $b=\frac{3}{2}a$,所以 $BG=b+a=\frac{5}{2}a,AD=4b-a=5a,AB=2b+a=4a,FG=2b-a=2a$. 所以$\frac{S_{矩形BEFG}}{S_{矩形ABCD}}=\frac{BG\cdot FG}{AD\cdot AB}=\frac{\frac{5}{2}a\cdot 2a}{5a\cdot 4a}=\frac{1}{4}$.

3. D　**提示**:因为题中没有指明边长为 2 cm 的边与已知三边长的三角形的哪条边对应,所以应分情况讨论:①若边长为 2 cm 的边与已知三角形边长为 4 cm 的边相对应,则另外两边的长分别为$\frac{5}{2}$ cm 和 3 cm;②若边长为 2 cm 的边与已知三角形边长为 5 cm 的边相对应,则另外两边的长分别为$\frac{8}{5}$ cm 和 $\frac{12}{5}$ cm;③若边长为 2 cm 的边与已知三角形边长为 6 cm 的边相对应,则另外两边分别为 $\frac{4}{3}$ cm 和 $\frac{5}{3}$ cm. 所以选项 A,B,C 均有可能.

4. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$或 2　**提示**:由条件可知,当$\frac{AB}{AD}=\frac{DE}{\frac{1}{2}AB}$时,$\frac{AB}{AD}=\frac{AD-AB}{\frac{1}{2}AB}$,整理,得 $2AD^2-2AD\cdot AB-AB^2=0$,所以 $AD=\frac{1+\sqrt{3}}{2}AB$ 或 $AD=\frac{1-\sqrt{3}}{2}AB$(舍去),所以 $AD:AB=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$;当$\frac{AB}{AD}=\frac{\frac{1}{2}AB}{DE}$时,$\frac{AB}{AD}=\frac{\frac{1}{2}AB}{AD-AB}$,整理,得 $AD=2AB$,所以 $AD:AB=2$.

5. $\frac{\sqrt{41}}{4}$　**提示**:如图,因为 $AB=AC,AD=CD$,

$\triangle ABC\backsim\triangle DAC$，所以$\frac{AC}{DC}=\frac{BC}{AC}$，所以 $AC^2=BC\cdot DC$. 因为 $AC=\sqrt{3}$，$DC=\frac{3}{2}$，所以 $BC=2$. 因为 $\triangle ABC\backsim\triangle DAC$，$AD=CD$，所以 $\angle ACB=\angle DCA=\angle DAC$，所以 $CB/\!/AD$. 因为 $AB=AC$，F 为边 BC 的中点，所以 $AF\perp CB$，$BF=CF=1$，所以 $\angle AFB=90°$. 因为 $CB/\!/AD$，所以$\angle FAE=\angle AFB=90°$. 因为 $AC=\sqrt{3}$，所以 $AF=\sqrt{AC^2-CF^2}=\sqrt{2}$. 因为 $AD=\frac{3}{2}$，E 为边 AD 的中点，所以 $AE=DE=\frac{3}{4}$，所以 $EF=\sqrt{AF^2+AE^2}=\frac{\sqrt{41}}{4}$.



6. **解**：(1) $\frac{1}{2}$　$\frac{1}{4}$　$\frac{1}{6}$　$\frac{1}{8}$　$\frac{1}{9}$　$\frac{2}{3}$　$\frac{2}{5}$　$\frac{2}{7}$　$\frac{2}{9}$　$\frac{1}{5}$(答案不唯一)

(2) $>$

(3) **证法 1**　如图 1，由 $a<b$，得 $s+s_1>s+s_2$，即 $ab+bm>ab+am$，$b(a+m)>a(b+m)$，所以$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$.

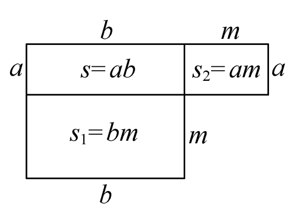


图 1

证法 2　如图 2，构造两个面积为 1 的长方形，将它们分成两部分，比较右侧的两个长方形面积可以发现：$1-\frac{a}{b}=\frac{b-a}{b}$，$1-\frac{a+m}{b+m}=\frac{b-a}{b+m}$. 因为 $a,b,m>0$，且 $a<b$，所以 $1-\frac{a}{b}=\frac{b-a}{b}>\frac{b-a}{b+m}=1-\frac{a+m}{b+m}$，故 $\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$.

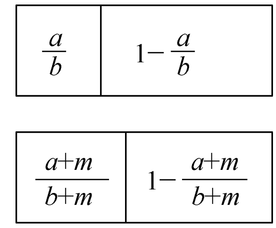


图 2

(4) 不相似. 理由如下：

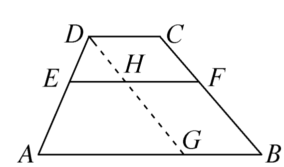
设铺过小路后的长方形的长、宽分别为 b，a，小路宽为$\frac{m}{2}$，则其宽长比为$\frac{a}{b}$. 易知原来长方形的宽长比为 $\frac{a+m}{b+m}$. 由(2)，知 $\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$，即两个长方形的长与宽的比值不相等，所以两个长方形不相似.

课时训练 16　探索三角形相似的条件(1)

【基础巩固】

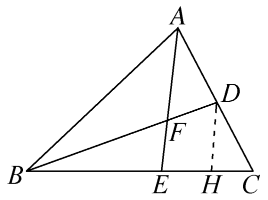
1. C　2. C　3. C

4. D　**提示**：如图，过点 D 作 $DG/\!/BC$ 交 AB 于点 G，交 EF 于点 H. 又因为 $AB/\!/CD/\!/EF$，所以四边形 $DCFH$、四边形 $DCBG$ 都是平行四边形，所以 $BG=FH=CD=3$，所以 $EH=EF-FH=2$，$AG=7$. 因为 $AB/\!/EF$，所以$\triangle DEH\backsim\triangle DAG$，所以 $DE:AD=EH:AG=2:7$. 因为 $AB/\!/CD/\!/EF$，所以 $DE:AD=CF:CB=2:7$，所以 $CF:FB=2:5$.



5. $2:1$　**提示**：因为 O 是线段 AG 的中点，所以 $AO=OG=\frac{1}{2}AG$. 因为 $DE/\!/BC$，$AD:DB=3:1$，所以$\frac{AD}{AB}=\frac{AH}{AG}=\frac{3}{1+3}=\frac{3}{4}$，$\frac{AD}{DB}=\frac{AH}{HG}=\frac{3}{1}$. 所以 $HG=\frac{1}{3}AH=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}AG=\frac{1}{4}AG$，所以 $OH=OG-HG=\frac{1}{4}AG$. 所以 $AO:OH=\left(\frac{1}{2}AG\right):\left(\frac{1}{4}AG\right)=2:1$.

6. $\frac{16}{5}$ **提示:**如图,过点 D 作 $DH//AE$,交 BC 于点 H,则 $\frac{CH}{HE}=\frac{CD}{DA}=1$,$\frac{BE}{EH}=\frac{BF}{FD}=3$,所以 $\frac{BE}{EC}=\frac{3}{2}$.因为 $BC=8$,所以 $CE=8\times\frac{2}{5}=\frac{16}{5}$.



7. (1) **证明:**延长 FP 交 CD 于点 G.因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $AB//CD$,$OA=OC$.因为 $AF//CG$,$AC//FG$,所以四边形 $AFGC$ 是平行四边形,所以 $AC=FG$.因为 $EP//AO$,所以 $\triangle DEP\backsim\triangle DAO$,所以 $\frac{PE}{OA}=\frac{DP}{DO}$.同理,可得 $\frac{PG}{OC}=\frac{DP}{DO}$.所以 $\frac{PE}{OA}=\frac{PG}{OC}$.因为 $OA=OC$,所以 $PE=PG$.又因为 $FG=PG+PF$,所以 $AC=PE+PF$.

(2) **解:**①如图 1,若点 P 在 BD 的延长线上,则与(1)同理可得 $AC=PF-PE$.

②如图 2,若点 P 在 DB 的延长线上,则与(1)同理可得 $AC=PE-PF$.

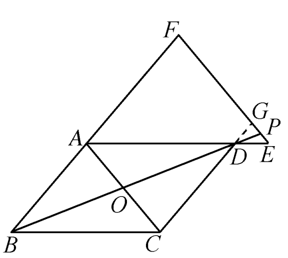


图 1

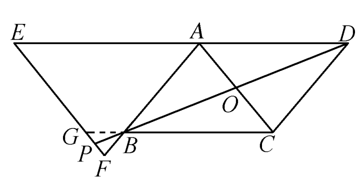
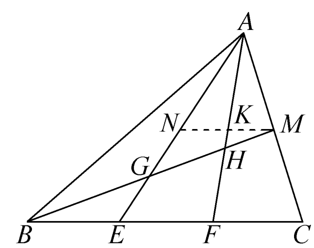


图 2

【拓展提优】

1. C **提示:**方法 1,因为 $AC//BD$,$BD=2AC$,所以 $\frac{AP}{BP}=\frac{AC}{BD}=\frac{1}{2}$,所以点 P 把线段 AB 分成 $1:2$ 的两条线段.方法 2,在题图中,连接 BC,AD.因为 $BC//AD$,$AD=2BC$,所以 $\frac{BP}{AP}=\frac{BC}{AD}=\frac{1}{2}$,所以点 P 把线段 AB 分成 $1:2$ 的两条线段.综上所述,方法 1,2 都对.

2. $5:3:2$ **提示:**如图,过点 M 作 $MN//BC$,分别交 AF,AE 于点 K,N.因为 M 是 AC 的中点,所以 $\frac{MN}{EC}=\frac{NK}{EF}=\frac{AN}{AE}=\frac{AM}{AC}=\frac{1}{2}$.因为 E,F 为 BC 的三等分点,所以 $BE=EF=FC$,所以 $MN=2NK$.易得 $\frac{MH}{BH}=\frac{MK}{BF}=\frac{1}{4}$,$\frac{MG}{BG}=\frac{MN}{BE}=1$,所以 $MH=\frac{1}{4}BH$,$MG=BG$.设 $MH=a$,则 $BH=4a$,$BG=GM=\frac{5}{2}a$,所以 $GH=GM-MH=\frac{3}{2}a$,所以 $BG:GH:HM=\frac{5}{2}a:\frac{3}{2}a:a=5:3:2$.



3. $\frac{3}{8}$ **提示:**设 $DE=2a$,则 $CE=3a$,所以 $AB=CD=5a$.因为四边形 $ABCD$ 是矩形,所以 $CD//AB$,所以 $\triangle CEF\backsim\triangle ABF$,所以 $\frac{CF}{AF}=\frac{CE}{AB}=\frac{3a}{5a}=\frac{3}{5}$,所以 $\frac{CF}{CA}=\frac{3}{8}$.因为 $FG\perp BC$,$AB\perp BC$,所以 $FG//AB$,所以 $\triangle CFG\backsim\triangle CAB$,所以 $\frac{FG}{AB}=\frac{CF}{CA}=\frac{3}{8}$.

4. **解:**(1) $AB=3EH$ $CG=2EH$ $\frac{3}{2}$

提示:因为 $EH//AB$,所以 $\triangle ABF\backsim\triangle EHF$.所以 $\frac{AB}{EH}=\frac{AF}{EF}=3$,所以 $AB=3EH$.因为 $EH//CD$,所以 $\triangle BCG\backsim\triangle BEH$.因为 E 是边 BC 的中点,所以 $\frac{CG}{EH}=\frac{BC}{BE}=2$,所以 $CG=2EH$.又因为 $CD=AB$,所以 $\frac{CD}{CG}=\frac{3EH}{2EH}=\frac{3}{2}$.

(2) 过点 E 作 $EH//AB$,交 BG 于点 H,由(1),得 $CD=AB=mEH$,$CG=2EH$,

所以$\dfrac{CD}{CG}=\dfrac{m}{2}$.

课时训练 17　探索三角形相似的条件(2)

【基础巩固】

1. A　**2.** C

3. B　**提示:**易证$\triangle ABC$是直角三角形,过点P作三边的垂线(其中有一条P是垂足),所截三角形均符合题意,所以有3条.

4. B　**提示:**在$Rt\triangle ABC$中,因为$\angle ACB=90^\circ$,$BC=3$,$AC=4$,所以$AB=\sqrt{BC^2+AC^2}=5$.因为DE垂直平分AB,所以$AD=BD=\dfrac{5}{2}$.易证$\triangle ABC\backsim\triangle EBD$,所以$\dfrac{AB}{EB}=\dfrac{BC}{BD}$,即$\dfrac{5}{3+CE}=\dfrac{3}{\frac{5}{2}}$,所以$CE=\dfrac{7}{6}$.

5. $\dfrac{25}{2}$　**提示:**因为四边形$ABCD$是平行四边形,所以$BC=AD$,$\angle B=\angle D$.因为$\angle AFE=\angle B$,所以$\angle AFE=\angle D$.又因为$\angle EAF=\angle FAD$,所以$\triangle AEF\backsim\triangle AFD$,所以$\dfrac{AE}{AF}=\dfrac{AF}{AD}$,所以$\dfrac{8}{10}=\dfrac{10}{AD}$,解得$AD=\dfrac{25}{2}$,所以$BC=\dfrac{25}{2}$.

6. $\dfrac{15}{7}$或$\dfrac{3}{5}\sqrt{13}$

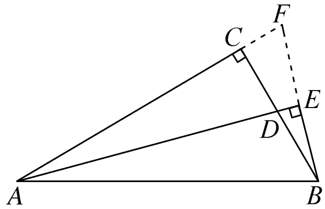
7. $\dfrac{15}{2}$　**提示:**沿AD方向平移EF得到$E'F'$(点E'在边AD上,点F'在边BC上),则四边形$EFF'E'$是平行四边形,所以EF的长为恒定值.故本题有两种解法:一是设EF交BD于点O,利用三角形相似解决,即$\triangle DOE\backsim\triangle DAB$,此时可设$OE=3x$,则$OD=4x$.同理,可设$OB=4y$,$OF=3y$.因为$BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=10$,所以$OD+OB=4x+4y=10$,所以$EF=OE+OF=3x+3y=\dfrac{15}{2}$;二是特殊位置法,如$EF$垂直平分$BD$,或点$E$与点$A$重合等.

8. (1) **证明:**连接AO并延长交$\odot O$于点E,连接BE,则$\angle ABE=90^\circ$,所以$\angle EAB+\angle E=90^\circ$.因为$AD$是$\odot O$的切线,所以$\angle DAE=90^\circ$,所以$\angle EAB+\angle BAD=90^\circ$.所以$\angle E=\angle BAD$.在$\odot O$中,易得$\angle C=\angle E$,所以$\angle C=\angle BAD$.

(2) **解:**因为$BD\perp AB$,所以$\angle ABD=90^\circ$.由(1)可知$\angle ABE=90^\circ$,所以$\angle ABE+\angle ABD=180^\circ$,即$\angle DBE=180^\circ$,所以$D$,$B$,$E$三点共线.因为$AD=9$,$BD=6$,所以$AB=\sqrt{AD^2-BD^2}=3\sqrt{5}$.因为$\angle E=\angle BAD$,$\angle D=\angle D$,所以$\triangle ADE\backsim\triangle BDA$,所以$\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{AE}{BA}$,即$\dfrac{9}{6}=\dfrac{AE}{3\sqrt{5}}$,所以$AE=\dfrac{9\sqrt{5}}{2}$.所以$\odot O$的半径为$\dfrac{9\sqrt{5}}{4}$.

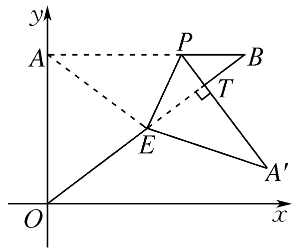
【拓展提优】

1. A　**提示:**如图,延长AC与BE相交于点F.因为AD平分$\angle FAB$,所以$\angle FAD=\angle BAD$.因为$BE\perp AE$,所以$\angle AEF=\angle AEB=90^\circ$.在$\triangle AEF$和$\triangle AEB$中,$\begin{cases}\angle FAD=\angle BAD,\\ AE=AE,\\ \angle AEF=\angle AEB,\end{cases}$所以$\triangle AEF\cong\triangle AEB$,所以$EF=BE$,所以$BF=2BE$.因为$\angle ACB=90^\circ$,所以$\angle FCB=90^\circ$.所以$\angle ACB=\angle FCB$,$\angle CAD+\angle F=90^\circ$,$\angle CBF+\angle F=90^\circ$.所以$\angle CAD=\angle CBF$.又因为$\angle ACB=\angle FCB$,所以$\triangle ACD\backsim\triangle BCF$,所以$AD:BF=AC:BC$.在$\triangle ABC$中,$\angle ACB=90^\circ$,$\angle CAB=30^\circ$,所以$AC:BC=\sqrt{3}$.所以$AD:BF=\sqrt{3}$.所以$AD:2BE=\sqrt{3}$,所以$AD:BE=2\sqrt{3}$.



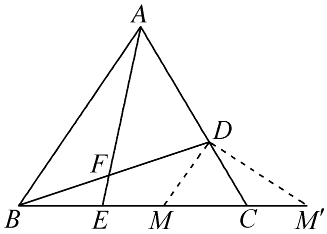
2. A　**提示:**如图,设PA'交OB于点T.因为$\angle OAB=90^\circ$,$OE=EB$,所以$EA=EO=EB=5$,所以$\angle EAB=\angle B$.由翻折的性质,可知$A'E=$

$AE=5$，$\angle EAB=\angle A'$，所以$\angle A'=\angle B$. 因为$A'P\perp OB$，所以$\angle ETA'=\angle BAO=90^\circ$，所以$\triangle A'TE\backsim\triangle BAO$，$\triangle AOB\backsim\triangle TPB$. 所以$\dfrac{A'E}{OB}=\dfrac{ET}{AO}$，$\dfrac{BT}{PB}=\dfrac{AB}{OB}$，即$\dfrac{5}{10}=\dfrac{ET}{6}$，所以$ET=3$，$BT=5-3=2$. 因为$\dfrac{BT}{PB}=\dfrac{AB}{OB}$，即$\dfrac{2}{PB}=\dfrac{8}{10}$，所以$PB=2.5$，所以$AP=AB-PB=8-2.5=5.5$，所以点$P(5.5,6)$.



3. 3　**提示：**在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle ABC=90^\circ$，$AB=3$，$BC=4$，则$AC=5$. 过点P作$PQ\perp AB$，$PR\perp BC$，垂足分别为Q，R. 因为$\angle PQB=\angle QBR=\angle BRP=90^\circ$，所以四边形$PQBR$是矩形，所以$\angle QPR=90^\circ$，即$\angle QPE+\angle MPR=90^\circ$. 因为$\angle MPN=90^\circ$，所以$\angle MPR+\angle RPF=90^\circ$. 所以$\angle QPE=\angle RPF$. 所以$\triangle QPE\backsim\triangle RPF$，所以$\dfrac{PQ}{PR}=\dfrac{PE}{PF}=2$，所以$PQ=2PR=2BQ$. 易知$PQ/\!/BC$，所以$\triangle AQP\backsim\triangle ABC$，所以$\dfrac{AQ}{AB}=\dfrac{AP}{AC}=\dfrac{PQ}{CB}$，即$\dfrac{AQ}{3}=\dfrac{AP}{5}=\dfrac{PQ}{4}$. 可设$AQ=3x$，则$AP=5x$，$PQ=4x(x\neq 0)$，所以$BQ=2x$. 因为$AQ+BQ=3$，所以$3x+2x=3$，解得$x=\dfrac{3}{5}$. 所以$AP=5x=3$.

4. 4或7　**提示：**因为$\triangle ABC$是等边三角形，所以$AB=BC=6$，$\angle ABC=60^\circ=\angle AFD$，所以$\angle ABD+\angle DBC=\angle ABD+\angle BAE$，所以$\angle BAE=\angle DBC$. 如图，分情况讨论：①当点$M$在边$BC$上时，作$\angle BDM=\angle ABD$，易知$\triangle ABF\backsim\triangle BDM$，$\angle DMC=\angle DBC+\angle BDM=\angle ABD+\angle DBC=\angle ABC=60^\circ$，所以$\angle DMC=\angle DCM=60^\circ$，所以$\triangle DMC$是等边三角形，所以$DC=DM=CM=2$，所以$BM=4$. ②当点$M'$在$BC$的延长线上时，作$\angle CDM'=\angle BAE$. 因为$\angle ACB=\angle CDM'+\angle M'=60^\circ$，$\angle AFD=\angle ABD+\angle BAE=60^\circ$，所以$\angle M'=\angle ABD$，所以$\triangle ABF\backsim\triangle BM'D$. 因为$\angle CDM'=\angle CBD$，$\angle BDM=\angle M'$，所以$\triangle BDM\backsim\triangle DM'C$，所以$\dfrac{CD}{MB}=\dfrac{CM'}{MD}$，即$\dfrac{2}{4}=\dfrac{CM'}{2}$，所以$CM'=1$，所以$BM'=7$. 综上所述，$BM$的长为4或7.



5. $6.4<AP<8.4$　**提示：**过点P作$PD/\!/BC$交AC于点D或$PE/\!/AC$交BC于点E，则$\triangle APD\backsim\triangle ABC$或$\triangle BPE\backsim\triangle BAC$，此时$0<AP<10$；过点$P$作$\angle AFP=\angle B$交$AC$于点$F$，则$\triangle APF\backsim\triangle ACB$，当点$F$与点$C$重合时，$AC^2=AP\cdot AB$，所以$AP=6.4$，此时$0<AP\leqslant 6.4$；过点$P$作$\angle BGP=\angle A$交$BC$于点$G$，则$\triangle BGP\backsim\triangle BAC$，当点$G$与点$C$重合时，$BC^2=BP\cdot AB$，所以$BP=1.6$，所以$AP=8.4$，此时$8.4\leqslant AP<10$. 因为只有2种不同的剪法，所以$AP$长的取值范围是$6.4<AP<8.4$.

6. **解：**(1) 5或$\dfrac{14}{5}$　**提示：**因为$\angle ACB=90^\circ$，$BC=6$，$AC=8$，所以$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=10$. 因为CD是$\triangle DCB$的腰，所以$CD=BD$或$CD=BC$. 当$CD=BD$时，过点D作$DH\perp BC$于点H，则$BH=CH=3$，$DH/\!/AC$，所以$\triangle ABC\backsim\triangle DBH$. 所以$\dfrac{BD}{BA}=\dfrac{BH}{BC}$，即$\dfrac{BD}{10}=\dfrac{3}{6}$，所以$BD=5$. 所以$AD=AB-BD=5$. 当$CD=BC$时，过点$C$作$CM\perp AB$于点$M$，则$BM=DM$，$\angle CMB=90^\circ$. 易证$\triangle ABC\backsim\triangle CBM$，所以$\dfrac{AB}{CB}=\dfrac{BC}{BM}$，所以$BM=\dfrac{BC^2}{AB}=\dfrac{18}{5}$. 所以$BD=\dfrac{36}{5}$. 所以$AD=AB-BD=\dfrac{14}{5}$. 综上所述，$AD$的长为5或$\dfrac{14}{5}$.

(2) 设$AE=x$，则$CE=8-x$. 因为$\angle AED=\angle C=90^\circ$，$\angle A=\angle A$，所以

$\triangle AED \backsim \triangle ACB$，所以 $\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$，所以 $DE=\frac{3}{4}x$. 因为 $\angle C=\angle CBF=\angle CEF=90^\circ$，所以四边形 $CBFE$ 是矩形，所以 $BF=CE=8-x$，$EF=BC=6$，所以 $DF=6-\frac{3}{4}x$. 因为 $S_{\triangle AED}=\frac{1}{2}AE \cdot DE=\frac{3}{8}x^2$，$S_{\triangle BFD}=\frac{1}{2}BF \cdot DF=\frac{3}{8}x^2-6x+24$，且 $S_{\triangle BFD}-S_{\triangle AED}=6$，所以 $\frac{3}{8}x^2-6x+24-\frac{3}{8}x^2=6$，解得 $x=3$. 所以 $AE=3$.

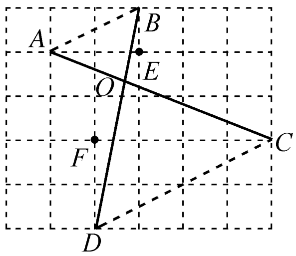
课时训练 18　探索三角形相似的条件(3)

【基础巩固】

1. B　**提示：**因为 $\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{CE}=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{1}{3}$. 又因为 $\angle DAE=\angle BAC$，所以 $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$，所以 $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{1}{3}$. 因为 $BC=5$，所以 $DE=\frac{5}{3}$.

2. C

3. $\frac{2\sqrt{26}}{3}$　**提示：**如图，连接 AB，CD，取格点 E，F. 则 $\triangle ABE$，$\triangle CDF$ 都是直角三角形，且 $BE=1$，$AE=2$，$DF=2$，$CF=4$，所以 $\frac{BE}{AE}=\frac{DF}{CF}=\frac{1}{2}$. 因为 $\angle AEB=\angle CFD=90^\circ$，所以 $\triangle ABE \backsim \triangle CDF$，所以 $\angle BAE=\angle DCF$. 因为 $AE /\!/ CF$，所以 $\angle EAC=\angle FCA$，所以 $\angle BAE+\angle EAC=\angle DCF+\angle FCA$，即 $\angle BAC=\angle DCA$，所以 $AB /\!/ CD$，所以 $\triangle ABO \backsim \triangle CDO$，所以 $\frac{BO}{DO}=\frac{AB}{CD}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，由勾股定理，得 $AB=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle CDF$ 中，由勾股定理，得 $CD=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$. 同理可得 $BD=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$. 设 $DO=x$，则 $BO=BD-DO=\sqrt{26}-x$，所以 $\frac{\sqrt{26}-x}{x}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$，解得 $x=\frac{2\sqrt{26}}{3}$，所以 $DO=\frac{2\sqrt{26}}{3}$.



4. $\frac{2}{3}$　**提示：**因为 $\angle DAO=\angle CBO$，$\angle AOD=\angle BOC$，所以 $\triangle AOD \backsim \triangle BOC$，所以 $\frac{AO}{BO}=\frac{OD}{OC}=\frac{AD}{BC}$. 因为 $AO=2$，$AD=4$，$OC=6$，$BC=8$，所以 $\frac{2}{BO}=\frac{OD}{6}=\frac{4}{8}$，所以 $OB=4$，$OD=3$，所以 $\frac{OA}{OD}=\frac{OB}{OC}=\frac{2}{3}$. 又因为 $\angle AOB=\angle DOC$，所以 $\triangle AOB \backsim \triangle DOC$，所以 $\frac{AB}{CD}=\frac{OA}{OD}=\frac{2}{3}$.

5. 10　**提示：**因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $BC=CD=DA$，$\angle C=\angle D=90^\circ$. 因为 Q 是 CD 的中点，所以 $QD=CQ=\frac{1}{2}CD$. 因为 $BC=4PC$，即 $PC=\frac{1}{4}BC$，所以 $\frac{PC}{QD}=\frac{1}{2}$. 因为 $\frac{CQ}{DA}=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{PC}{QD}=\frac{CQ}{DA}$. 又因为 $\angle D=\angle C$，所以 $\triangle ADQ \backsim \triangle QCP$，所以 $\frac{AQ}{QP}=\frac{AD}{QC}=2$，即 $\frac{AQ}{5}=2$，所以 $AQ=10$.

6. **解：**(1) D 是 $\triangle ABC$ 的“理想点”. 理由如下：

因为 D 是边 AB 的中点，$AB=2$，所以 $AD=BD=1$. 因为 $AC=\sqrt{2}$，所以 $\frac{AC}{AD}=\frac{AB}{AC}$. 因为 $\angle A=\angle A$，所以 $\triangle ACD \backsim \triangle ABC$，所以 $\angle ACD=\angle B$. 所以 D 是 $\triangle ABC$ 的“理想点”.

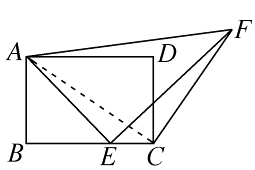
(2) ①当点 D 在边 AB 上时，因为 D 是 $\triangle ABC$ 的“理想点”，所以 $\angle ACD=\angle B$ 或 $\angle BCD=\angle A$. 若 $\angle ACD=\angle B$，因为 $\angle ACD+\angle BCD=90^\circ$，所以 $\angle BCD+\angle B=90^\circ$，所以 $\angle CDB=90^\circ$，即 CD 是边

AB 上的高；若$\angle BCD=\angle A$，则同理可证$\angle CDB=90°$，即 CD 是边 AB 上的高. 在 $Rt\triangle ABC$ 中，因为 $AB=5$，$AC=4$，所以 $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=3$. 因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}AC\cdot BC$，所以 $CD=\frac{12}{5}$. ②因为 $AC=4$，$BC=3$，所以 $AC>BC$，所以$\angle B>\angle A$，所以"理想点"D 不可能在边 BC 上. ③当点 D 在边 AC 上时，因为 D 是$\triangle ABC$ 的"理想点"，所以$\angle DBC=\angle A$. 又因为$\angle C=\angle C$，所以$\triangle BDC\backsim\triangle ABC$，所以$\frac{DC}{BC}=\frac{BC}{AC}$，即$\frac{CD}{3}=\frac{3}{4}$，所以 $CD=\frac{9}{4}$. 综上所述，CD 的长为$\frac{12}{5}$或$\frac{9}{4}$.

【拓展提优】

1. C

2. B **提示：**如图，连接 AC. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以$\angle B=90°$. 因为$\frac{AF}{AE}=\sqrt{3}$，所以可设 $AE=a$，$AF=\sqrt{3}a$. 因为$\angle AEF=90°$，所以 $EF=\sqrt{2}a$. 所以$\frac{EF}{AE}=\sqrt{2}$. 因为$\frac{AD}{AB}=\sqrt{2}$，所以$\frac{BC}{AB}=\frac{EF}{AE}$. 又因为$\angle B=\angle AEF=90°$，所以$\triangle ABC\backsim\triangle AEF$，所以$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$，$\angle BAC=\angle EAF$，所以$\angle BAE=\angle CAF$，所以$\triangle ABE\backsim\triangle ACF$，所以$\frac{CF}{BE}=\frac{AC}{AB}$. 设 $AB=b$，$BC=\sqrt{2}b$. 因为$\angle B=90$，所以 $AC=\sqrt{3}b$，所以$\frac{CF}{BE}=\sqrt{3}$.



3. $(0,-3)$或$(0,27)$或$(0,-27)$

4. $\frac{4}{3}$ **提示：**连接 DE. 由条件，得$\frac{CD}{CB}=\frac{CE}{CA}=\frac{2}{3}$. 因为$\angle C=\angle C$，所以$\triangle CDE\backsim\triangle CBA$. 所以$\frac{DE}{AB}=\frac{2}{3}$，$\angle CED=\angle CAB$，所以 $DE\parallel BA$，所以$\triangle DEF\backsim\triangle ABF$，所以$\frac{EF}{BF}=\frac{DE}{AB}=\frac{2}{3}$，所以 $EF=\frac{2}{5}BE$，所以 $S_{\triangle AFE}=\frac{2}{5}S_{\triangle ABE}$. 因为$\frac{CE}{CA}=\frac{2}{3}$，所以 $AE=\frac{1}{3}AC$，所以 $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$，所以 $S_{\triangle AFE}=\frac{2}{15}S_{\triangle ABC}$，所以当$\triangle ABC$ 的面积取最大值时，$\triangle AFE$ 的面积最大. 过点 A 作 $AH\perp BC$，则 $AH\leqslant AB$，所以 $S_{\triangle ABC}\leqslant\frac{1}{2}AB\cdot BC=10$，所以 $S_{\triangle AFE}=\frac{2}{15}S_{\triangle ABC}\leqslant\frac{4}{3}$，即$\triangle AFE$ 面积的最大值是$\frac{4}{3}$.

5. 证明：(1) 因为$\odot O$ 为 $Rt\triangle ABC$ 的外接圆，所以 O 为斜边 AB 的中点，AB 为$\odot O$的直径. 因为$\angle ACB=90°$，所以$\angle ABC+\angle BAC=90°$. 因为$\angle DAE=\angle ABC$，所以$\angle DAE+\angle BAC=90°$，所以$\angle BAD=90°$，即 $AB\perp AD$，所以 AD 是$\odot O$ 的切线.
(2) 延长 DO 交 BC 于点 H，连接 OC. 因为 $DE\perp AC$，所以$\angle DEA=90°$. 由旋转的性质，得 $AD=AB$. 在$\triangle DEA$ 和$\triangle ACB$ 中，因为$\begin{cases}\angle DEA=\angle ACB,\\ \angle DAE=\angle ABC,\\ DA=AB,\end{cases}$所以$\triangle DEA\cong\triangle ACB$，所以 $AE=BC=2$，$AC=DE=1$，所以 $AD=AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{5}$. 因为 O 为 AB 的中点，所以 $AO=\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{5}}{2}$，所以$\frac{AO}{ED}=\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{DA}{AE}$. 因为$\angle DAO=\angle AED=90°$，所以$\triangle DAO\backsim\triangle AED$，所以$\angle ADO=\angle EAD$，所以 $DO\parallel EA$，所以$\angle OHB=\angle ACB=90°$，即 $DH\perp BC$. 因为 $OB=OC$，所以 OH 平分$\angle BOC$，即$\angle BOH=\frac{1}{2}\angle BOC$. 因为$\angle FOG=\angle BOH$，$\angle BFG=\frac{1}{2}\angle BOC$，所以$\angle FOG=\angle BFG$. 又因为$\angle FGO=\angle BGF$，所以$\triangle FGO\backsim\triangle BGF$，所以$\frac{FG}{BG}=\frac{GO}{GF}$，所以 $FG^2=GO\cdot GB$.

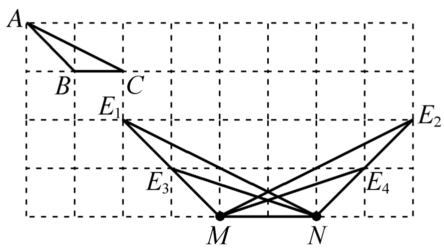
课时训练 19　探索三角形相似的条件(4)

【基础巩固】

1. A　**2.** B　**3.** B

4. (1) 12.5　15　(2) 12　8

5. 4　**提示:** 如图,符合条件的三角形共有 4 个.



6. ②③

7. (1) **证明:** 因为 $\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE}$,所以 $\triangle ABC\backsim\triangle ADE$,所以 $\angle BAC=\angle DAE$,所以 $\angle BAC-\angle DAF=\angle DAE-\angle DAF$,即 $\angle BAD=\angle CAE$.

(2) **解:** 由(1),得 $\triangle ABC\backsim\triangle ADE$,所以 $\angle ABC=\angle ADE$. 因为 $\angle ABC=\angle ABE+\angle EBC$,$\angle ADE=\angle ABE+\angle BAD$,所以 $\angle EBC=\angle BAD=21°$.

(3) **证明:** 由(1),得 $\angle BAD=\angle CAE$. 又因为 $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$,所以 $\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}$,所以 $\triangle ABD\backsim\triangle ACE$.

【拓展提优】

1. B　**提示:** 由题意可知,120 cm 长的木条必须要截出两段且 60 cm 不能作为所做三角形木架的最短边. 设所截出的较短的一段长为 x cm,较长的一段长为 y cm. 根据题意,得 $\frac{75}{x}=\frac{100}{y}=\frac{120}{60}$ 或 $\frac{75}{x}=\frac{100}{60}=\frac{120}{y}$,解得 $x=37.5$,$y=50$ 或 $x=45$,$y=72$. 因为 $x+y\leqslant 120$,所以两种结果都符合题意. 所以不同的截法有 2 种.

2. D　**提示:** 如图 1～图 4,分别是以 BC,AB,AC 为对角线的情况;如图 5,是以 BD 为对角线的情形;当以 AD 或 CD 为对角线时,不存在满足题意的格点 D. 根据"三边成比例的两个三角形相似"可知图中两个三角形都相似,所以符合条件的格点 D 有 5 个.

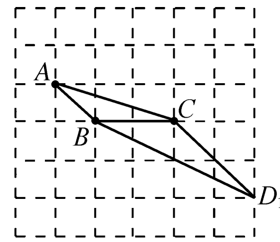


图 1

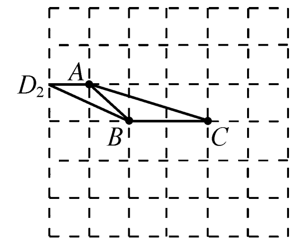


图 2

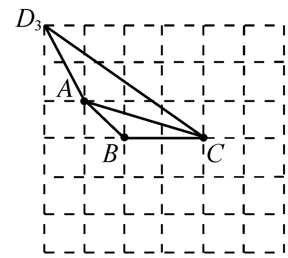


图 3

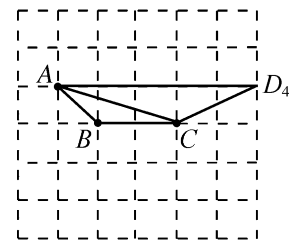


图 4

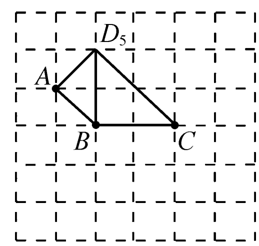
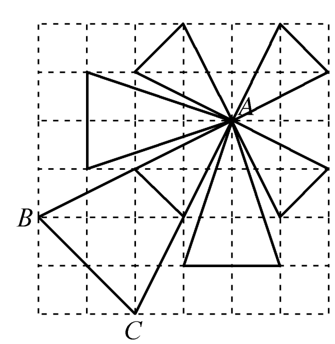


图 5

3. 35°

4. 6　**提示:** 如图,符合条件的格点三角形一共有 6 个.



5. **解:** (1) $\frac{CD}{C'D'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{AD}{A'D'}$　$\angle A=\angle A'$

(2) 相似. 理由如下:

分别过点 D,D' 作 $DE\parallel BC$,$D'E'\parallel B'C'$,DE 交 AC 于点 E,$D'E'$ 交 $A'C'$ 于点 E'. 因为 $DE\parallel BC$,所以 $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$. 所以 $\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}$. 同理,可得 $\frac{A'D'}{A'B'}=\frac{D'E'}{B'C'}=\frac{A'E'}{A'C'}$. 因为 $\frac{AD}{AB}=\frac{A'D'}{A'B'}$,所以 $\frac{DE}{BC}=$

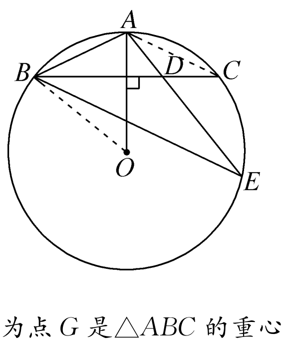
$\dfrac{D'E'}{B'C'}$,所以$\dfrac{DE}{D'E'}=\dfrac{BC}{B'C'}$. 同理,可得$\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{A'E'}{A'C'}$. 所以 $\dfrac{AC-AE}{AC}=\dfrac{A'C'-A'E'}{A'C'}$,即 $\dfrac{EC}{AC}=\dfrac{E'C'}{A'C'}$,所以 $\dfrac{EC}{E'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}$. 又因为 $\dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'}$,所以$\dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{DE}{D'E'}=\dfrac{EC}{E'C'}$. 所以 $\triangle DCE \backsim \triangle D'C'E'$,所以 $\angle CED=\angle C'E'D'$. 因为 $DE /\!/ BC$,所以 $\angle CED+\angle ACB=180°$. 同理,可得 $\angle C'E'D'+\angle A'C'B'=180°$. 所以$\angle ACB=\angle A'C'B'$. 又因为$\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'}$,所以$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

课时训练 20　探索三角形相似的条件(5)

【基础巩固】

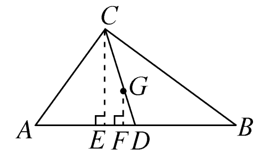
1. A

2. C　**提示:**如图,连接 AC. 因为 OA 是$\odot O$ 的半径,弦 $BC \perp OA$,所以 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$,所以$\angle ABD=\angle C$. 可知$\angle E=\angle C$,所以$\angle ABD=\angle E$. 因为$\angle DAB=\angle BAE$,所以$\triangle DAB \backsim \triangle BAE$,所以$\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{AD}{AB}$,所以 $AB^2=AD \cdot AE$. 因为 $AD=1$,$ED=2$,所以 $AB^2=1\times 3=3$,所以 $AB=\sqrt{3}$ 或 $AB=-\sqrt{3}$(不符合题意,舍去). 连接 OB,则 $OA=OB$. 又可知 $\angle AOB=2\angle E=60°$,所以$\triangle AOB$ 是等边三角形,所以 $OA=AB=\sqrt{3}$,即$\odot O$ 的半径是$\sqrt{3}$.



3. 24　**提示:**因为点 G 是$\triangle ABC$ 的重心,所以 $AG : DG=2:1$,所以 $S_{\triangle ACG}=2S_{\triangle DGC}=8$. 所以 $S_{\triangle ACD}=12$. 因为 AD 是边 BC 上的中线,所以 $S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle ACD}=2\times 12=24$.

4. $\dfrac{8}{5}$　**提示:**如图,由条件,得 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=10$. 分别过点 C,G 作 $CE \perp AB$ 于点 E,$GF \perp AB$ 于点 F,则 $GF /\!/ CE$. 因为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB \cdot CE=\dfrac{1}{2}AC \cdot BC$,所以 $CE=\dfrac{AC \cdot BC}{AB}=\dfrac{24}{5}$. 因为 $GF /\!/ CE$,所以$\triangle DGF \backsim \triangle DCE$. 又因为点 G 是$\triangle ABC$ 的重心,所以$\dfrac{GF}{CE}=\dfrac{GD}{CD}=\dfrac{1}{3}$,所以 $GF=\dfrac{1}{3}CE=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{24}{5}=\dfrac{8}{5}$.



5. $\dfrac{21}{5}$　**提示:**因为 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AB}$,所以$\angle ADB=\angle BCA$. 因为 BD 平分$\angle ADC$,所以$\angle ADB=\angle CDB$,所以$\angle BCA=\angle CDB$. 又因为$\angle CBE=\angle DBC$,所以$\triangle CBE \backsim \triangle DBC$,所以 $\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{BE}{BC}$. 因为 $BD=5$,$BC=2$,所以$\dfrac{2}{5}=\dfrac{BE}{2}$,所以 $BE=\dfrac{4}{5}$,所以 $DE=BD-BE=5-\dfrac{4}{5}=\dfrac{21}{5}$.

6. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　**提示:**因为点 O 是$\triangle ABC$ 的重心,所以 $AE=EB$,所以 $OC=\dfrac{2}{3}CE$. 又因为$\triangle ABC$ 是直角三角形,所以 $CE=BE=AE$. 因为$\angle B=30°$,$EF \perp AB$,所以$\angle FAE=\angle B=30°$,可知$\angle BAC=60°$. 所以$\angle FAE=\angle CAF=30°$,$\triangle ACE$ 是等边三角形. 所以 $AM \perp CE$,$CM=\dfrac{1}{2}CE$,所以 $OM=\dfrac{2}{3}CE-\dfrac{1}{2}CE=\dfrac{1}{6}CE$,即 $OM=\dfrac{1}{6}AE$. 因为 $BE=AE$,$\angle EAF=30°$,所以 $EF=\dfrac{\sqrt{3}}{3}AE$. 因为 $EF \perp AB$,所以$\angle AFE=60°$,所以$\angle FEM=30°$,所以 $MF=\dfrac{1}{2}EF$,所以 $MF=\dfrac{\sqrt{3}}{6}AE$. 所以$\dfrac{MO}{MF}=\dfrac{\frac{1}{6}AE}{\frac{\sqrt{3}}{6}AE}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

7. **解:**(1) 线段 AG 是$\triangle ADE$ 的高. 理由如下:

因为$\angle CAB=90°$,AF 为边 BC 上的中线,

所以 $AF=\frac{1}{2}BC=CF$，所以 $\angle C=\angle FAC$.

因为 $\angle ADE=\angle C$，所以 $\angle ADE=\angle FAC$.

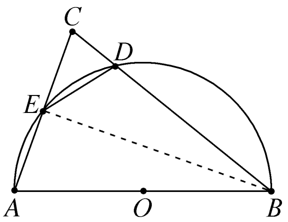
因为 $\angle FAC+\angle DAG=90^\circ$，所以 $\angle DAG+\angle ADE=90^\circ$，所以 $\angle AGD=90^\circ$，所以线段 AG 是 $\triangle ADE$ 的高.

(2) 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，因为 $AB=6$，$AC=8$，所以 $BC=\sqrt{AC^2+AB^2}=10$. 因为 AF 为边 BC 上的中线，所以 $AF=5$. 因为 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，所以 $AG=\frac{2}{3}AF=\frac{10}{3}$. 因为 $\angle ADE=\angle C$，$\angle AGD=\angle CAB=90^\circ$，所以 $\triangle ADG\backsim\triangle BCA$，所以 $\frac{AD}{BC}=\frac{AG}{BA}$，即 $\frac{AD}{10}=\frac{\frac{10}{3}}{6}$，所以 $AD=\frac{50}{9}$.

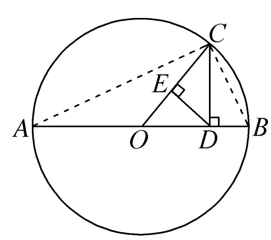
【拓展提优】

1. C　**提示：**连接 AP 并延长交 BC 于点 G. 因为点 P 是 $\triangle ABC$ 的重心，所以 AG 是 $\triangle ABC$ 的中线，且 $\frac{AP}{PG}=2$，所以 $S_{\triangle ABG}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a$. 因为 $PD\parallel BC$，所以 $\frac{AD}{BD}=\frac{AP}{PG}=2$. 连接 BP，则 $\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle BPG}}=2$，所以 $S_{\triangle ABP}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}a=\frac{1}{3}a$. 因为 $\frac{AD}{BD}=2$，所以 $\frac{S_{\triangle ADP}}{S_{\triangle BDP}}=2$，所以 $S_{\triangle BDP}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}a=\frac{1}{9}a$. 因为 $DP\parallel BC$，$PE\parallel AB$，所以四边形 $BEPD$ 是平行四边形，所以 $S_{\text{四边形}BEPD}=2S_{\triangle BDP}=\frac{2}{9}a$.

2. 9　**提示：**如图，连接 BE. 因为 $AE=ED$，所以 $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{ED}$，所以 $\angle ABE=\angle DBE$. 因为 AB 是直径，所以 $\angle AEB=90^\circ$，所以 $\angle CEB=90^\circ$，所以 $\angle AEB=\angle CEB$. 又因为 $\angle ABE=\angle DBE$，$BE=BE$，所以 $\triangle ABE\cong\triangle CBE$，所以 $AE=CE$，$AB=BC$. 因为 $AE=3$，所以 $CE=3$，所以 $AC=6$. 因为四边形 $ABDE$ 是圆内接四边形，所以 $\angle A+\angle BDE=180^\circ$，又因为 $\angle CDE+\angle BDE=180^\circ$，所以 $\angle CDE=\angle A$. 又因为 $\angle C=\angle C$，所以 $\triangle CDE\backsim\triangle CAB$，所以 $\frac{CD}{CA}=\frac{CE}{CB}$，即 $CD\cdot CB=CA\cdot CE$. 设 $AB=BC=x$. 因为 $BD=7$，所以 $CD=x-7$. 所以 $(x-7)\cdot x=6\times3$，解得 $x_1=9$，$x_2=-2$(舍去)，所以 $AB=9$.



3. 30　**提示：**如图，连接 AC，BC. 因为 AB 是 $\odot O$ 的直径，所以 $\angle ACB=90^\circ$. 因为 $CD\perp AB$，所以 $\angle CDA=\angle CDB=90^\circ$，所以 $\angle ACD=\angle B=90^\circ-\angle BCD$，所以 $\triangle ACD\backsim\triangle CBD$，所以 $\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{BD}$，所以 $CD^2=AD\cdot BD$. 易知 $\angle DEC=90^\circ=\angle CDO$，又因为 $\angle DCE=\angle OCD$，所以 $\triangle DCE\backsim\triangle OCD$，所以 $\frac{CE}{CD}=\frac{CD}{OC}$，所以 $CD^2=CE\cdot OC$. 所以 $AD\cdot BD=CE\cdot OC$. 设 $AD=a$，$BD=b$，则 $a>b$，$OC=\frac{1}{2}AB=\frac{a+b}{2}$. 所以 $ab=10\times\frac{a+b}{2}$，所以 $ab-5a-5b=0$，所以 $ab-5a-5b+25=25$，所以 $(a-5)(b-5)=25$. 因为 $a>b$，所以 $a-5>b-5>0$. 因为 $25=1\times25=5\times5$，所以 $a-5=25$，所以 $AD=a=30$.



4. $(-1,-2)$ 或 $(1,2)$　**提示：**由条件可知，点 $M(-2,1)$. 连接 BM 并延长交 x 轴于点 D，连接 OM. 若 OM 绕点 O 逆时针旋转 90° 得到 OM_1，则 $OM_1=OM$，过点 M_1 作 $M_1F\perp OD$ 于点 F，则 $\angle MOD+\angle FOM_1=90^\circ$，因为 $OB=BC$，所以 $BM\perp CO$，所以 $\angle MOD+\angle DMO=90^\circ$，所以 $\angle FOM_1=\angle DMO$，又因为 $\angle OFM_1=\angle MDO$，$OM_1=OM$，所以 $\triangle OFM_1\cong\triangle MDO$，所以 $OF=MD=1$，$FM_1=DO=2$，则点 M_1 的坐标为 $(-1,-2)$；若 OM 绕点 O 顺时针旋转 90° 得到 OM_2，则点 M_2 与点 M_1 关于原点成中心对称，所以点 M_2 的坐标为 $(1,2)$. 综上所述，旋转后三角形的重心坐标为 $(-1,-2)$ 或 $(1,2)$.

5. **解：**(1) 2

(2) 根据题意可设 $OE=a$，$OD=b$，则

$BO=2a$，$AO=2b$. 由条件，得 $AE=CE=\frac{1}{2}AC=2$，$BD=CD=\frac{1}{2}BC=\frac{3}{2}$. 在 Rt△$AOE$ 中，由勾股定理，得 $AO^2+OE^2=AE^2$，即 $4b^2+a^2=4$. 在 Rt△OBD 中，由勾股定理，得 $BO^2+OD^2=BD^2$，即 $4a^2+b^2=\frac{9}{4}$. 所以 $5a^2+5b^2=\frac{25}{4}$，所以 $a^2+b^2=\frac{5}{4}$. 在 Rt△OBA 中，由勾股定理，得 $AB^2=BO^2+AO^2=4a^2+4b^2=4(a^2+b^2)=4\times\frac{5}{4}=5$. 所以 $AB=\sqrt{5}$.

课时训练 21　相似三角形的性质(1)

【基础巩固】

1. C　2. D

3. B　提示：因为 $DE/\!/AC$，所以 $\triangle DOE\backsim\triangle COA$，$\triangle DBE\backsim\triangle ABC$. 因为 $S_{\triangle DOE}:S_{\triangle COA}=4:49$，所以 $\frac{DE}{AC}=\frac{2}{7}$，所以 $\frac{DE}{AC}=\frac{BE}{BC}=\frac{2}{7}$，所以 $\frac{BE}{EC}=\frac{2}{5}$，所以 $\frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle CDE}}=\frac{2}{5}$.

4. $\frac{11}{13}$　提示：因为△ABC 是等边三角形，所以 $\angle A=\angle B=\angle C=60^\circ$，$AB=AC=BC=8$. 由折叠，可知 $\angle EDF=\angle C=60^\circ$，$EC=ED$，$FC=FD$. 易得 $\angle AED=\angle BDF$，所以 $\triangle AED\backsim\triangle BDF$，所以 $\frac{DF}{DE}=\frac{BD+DF+BF}{AE+AD+DE}=\frac{13}{11}$，所以 $\frac{CE}{CF}=\frac{DE}{DF}=\frac{11}{13}$.

5. 196

6. $\frac{3}{2}$　提示：因为 $\angle ACB=90^\circ$，所以 $\angle B+\angle BAD=90^\circ$. 因为 $FE\perp AB$，所以 $\angle D+\angle BAD=90^\circ$. 所以 $\angle B=\angle D$. 因为 $\angle AED=\angle FEB=90^\circ$，所以 $\triangle ADE\backsim\triangle FBE$，所以 $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle FBE}}=\left(\frac{AE}{FE}\right)^2=\left(\frac{DE}{BE}\right)^2$. 因为 $S_{\triangle ADE}=9S_{\triangle BEF}$，所以 $\frac{AE}{FE}=\frac{DE}{BE}=3$. 因为 $AE=6$，所以 $FE=2$. 设 $BE=x$，则 $DE=3x$，$DF=DE-FE=3x-2$，$AB=AE+BE=6+x$. 因为 $S_{\triangle ADF}=\frac{1}{2}DF\cdot AE$，$S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}AB\cdot EF$，且 $S_{\triangle ADF}=S_{\triangle ABF}$，所以 $DF\cdot AE=AB\cdot EF$，即 $6(3x-2)=2(6+x)$，解得 $x=\frac{3}{2}$. 所以 $BE=\frac{3}{2}$.

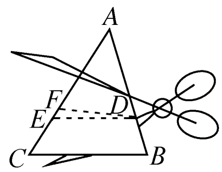
7. **证明**：(1) 因为 $\angle ACD=\angle BCA$，$\angle CAD=\angle B$，所以 $\triangle ACD\backsim\triangle BCA$，所以 $\frac{AC}{BC}=\frac{CD}{CA}$，所以 $AC^2=CD\cdot BC$. 因为 $CF\cdot CE=CD\cdot BC$，所以 $AC^2=CF\cdot CE$，所以 $\frac{AC}{EC}=\frac{CF}{CA}$. 又因为 $\angle ACF=\angle ECA$，所以 $\triangle ACF\backsim\triangle ECA$.
(2) 因为 $\angle CAD=\angle B$，所以 $180^\circ-\angle CAD-\angle ACB=180^\circ-\angle B-\angle ACB$，即 $\angle ADC=\angle EAC$. 因为 CE 平分 $\angle ACB$，所以 $\angle ACE=\angle DCH$，所以 $\triangle ACE\backsim\triangle DCH$，所以 $\frac{S_{\triangle CDH}}{S_{\triangle CAE}}=\left(\frac{CD}{AC}\right)^2=\frac{CD^2}{AC^2}$. 由(1)，得 $AC^2=CD\cdot BC$，所以 $\frac{S_{\triangle CDH}}{S_{\triangle CAE}}=\frac{CD^2}{CD\cdot BC}=\frac{CD}{BC}$.

【拓展提优】

1. C　提示：连接 CD，交 MN 于点 E. 因为将△ABC 沿直线 MN 翻折后，顶点 C 恰好落在边 AB 上的点 D 处，所以 $MN\perp CD$，且 $CE=DE$. 所以 $CD=2CE$. 因为 $MN/\!/AB$，所以 $CD\perp AB$，$\triangle CMN\backsim\triangle CAB$，所以 $\frac{S_{\triangle CMN}}{S_{\triangle CAB}}=\left(\frac{CE}{CD}\right)^2=\frac{1}{4}$. 在 Rt△$CMN$ 中，因为 $MC=6$，$NC=2\sqrt{3}$，所以 $S_{\triangle CMN}=\frac{1}{2}CM\cdot CN=6\sqrt{3}$. 所以 $S_{\triangle CAB}=4S_{\triangle CMN}=24\sqrt{3}$，所以 $S_{四边形MABN}=S_{\triangle CAB}-S_{\triangle CMN}=18\sqrt{3}$.

2. C　提示：如图，过点 D 作 $DF/\!/BC$ 交 AC 于点 F. 因为 $AD=2DB$，所以 $\frac{AD}{AB}=\frac{2}{3}$. 因为 $DF/\!/BC$，所以 $\triangle AFD\backsim\triangle ACB$，所以 $\frac{AF}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{2}{3}$，所以 $\frac{S_{\triangle AFD}}{S_{\triangle ACB}}=\left(\frac{AD}{AB}\right)^2=\frac{4}{9}$. 设 $S_{\triangle AFD}=4x$，$S_{\triangle ACB}=9x$. 因为沿 DE 将△ABC 剪成面积相等的两部分，所以 $S_{\triangle ADE}=\frac{9}{2}x$，所以 $\frac{S_{\triangle AFD}}{S_{\triangle ADE}}=\frac{4x}{\frac{9}{2}x}=\frac{8}{9}=\frac{AF}{AE}$，所以

$\frac{AE}{AF}=\frac{9}{8}$. 又因为$\frac{AF}{AC}=\frac{2}{3}$，所以$\frac{AE}{AC}=\frac{AE}{AF}\cdot\frac{AF}{AC}=\frac{9}{8}\cdot\frac{2}{3}=\frac{3}{4}$，所以$\frac{AE}{EC}=3$.



3. $\frac{5}{18}$　**提示：**因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以所以 $AB/\!/CD$，$AD/\!/BC$，所以$\angle DAG=\angle AGB$. 因为 AG 平分$\angle BAD$，所以$\angle BAG=\angle DAG$. 所以$\angle BAG=\angle AGB$，所以 $AB=BG$. 因为 $AB:AD=2:3$，所以可设 $AB=2x$，$AD=3x$，则 $AB=CD=BG=2x$，$AD=BC=3x$，所以 $GC=x$. 因为 $AB/\!/CD$，所以$\triangle CEG\backsim\triangle BAG$，所以$\frac{S_{\triangle CEG}}{S_{\triangle BAG}}=\left(\frac{x}{2x}\right)^2=\frac{1}{4}$，所以 $S_{\triangle BAG}=4S_{\triangle CEG}$. 因为 $AD/\!/BC$，所以$\triangle ADF\backsim\triangle GBF$，所以$\frac{BF}{DF}=\frac{BG}{AD}=\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$，所以$\frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle BFG}}=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$，$\frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle ABF}}=\frac{3}{2}$，所以 $S_{\triangle ABF}=\frac{2}{3}S_{\triangle ADF}$，$S_{\triangle BFG}=\frac{4}{9}S_{\triangle ADF}$，所以 $S_{\triangle BAG}=S_{\triangle ABF}+S_{\triangle BFG}=\frac{10}{9}S_{\triangle ADF}$. 所以 $4S_{\triangle CEG}=\frac{10}{9}S_{\triangle ADF}$，所以$\frac{S_{\triangle CEG}}{S_{\triangle ADF}}=\frac{5}{18}$，即$\frac{S_2}{S_1}=\frac{5}{18}$.

4. $3\sqrt{2}\leqslant AB\leqslant 6\sqrt{2}$且 $AB\neq 6$　**提示：**如图 1，当$\triangle APQ\backsim\triangle ABC$ 时，则$\frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{AP}{AB}\right)^2=\frac{1}{2}$，所以只要满足$\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，就能满足题意. 如图 2，当$\triangle APQ\backsim\triangle ACB$ 时，因为直线 PQ 把$\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分，所以 $S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，所以$\frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{AP}{AC}\right)^2=\frac{1}{2}$，所以$\frac{AP}{AC}=\frac{AQ}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $AP=\frac{\sqrt{2}}{2}AC=3\sqrt{2}$，$AQ=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$. 因为 $AP\leqslant AB$，$AQ\leqslant AC$，所以 $AB\geqslant 3\sqrt{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}AB\leqslant 6$，所以 $3\sqrt{2}\leqslant AB\leqslant 6\sqrt{2}$. 当 $AB=6=AC$ 时，图 2 与图 1 重合，此时只有一种情况，所以 $AB\neq 6$. 综上所述，$3\sqrt{2}\leqslant AB\leqslant 6\sqrt{2}$且 $AB\neq 6$.

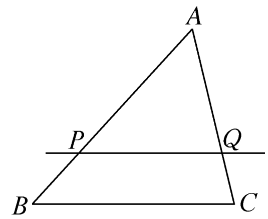


图 1

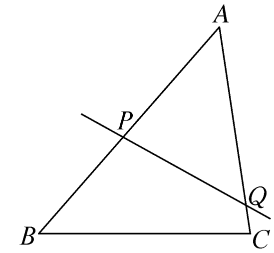
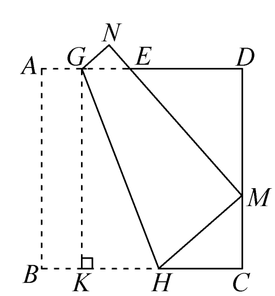


图 2

5. (1) ① 45°　② $\frac{10}{3}$　$2\sqrt{10}$　**提示：**因为$\angle NMH=\angle D=\angle C=90^\circ$，所以$\angle DME+\angle DEM=\angle DME+\angle CMH=90^\circ$，所以$\angle DEM=\angle CMH$，所以$\triangle DEM\backsim\triangle CMH$，所以$\frac{DE}{CM}=\frac{DM}{CH}$. 因为 $AD=CD=BC=6$，E 为 AD 的中点，$CM=2$，所以 $DE=3$，$DM=4$，所以$\frac{3}{2}=\frac{4}{CH}$，解得 $CH=\frac{8}{3}$，所以 $BH=BC-CH=\frac{10}{3}$. 易知 $EM=\sqrt{DE^2+DM^2}=5$. 由折叠的性质，得 $MN=AB=6$，$AG=NG$. 因为 $NE=MN-EM=1$，$NG^2+NE^2=GE^2$，所以 $NG^2+1^2=(3-NG)^2$，解得 $NG=\frac{4}{3}$，所以 $AG=\frac{4}{3}$. 如图，过点 G 作 $GK\perp BC$ 于点 K，则 $GK=AB=6$，$BK=AG=\frac{4}{3}$，所以 $KH=BH-BK=2$，所以 $GH=\sqrt{GK^2+KH^2}=2\sqrt{10}$.



(2) **解：**因为 $CM=x$，所以 $DM=6-x$. 设 $CH=y$，则 $BH=6-y$. 由折叠的性质，得 $HM=BH=6-y$. 在 Rt$\triangle CHM$ 中，$CH^2+CM^2=HM^2$，所以 $y^2+x^2=(6-y)^2$，所以 $y=\frac{36-x^2}{12}$，即 $CH=\frac{36-x^2}{12}$，所以 $HM=BH=6-\frac{36-x^2}{12}=$

$\frac{36+x^2}{12}$. 因为$\angle NMH=\angle D=\angle C=90°$，所以$\angle DME+\angle DEM=\angle DME+\angle CMH=90°$，所以$\angle DEM=\angle CMH$，所以$\triangle DEM\backsim\triangle CMH$，所以$\frac{DE}{CM}=\frac{DM}{CH}$，所以$\frac{DE}{x}=\frac{6-x}{\frac{36-x^2}{12}}$，所以$DE=\frac{12x}{6+x}$. 设$AG=z$，则$GN=z$，$EG=AD-DE-AG=6-\frac{12x}{6+x}-z$. 因为$\angle N=\angle C$，$\angle GEN=\angle DEM=\angle CMH$，所以$\triangle EGN\backsim\triangle MHC$，所以$\frac{GN}{HC}=\frac{EG}{MH}$，即$\frac{z}{\frac{36-x^2}{12}}=\frac{6-\frac{12x}{6+x}-z}{\frac{36+x^2}{12}}$，解得$z=\frac{(6-x)^2}{12}$，即$AG=\frac{(6-x)^2}{12}$. 所以$S=\frac{1}{2}AB\cdot(AG+BH)=\frac{1}{2}\times6\cdot\left[\frac{(6-x)^2}{12}+\frac{36+x^2}{12}\right]=\frac{1}{2}x^2-3x+18=\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{27}{2}$，所以$S$的最小值为$\frac{27}{2}$.

课时训练 22　相似三角形的性质(2)

【基础巩固】

1. A
2. B　**提示**：由平移，得$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle A'B'C'}=30$，$A'E/\!/AB$，$A'F/\!/AC$. 所以$S_{\triangle A'EF}=30-20=10$. 易知$\frac{ED}{BD}=\frac{A'E}{AB}$，$\angle B=\angle A'EF$，$\angle C=\angle A'FE$，所以$\triangle A'EF\backsim\triangle ABC$. 可知$AD$，$A'D$分别为$\triangle ABC$，$\triangle A'EF$的对应线段，所以$\frac{S_{\triangle A'EF}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{A'D}{AD}\right)^2$，所以$\frac{10}{30}=\left(\frac{A'D}{6}\right)^2$，所以$A'D=2\sqrt{3}$，所以$\triangle ABC$平移的距离$AA'$的长为$AD-A'D=6-2\sqrt{3}$.
3. B　**提示**：设正方形$EFGH$的边长$EF=EH=x$. 因为四边形$EFGH$是正方形，所以$\angle HEF=\angle EHG=90°$，$EF/\!/BC$，所以$\triangle AEF\backsim\triangle ABC$. 因为$AD$是$\triangle ABC$的高，所以$\angle HDN=90°$，所以四边形$EHDN$是矩形，所以$DN=EH=x$. 因为$\triangle AEF\backsim\triangle ABC$，所以$\frac{AN}{AD}=\frac{EF}{BC}$. 因为$AD=60$，所以$AN=60-x$，所以$\frac{60-x}{60}=\frac{x}{120}$，解得$x=40$. 所以$AN=60-40=20$.
4. A　**提示**：因为点A，B，C的坐标分别是$(1,1)$，$(1,5)$，$(5,1)$，所以$AB=AC=4$，$\angle BAC=90°$，即$\triangle ABC$为等腰直角三角形. 因为以C，D，E为顶点的三角形与$\triangle ABC$相似，所以$\triangle CDE$为等腰直角三角形. 当$CD=CE=2$或$CD=DE=2$时，如图1，点$E_1(5,3)$，$E_2(7,3)$，$E_3(5,-1)$，$E_4(7,-1)$. 当$CE=DE$时，过点E作$EF\perp CD$于点F，如图2. 因为$CE=DE$，$EF\perp CD$，所以F为CD的中点，所以$CF=1$. 因为$\angle CED=90°$，所以$EF=\frac{1}{2}CD=1$，所以点$E_5(6,2)$，$E_6(6,0)$. 综上所述，点E的坐标可能是$(5,3)$，$(7,3)$，$(5,-1)$，$(7,-1)$，$(6,2)$，$(6,0)$，所以点E的坐标不可能是$(7,-2)$.

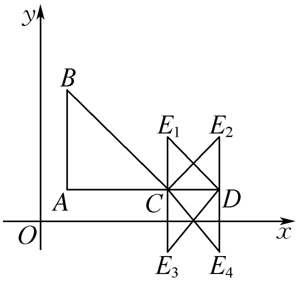


图 1

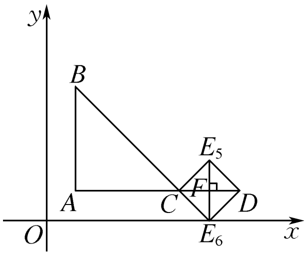
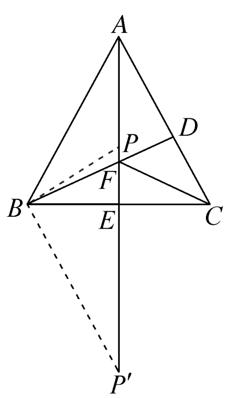


图 2

5. 4或$\frac{9}{4}$
6. 3　**提示**：设每个小正方形的边长均为x，边BC上的高为h，则由题图可知，存在两组相似三角形，即$\frac{h-2x}{h}=\frac{2x}{12}$，$\frac{h-x}{h}=\frac{3x}{12}$，解得$x=3$. 所以每个小正方形的边长均为3.
7. $\frac{5}{4}\sqrt{5}$或$4\sqrt{5}$　**提示**：因为$AB=AC=5$，该三角形的两条高BD与AE相交于点F，所以$\angle ADB=\angle BEF=90°$，$\angle BAF=\angle DAF$，$BE=CE$，所以$\angle FBE=\angle FCE$. 因为$\angle AFD=\angle BFE$，$\angle AFD+\angle DAF=\angle BFE+\angle FBE=90°$，所以$\angle DAF=$

$\angle FBE$,所以$\angle BAF=\angle DAF=\angle FCE=\angle FBE$.易得 $BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=4$,设 $BF=CF=x$,在 Rt$\triangle CDF$ 中,$CD=AC-AD=2$,$DF=BD-BF=4-x$,所以 $x^2=(4-x)^2+2^2$,解得 $x=\frac{5}{2}$,即 $BF=\frac{5}{2}$.又因为 $BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=2\sqrt{5}$,如图,分以下两种情况:① 当 $\angle PAB=\angle PBA$ 时,$\triangle APB\backsim\triangle BFC$,所以$\frac{AP}{BF}=\frac{AB}{BC}$,即$\frac{AP}{\frac{5}{2}}=\frac{5}{2\sqrt{5}}$,解得 $AP=\frac{5\sqrt{5}}{4}$;②当$\angle AP'B=\angle BAE$ 时,$\triangle ABP'\backsim\triangle BFC$,所以$\frac{AP'}{BC}=\frac{AB}{BF}$,即$\frac{AP'}{2\sqrt{5}}=\frac{5}{\frac{5}{2}}$,解得 $AP'=4\sqrt{5}$.综上所述,AP 的长为$\frac{5}{4}\sqrt{5}$或 $4\sqrt{5}$.



8. 解:(1) 如图 1,直线 AD 即为所求.

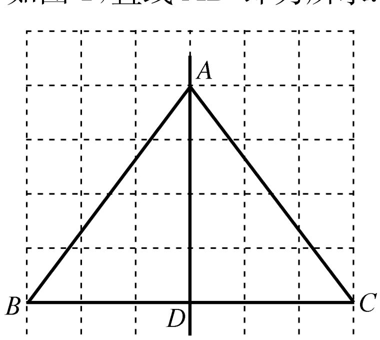


图 1

(2) 如图 2,直线 BE 即为所求. **提示:**取格点 M,N,连接 MN,与 AC 的交点为 E,连接 BE 即可.理由如下:易知 $AM/\!/CN$,$AN/\!/CM$,$\angle AMC=90°$,所以四边形 $AMCN$ 是矩形,所以 E 是边 AC 上的中点,BE 是 $\triangle ABC$ 的中线,所以 $S_{\triangle ABE}=S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$,所以直线 BE 即为所求.

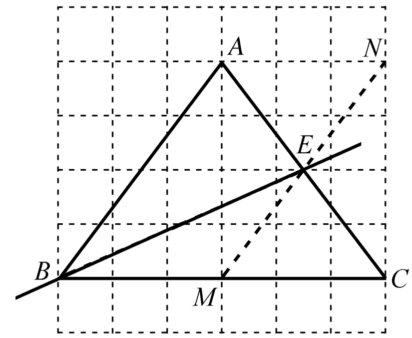


图 2

(3) 有以下两种情况:①如图 3,直线 CF 即为所求.②如图 4,直线 CF 即为所求.

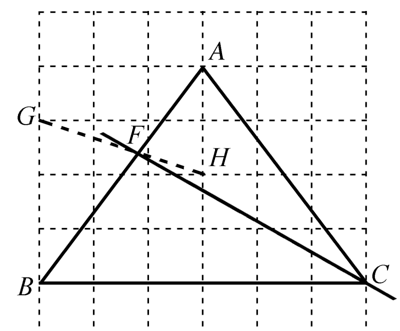


图 3

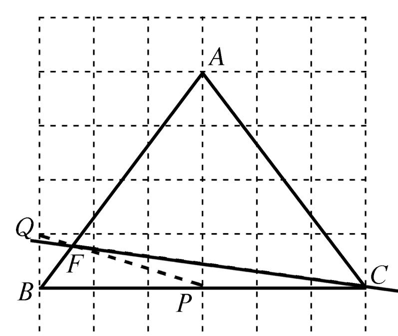


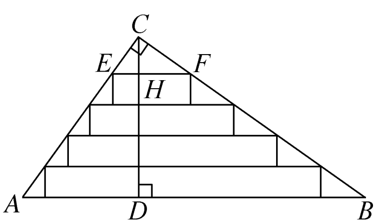
图 4

提示:易知$\triangle ABC$ 的周长为 16,将$\triangle ABC$ 周长分成 7∶9 两部分,则一部分的长为$\frac{7}{7+9}\times16=7$,另一部分的长为 $\frac{9}{7+9}\times16=9$.则分以下两种情况:①如图 3,$AF=7-AC=2$,$BF=AB-AF=3$.取格点 G,H,连接 HG,与 AB 交于点 F,连接 CF 即可.理由如下:易知 $AH/\!/BG$,$AH=2$,$BG=3$,所以$\frac{AF}{BF}=\frac{AH}{BG}=\frac{2}{3}$.因为 $AB=5$,所以 $AF=\frac{2}{5}AB=2$,$BF=\frac{3}{5}AB=3$,所以点 F 符合要求,直线 CF 即为所求.②如图 4,$AF=9-AC=4$,$BF=AB-AF=1$.取格点 P,Q,连接 PQ,与 AB 交于点 F,连接 CF 即可.理由如下:易知 $AP/\!/BQ$,$AP=4$,$BQ=1$,所以$\frac{AF}{BF}=\frac{AP}{BQ}=4$.因为 $AB=5$,所以 $AF=\frac{4}{5}AB=$

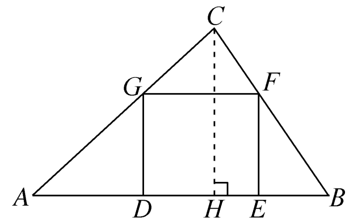
$4, BF=\frac{1}{5}AB=1$，所以点 F 符合要求，直线 CF 即为所求.

【拓展提优】

1. B　**提示：**如图，因为 $\angle ACB=90^\circ$，所以 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=25$ cm. 因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CD$，即 $\frac{1}{2}\times15\times20=\frac{1}{2}\cdot CD\cdot25$，所以 $CD=12$ cm. 因为将斜边 AB 上的高 CD 分成 5 等份，所以 $CH=\frac{12}{5}$ cm. 因为 $EF/\!/AB$，所以 $\triangle CEF\backsim\triangle CAB$，所以 $\frac{EF}{AB}=\frac{CH}{CD}$，所以 $\frac{EF}{25}=\frac{\frac{12}{5}}{12}$，所以 $EF=5$ cm. 所以从上往下数，第一个矩形的长为 5 cm. 同理可得从上往下数，第二个、第三个、第四个矩形的长分别为 10 cm，15 cm，20 cm. 又因为所有矩形的宽都为 $\frac{12}{5}$ cm，所以 4 张纸条的面积和为 $(5+10+15+20)\times\frac{12}{5}=120(\text{cm}^2)$.



2. D　**提示：**如图，过点 C 作 $CH\perp AB$ 于点 H. 设 $AH=x$，则 $BH=AB-AH=6-x$. 因为 $CH^2=AC^2-AH^2=BC^2-BH^2$，所以 $5^2-x^2=4^2-(6-x)^2$，所以 $x=\frac{15}{4}$，所以 $AH=\frac{15}{4}$，所以 $BH=AB-AH=\frac{9}{4}$. 由勾股定理，得 $CH=\sqrt{AC^2-AH^2}=\frac{5\sqrt{7}}{4}$. 因为四边形 $DEFG$ 是矩形，所以 $\angle GDE=90^\circ$，$DG=EF$，所以 $GD\perp AB$，所以 $GD/\!/CH$，所以 $\triangle AGD\backsim\triangle ACH$，所以 $GD:AD=CH:AH=\sqrt{7}:3$，所以 $GD=\frac{\sqrt{7}}{3}a$. 同理 $\triangle BFE\backsim\triangle BCH$，所以 $EF:EB=CH:BH=5\sqrt{7}:9$，所以 $EF=\frac{5\sqrt{7}}{9}b$. 所以 $\frac{\sqrt{7}}{3}a=\frac{5\sqrt{7}}{9}b$，所以 $\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$.



3. B　**提示：**如图 1，过点 P 作 $PD/\!/AB$ 交 BC 于点 D 或作 $PE/\!/BC$ 交 AB 于点 E，则 $\triangle PCD\backsim\triangle ACB$ 或 $\triangle APE\backsim\triangle ACB$，此时 $0<AP<4$；如图 2，过点 P 作 $\angle APF=\angle B$ 交 AB 于点 F，则 $\triangle APF\backsim\triangle ABC$，此时 $0<AP\leqslant4$；如图 3，过点 P 作 $\angle CPG=\angle CBA$ 交 BC 于点 G，则 $\triangle CPG\backsim\triangle CBA$，当点 G 与点 B 重合时，$CB^2=CP\cdot CA$，即 $2^2=4CP$，所以 $CP=1$，$AP=3$，所以此时 $3\leqslant AP<4$. 综上所述，AP 长的取值范围是 $3\leqslant AP<4$.

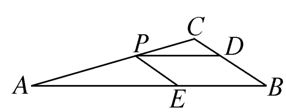


图 1

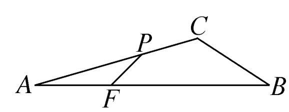


图 2

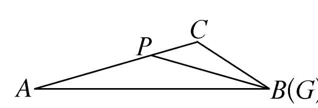


图 3

4. $\frac{36\sqrt{2}}{7}$ 或 $4\sqrt{10}$　**提示：**因为 $\triangle BDE$ 与 $\triangle ABC$ 相似，所以 $\angle BED=90^\circ$ 或 $\angle BDE=90^\circ$. ① 当 $\angle BED=90^\circ$ 时，因为 $\angle A=90^\circ$，所以 $DE/\!/AC$，所以 $\frac{BE}{AB}=\frac{DE}{AC}$. 由折叠的性质，得 $DE=AE$，$\angle AEF=\angle DEF$，所以 $\frac{9-AE}{9}=\frac{AE}{12}$，解得 $AE=\frac{36}{7}$. 因为 $DE/\!/AC$，所以 $\angle AFE=\angle DEF$，所以 $\angle AEF=\angle AFE$，所以 $\triangle AEF$ 是等腰直角三角形，所以 $EF=\sqrt{2}AE=\frac{36\sqrt{2}}{7}$. ② 当 $\angle BDE=90^\circ$ 时，由折叠的性质，得 $\angle EDF=\angle A=90^\circ$，所以点 F 与点 C 重合. 因为 $\angle A=90^\circ$，$AB=9$，$AC=12$，所以 $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{81+144}=15$. 因为 $\angle A=\angle EDB=90^\circ$，$\angle B=\angle B$，所以 $\triangle BDE\backsim\triangle BAC$，所以 $\frac{AC}{BC}=\frac{DE}{BE}$，所以 $\frac{12}{15}=\frac{DE}{9-DE}$，所以 $DE=4$，所以 $AE=4$，所以 $EF=\sqrt{AF^2+AE^2}=\sqrt{144+16}=$

$4\sqrt{10}$. 综上所述，折痕 EF 的长度等于 $\frac{36\sqrt{2}}{7}$ 或 $4\sqrt{10}$.

5. 解:(1) 如图 1，设 AD 与 EF 相交于点 K，正方形零件的边长为 x cm，则 $KD=EF=x$ cm，$AK=(40-x)$cm. 因为 $EF /\!/ BC$，所以 $\triangle AEF \backsim \triangle ABC$. 因为 $AD \perp BC$，所以 $\frac{EF}{BC}=\frac{AK}{AD}$，所以 $\frac{x}{60}=\frac{40-x}{40}$，解得 $x=24$.

答：正方形零件的边长为 24 cm.

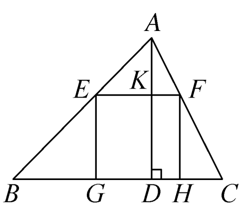


图 1

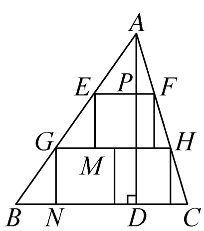


图 2

(2) $BC=AD$　**提示**:如图 2，设 AD 与 EF 相交于点 P. 由题意，得 $EF /\!/ GH /\!/ BC$，$EF=EM=GN=\frac{1}{2}GH=\frac{1}{2}PD$，$\angle EMG=\angle GNB=90^\circ$，所以 $\angle EGM=\angle B$，所以 $\triangle GBN \cong \triangle EGM$(AAS)，所以 $EG=GB$. 因为 $EF /\!/ GH$，所以 $\triangle AEF \backsim \triangle AGH$，所以 $\frac{AE}{AG}=\frac{EF}{GH}=\frac{1}{2}$，所以 $AE=EG=GB$. 因为 $EF /\!/ BC$，所以 $\triangle AEF \backsim \triangle ABC$，所以 $\frac{AP}{AD}=\frac{EF}{BC}=\frac{AE}{AB}=\frac{1}{3}$，所以 $BC=3EF$，$PD=AD-AP=\frac{2}{3}AD$，所以 $AD=\frac{3}{2}PD=3EF$，所以 $BC=AD$.

(3) $BC=AB$. 理由如下：

如图 3，过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D，分别交 EF，GH 于点 M，N，设每个正方形的边长为 a cm. 因为 $EF /\!/ GH /\!/ BC$，所以 $\triangle AEF \backsim \triangle AGH \backsim \triangle ABC$，所以 $\frac{AM}{AN}=\frac{EF}{GH}$，$\frac{AN}{AD}=\frac{GH}{BC}$，所以 $\frac{AM}{EF}=\frac{AN}{GH}=\frac{AD}{BC}$，所以 $\frac{AD-2a}{a}=\frac{AD-a}{3a}=\frac{AD}{BC}$，解得 $AD=2.5a$ cm，$BC=5a$ cm，所以 $BC=2AD$. 因为 $\angle B=30^\circ$，$AD \perp BC$，所以 $AB=2AD$，所以 $BC=AB$.

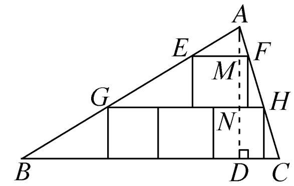
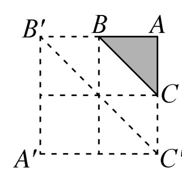


图 3

课时训练 23　图形的位似

【基础巩固】

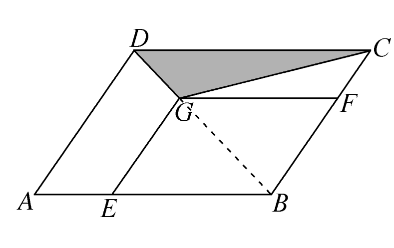
1. B　**提示**:如图 $\triangle AB'C'$、$\triangle A'C'B'$ 与 $\triangle ABC$ 是位似图形.



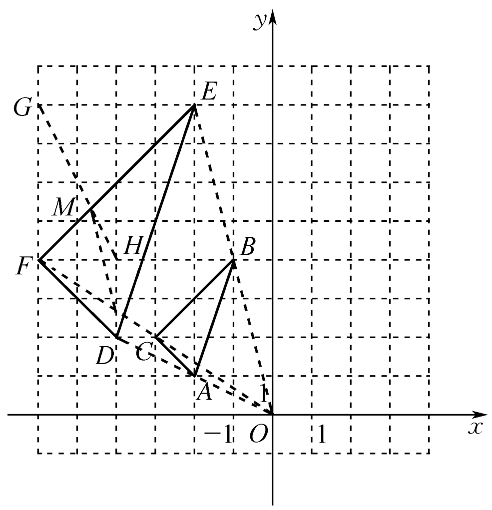
2. A　**提示**:因为 AB 与 $\odot O$ 相切于点 B，所以 $OB \perp AB$. 因为将 $\triangle OAB$ 绕点 B 按顺时针方向旋转并以点 B 为位似中心，按一定比例缩小得到 $\triangle B'A'B$，$AB=2\sqrt{5}$，$A'B=4$，所以 $\triangle OAB$ 与 $\triangle B'A'B$ 的相似比为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$，$\frac{OB}{B'B}=\frac{\sqrt{5}}{2}$. 由旋转变换，得 $\angle A'BB'=\angle ABO=90^\circ$，所以 $A'B'$ 为 $\odot O$ 的直径. 设 $BB'=2x$，则 $OB=\sqrt{5}x$. 因为 $A'B^2+BB'^2=A'B'^2$，所以 $4^2+(2x)^2=(2\sqrt{5}x)^2$，解得 $x=1$(负值舍去)，所以 $\odot O$ 的半径为 $\sqrt{5}$.

3. C　**4.** $(2,2\sqrt{3})$　**5.** $(4,2)$

6. 5　**提示**:如图，连接 BG. 因为 ▱$ABCD$ 和 ▱$EBFG$ 是以点 B 为位似中心的位似图形，所以点 D，G，B 在同一条直线上，$FG /\!/ CD$. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，面积为 30，所以 $\triangle CDB$ 的面积为 15. 因为 $FG /\!/ CD$，所以 $\triangle BFG \backsim \triangle BCD$，所以 $\frac{BG}{BD}=\frac{FG}{CD}=\frac{2}{3}$，所以 $\frac{DG}{BD}=\frac{1}{3}$，所以 $\triangle CDG$ 的面积为 $15\times\frac{1}{3}=5$.



7. 解:(1) 如图,$\triangle DEF$ 即为所求.



(2) $(2a,2b)$.

(3) 如图,点 M 即为所求. **提示:**取格点 G,H,连接 GH 交 EF 于点 M. 理由:连接 DM,因为 $GE\parallel FH$,所以 $\triangle GEM\backsim\triangle HFM$,所以 $\frac{EM}{FM}=\frac{GE}{FH}=\frac{4}{2}=2$,所以$\frac{S_{\triangle EMD}}{S_{\triangle FMD}}=2$,所以 $S_{\triangle EMD}=2S_{\triangle FMD}$.

【拓展提优】

1. D

2. B **提示:**在正方形 $ABCD$ 中,因为对角线 $AC=3\sqrt{2}$,所以 $AB=BC=3$. 又因为 O'是AC 的中点,所以点 O'的坐标是$\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$,$O'A=O'C=\frac{1}{2}AC=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 又因为点 A'的坐标是$(1,2)$,所以 $O'A'=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2+\left(\frac{3}{2}-2\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为正方形 $A'B'C'D'$与正方形$ABCD$ 是以点O'为位似中心的位似图形,所以相似比为$\frac{O'A'}{O'A}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{3}$.

3. $-\frac{5}{2}$

4. $(-4,0)$或$\left(2,\frac{6}{5}\right)$ **提示:**连接 FC 并延长交 x 轴于点 M,易证点 M 为位似中心,$\triangle MOC\backsim\triangle MAF$,所以$\frac{OC}{AF}=\frac{MO}{MA}=\frac{2}{3}$,即$\frac{MO}{MO+2}=\frac{2}{3}$,所以 $MO=4$,所以点 $M(-4,0)$;连接 OE 交 AB 于点 N,易证点 N 为位似中心,$\triangle OAN\backsim\triangle ODE$,所以$\frac{OA}{OD}=\frac{AN}{DE}$,即$\frac{2}{5}=\frac{AN}{3}$,所以 $AN=\frac{6}{5}$,所以点$N\left(2,\frac{6}{5}\right)$. 综上所述,位似中心的坐标是$(-4,0)$或$\left(2,\frac{6}{5}\right)$.

5. 解:(1) 在 $y=-x^2+x+2$ 中,当 $y=0$ 时,$0=-x^2+x+2$,解得 $x_1=2$,$x_2=-1$;当 $x=0$ 时,$y=2$. 所以点 $A(-1,0)$,$B(2,0)$,$C(0,2)$. 因为以点 C 为位似中心,将$\triangle ABC$ 放大到原来的 2 倍得到$\triangle A_1B_1C$,所以点 $A_1(2,6)$,$B_1(-4,6)$或 $A_2(-2,-2)$,$B_2(4,-2)$. 当抛物线经过点 $A_1(2,6)$,$B_1(-4,6)$时,设抛物线的函数表达式为 $y=-x^2+bx+c$,则$\begin{cases}-4+2b+c=6,\\-16-4b+c=6,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=-2,\\c=14.\end{cases}$所以抛物线的函数表达式为 $y=-x^2-2x+14$,即 $y=-(x+1)^2+15$,所以平移后的抛物线顶点为$(-1,15)$. 因为$y=-x^2+x+2=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$,所以平移前的抛物线顶点为$\left(\frac{1}{2},\frac{9}{4}\right)$. 所以平移方式为:将抛物线 L 向左平移$\frac{3}{2}$个单位长度,再向上平移$\frac{51}{4}$个单位度得到 $y=-x^2-2x+14$. 当抛物线经过点 $A_2(-2,-2)$,$B_2(4,-2)$时,同理可求平移后抛物线的函数表达式为 $y=-x^2+2x+6$. 所以 $y=-(x-1)^2+7$. 所以平移后的抛物线顶点为$(1,7)$. 因为平移前的抛物线顶点为$\left(\frac{1}{2},\frac{9}{4}\right)$,所以平移方式为:将抛物线 L 向右平移$\frac{1}{2}$个单位长度,再向上平移$\frac{19}{4}$个单位长度得到 $y=-x^2+2x+6$.

(2) 易知 $b=0$. 当经过位似变换得到

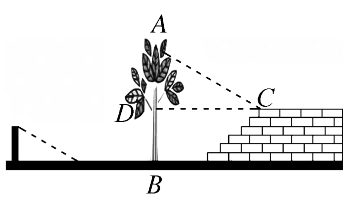
点 $A_1(2,6)$，$B_1(-4,6)$时，点 M'的坐标为$(-2a,6)$；当得到点 $A_2(-2,-2)$，$B_2(4,-2)$时，点 M'的坐标为$(2a,-2)$.

课时训练 24　用相似三角形解决问题(1)

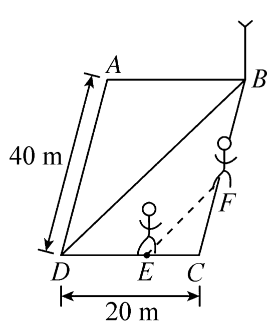
【基础巩固】

1. D　**2.** C

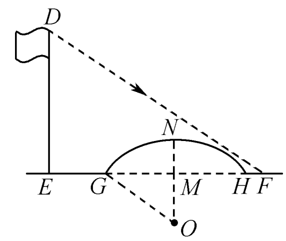
3. B　**提示：**如图，作 $CD\perp AB$，垂足为 D. 根据题意，得$\frac{1}{0.9}=\frac{AD}{1.1+1.6}$，解得 $AD=3$. 所以 $AB=AD+DB=3+1=4(\text{m})$.



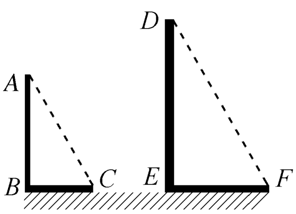
4. 8　**提示：**如图，连接 EF. 设 $BF=x$ m，则 $BC+CE=2x$ m. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $BC=AD=40$ m. 由题意，得 $EF\parallel BD$，所以$\frac{CF}{CB}=\frac{CE}{CD}$，即$\frac{40-x}{40}=\frac{2x-40}{20}$，所以 $x=24$，所以 $EC=2x-40=8(\text{m})$.



5. 5 m　**提示：**如图，设小桥所在圆的圆心为 O，连接 OG. 因为$\frac{DE}{EF}=\frac{1.6}{2.4}$，所以$\frac{8}{3+GH+1}=\frac{1.6}{2.4}$，解得 $GH=8$ m. 因为 MN 为$\overset{\frown}{GH}$ 的中点到弦 GH 的距离，所以点 O 在线段 NM 的延长线上. 易得 $GM=HM=\frac{1}{2}GH=4$ m. 设$\odot O$ 的半径为 x m，则 $OM=(x-2)$m，$OG=x$ m. 在 $\text{Rt}\triangle OGM$ 中，由勾股定理，得 $OM^2+GM^2=OG^2$，即$(x-2)^2+4^2=x^2$，解得 $x=5$. 所以小桥所在圆的半径为 5 m.



6. **解：**(1) 如图，连接 AC，过点 D 作 $DF\parallel AC$，交直线 BC 于点 F，线段 EF 即为此时 DE 在阳光下的投影.



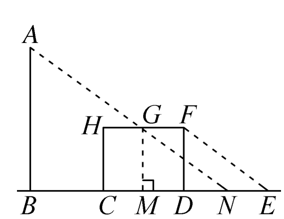
(2) 因为 $AC\parallel DF$，所以$\angle ACB=\angle DFE$. 因为$\angle ABC=\angle DEF=90^\circ$，所以$\triangle ABC\backsim\triangle DEF$，所以$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}$，所以 $DE=\frac{AB\cdot EF}{BC}=\frac{5\times 6}{3}=10(\text{m})$.

【拓展提优】

1. A

2. B　**提示：**设 $BC=x$ m，则 $AC=(x+1.8)$m. 因为 $EC=8.7$ m，$ED=2.7$ m，所以 $CD=6$ m. 因为 $AE\parallel BD$，所以$\triangle ECA\backsim\triangle DCB$. 所以$\frac{BC}{AC}=\frac{CD}{CE}$，即$\frac{x}{x+1.8}=\frac{6}{8.7}$，解得 $x=4$. 所以 $BC=4$ m，即窗口底边离地面的高 BC 为 4 m.

3. 8.25　**提示：**如图，作 $GM\perp BD$ 于点 M，延长 AG 交 BE 于点 N. 因为 G 是 HF 的中点，$HF=4$ m，所以 $CM=MD=GF=2$ m. 因为 $BC=5$ m，$HC=3$ m，$DE=4$ m，所以 $GM=3$ m. 由平行投影，得 $MN=DE=4$ m，$BN=BC+CM+MN=11$ m. 因为 $GM\parallel AB$，所以$\frac{GM}{AB}=\frac{MN}{BN}$，即$\frac{3}{AB}=\frac{4}{11}$，解得 $AB=8.25$ m.



4. $(7+\sqrt{3})$　**提示:** 过点 D 作 $DE\perp BC$ 交 BC 的延长线于点 E,延长 AD 交 BC 的延长线于点 F. 因为 $CD=4$ m,$\angle DCE=30°$,所以 $DE=\frac{1}{2}CD=2$ m,所以 $CE=\sqrt{CD^2-DE^2}=2\sqrt{3}$ m. 因为此时测得 1 m 杆的影长为 2 m,所以 $\frac{DE}{EF}=\frac{1}{2}$,所以 $EF=2DE=4$ m. 所以 $BF=BC+CE+EF=(14+2\sqrt{3})$m. 因为 $\frac{AB}{BF}=\frac{1}{2}$,所以 $AB=(7+\sqrt{3})$m.

5. **解:**(1) 5

(2) 如图 1,设 AB 的长为乙树的高度,$BC=2.4$ m,过点 C 作 $EC//AD$ 交 AB 于点 E. 因为 $EC//AD$,$AB//CD$,所以四边形 $AECD$ 是平行四边形,所以 $AE=CD=1.2$ m. 由题意,得 $\frac{BE}{BC}=\frac{1}{0.8}$,所以 $BE=3$ m. 所以 $AB=AE+BE=4.2$ m,即乙树的高度为 4.2 m.

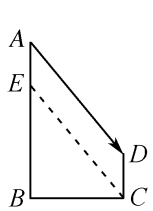


图 1

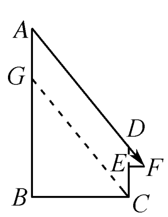


图 2

(3) C　**提示:** 如图 2,设 AB 的长为丙树的高度,$EF=0.2$ m,$EC=0.3$ m. 延长 CE 交 AF 于点 D,作 $CG//AD$ 交 AB 于点 G. 由题意,得 $\frac{DE}{EF}=\frac{1}{0.8}$,所以 $DE=0.25$ m,所以 $CD=DE+EC=0.25+0.3=0.55$(m). 因为 $GC//AD$,$AG//CD$,所以四边形 $AGCD$ 是平行四边形,所以 $AG=CD=0.55$ m. 因为 $\frac{BG}{BC}=\frac{1}{0.8}$,所以 $BG=\frac{BC}{0.8}=\frac{4.4}{0.8}=5.5$ (m). 所以 $AB=AG+BG=0.55+5.5=6.05$(m).

(4) 如图 3,设 AB 的长为丁树的高度. 过点 C 分别作 $CE//AD$ 交 AB 于点 E,$CF//AB$ 交 AD 于点 F. 因为 $\frac{CF}{CD}=\frac{1.6}{2}$,$CD=3.2$ m,所以 $CF=2.56$ m. 因为 $CF//AE$,$CE//AF$,所以四边形 $AECF$ 是平行四边形,所以 $AE=CF=2.56$ m. 因为 $\frac{BE}{BC}=\frac{1}{0.8}$,$BC=2.4$ m,所以 $BE=3$ m,所以 $AB=AE+BE=2.56+3=5.56$(m),即丁树的高度为 5.56 m.

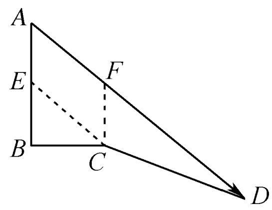


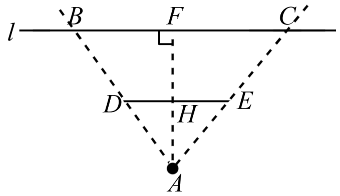
图 3

课时训练 25　用相似三角形解决问题(2)

【基础巩固】

1. D

2. B　**提示:** 如图,作射线 AD,AE,分别交 l 于点 B,C,BC 即为视点 A 的盲区在公路上的那段. 过点 A 作 $AF\perp BC$,垂足为 F,交 DE 于点 H. 设 $AF=x$ m,则 $AH=AF-HF=(x-40)$m. 根据题意,得 $BC=\frac{60\times 1\ 000}{3\ 600}\times 3=50$(m). 因为 $DE//BC$,所以 $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$,所以 $\frac{AH}{AF}=\frac{DE}{BC}$,即 $\frac{x-40}{x}=\frac{35}{50}$,解得 $x=\frac{400}{3}$. 所以小明家到公路的距离是 $\frac{400}{3}$ m.



3. 3.6　**提示:** 因为 $AB//CD$,所以 $\triangle PAB\backsim\triangle PCD$,所以 $\frac{PA}{PC}=\frac{AB}{CD}=\frac{1.8}{3.24}=\frac{5}{9}$,所以 $\frac{CA}{CP}=\frac{4}{9}$. 因为 $AE//PG$,所以 $\triangle CAE\backsim\triangle CPG$,所以 $\frac{AE}{PG}=\frac{CA}{CP}$,即 $\frac{1.6}{PG}=\frac{4}{9}$,所以 $PG=3.6$ m,即路灯 P 的高度为 3.6 m.

4. 0.25　**提示:** 设灯泡距离地面 x m,桌面半径为 y m. 根据题意,得 $\frac{y}{1.4}=\frac{2}{x}$,所以 $xy=2.8$. 设圆桌的桌面再上升 a m,其影子的直径变为 3.2 m,则 $\frac{2-a}{x}=$

$\frac{y}{1.6}$,所以 $1.6(2-a)=xy=2.8$,解得 $a=0.25$.

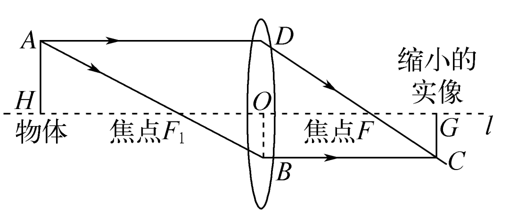
5. 30　**提示:**因为 $MP/\!/BD$,所以$\triangle AMP\backsim\triangle ADB$,所以 $\frac{MP}{DB}=\frac{AP}{AB}$. 因为 $NQ/\!/AC$,所以$\triangle BQN\backsim\triangle BAC$. 所以$\frac{QN}{AC}=\frac{BQ}{BA}$. 因为 $AC=BD$,$MP=NQ$,所以 $AP=BQ$. 设 $AP=BQ=x$ m,则 $AB=(2x+20)$m,所以$\frac{1.5}{9}=\frac{x}{2x+20}$,解得 $x=5$. 所以两路灯之间的距离是 $2\times5+20=30$(m).

6. 解:由题意,得$\angle DCE=\angle BAE=90^\circ$,所以 $DC/\!/BA$,所以$\triangle DCE\backsim\triangle BAE$,所以$\frac{DC}{EC}=\frac{BA}{EA}$. 因为 $DC=1$ m,$EC=0.5$ m,所以$\frac{BA}{EA}=\frac{DC}{EC}=2$,所以 $BA=2EA$. 设 $AC=x$,则 $AE=(x+0.5)$ m,所以 $BA=(2x+1)$ m. 在 Rt$\triangle GFC$ 中,$CF=1$ m,$CG=\frac{5}{4}$ m,所以 $GF=\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2-1^2}=\frac{3}{4}$(m). 因为$\angle CFG=\angle A=90^\circ$,$\angle G=\angle G$,所以$\triangle GCF\backsim\triangle GBA$,所以$\frac{CF}{GF}=\frac{BA}{AG}$,所以$\frac{2x+1}{x+\frac{5}{4}}=\frac{4}{3}$. 解得 $x=1$. 经检验,$x=1$ 是分式方程的解,所以 $AB=2x+1=3$(m).

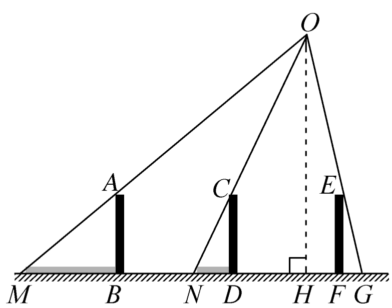
答:路灯 AB 的高度为 3 m.

【拓展提优】

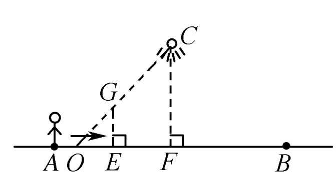
1. A　**提示:**如图,连接 BO. 因为 $BC/\!/l$,$CG\perp l$,$BO\perp l$,所以四边形 $OBCG$ 为矩形,所以 $OB=CG$. 因为 $AH\perp HO$,$BO\perp HO$,所以 $AH/\!/BO$,$\triangle AHF_1\backsim\triangle BOF_1$,所以$\frac{AH}{BO}=\frac{HF_1}{OF_1}=\frac{5}{4}$,所以$\frac{AH}{CG}=\frac{5}{4}$. 所以物体被缩小到原来的$\frac{4}{5}$.



2. C　**提示:**如图,延长 MA,NC 相交于点 O,连接 OE 并延长交直线 MF 于点 G. 过点 O 作 $OH\perp MG$ 于点 H,则 $AB/\!/CD/\!/OH/\!/EF$,所以$\frac{MB}{MH}=\frac{AB}{OH}=\frac{CD}{OH}=\frac{ND}{NH}$. 设 $DH=x$ m. 所以$\frac{1.6}{3.6+x}=\frac{0.6}{0.6+x}$,解得 $x=1.2$,所以 $HF=DF-DH=0.8$ m. 设 $FG=y$,同理可得$\frac{FG}{HG}=\frac{EF}{OH}=\frac{CD}{OH}=\frac{ND}{NH}$,所以$\frac{y}{0.8+y}=\frac{0.6}{1.8}$,解得 $y=0.4$. 所以 EF 的影长为 0.4 m.

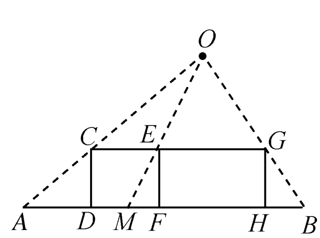


3. A　**提示:**如图,设小亮的身高 $GE=h$,路灯的高 $CF=l$,点 A 与路灯的水平距离 $AF=a$. 当 $0\leqslant x\leqslant a$ 时,因为$\angle GOE=\angle COF$,$\angle OEG=\angle OFC=90^\circ$,所以$\triangle OEG\backsim\triangle OFC$,所以$\frac{OE}{OF}=\frac{GE}{CF}$,即$\frac{y}{y+a-x}=\frac{h}{l}$,所以 $y=-\frac{h}{l-h}x+\frac{ha}{l-h}$. 因为 a,h,l 都是固定的常数,所以自变量 x 的系数是固定值,所以这个函数图像是直线. 因为影长将随着离灯光越来越近而越来越短,到灯下的时候,将是一个点,再走向点 B 时,影长将随着离灯越来越远而越来越长,所以选项 A 正确.



4. ①③④

5. 解:(1) 如图,光源 O,影子 FM 即为所求.



(2) 设小明原来的速度为 x m/s,则 $CE=$

$DF=2x$ m，$AM=AF-MF=(4x-1.2)$ m，$EG=3x$ m，$BM=AB-AM=(13.2-4x)$ m. 易证$\triangle OCE\backsim\triangle OAM$，$\triangle OEG\backsim\triangle OMB$，所以$\frac{CE}{AM}=\frac{OE}{OM}$，$\frac{EG}{MB}=\frac{OE}{OM}$，所以$\frac{CE}{AM}=\frac{EG}{MB}$，即$\frac{2x}{4x-1.2}=\frac{3x}{13.2-4x}$，解得$x=1.5$或$x=0$（不合题意，舍去）. 经检验，$x=1.5$是原分式方程的解. 所以小明原来的速度为1.5 m/s.

第7章　锐角三角函数

课时训练26　正切

【基础巩固】

1. A　**2.** D　**3.** A　**4.** 17

5. $\frac{1}{2}$　**提示：**过点B作$BD\perp AC$于点D，易得D为格点且$BD=\frac{1}{2}AD$，所以$\tan\angle BAC=\frac{1}{2}$.

6. $\frac{1}{2}$　**提示：**连接BD，由翻折的性质，得$BD\perp CE$，易证$\angle BCE=\angle DBA$，所以$\tan\angle BCE=\tan\angle DBA=\frac{AD}{AB}=\frac{1}{2}$.

7. $\frac{7}{3}$　**提示：**设$DE=x$. 因为$\tan B=\frac{1}{2}$，所以$\frac{DE}{BE}=\frac{AC}{BC}=\frac{1}{2}$，所以$BE=2x$. 由勾股定理，得$BD=\sqrt{5}x$，又因为$D$为$BC$的中点，所以$BC=2\sqrt{5}x$，所以$AC=\sqrt{5}x$，所以$AB=5x$，所以$AE=3x=7$，所以$DE=x=\frac{7}{3}$.

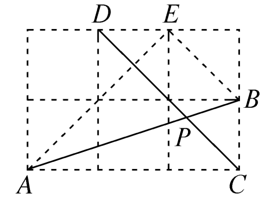
8. (1) **证明：**连接OB. 因为$AB=AC$，所以$\angle ABC=\angle ACB$. 因为$\angle ACB=\angle OCD$，所以$\angle ABC=\angle OCD$. 因为$OD\perp AO$，所以$\angle COD=90^\circ$，所以$\angle D+\angle OCD=90^\circ$. 因为$OB=OD$，所以$\angle OBD=\angle D$，所以$\angle OBD+\angle ABC=90^\circ$，即$\angle ABO=90^\circ$，所以$AB\perp OB$. 因为点$B$在$\odot O$上，所以直线$AB$与$\odot O$相切.

(2) $\frac{2}{3}$　**提示：**因为$\angle ABO=90^\circ$，$AB=5$，$OB=12$，所以$OA=\sqrt{AB^2+OB^2}=13$. 因为$AC=AB=5$，所以$OC=OA-AC=8$. 所以$\tan\angle BDO=\frac{OC}{OD}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

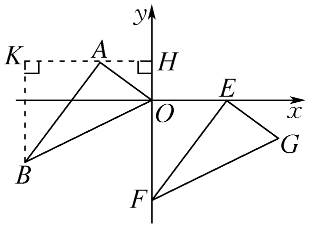
【拓展提优】

1. B

2. C　**提示：**如图，取格点E，连接AE，BE，则$\angle AEB=90^\circ$. 易知$BE\parallel CD$，$AE=2BE$，所以$\angle APD=\angle ABE$. 所以$\tan\angle APD=\tan\angle ABE=\frac{AE}{BE}=2$.

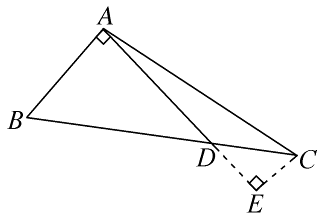


3. B　**提示：**如图，过点A作$AH\perp y$轴于点H，过点B作$BK\perp AH$交HA的延长线于点K，则$\angle AHO=\angle BKA=90^\circ=\angle BAO$，所以$\angle BAK=90^\circ-\angle HAO=\angle AOH$，所以$\triangle AHO\backsim\triangle BKA$，所以$\frac{AH}{BK}=\frac{OH}{AK}=\frac{OA}{AB}$. 因为$\angle A=90^\circ$，$\tan\angle ABO=\frac{1}{2}$，点$A(-4,3)$，所以$OH=3$，$AH=4$，$\frac{OA}{AB}=\frac{1}{2}$，所以$\frac{4}{BK}=\frac{3}{AK}=\frac{1}{2}$，所以$BK=8$，$AK=6$，由平移的性质，得$OF=BK=8$，$OE=AK=6$，所以点$E(6,0)$，所以将点$A$先向右平移10个单位长度，再向下平移3个单位长度得到点E，所以将点$O(0,0)$先向右平移10个单位长度，再向下平移3个单位长度得到点G，所以点$G(10,-3)$.



4. $\frac{1}{4}$　**提示：**如图，过点C作$CE\perp AD$交AD的延长

线于点E. 在$Rt\triangle BAD$中，$\tan\angle ADB=\frac{AB}{AD}=\frac{3}{4}$，所以可设$AB=3a$，$AD=4a$. 因为$CE\perp AE$，$BA\perp AD$，所以$CE/\!/AB$，所以$\triangle BAD\backsim\triangle CED$，所以$\frac{AD}{ED}=\frac{BA}{CE}=\frac{BD}{CD}$. 因为$DC=\frac{1}{2}BD$，所以$DE=\frac{1}{2}AD=2a$，$CE=\frac{1}{2}AB=\frac{3}{2}a$，所以在$Rt\triangle AEC$中，$\tan\angle CAD=\frac{CE}{AE}=\frac{\frac{3}{2}a}{6a}=\frac{1}{4}$.



5. $\frac{4}{3}$ **提示:** 连接BP交CH于点E，由折叠的性质，可得CH垂直平分BP，$BH=PH$，$\angle HEB=90°$. 又由H为AB的中点，得$AH=BH=PH$，所以$\angle HAP=\angle HPA$，$\angle HBP=\angle HPB$. 又因为$\angle HAP+\angle HPA+\angle HBP+\angle HPB=180°$，所以$\angle APB=90°$，所以$\angle APB=\angle HEB$，所以$AP/\!/HE$，所以$\angle HAP=\angle BHC$. 又因为在$Rt\triangle BCH$中，$\tan\angle BHC=\frac{BC}{BH}=\frac{4}{3}$，所以$\tan\angle HAP=\frac{4}{3}$.

6. $\sqrt{5}$ **提示:** 连接OC. 因为PA，PC与$\odot O$分别相切于点A，C，所以$PA=PC=6$. 因为在$Rt\triangle PAD$中，$\tan\angle PDA=\frac{PA}{AD}=\frac{3}{4}$，所以$AD=8$，所以$PD=10$. 所以$CD=4$. 因为在$Rt\triangle OCD$中，$\tan\angle PDA=\frac{OC}{CD}=\frac{3}{4}$，$CD=4$，所以$OC=OA=3$，$OD=5$. 因为$\angle AOP=\angle EOD$，$\angle PAO=\angle E=90°$，所以$\triangle PAO\backsim\triangle DEO$，所以$\frac{DE}{OE}=\frac{PA}{OA}=\frac{6}{3}=\frac{2}{1}$，即$DE=2OE$. 在$Rt\triangle OED$中，由勾股定理，得$OE^2+DE^2=OD^2$，即$OE^2+4OE^2=25$，解得$OE=\sqrt{5}$(负值已舍).

7. 解: 分3种情况讨论：①当顶角是直角时，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}=2.5\neq2$，不符合题意，舍去. ②如图1，当顶角是锐角时，过点B作$BD\perp AC$于点D，此时高BD在$\triangle ABC$的内部. 因为$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=2$，$AC=\sqrt{5}$，所以$BD=\frac{4\sqrt{5}}{5}$. 所以$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，所以$CD=AC-AD=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以$\tan\alpha=\frac{BD}{CD}=2$. ③如图2，当顶角是钝角时，过点$B$作$BD\perp AC$交$CA$的延长线于点$D$，此时高$BD$在$\triangle ABC$的外部. 因为$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=2$，$AC=\sqrt{5}$，所以$BD=\frac{4\sqrt{5}}{5}$. 所以$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，所以$CD=AC+AD=\frac{8\sqrt{5}}{5}$，所以$\tan\alpha=\frac{BD}{CD}=\frac{1}{2}$. 综上所述，$\tan\alpha$的值为2或$\frac{1}{2}$.

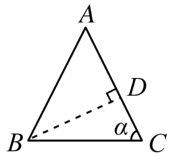


图 1

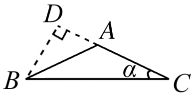


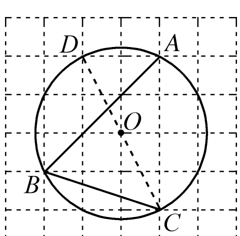
图 2

课时训练 27　正弦、余弦(1)

【基础巩固】

1. D　**2.** D

3. C　**提示:** 如图，取格点D，连接CD. 易得$\angle ABC=\angle ADC$，在$Rt\triangle ACD$中，$AC=4$，$AD=2$，所以$CD=\sqrt{AC^2+CD^2}=2\sqrt{5}$，所以$\sin\angle ABC=\sin\angle ADC=\frac{AC}{CD}=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.



4. 120

5. $6\sqrt{2}$　**提示:** 因为 $BD=2CD=6$,所以 $CD=3$. 因为 AD 是 $\triangle ABC$ 的高,所以 $\angle ADB=\angle ADC=90°$. 因为 $\sin\angle DAC=\frac{\sqrt{5}}{5}$,所以 $\frac{CD}{AC}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,所以 $\frac{3}{AC}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,所以 $AC=3\sqrt{5}$. 所以 $AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=6$,所以 $AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=6\sqrt{2}$.

6. $\frac{4}{5}$　**提示:** 设 $BC=x$,则 $AC=2x$,$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{5}x$. 因为 $\sin\angle CAE=\frac{CE}{AC}=\frac{BC}{AB}=\frac{x}{\sqrt{5}x}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,所以 $CE=\frac{\sqrt{5}}{5}AC=\frac{2\sqrt{5}x}{5}$. 因为 CD 是斜边 AB 上的中线,所以 $CD=\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{5}x}{2}$,所以 $\cos\angle DCE=\frac{CE}{CD}=\frac{\frac{2\sqrt{5}x}{5}}{\frac{\sqrt{5}x}{2}}=\frac{4}{5}$.

7. **解:**(1) 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中,$\cos\angle ADC=\frac{CD}{AD}=\frac{3}{5}$,故可设 $CD=3x$,$AD=5x$ ($x>0$),所以 $BC=AD=5x$. 因为 $BD=BC-CD=4$,即 $5x-3x=4$,所以 $x=2$. 所以 $CD=6$.

(2) 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中,根据勾股定理,得 $AC=\sqrt{AD^2-CD^2}=8$. 由(1),可知 $BC=10$,所以 $\tan B=\frac{AC}{BC}=\frac{4}{5}$.

【拓展提优】

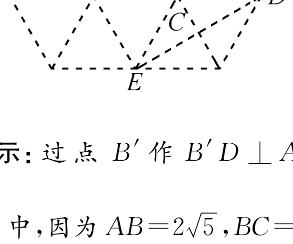
1. D　**2.** A

3. 24　**提示:** 过点 O 作 $OE\perp CD$,垂足为 E. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $OA=OC$,$OB=OD=\frac{1}{2}BD=5$,$CD=AB=4$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ODE$ 中,因为 $\sin\angle ODE=\frac{OE}{OD}=\frac{3}{5}$,所以 $OE=3$,所以 $DE=\sqrt{OD^2-OE^2}=4$. 所以点 E 与点 C 重合,所以 $AC\perp CD$,$OC=3$,所以 $AC=2OC=6$. 所以 $S_{\square ABCD}=4\times6=24$.

4. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　**提示:** 因为 $BE=3AE$,所以可设 $AE=x$ ($x>0$),则 $BE=3x$. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以 $BC=CD=AD=AB=AE+BE=4x$. 又因为 M 是边 AD 的中点,所以 $AM=MD=2x$. 由勾股定理,得 $CE=\sqrt{BE^2+BC^2}=5x$,$EM=\sqrt{AE^2+AM^2}=\sqrt{5}x$,$CM=\sqrt{CD^2+MD^2}=2\sqrt{5}x$. 因为 $EM^2+CM^2=CE^2$,所以 $\triangle CEM$ 是直角三角形,且 $\angle CME=90°$,所以 $\sin\angle ECM=\frac{EM}{CE}=\frac{\sqrt{5}x}{5x}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

5. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　**提示:** 在 $\triangle ABC$ 中,因为 $\angle C=90°$,所以 $c^2=a^2+b^2$. 因为 $b^2=ac$,所以 $c^2=a^2+ac$. 因为 a,b,c 都不为 0,所以等式两边同时除以 c^2,得 $1=\left(\frac{a}{c}\right)^2+\frac{a}{c}$. 令 $\frac{a}{c}=x$,得 $x^2+x-1=0$,解得 $x_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,$x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ (舍去). 所以 $\sin A=\frac{a}{c}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

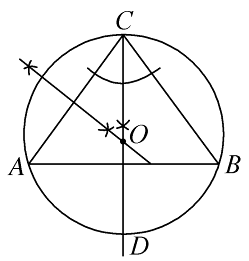
6. $\frac{\sqrt{21}}{7}$　**提示:** 如图,给各点标上字母,连接 DE. 由等边三角形和等腰三角形的性质及三角形内角和定理,可知 $\alpha=30°$. 同理,可得 $\angle CDE=\angle CED=30°=\alpha$. 易知 $\angle AEC=60°$,所以 $\angle AED=\angle AEC+\angle CED=90°$. 设这 10 个完全相同的等边三角形的边长为 a ($a>0$),则 $AE=2a$,$DE=\sqrt{3}a$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AED$ 中,由勾股定理,得 $AD=\sqrt{AE^2+DE^2}=\sqrt{(2a)^2+(\sqrt{3}a)^2}=\sqrt{7}a$,所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\angle ADE=\frac{DE}{AD}=\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{7}a}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.



7. $\frac{4}{5}$　**提示:** 过点 B' 作 $B'D\perp AC$ 于点 D. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,因为 $AB=2\sqrt{5}$,$BC=\sqrt{5}$,所以 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=5$,所以 $BC:AB:AC=1:2:\sqrt{5}$. 因为将 $\triangle ABC$ 绕点 A 按逆时针方向旋转 $90°$ 得到 $\triangle AB'C'$,所以 $\angle BAB'=90°$,所以 $\angle BAC+$

$\angle CAB'=90°$. 又因为$\angle BAC+\angle ACB=90°$,所以$\angle CAB'=\angle ACB$. 又因为$\angle ADB'=\angle B=90°$,所以$\triangle ADB'\backsim\triangle CBA$,所以 $AD:DB':AB'=BC:AB:AC=1:2:\sqrt{5}$. 因为$AB'=2\sqrt{5}$,所以$AD=2$, $B'D=4$,所以 $CD=AC-AD=3$. 在$\mathrm{Rt}\triangle CDB'$中,根据勾股定理,得 $B'C=\sqrt{CD^2+B'D^2}=5$,所以$\sin\angle ACB'=\dfrac{B'D}{B'C}=\dfrac{4}{5}$.

8. 解:(1) 如图,射线 CD,$\odot O$ 即为所求.



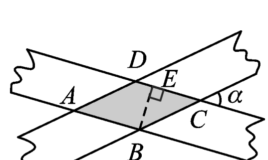
(2) 连接OA,设射线CD交AB于点E. 因为$CA=CB$,CD平分$\angle ACB$,所以$CD\perp AB$,$AE=EB=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{24}{5}$. 在$\mathrm{Rt}\triangle OEA$中,由勾股定理,得 $OE=\sqrt{OA^2-AE^2}=\dfrac{7}{5}$,所以 $EC=OC+OE=\dfrac{32}{5}$,所以 $BC=AC=\sqrt{AE^2+EC^2}=8$,所以 $\sin B=\dfrac{EC}{BC}=\dfrac{\frac{32}{5}}{8}=\dfrac{4}{5}$.

课时训练 28 正弦、余弦(2)

【基础巩固】

1. C **2.** C

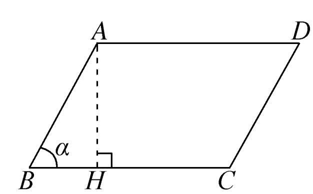
3. A **提示:**如图,易知重叠部分的图形是平行四边形. 过点 B 作 $BE\perp CD$ 于点 E,则 $BE=1$,且$\angle BCE=\alpha$. 在$\mathrm{Rt}\triangle BCE$中,因为$\sin\angle BCE=\dfrac{BE}{BC}=\sin\alpha$,所以$BC=\dfrac{1}{\sin\alpha}$. 因为纸条的宽度都是1,所以在平行四边形$ABCD$中,边$BC$上的高也为1. 所以阴影部分的面积是$\dfrac{1}{\sin\alpha}$.



4. B **提示:**过点 F 作$FA\perp y$轴于点A,过点G作$GB\perp AF$交AF的延长线于点B,则易得$\angle AEF=\angle BFG=\angle FGO$. 所以在$\mathrm{Rt}\triangle AEF$中,$\cos\angle AEF=\dfrac{AE}{EF}=\dfrac{3}{5}$,即$\dfrac{AE}{10}=\dfrac{3}{5}$,解得$AE=6$. 由勾股定理,得$AF=\sqrt{EF^2-AE^2}=8$. 所以$BF=AB-AF=OG-AF=17-8=9$. 同理,在$\mathrm{Rt}\triangle BFG$中,$\cos\angle BFG=\dfrac{BF}{FG}=\dfrac{3}{5}$,即$\dfrac{9}{FG}=\dfrac{3}{5}$,解得$FG=15$. 由勾股定理,得$BG=\sqrt{FG^2-BF^2}=12$. 所以点$F$的坐标是$(8,12)$.

5. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **6.** $\dfrac{4}{5}$

7. $\dfrac{3}{5}$ **提示:**如图,过点A作$AH\perp BC$于点H. 由题意,得$BC\cdot AB=5$,$BC\cdot AH=4$,所以$\dfrac{BC\cdot AH}{BC\cdot AB}=\dfrac{4}{5}$,所以$\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{4}{5}$. 设$AH=4x$,$AB=5x$,则$BH=3x$,所以$\cos\alpha=\dfrac{BH}{AB}=\dfrac{3}{5}$.



8. 2 **提示:**由题意,得$\sin\alpha+3\cos\alpha=-5(2\sin\alpha-5\cos\alpha)$,所以$\sin\alpha=2\cos\alpha$. 所以$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2$.

9. 0 **提示:**因为$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$,所以$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=2$,所以$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha=2$. 因为$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,所以$1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2$. 所以$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=1$,所以$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=1-1$,即$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=0$,所以$\sin\alpha-\cos\alpha=0$.

10. (1) **证明:**因为AD是边BC上的高,所以$AD\perp BC$,所以$\angle ADB=\angle ADC=90°$. 在$\mathrm{Rt}\triangle ABD$和$\mathrm{Rt}\triangle ADC$中,$\tan B=\dfrac{AD}{BD}$,$\cos\angle DAC=\dfrac{AD}{AC}$. 又因为$\tan B=\cos\angle DAC$,所以$\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{AD}{AC}$,所以$AC=BD$.

(2) **解:**在$\mathrm{Rt}\triangle ADC$中,因为$\sin C=$

$\frac{AD}{AC}=\frac{12}{13}$，所以可设 $AD=12k$，则 $AC=13k(k>0)$，所以 $CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=5k$. 因为 $BC=BD+CD$，$AC=BD$，所以 $BC=13k+5k=18k$. 因为 $BC=18$，所以 $18k=18$，解得 $k=1$. 所以 $AD=12k=12\times1=12$.

【拓展提优】

1. C　2. C

3. $\frac{3}{5}$　**提示：**连接 AD，则 $\angle ADB=90°$. 由勾股定理，得 $AD=3$. 因为 $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DE}$，所以 $\angle DAC=\angle DBA$，所以 $\triangle DAC\backsim\triangle DBA$，所以 $\angle DCA=\angle DAB$. 因为 $\angle DCA=\angle ECB$，所以 $\angle ECB=\angle DAB$，所以 $\cos\angle ECB=\cos\angle DAB=\frac{AD}{AB}=\frac{3}{5}$.

4. $\frac{\sqrt{6}}{6}$　**提示：**过点 B 作 $BE\perp CD$ 于点 E，因为 $\angle A=90°=\angle BED$，DB 为 $\angle ADC$ 的平分线，所以 $BA=BE$，又因为 $BD=BD$，所以 $\mathrm{Rt}\triangle ABD\cong\mathrm{Rt}\triangle EBD$，所以 $ED=AD=1$. 因为 $\angle A=\angle ABC=90°$，所以 $AD/\!/BC$，所以 $\angle ADB=\angle CBD$. 因为 DB 平分 $\angle ADC$，所以 $\angle ADB=\angle CDB$. 所以 $\angle CBD=\angle CDB$，所以 $CB=CD=3$. 因为 $CE=CD-ED=2$，所以在 $\mathrm{Rt}\triangle CBE$ 中，由勾股定理，得 $EB=\sqrt{BC^2-CE^2}=\sqrt{5}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BDE$ 中，由勾股定理，得 $BD=\sqrt{ED^2+EB^2}=\sqrt{6}$. 所以 $\sin\angle ABD=\frac{AD}{BD}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

5. $\frac{\sqrt{15}}{4}$　**提示：**因为四边形 $ABCD$ 是矩形，G 是 DF 的中点，所以 $AG=DG$，$AD/\!/BC$，所以 $\angle ADG=\angle DAG$，$\angle ADG=\angle CED$，所以 $\angle AGE=\angle ADG+\angle DAG=2\angle ADG=2\angle CED=\angle AED$. 所以 $AE=AG=4$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，由勾股定理，得 $AB=\sqrt{AE^2-BE^2}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$，所以 $\sin\angle AEB=\frac{AB}{AE}=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

6. **解：**(1) 1　$\sqrt{2}$　$\sqrt{3}$　(2) $0<\mathrm{sad}\ A<2$

(3) 过点 B 作 $BD\perp AC$ 于点 D. 因为 $\sin A=\frac{BD}{AB}=\frac{3}{5}$，所以可设 $BD=3x$，则 $AB=5x(x>0)$，所以 $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=4x$. 又因为 $AC=AB=5x$，所以 $DC=AC-AD=x$. 所以 $BC=\sqrt{BD^2+DC^2}=\sqrt{10}x$，所以 $\mathrm{sad}\ A=\frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{10}x}{5x}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

课时训练 29　特殊角的三角函数

【基础巩固】

1. C　2. A　3. D

4. $b<a<c$　5. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　6. 60°或 30°　7. 60°

8. $(\sqrt{3},1)$　**提示：**过点 A 作 $AE\perp OB$ 于点 E，过点 M 作 $MF\perp x$ 轴于点 F，则 $AE=1$，所以 $OE=\sqrt{3}AE=\sqrt{3}$，所以点 A 的对应点 C 的坐标为 $(1,\sqrt{3})$. 因为点 C 在函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 的图像上，所以 $k=\sqrt{3}$，所以 $y=\frac{\sqrt{3}}{x}$. 因为 $\angle COD=\angle AOB=\angle MOC=30°$，所以 $\angle MOF=30°$，所以 $OF=\sqrt{3}MF$. 设 $MF=n$，则 $OF=\sqrt{3}n$，所以点 $M(\sqrt{3}n,n)$. 因为点 M 在函数 $y=\frac{\sqrt{3}}{x}$ 的图像上，所以 $n=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}n}$，解得 $n=1$(负值已舍). 所以点 $M(\sqrt{3},1)$.

9. **解：**(1) 原式 $=2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}=2\times\frac{1}{2}-(2-\sqrt{3})=1-2+\sqrt{3}=\sqrt{3}-1$.

(2) 原式 $=-1+1+6\times\frac{1}{2}-3\sqrt{3}+5-4=-1+1+3-3\sqrt{3}+5-4=4-3\sqrt{3}$.

(3) $\frac{a^2-4}{a}\div\left(a-\frac{4a-4}{a}\right)-\frac{2}{a-2}=\frac{(a+2)(a-2)}{a}\cdot\frac{a}{(a-2)^2}-\frac{2}{a-2}=\frac{a+2}{a-2}-\frac{2}{a-2}=\frac{a}{a-2}$，其中 $a=2\sin45°+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}+2=\sqrt{2}+2$，代入，得原式 $=$

$\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+2-2}=\sqrt{2}+1.$

【拓展提优】

1. A

2. D　提示:连接 BE. 因为 AB 为⊙O 的直径,所以 $\angle ACB=\angle AEB=90°$. 在 Rt△$ABC$ 中,$BC=AB\cdot\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$. 因为 CE 平分$\angle ACB$,所以 $\angle ACE=\angle BCE=45°$. 又因为$\angle BCE=\angle BAE$,所以$\angle BAE=45°$. 在 Rt△$ABE$ 中,$AE=AB\cdot\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$. 因为$\angle BCD=\angle EAD$,$\angle ADE=\angle CDB$,所以△$ADE$∽△$CDB$,所以$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle CDB}}=\left(\frac{AE}{BC}\right)^2=\frac{2}{3}$.

3. B　4. $\frac{1}{6k}<m<-\frac{1}{3k}$　5. $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

6. $\sqrt{3}<BC<2\sqrt{3}$

7. 解:题图 1 中,水管总长为 $AB+AC=2a$. 题图 2 中,水管总长为 $AD+BC$. 根据勾股定理和等边三角形的性质,得 $AD+BC=a+\frac{\sqrt{3}}{2}a\approx1.866a$. 题图 3 中,点 O 是等边三角形 ABC 的外心,且外心与重心重合,所以 $OA=OB=OC=\frac{2}{3}AD$(AD 为边 BC 上的高). 所以水管总长为 $3OA=2AD=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\sqrt{3}a\approx1.732a$. 因为 $1.732a<1.866a<2a$,所以题图 3 中的铺设线路最短,即方案 3 最好.

课时训练 30　由三角函数值求锐角

【基础巩固】

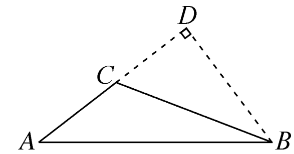
1. C　2. C　3. 60°　4. 30°　5. 105°

6. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{4}$　提示:连接 CA,因为在矩形 $ABCD$ 中,$AB=CD=\sqrt{3}$,$AD=BC=1$,所以 $\tan\angle CAB=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以$\angle CAB=30°$,所以$\angle BAB'=30°$,所以 $S_{阴影}=S_{\triangle AB'C'}-S_{扇形BAB'}=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}-\frac{30\pi\times(\sqrt{3})^2}{360}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{4}$.

【拓展提优】

1. C　2. B　3. 75°　4. 30°

5. 120°　提示:如图,过点 B 作 $BD\perp AC$ 于点 D. 由勾股定理,得 $BD^2=BC^2-CD^2=100-CD^2$,$BD^2=AB^2-AD^2=196-(6+CD)^2$. 所以 $100-CD^2=196-(6+CD)^2$,解得 $CD=5$. 在 Rt△BCD 中,$\cos\angle DCB=\frac{CD}{CB}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$,所以$\angle DCB=60°$,$\angle ACB=120°$.



6. 解:因为 AD 是边 BC 上的高,所以 $AD\perp BC$ 于点 D. 在 Rt△ABD 中,因为$\angle ADB=90°$,$AD=2$,$BD=2$,所以$\angle BAD=45°$. 在 Rt△ACD 中,因为$\angle ADC=90°$,$AD=2$,$CD=2\sqrt{3}$,所以$\tan\angle CAD=\frac{CD}{AD}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$,所以$\angle CAD=60°$. 如图 1,当 AD 在△ABC 的内部时,$\angle BAC=\angle CAD+\angle BAD=60°+45°=105°$;如图 2,当 AD 在△ABC 的外部时,$\angle BAC=\angle CAD-\angle BAD=60°-45°=15°$. 综上所述,$\angle BAC$ 的度数为 105°或 15°.

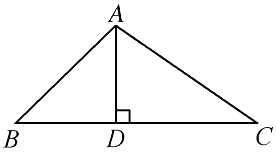


图 1

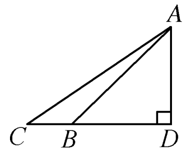


图 2

课时训练 31　解直角三角形(1)

【基础巩固】

1. A　2. A　3. A　4. A

5. 6　**6.** 15　**7.** 50

8. 不会　**提示:**设 AC 与 BD 相交于点 O. 由条件可知,无论怎样活动框架,四边形 $ABCD$ 都是菱形. 所以 $AC\perp BD$, $AC=2AO$, $\angle BAO=\frac{1}{2}\angle BAD=30°$. 因为 $AD=AB=20$ cm,所以 $AO=AB\cdot\cos\angle BAO=10\sqrt{3}$ cm. 所以 $AC=2AO=20\sqrt{3}$ cm≈34.64 cm<36 cm,所以橡皮筋 AC 不会断裂.

9. 解:(1) 直线 CD 与⊙O 相切. 理由如下:

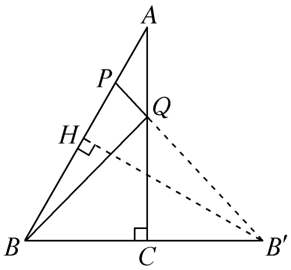
连接 OC. 因为 $OA=OC$, $CD=BD$,所以 $\angle A=\angle ACO$, $\angle B=\angle DCB$. 因为 $\angle AOB=90°$,所以 $\angle A+\angle B=90°$,所以 $\angle ACO+\angle DCB=90°$,所以 $\angle OCD=90°$,所以 $OC\perp CD$. 又因为 OC 为⊙O 的半径,所以直线 CD 与⊙O 相切.

(2) 因为 $\tan\angle ODC=\frac{24}{7}=\frac{OC}{CD}$,所以可设 $DB=CD=7x$,则 $OA=OC=24x$. 因为 $\angle OCD=90°$,所以 $OD=\sqrt{OC^2+CD^2}=25x$,所以 $OB=OD+DB=32x$. 因为 $\angle AOB=90°$,所以 $AB^2=OA^2+OB^2$,即 $40^2=(24x)^2+(32x)^2$,解得 $x=1$(负值已舍). 所以 $OA=OC=24$,即⊙O 的半径为 24.

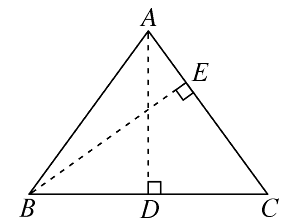
【拓展提优】

1. C

2. C　**提示:**如图,延长 BC 至点 B',使 $CB'=CB=\sqrt{3}$,连接 QB',过点 B' 作 $B'H\perp AB$ 于点 H,因为 $\angle ACB=90°$,所以点 B' 与点 B 关于 AC 轴对称,所以 $BQ=B'Q$,所以 $BQ+PQ=B'Q+PQ\geqslant B'H$,所以 $BQ+PQ$ 的最小值是 $B'H$ 的长,因为 $\angle ACB=90°$, $\angle A=30°$,所以 $\angle ABC=60°$,在 Rt$\triangle BB'H$ 中, $B'H=BB'\cdot\sin60°=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$,即 $BQ+PQ$ 的最小值是 3.



3. $\frac{24}{5}\leqslant BP\leqslant6$　**提示:**如图,过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D,因为 $AB=AC=5$, $\cos\angle ABC=\frac{3}{5}$,所以 $\angle ABC=\angle ACB$, $BD=DC$, $\cos\angle ABC=\frac{BD}{AB}=\frac{3}{5}$,所以 $DB=3$, $BC=6$. 过点 B 作 $BE\perp AC$ 于点 E,则 $\cos\angle ACB=\cos\angle ABC=\frac{3}{5}=\frac{CE}{CB}$,解得 $CE=\frac{18}{5}$,在 Rt$\triangle BEC$ 中, $BE=\sqrt{BC^2-EC^2}=\frac{24}{5}$,因为线段 BP 长的最小值为点 B 到 AC 的距离 BE,最大值为 BC,所以 $\frac{24}{5}\leqslant BP\leqslant6$.



4. $\frac{5}{2}$　**提示:**由 $AB=5$, $AE\perp BC$ 于点 E, $\sin\angle ABC=\frac{4}{5}$,得 $AE=4$, $BE=3$. 由菱形 $ABCD$,得 $AD/\!/BE$,所以 $\triangle AFD\backsim\triangle EFB$,所以 $\frac{AF}{EF}=\frac{AD}{EB}$,即 $\frac{AF}{4-AF}=\frac{5}{3}$,所以 $AF=\frac{5}{2}$. 所以 $\tan\angle ADF=\frac{AF}{AD}=\frac{1}{2}$. 因为 $AD=AB=5$,所以 $\angle ABG=\angle ADF$,所以 $\frac{AG}{AB}=\tan\angle ABG=\tan\angle ADF=\frac{1}{2}$,所以 $AG=\frac{1}{2}AB=\frac{5}{2}$.

5. (1) **证明:**连接 OD. 因为 $OF\perp AD$,所以 $\angle AOF+\angle DAO=90°$. 因为 CD 是⊙O 的切线, D 为切点,所以 $\angle CDO=90°$,所以 $\angle ADC+\angle ADO=90°$. 因为 $OA=OD$,所以 $\angle DAO=\angle ADO$,所以 $\angle ADC=\angle AOF$.

(2) **解:**因为 $OF\perp AD$,所以 $AE=DE$,又因为 $OA=OB$,所以 $OE/\!/BD$, $OE=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times8=4$. 因为 $\sin C=\frac{OD}{OC}=\frac{1}{3}$,所以可设 $OD=x$,则 $OC=3x$, $OB=x$,所以 $CB=4x$. 因为 $OF/\!/BD$,所以 $\triangle COF\backsim\triangle CBD$,所以

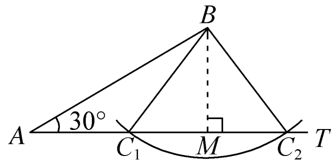
$\frac{OC}{BC}=\frac{OF}{BD}$，即$\frac{3x}{4x}=\frac{OF}{8}$，所以 $OF=6$. 所以 $EF=OF-OE=6-4=2$.

课时训练 32 解直角三角形(2)

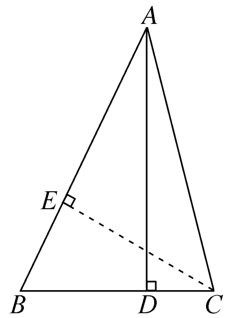
【基础巩固】

1. C **2.** C **3.** C **4.** B **5.** 2 **6.** $\frac{25}{6}$

7. $(3\sqrt{3}-4)$或$(3\sqrt{3}+4)$ **提示:**如图，$\angle A=30°$，以点 B 为圆心，BC 的长为半径画弧，与射线 AT 有两个交点 C_1 和 C_2，过点 B 作 $BM\perp AC_2$ 于点 M. 因为 $\angle A=30°$，$BM\perp AC_2$，$AB=6$ cm，所以 $BM=\frac{1}{2}AB=3$ cm，$AM=3\sqrt{3}$ cm. 因为 $BC_1=BC_2=5$ cm，$BM\perp AC_2$，所以 $C_1M=C_2M=\sqrt{5^2-3^2}=4$(cm)，所以 $AC_1=(3\sqrt{3}-4)$cm，$AC_2=(3\sqrt{3}+4)$cm.

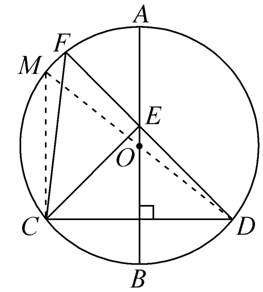


8. 解: 设 $AD=x$. 因为 $\tan\angle BAD=\frac{1}{2}$，$\tan\angle CAD=\frac{1}{3}$，所以 $BD=\frac{1}{2}x$，$CD=\frac{1}{3}x$. 在 $Rt\triangle ABD$ 中，由勾股定理，得 $AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}x$，同理可得 $AC=\frac{\sqrt{10}}{3}x$. 如图，过点 C 作 AB 的垂线，垂足为 E，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CE=\frac{1}{2}BC\cdot AD$，所以 $CE=\frac{\sqrt{5}}{3}x$. 在 $Rt\triangle ACE$ 中，$\sin\angle BAC=\frac{CE}{AC}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{3}x}{\frac{\sqrt{10}}{3}x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\angle BAC=45°$.



【拓展提优】

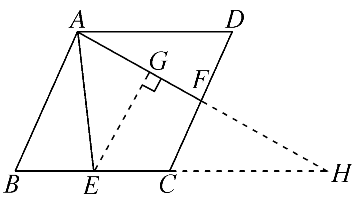
1. A **提示:**如图，连接 DO 并延长，交$\odot O$ 于点 M，连接 CM，则$\angle M=\angle F=\alpha$，因为 DM 为$\odot O$ 的直径，所以$\angle MCD=90°$，所以$\frac{CD}{DM}=\sin\alpha$，所以 $CD=2\sin\alpha$，因为 AB 是$\odot O$ 的直径，弦 $CD\perp AB$，所以 AB 垂直平分 CD，所以 $CE=DE$，因为$\angle CED=90°$，所以$\triangle CED$ 为等腰直角三角形，所以 $CE=DE=\frac{\sqrt{2}}{2}CD=\sqrt{2}\sin\alpha$，在 $Rt\triangle CEF$ 中，$\frac{CE}{EF}=\tan\alpha$，所以 $EF=\frac{CE}{\tan\alpha}=\frac{\sqrt{2}\sin\alpha}{\tan\alpha}=\sqrt{2}\cos\alpha$，所以 $DF=DE+EF=\sqrt{2}\sin\alpha+\sqrt{2}\cos\alpha$.



2. B **提示:**过点 D 作 $DH\perp AB$ 于点 H，过点 C 作 $CM\perp AB$ 于点 M. 设 $AE=a$，则由 $\tan A=\frac{BE}{AE}=2$，得 $BE=2a$. 在$Rt\triangle AEB$ 中，由勾股定理，得 $AB^2=AE^2+BE^2$，即 $10^2=a^2+4a^2$，解得 $a=2\sqrt{5}$(负值已舍). 所以 $\sin\angle ABE=\frac{AE}{AB}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $DH=\frac{\sqrt{5}}{5}BD$. 所以 $CD+\frac{\sqrt{5}}{5}BD=CD+DH$. 易证 $CM=BE=4\sqrt{5}$，而 $CD+DH\geqslant CM$，所以 $CD+\frac{\sqrt{5}}{5}BD\geqslant 4\sqrt{5}$，即 $CD+\frac{\sqrt{5}}{5}BD$ 的最小值是 $4\sqrt{5}$.

3. $\frac{2\sqrt{65}}{3}$ **提示:**如图，过点 E 作 $EG\perp AF$ 于点 G，延长 AF 交 BC 的延长线于点 H. 在 $Rt\triangle AEG$ 中，因为 $\sin\angle EAF=\frac{EG}{AE}=\frac{4}{5}$，$AE=5$，所以 $EG=4$，由勾股定理，得 $AG=\sqrt{AE^2-EG^2}=3$. 因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $AB=BC=CD=DA$，$\angle B=\angle D$. 又因为 E,F 分别是边 BC,CD 的中点，所以 $BE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}CD=DF$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADF$ 中，$\begin{cases}AB=AD,\\ \angle B=\angle D,\\ BE=DF,\end{cases}$ 所以

$\triangle ABE \cong \triangle ADF$，所以 $AE=AF=5$，易证$\triangle AFD \cong \triangle HFC$，所以 $HF=AF=5$，$HC=AD$，所以 $GH=AF+HF-AG=7$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle EGH$ 中，由勾股定理，得 $EH=\sqrt{EG^2+GH^2}=\sqrt{65}$，因为 E 为边 BC 的中点，所以 $CE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}CH$，所以 $CH=\frac{2}{3}EH$，所以 $CH=\frac{2\sqrt{65}}{3}$，所以 $AB=AD=CH=\frac{2\sqrt{65}}{3}$.



4. $(2+2\sqrt{3})\mathrm{cm}$　**提示：**由折叠的性质，得 $AD=DP$，$\angle DPE=\angle A$. 因为$\triangle ABC$ 是等边三角形，所以 $AB=AC$，$\angle B=\angle C=\angle A=60^\circ$. 因为 $DP\perp BC$，所以 $\cos B=\frac{BP}{BD}$，所以 $BD=\frac{BP}{\cos 60^\circ}=8\ \mathrm{cm}$，所以 $DP=\sqrt{BD^2-BP^2}=4\sqrt{3}\ \mathrm{cm}$，所以 $AD=DP=4\sqrt{3}\ \mathrm{cm}$，所以 $AB=BC=BD+AD=(8+4\sqrt{3})\mathrm{cm}$，所以 $PC=BC-BP=(4+4\sqrt{3})\mathrm{cm}$. 因为 $\angle DPE=60^\circ$，$\angle BPD=90^\circ$，所以 $\angle EPC=180^\circ-\angle BPD-\angle DPE=30^\circ$. 因为$\angle C=60^\circ$，所以$\angle PEC=180^\circ-\angle EPC-\angle C=90^\circ$，所以 $EC=PC\cdot\sin\angle EPC=(2+2\sqrt{3})\mathrm{cm}$.

5. $\frac{5}{3}$　**提示：**由条件，得 $AB=10$，$AC=6$. 易证$\triangle APM \backsim \triangle ACB$，所以$\frac{AP}{AC}=\frac{PM}{CB}=\frac{AM}{AB}$. 因为 $AC:CB:AB=3:4:5$，所以可设 $AP=3x$，则 $PM=4x$，$AM=5x$. 所以 $CM=6-5x$. 因为 $MN/\!/AB$，所以$\triangle CMN \backsim \triangle CAB$，所以 $\frac{CM}{CA}=\frac{CN}{CB}=\frac{MN}{AB}$，所以 $CN=8-\frac{20}{3}x$，$MN=10-\frac{25}{3}x$. 因为 BQ 平分$\angle ABC$，$MN/\!/AB$，所以$\angle PBQ=\angle QBN$，$\angle PBQ=\angle BQN$，所以$\angle QBN=\angle BQN$，所以 $NQ=BN=CB-CN=\frac{20}{3}x$. 因为 $MN/\!/AB$，$PQ/\!/AC$，所以四边形 $APQM$ 是平行四边形，所以 $QM=AP=3x$. 所以 $MN=NQ+QM=\frac{20}{3}x+3x=10-\frac{25}{3}x$，解得 $x=\frac{5}{9}$，所以 $AP=3x=\frac{5}{3}$.

6. **解：**(1) 因为$\triangle ABC$ 是等边三角形，所以$\angle BAC=60^\circ$. 因为$\angle BAD=\alpha$，所以$\angle FAG=60^\circ-\alpha$. 因为$\angle AFG=\angle EFD=60^\circ$，所以$\angle AGE=180^\circ-\angle AFG-\angle FAG=60^\circ+\alpha$.

(2) $CG=\frac{2\sqrt{3}}{3}DE$. 证明如下：

连接 BE，过点 B 作 $BP/\!/EG$ 交 AC 于点 P，则$\angle BPC=\angle EGP$. 因为点 D 关于直线 AB 的对称点为 E，所以$\angle ABE=\angle ABD=60^\circ$，所以$\angle EBD=\angle ABE+\angle ABD=120^\circ$. 因为$\angle C=60^\circ$，所以$\angle EBD+\angle C=180^\circ$，所以 $EB/\!/GP$，所以四边形 $EBPG$ 是平行四边形，所以 $BE=PG$. 因为$\angle DFG=180^\circ-\angle EFD=120^\circ$，$\angle C=60^\circ$，所以$\angle DFG+\angle C=180^\circ$，所以$\angle FGC+\angle FDC=180^\circ$，所以$\angle ADB=\angle FGC=\angle BPC$. 因为 $AB=BC$，$\angle ABD=\angle C=60^\circ$，所以$\triangle ABD\cong\triangle BCP$，所以 $BD=CP=BE=PG$，所以 $CG=2BD$. 在$\triangle BDE$ 中，易知$\angle EBD=120^\circ$，$BE=BD$，所以 $DE=\sqrt{3}BD$，所以 $CG=\frac{2\sqrt{3}}{3}DE$.

课时训练 33　用锐角三角函数

解决问题(1)

【基础巩固】

1. A　**2.** D

3. B　**提示：**过点 E 分别作 $EM\perp AB$ 于点 M，$EG\perp BC$ 交 BC 的延长线于点 G，易证 M，F，E 三点共线. 因为斜坡 CD 的坡度 $i=1:2.4$，所以可设 $DG=x\ \mathrm{m}$，则 $CG=2.4x\ \mathrm{m}$，由勾股定理，得 $DG^2+CG^2=DC^2$，即 $x^2+(2.4x)^2=52^2$，解得 $x=20$(负值已舍). 所以 $DG=20\ \mathrm{m}$，$CG=48\ \mathrm{m}$，故 $EG=DG+DE=20.8\ \mathrm{m}$，$BG=BC+CG=100\ \mathrm{m}$. 易证四边形 $EGBM$ 是矩形，所以 $EM=BG=100\ \mathrm{m}$，$BM=EG=20.8\ \mathrm{m}$. 在$\mathrm{Rt}\triangle AME$ 中，因为 $\tan\angle AEM=\tan 27^\circ=\frac{AM}{EM}$，所以 $AM=EM\cdot\tan 27^\circ\approx 51\ \mathrm{m}$. 所

以 $AB=AM+BM=71.8$ m.

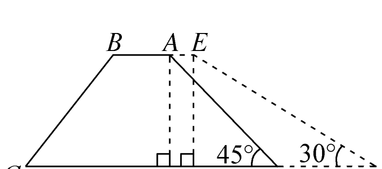
4. $(16+2\sqrt{3})$

5. 10 **提示:**在 BC 上取一点 F,使 $\angle FAE=50°$,过点 F 作 $FH\perp AD$ 于点 H.易证四边形 $BEHF$ 是矩形,所以 $BF=EH$,$BE=FH$.因为斜坡 AB 的坡比为 12∶5,所以 $\dfrac{BE}{AE}=\dfrac{12}{5}$.设 $BE=12x$ m,则 $AE=5x$ m.在 Rt$\triangle AEB$ 中,由勾股定理,得 $AE^2+BE^2=AB^2$,即 $(5x)^2+(12x)^2=26^2$,解得 $x=2$(负值已舍).所以 $AE=10$ m,$FH=BE=24$ m.因为在 Rt$\triangle AHF$ 中,$\tan\angle FAH=\tan 50°=\dfrac{FH}{AH}\approx 1.2$,所以 $AH\approx\dfrac{FH}{1.2}=\dfrac{24}{1.2}=20$(m).所以 $BF=EH=AH-AE=20-10=10$(m).所以坡顶 B 沿 BC 方向至少向右移动 10 m 时,才能确保山体不滑坡.

6. 3 **提示:**连接 AE.在 Rt$\triangle ABE$ 中,因为 $AB=3$ m,$BE=\sqrt{3}$ m,所以 $AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=2\sqrt{3}$ m.又因为 $\tan\angle EAB=\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $\angle EAB=30°$.在 Rt$\triangle AEF$ 中,因为 $\angle EAF=\angle EAB+\angle BAC=60°$,所以 $EF=AE\cdot\sin\angle EAF=2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3$(m).

【拓展提优】

1. D **提示:**如图,过点 A 作 $AG\perp CF$ 于点 G,过点 E 作 $EH\perp CF$ 于点 H,易证四边形 $AGHE$ 为矩形,所以 $GH=AE=2$ m,$AG=EH=8$ m.在 Rt$\triangle AGD$ 中,$\angle ADG=45°$,$AG=8$ m,所以 $DG=\dfrac{AG}{\tan 45°}=8$ m.在 Rt$\triangle EHF$ 中,$\angle F=30°$,$EH=8$ m,所以 $FH=\dfrac{EH}{\tan 30°}=8\sqrt{3}$ m,所以 $DF=GH+HF-GD=(8\sqrt{3}-6)$ m,所以维修此大坝需要土石 $\dfrac{1}{2}\times(2+8\sqrt{3}-6)\times 8\times 300=(9\,600\sqrt{3}-4\,800)\text{m}^3$.



2. 1 0.12 **提示:**因为 $BH=0.6$ m,$\sin\alpha=\dfrac{BH}{AB}=\dfrac{3}{5}$,所以 $AB=1$ m,所以 $AH=0.8$ m.因为 $AF=2$ m,所以 $BF=1$ m.过点 F 作 $FJ\perp BG$ 于点 J,过点 E 作 $EK\perp FJ$ 于点 K,则 $\angle EKF=\angle FJB=\angle AHB=90°$.易证 $\triangle EFK\backsim\triangle FBJ$,$\triangle ABH\cong\triangle FBJ$,所以 $\dfrac{EF}{AB}=\dfrac{EK}{AH}$,$BJ=BH=0.6$ m,所以 $\dfrac{1.6}{1}=\dfrac{EK}{0.8}$,所以 $EK=1.28$ m,所以 $BJ+EK=1.88$ m,所以 $BG-(BJ+EK)=2-1.88=0.12$(m),即木箱上部顶点 E 到汽车货箱顶部 NG 的距离为 0.12 m.

3. **解:**(1) 过点 C 作 $CM\perp DE$ 于点 M,则在 Rt$\triangle CDM$ 中,$CM=CD\cdot\sin\angle CDE=5\sqrt{3}$ cm,即点 C 到底座 DE 的距离为 $5\sqrt{3}$ cm.

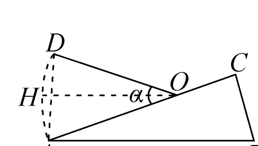
(2) 过点 A 作 $AF\perp DE$ 于点 F,过点 C 作 $CN\perp AF$ 于点 N.易得 $\angle ACN=45°$,$FN=CM=5\sqrt{3}$ cm.在 Rt$\triangle ACN$ 中,$AN=AC\cdot\sin\angle ACN=6\sqrt{2}$ cm.所以 $AF=AN+FN=6\sqrt{2}+5\sqrt{3}\approx 17.1$(cm),即点 A 到底座 DE 的距离约为 17.1 cm.

课时训练 34 用锐角三角函数解决问题(2)

【基础巩固】

1. D **2.** 100

3. 612 **提示:**连接 AD,过点 O 作 $OH\perp AD$ 于点 H.因为 $OA=OD=900$ mm,$OH\perp AD$,$\alpha=40°$,所以 $\angle AOH=\dfrac{1}{2}\angle AOD=20°$,$AH=DH$.因为 $\angle BAC=20°$,所以 $\angle BAC=\angle AOH$,所以 $OH\parallel AB$,所以 $AD\perp AB$,所以 AD 的长即为点 D 到地面的距离.在 Rt$\triangle AOH$ 中,$OA=900$ mm,$\sin\angle AOH=\dfrac{AH}{OA}$,所以 $AH=OA\cdot\sin 20°=900\times 0.34=306$(mm),所以 $AD=2AH=612$ mm.



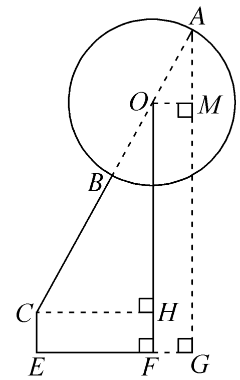
4. 260 **提示:**过点 D 作 $DF\perp AB$ 于点 F,过点 C 作

$CG \perp AB$ 于点 G，过点 D 作 $DE \perp CG$ 于点 E，则四边形 $DFGE$ 为矩形，所以 $DE=FG$，$EG=DF$. 设 $AD=BC=x$ dm，则 $AB=2x$ dm. 因为 $\tan\angle DAB=\frac{5}{12}$，$\tan\angle CBA=\frac{3}{4}$，所以 $AF:DF:AD=12:5:13$，$CG:BG:BC=3:4:5$. 所以 $DF=\frac{5}{13}x$ dm，$AF=\frac{12}{13}x$ dm，$CG=\frac{3}{5}x$ dm，$BG=\frac{4}{5}x$ dm，所以 $CE=CG-EG=CG-DF=\frac{14}{65}x$ dm，$DE=FG=AB-AF-BG=\frac{18}{65}x$ dm. 在 $\mathrm{Rt}\triangle CDE$ 中，由勾股定理，得 $\left(\frac{18}{65}x\right)^2+\left(\frac{14}{65}x\right)^2=(4\sqrt{130})^2$，解得 $x=130$(负值已舍). 所以 $AB=260$ dm.

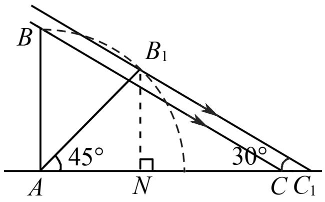
5. 解：(1) 连接 AC，过点 A 作 $AE \perp CB$，垂足为 E，则 $\angle ABE=37°$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，因为 $\sin\angle ABE=\frac{AE}{AB}$，$\cos\angle ABE=\frac{BE}{AB}$，所以 $\frac{AE}{5}\approx0.60$，$\frac{BE}{5}\approx0.80$，所以 $AE=3$ m，$BE=4$ m，所以 $CE=6$ m. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACE$ 中，由勾股定理，得 $AC=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}\approx6.7$(m).
(2) 过点 A 作 $AF \perp CD$，垂足为 F，则 $FD=AO=1$ m，所以 $CF=5$ m. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACF$ 中，由勾股定理，得 $AF=\sqrt{(3\sqrt{5})^2-5^2}=2\sqrt{5}$(m). 所以 $OD=2\sqrt{5}$ m≈4.5 m.

【拓展提优】

1. B　**提示**：如图，过点 C 作 $CH \perp OF$ 于点 H，过点 A 作 $AG \perp EF$，交 EF 的延长线于点 G，过点 O 作 $OM \perp AG$ 于点 M. 由题意得 $CE=HF=5\sqrt{3}$ cm，$CH=EF=15$ cm，$AG /\!/ OF$，所以 $\angle COH=\angle CAG=30°$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle COH$ 中，$OC=2CH=30$ cm，$OH=\sqrt{3}CH=15\sqrt{3}$ cm. 因为 $OB=\frac{1}{3}OC$，所以 $OB=OA=10$ cm. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOM$ 中，$AM=AO\cdot\cos 30°=10\times\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$(cm)，所以 $AG=AM+OH+HF=5\sqrt{3}+15\sqrt{3}+5\sqrt{3}=25\sqrt{3}$(cm)，即此时点 A 到桌面的距离为 $25\sqrt{3}$ cm.



2. 13 m　**提示**：如图，根据题意，得 $AB_1=AB=AC\cdot\tan 30°=12\times\frac{\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}$(m). 过点 B_1 作 $B_1N \perp AC_1$，垂足为 N，所以 $B_1N=AN=AB_1\cdot\sin 45°=4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{6}$(m)，所以 $C_1N=B_1N\cdot\tan 60°=2\sqrt{6}\times\sqrt{3}=6\sqrt{2}$(m). 所以 $AC_1=AN+C_1N=2\sqrt{6}+6\sqrt{2}\approx13$(m)，即树与地面成 45°角时，树影的长度约为 13 m.



3. 30　$\left(\frac{31\sqrt{2}}{2}-15\right)$　**提示**：如图 1，连接 AE，过点 A 作 $AH \perp CE$ 于点 H. 因为 $\cos\angle ACD=\frac{3}{5}$，所以 $\frac{CH}{AC}=\frac{3}{5}$，可设 $CH=3x$，则 $AC=5x$，所以 $AH=4x$. 因为 $\angle HEA=180°-\angle CEF=45°$，所以 $\triangle HAE$ 为等腰直角三角形，所以 $AH=HE$. 因为 $CE=CD+DE=25+17=42$ (cm)，所以 $AH=HE=CE-CH=(42-3x)$cm. 所以 $42-3x=4x$，解得 $x=6$. 所以 $AC=30$ cm. 如图 2，过点 A 作 $AM \perp EF$，交 FE 的延长线于点 M，过点 D 作 $DN \perp EF$，交 FE 的延长线于点 N，延长 ND 交 AB 于点 P. 易证四边形 $AMNP$ 是矩形，所以 $AP=MN$. 因为 $CD=25$ cm，$DE=17$ cm，$\cos\angle ACD=\frac{3}{5}$，$\angle DEN=45°$，所以 $PC=CD\cdot\cos\angle ACD=25\times\frac{3}{5}=15$(cm)，$EN=DE\cdot\cos\angle DEN=17\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{17\sqrt{2}}{2}$(cm)，所以 $MN=AP=AC-PC=30-15=$

$15(\text{cm})$，所以 $ME=MN+EN=\left(15+\frac{17\sqrt{2}}{2}\right)$ cm. 由图 1 可知 $AH=HE=24$ cm，所以 $AE=24\sqrt{2}$ cm. 设车轮半径为 r，则有 $d_1=2r+AE+EF$，$d_2=2r+ME+EF$，所以 $d_1-d_2=(2r+AE+EF)-(2r+ME+EF)=AE-ME=24\sqrt{2}-\left(15+\frac{17\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{31\sqrt{2}}{2}-15\right)$ cm.

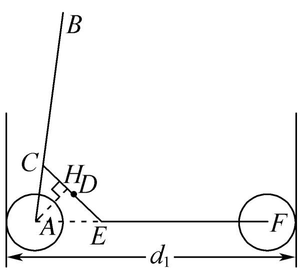


图 1

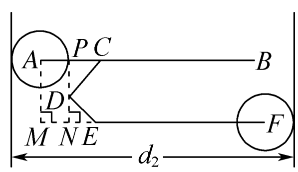


图 2

4. 解：(1) 如图 1，过点 D 作 $DH\perp BE$ 于点 H. 在 Rt△BDH 中，$\angle DHB=90°$，$BD=5$ cm，$\angle ABC=37°$，所以 $\frac{DH}{5}=\sin 37°$，$\frac{BH}{5}=\cos 37°$，所以 $DH=5\times\sin 37°\approx 3(\text{cm})$，$BH=5\times\cos 37°\approx 4(\text{cm})$. 因为 $AB=BC=12$ cm，$AE=2$ cm，所以 $EH=AB-AE-BH=6$ cm，所以 $DE=\sqrt{DH^2+EH^2}=3\sqrt{5}$ cm.

答：连接杆 DE 的长度为 $3\sqrt{5}$ cm.

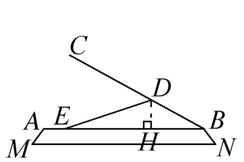


图 1

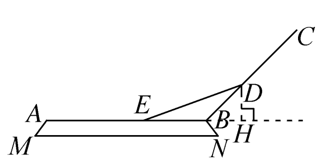


图 2

(2) 如图 2，过点 D 作 $DH\perp AB$，交 AB 的延长线于点 H. 因为 $\angle ABC=127°$，所以 $\angle DBH=53°$，又因为 $DH\perp AB$，所以 $\angle BDH=37°$. 在 Rt△DBH 中，$\frac{BH}{BD}=\frac{BH}{5}=\sin 37°\approx 0.6$，所以 $BH=3$ cm，所以 $DH=4$ cm. 在 Rt△DEH 中，由勾股定理，得 $EH^2+DH^2=DE^2$，即 $(EB+3)^2+16=45$，所以 $EB=(\sqrt{29}-3)$cm，所以点 E 滑动的距离为 $12-(\sqrt{29}-3)-2=(13-\sqrt{29})$cm.

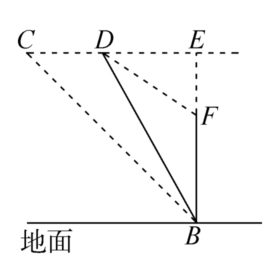
答：这个过程中点 E 滑动的距离为 $(13-\sqrt{29})$cm.

课时训练 35　用锐角三角函数解决问题(3)

【基础巩固】

1. A

2. $\frac{21}{2}$　**提示**：如图，设 CD 的延长线与 BF 的延长线相交于点 E. 由题意，得 $\angle CEB=90°$，$\angle EDF=37°$，$\angle EDB=68°$，因为 $\tan\angle ECB=\frac{BE}{CE}=\tan 45°=1$，所以 $BE=CE$. 设 $DE=a$ m. 因为 $\tan\angle EDF=\frac{EF}{DE}=\tan 37°$，所以 $EF=a\cdot\tan 37°\approx\frac{3}{4}a(\text{m})$. 因为 $\tan\angle EDB=\frac{BE}{DE}=\tan 68°$，所以 $BE=a\cdot\tan 68°\approx\frac{5}{2}a(\text{m})$，所以 $BF=BE-EF=\frac{5}{2}a-\frac{3}{4}a=\frac{7}{4}a(\text{m})$. 因为 $BE=CE$，所以 $\frac{5}{2}a=9+a$，解得 $a=6$，所以 $BF=\frac{7}{4}\times 6=\frac{21}{2}(\text{m})$.



3. $(7+2\sqrt{3})$　**4.** $(4\sqrt{3}-4)$km

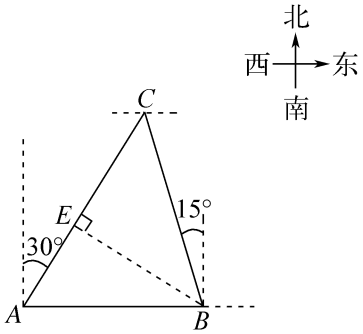
5. 解：(1) 在 Rt△CAE 中，因为 $\angle CAE=45°$，所以 $CE=AE$. 因为 $AB=10$ m，所以 $BE=AE-10=(CE-10)$m. 在 Rt△CEB 中，由 $\tan\angle CBE=\frac{CE}{BE}=\frac{CE}{CE-10}\approx 1.327$，解得 $CE\approx 40.58$ m. 所以阿育王塔的高度约为 40.58 m.

(2) 由题意，可知△FGD∽△CED，所以

$\frac{FG}{CE}=\frac{GD}{ED}$，即 $\frac{1.5}{40.58}=\frac{2}{ED}$，所以 $ED\approx 54.11$ m. 所以小亮与阿育王塔之间的距离约为 54.11 m.

【拓展提优】

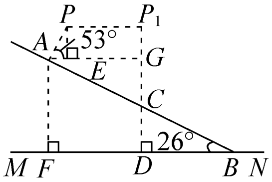
1. A　**提示：**如图，过点 B 作 $BE\perp AC$ 于点 E. 由题意，得 $\angle CAB=90°-30°=60°$，$\angle ABC=90°-15°=75°$，所以 $\angle ACB=180°-\angle CAB-\angle ABC=45°$，$\angle ABE=90°-60°=30°$. 在 Rt$\triangle ABE$ 中，$\angle AEB=90°$，$AB=2$ km，所以 $AE=\frac{1}{2}AB=1$ km，所以 $BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=\sqrt{3}$ km. 在 Rt$\triangle BCE$ 中，$\angle BEC=90°$，$\angle BCE=45°$，所以 $\triangle BCE$ 是等腰直角三角形，所以 $CE=BE=\sqrt{3}$ km，所以 $AC=AE+CE=(1+\sqrt{3})$km.



2. 5.5　**提示：**过点 F 作 $FG\perp CE$ 于点 G. 易得四边形 $FGED$ 是矩形，所以 $FG=DE$，$DF=GE$. 在 Rt$\triangle DCE$ 中，$\angle DCE=30°$，则 $DE=CE\cdot\tan 30°=9\times\frac{\sqrt{3}}{3}=3\sqrt{3}$(m)，所以 $FG=3\sqrt{3}$ m. 在 Rt$\triangle FGC$ 中，$\frac{FG}{CG}=i=1:\frac{4}{3}$，则 $CG=\frac{4}{3}FG=4\sqrt{3}$ m. 所以 $DF=GE=CG+CE=(4\sqrt{3}+9)$m. 在 Rt$\triangle BEC$ 中，$\angle BCE=60°$，则 $BE=CE\cdot\tan 60°=9\sqrt{3}$ m. 在 Rt$\triangle ADF$ 中，$\angle AFD=45°=\angle DAF$，所以 $AD=DF=(4\sqrt{3}+9)$m. 所以 $AB=AD+DE-BE=4\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}-9\sqrt{3}=9-2\sqrt{3}\approx 5.5$(m).

3. **解：**(1) 观察题表格中的数据，结合草图描点，发现这些点接近一条抛物线，故猜想 y 是 x 的二次函数，且经过原点(0,0). 设此函数的表达式为 $y=ax^2+bx(a\neq 0)$. 将点(1,4.5)，(2,14)代入，得 $\begin{cases}a+b=4.5,\\4a+2b=14,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2.5,\\b=2,\end{cases}$ 所以函数表达式为 $y=2.5x^2+2x$. 经检验，当 $x=3$ 时，$y=2.5x^2+2x=28.5$；当 $x=4$ 时，$y=2.5x^2+2x=48$. 所以函数表达式 $y=2.5x^2+2x$ 符合题意.

(2) 设该运动员滑行了 t s，恰好在无人机的正下方，此时运动员滑行了 $(2.5t^2+2t)$m 到达点 C，无人机飞行了 $6.3t$ m 到达点 P_1. 如图，过点 P_1 作 $P_1D\perp MN$ 于点 D，则 P_1D 交 AB 于点 C，过点 A 分别作 $AF\perp MN$ 于点 F，$AG\perp P_1D$ 于点 G，过点 P 作 $PE\perp AG$ 于点 E，则四边形 $AFDG$ 和四边形 $PEGP_1$ 均为矩形. 因为 $AB=500$ m，$\angle ABF=26°$，所以 $AF=GD=AB\cdot\sin 26°\approx 220$ m，$\angle GAC=\angle ABF=26°$. 因为无人机在 AB 上空距地面 292 m 的点 P 处悬停，所以 $PE=P_1G=292-AF=72$ m. 因为 $AG=AC\cdot\cos 26°\approx(2.25t^2+1.8t)$m，所以 $AE=AG-EG=2.25t^2+1.8t-6.3t=(2.25t^2-4.5t)$m. 在 Rt$\triangle APE$ 中，因为 $\tan 53°=\frac{PE}{AE}=\frac{4}{3}$，所以 $3\times 72=4(2.25t^2-4.5t)$. 整理，得 $t^2-2t-24=0$，解得 $t_1=6$，$t_2=-4$(舍去). 所以该运动员滑行 6 s 时，她恰在无人机的正下方.



第 8 章　统计和概率的简单应用

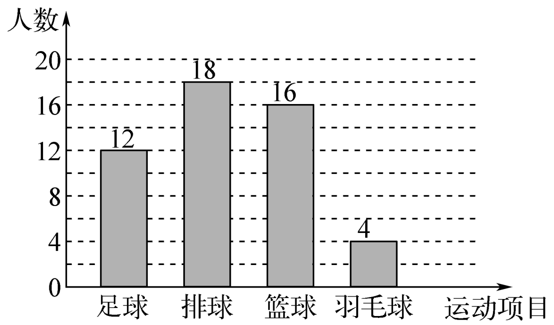
课时训练 36　中学生的视力情况调查

【基础巩固】

1. D　2. D　3. 200　4. 7 200

5. **解：**(1) 24

(2) 补全条形统计图如下：



(3) 86.4

(4) $3\ 000\times\frac{16}{50}\times100\%=960$(人).

答：估计该校最喜欢篮球运动的学生有 960 人.

【拓展提优】

1. B **2.** C **3.** 120

4. (1) 16 12.5 (2) 10 500

5. **解**：(1) ①4 667

② $\bar{x}=\frac{72\times1+70\times3+67\times3+64\times3}{1+3+3+3}=67.5$(分)，所以 A 款新能源汽车四项评分数据的平均数为 67.5 分.

(2) 我推荐 B 款新能源汽车. 理由如下：因为 B 款新能源汽车四项评分数据的平均分为 $\bar{x}=\frac{70\times1+71\times3+70\times3+68\times3}{1+3+3+3}=69.7$(分)，所以 B 款新能源汽车四项评分数据的平均分高于 A 款新能源汽车的平均分，又因为 A 款新能源汽车销量一直下滑，所以我推荐 B 款新能源汽车.

课时训练 37 货比三家

【基础巩固】

1. D **2.** A **3.** 丁

4. **解**：(1) 4 74 78

(2) $200\times\frac{2}{10}+300\times\frac{1}{10}=40+30=70$(人).

答：两个年级体质健康等级达到优秀的学生总人数约为 70.

(3) 七年级学生的体质健康情况更好. 因为七年级达到优秀的人数更多，不及格的人数更少，所以七年级学生的体质健康情况更好.

【拓展提优】

1. B **提示**：由统计图可知，甲市年龄在 30～70 岁的有 120＋270＋300＋160＝850(万人)，乙市年龄在 20～60 岁的有 200＋300＋230＋130＝860(万人)，丙市年龄在 10～50 岁的有 280＋300＋150＋110＝840(万人)，所以在年龄跨度相同，且人数基本相同的情况下，可以判断，甲市的平均年龄＞乙市的平均年龄＞丙市的平均年龄.

2. ①③④ **提示**：由条形统计图可知，公司去年 1～3 月份投资总额最高的是 3 月份，故①正确. 由折线统计图可知，公司去年第一季度中 2 月份的利润率最高，故②错误. 由题意得，公司去年第一季度 1 月份的利润为 150×20%＝30(万元)，2 月份的利润为 120×30%＝36(万元)，3 月份的利润为 200×26%＝52(万元)，所以公司去年第一季度 4 月份的利润为 156－30－36－52＝38(万元)，所以公司去年第一季度 4 月份的投资总额为 38÷25%＝152(万元)，所以公司去年 4 月份的资金投放总额比 1 月份高，故③④均正确.

3. **解**：(1) $a=20$，$m=960$. **提示**：$a=100-10-30-40=20$. 设总利润为 x 万元，则 $\frac{1\ 200}{x}=40\%$，解得 $x=3\ 000$，所以 $m=3\ 000-1\ 200-560-280=960$(万元).

(2) $\frac{960}{20\times30\%}=160$(万元)；$\frac{560}{20\times20\%}=140$(万元).

答：网购软件的人均利润为 160 万元；视频软件的人均利润为 140 万元.

(3) 能. 设从视频软件的研发人员中安排 x 人去从事网购软件的研发. 则有 $960+560+60=160\times(6+x)+140\times(4-x)$，解得 $x=3$. 又因为 $20\times20\%=4$(人)，$3<4$，所以符合题意. 所以从研发与维护视频软件的人中调 3 个人到研发与维护网购软件，可使总利润增加 60 万元.

课时训练 38　统计分析帮你做预测

【基础巩固】

1. B　**2.** D

3. 160～165　**提示:**因为要选 60 名身高基本相同的女生组成表演方队,现从全校 200 名女生中随机抽取 40 人,所以样本中身高在同一组的人数所占比例不小于 $\frac{60}{200}=\frac{3}{10}$. 所以样本中身高在同一组的人数不小于 $40\times\frac{3}{10}=12$(人),所以估计入选表演方队的女生身高范围为 160～165 cm.

4. **解:**(1) 由表中数据,得 $\begin{cases}x=-2,\\y=49,\end{cases}$ $\begin{cases}x=0,\\y=49,\end{cases}$ 所以这种函数不是一次函数,也不是反比例函数,所以 y 是关于 x 的二次函数,且对称轴为直线 $x=-1$. 设 $y=a(x+1)^2+k$,将 $\begin{cases}x=0,\\y=49,\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=41\end{cases}$ 代入上述表达式,可解得 $\begin{cases}a=-1,\\k=50,\end{cases}$ 所以 $y=-(x+1)^2+50$.

(2) 当 $x=-1$ 时,y 取最大值 50,所以这种植物的高度一天最多能增长 50 mm.

(3) 因为 $-2\leqslant x\leqslant 2$,所以 y 的最大值为 50,即这株植物的高度一天最多能增长 50 mm,所以三天后这株植物的高度最多为 $10+3\times 50=160$(mm).

【拓展提优】

1. B　**2.** ①②③　**3.** 10 月、11 月

4. **解:**(1) 画图略. 当 $x\geqslant 8$ 时,通过观察数据发现:$8\times 18=10\times 14.4=12\times 12=16\times 9=18\times 8=20\times 7.2=144$,所以 $144\div 16=9$(h),所以水位高出 16 m 的时间 x 的取值范围为 $4<x<9$.

(2) 观察图像可得,当 $0\leqslant x<8$ 时,y 与 x 可能是一次函数关系. 设 $y=kx+b$,将点(0,14),(8,18)代入,得 $\begin{cases}b=14,\\8k+b=18,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{1}{2},\\b=14,\end{cases}$ 所以 $y=\frac{1}{2}x+14$. 经验证,点(2,15),(4,16),(6,17)都满足 $y=\frac{1}{2}x+14$,因此放水前 y 关于 x 的表达式为 $y=\frac{1}{2}x+14(0\leqslant x<8)$. 由(1)可知,放水后 y 与 x 的关系最符合反比例函数,其表达式为 $y=\frac{144}{x}(x\geqslant 8)$. 所以开闸放水前和放水后最符合表中数据的函数表达式分别为 $y=\frac{1}{2}x+14(0\leqslant x<8)$ 和 $y=\frac{144}{x}(x\geqslant 8)$.

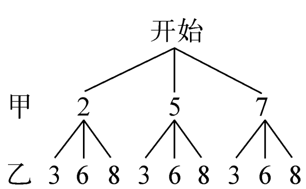
(3) 当 $y=6$ 时,$\frac{144}{x}=6$,解得 $x=24$,因此预测 24 h 时水位达到 6 m.

课时训练 39　抽签方法合理吗

【基础巩固】

1. A　**2.** C　**3.** B　**4.** 4　**5.** $\frac{1}{4}$　不公平

6. **解:**(1) 画树状图如下:



由树状图可知,共有 9 种等可能的结果,其中甲获胜的结果有 3 种,乙获胜的结果有 6 种,所以甲获胜的概率为 $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$,乙获胜的概率为 $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$. 所以乙获胜的机会大.

(2) 由题意得,乙出牌的情况为(3,6,8),甲随机出牌的情况有(2,5,7),(2,7,5),(5,2,7),(5,7,2),(7,2,5),(7,5,2),所以甲、乙出牌共有 6 种可能结果,当甲按(5,7,2)出牌时获胜.

7. **解**:(1) 列表如下:

甲袋	乙袋		
	红	白	黑
红	(红,红)	(红,白)	(红,黑)
白	(白,红)	(白,白)	(白,黑)
白	(白,红)	(白,白)	(白,黑)

共有 9 种等可能的结果,其中摸出的都是白色小球的结果有 2 种,所以摸出的都是白色小球的概率为$\frac{2}{9}$.

(2) 不公平 **提示**:从甲袋中摸出 2 个球,所有等可能的结果有:红白,红白,白白,共 3 种,从乙袋中摸出 2 个球,所有等可能的结果有:红白,红黑,白黑,共 3 种. 列表如下:

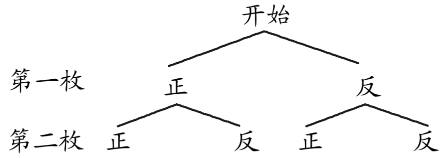
甲袋	乙袋		
	红白	红黑	白黑
红白	(红白,红白)	(红白,红黑)	(红白,白黑)
红白	(红白,红白)	(红白,红黑)	(红白,白黑)
白白	(白白,红白)	(白白,红黑)	(白白,白黑)

共有 9 种等可能的结果,其中摸出的 4 个球中恰好有红、白、黑 3 种颜色小球的结果有:(红白,红黑),(红白,白黑),(红白,红黑),(红白,白黑),(白白,红黑),共 5 种,所以摸出的 4 个球中恰好有红、白、黑 3 种颜色小球的概率为$\frac{5}{9}$. 所以小明获胜的概率为$\frac{5}{9}$,小丽获胜的概率为$\frac{4}{9}$,所以这个游戏不公平.

【拓展提优】

1. D 2. B

3. D **提示**:画树状图如下:



因为 P(正,正)$=\frac{1}{4}$,所以出现其他结果的概率为$\frac{3}{4}$. 抛出两个同面和抛出其他结果的概率为$\frac{1}{2}$,故选项 A 正确;把"抛出其他结果"改为"抛出两个反面"时,两人得分的概率都为$\frac{1}{4}$,此时公平,故选项 B 正确;因为小明得分的概率为$\frac{1}{4}$,小刚得分的概率为$\frac{3}{4}$,所以把"小明赢 1 分"改为"小明赢 3 分",此时公平,故选项 C 正确;把"小刚赢 1 分"改为"小刚赢 3 分",此时不公平,故选项 D 错误.

4. $\frac{3}{10}$ **提示**:任意抽三个数,一共有 $5\times4\times3=60$(种)等可能的结果,其中出现三个数为 2 021,2 022,2 023 的结果有 6 种,三个数为 2 021,2 022,2 024 的结果有 6 种,三个数为 2 021,2 022, 2 025 的结果有 6 种,所以所求概率为$\frac{18}{60}=\frac{3}{10}$.

5. 不公平 乙

6. **解**:(1) 列表如下:

减数	被减数			
	1	2	3	4
1	0	1	2	3
2	−1	0	1	2
3	−2	−1	0	1

由表可知,共有 12 种等可能的结果,其中两个数的差为 0 的情况有 3 种,所以 P(两个数的差为 0)$=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.

(2) 因为两个数的差为非负数的情况有 9 种,所以 P(甲获胜)$=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$,$P$(乙获胜)$=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$. 因为 P(甲获胜)$>P$(乙获胜),所以这样的规则不公平. 可将规则改为:两个数的差为正数时,甲获胜;否则,乙获胜. 此时 P(甲获胜)$=P$(乙获胜)$=\frac{1}{2}$.

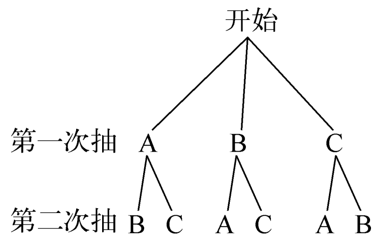
课时训练 40 概率帮你做估计

【基础巩固】

1. D 2. 1 3. 20

4. **解**:(1) 把《我的阿勒泰》《额尔古纳河右岸》《额尔古纳河右岸》分别记为 A,B,C,

画树状图如下：

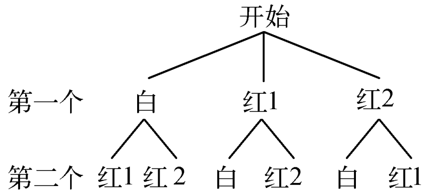


由树状图可知，恰好抽到 2 张卡片都是《额尔古纳河右岸》的概率为$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

（2）4　**提示：**设应添加 x 张《我的阿勒泰》卡片，由题意，得$\frac{1+x}{3+x}=\frac{5}{7}$，解得 $x=4$. 经检验，$x=4$ 是原方程的解. 所以应添加 4 张《我的阿勒泰》卡片.

5. 解：（1）0.33　2

（2）将 2 个红球分别记为红 1、红 2. 画树状图如下：



由树状图可知，共有 6 种等可能的结果，其中恰好摸到 1 个白球、1 个红球的结果有 4 种，所以恰好摸到 1 个白球、1 个红球的概率为$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

【拓展提优】

1. B　**2.** B

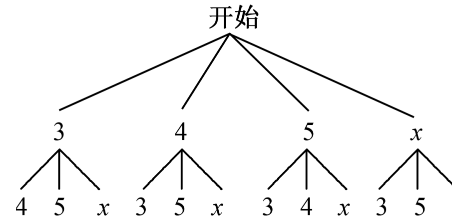
3. 解：（1）0.33

（2）当 $x=7$ 时，列表如下：

甲	乙			
	3	4	5	7
3	—	7	8	10
4	7	—	9	11
5	8	9	—	12
7	10	11	12	—

由表可知，共有 12 种等可能的结果，其中摸出的 2 个小球上的数字之和为 9 的结果有 2 种，所以这 2 个小球上的数字之和为 9 的概率是$\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$，所以 x 的值不可以取 7.

画树状图如下：



因为这 2 个小球上的数字之和为 9 的概率是$\frac{1}{3}$，即有 4 种可能，所以 $3+x=9$ 或 $5+x=9$ 或 $4+x=9$，解得 $x=6$ 或 $x=4$ 或 $x=5$. 当 $x=6$ 时，出现“和为 8”的概率为$\frac{1}{6}$，与（1）中结论矛盾，故舍去. 所以 $x=4$ 或 $x=5$.

4. 解：（1）根据题意列表如下：

乙	甲		
	红	红	白
红	红，红	红，红	红，白
白	白，红	白，红	白，白

由表可知，共有 6 种等可能的结果，其中摸出的 2 个球都是红球的结果有 2 种，所以摸出的 2 个球都是红球的概率为$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

（2）2　**提示：**列表如下：

乙	甲		
	红	红	白
红	红，红	红，红	红，白
白	白，红	白，红	白，白
红 1	红 1，红	红 1，红	红 1，白
…	…	…	…
红 a	红 a，红	红 a，红	红 a，白

由表可知，共有 $3(2+a)$ 种等可能的结果，其中摸出的 2 个球都是红球的结果有 $2(a+1)$ 种，所以摸出的 2 个球都是红球的概率为$\frac{2(a+1)}{3(2+a)}$，所以$\frac{2(a+1)}{3(2+a)}=\frac{1}{2}$，解得 $a=2$，经检验 $a=2$ 是原方程的解，且符合题意，所以 $a=2$.

课时训练 41　收取多少保险费才合理

【基础巩固】

1. C　2. C　3. C　4. 400

5. 赚了　提示:按照被咬伤的概率,平均每 100 万人中会有 5 个被咬伤,所以公司要支付 50 万元,但由于每个游客都交了 1 元,合计 100 万元,所以支付 50 万元后公司还赚了 50 万元,所以平均来说,保险公司是赚了.

6. 解:(1) 对摸彩者不利. 理由如下:

因为 P(摸到红球)$=\frac{1}{21}$,所以摸到红球的收益为$\frac{1}{21}\times5=\frac{5}{21}$(元). 因为$\frac{5}{21}<1$,所以摸到红球对摸彩者不利. 同理可求 P(摸到同号球)$=\frac{1}{21}$,所以摸到同号球的收益为$\frac{1}{21}\times10=\frac{10}{21}$(元),所以摸到同号球对摸彩者也不利.

(2) 每次的平均收益为$\frac{1}{21}\times5+\frac{1}{21}\times10-1=-\frac{2}{7}$(元).

答:他平均每次将损失$\frac{2}{7}$元.

7. 解:(1) $1+0+1+2+0+2+1+2+0+2=11$(户),$365+371+385+395+412+418+430+435+440+445=4\ 096$(户),$11\div4\ 096\approx0.002\ 7$,$1\ 000\times0.002\ 7=2.7$(户).

答:平均每年在 1 000 户家庭中烧掉 2.7 户.

(2) $300\ 000\times0.002\ 7=810$(元).

答:最低限度要交 810 元的保险费.

【拓展提优】

1. C　提示:摸到颜色相同的 2 个球的概率为$\frac{1}{5}$,所以摸彩者得到奖品的平均值为$\frac{1}{5}\times100+\left(1-\frac{1}{5}\right)\times5=24$(元),故摊贩应要求每位摸彩者每次至少交 24 元.

2. 100

3. ①　提示:顾客转动一次转盘的平均收益是$\frac{1}{12}\times(20+15\times2+10\times3+5\times6)=\frac{55}{6}$(元). 因为$\frac{55}{6}<10$,所以餐厅经理希望顾客参与游戏,这样能减少支出.

4. $\frac{1}{3}$　5. 36

6. 解:(1) $\frac{895}{80\ 050}\approx0.011\ 2$;$\frac{26\ 060}{80\ 050}\approx0.325\ 5$.

答:他今年去世的概率约为 0.011 2,他活到 80 岁的概率约为 0.325 5.

(2) 60 岁的人当年死亡的概率为$\frac{1\ 001}{75\ 098}$. 20 000 个 60 岁的人中当年死亡的人数为$\frac{1\ 001}{75\ 098}\times20\,000\approx267$. 所以预计保险公司需付的赔偿金总额约为 $267a$ 元.

专题强化篇

专题强化 1　二次函数的图像与性质

1. C　2. B

3. A　提示:①$y_1-y_2=-2x-7$,在 $1\leqslant x\leqslant2$ 上,当 $x=1$ 时,y_1-y_2 的最大值为-9,当 $x=2$ 时,y_1-y_2 的最小值为-11,即$-11\leqslant y_1-y_2\leqslant-9$,所以函数 $y_1=x-5$,$y_2=3x+2$ 在 $1\leqslant x\leqslant2$ 上不是“逼近函数”,故①错误;②$y_1-y_2=-x^2+5x-5$,在 $3\leqslant x\leqslant4$ 上,当 $x=3$ 时,y_1-y_2 的最大值为 1,当 $x=4$ 时,y_1-y_2 的最小值为-1,即$-1\leqslant y_1-y_2\leqslant1$,故函数 $y_1=x-5$,$y_2=x^2-4x$ 在 $3\leqslant x\leqslant4$ 上是“逼近函数”,故②正确;③$y_1-y_2=-x^2+x-1$,在 $0\leqslant x\leqslant1$ 上,当 $x=\frac{1}{2}$ 时,y_1-y_2 的最大值为$-\frac{3}{4}$,当 $x=0$ 或 $x=1$ 时,y_1-y_2 的最小值为-1,即$-1\leqslant y_1-y_2\leqslant-\frac{3}{4}$,当然$-1\leqslant y_1-y_2\leqslant1$ 也成立,故 $0\leqslant x\leqslant1$ 是函数 $y_1=x^2-1$,$y_2=2x^2-x$ 的“逼近区间”,故③正确;④$y_1-y_2=-x^2+5x-5$,在 $2\leqslant x\leqslant3$ 上,当 $x=\frac{5}{2}$时,y_1-y_2 的最大值为$\frac{5}{4}$,当

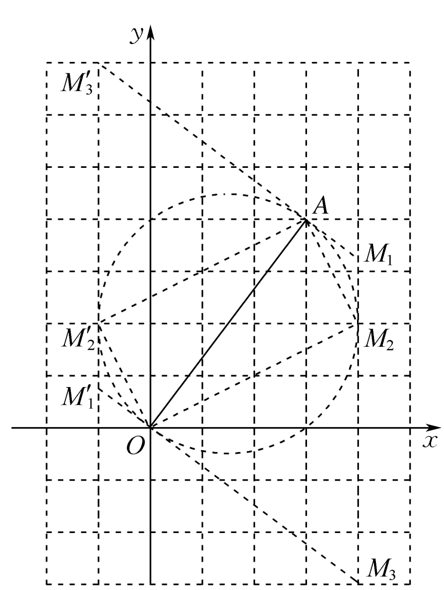
$x=2$ 或 $x=3$ 时，y_1-y_2 的最小值为 1，即 $1\leqslant y_1-y_2\leqslant\frac{5}{4}$，故 $2\leqslant x\leqslant 3$ 不是函数 $y_1=x-5$，$y_2=x^2-4x$ 的“逼近区间”，故④错误. 综上所述，正确的结论有②③.

4. C　**提示：**由题意，得 $a>0$，二次函数的对称轴为直线 $x=\frac{1+m}{2}$，且 $-\frac{1}{2}<\frac{1+m}{2}<0$，所以 $-\frac{b}{2a}<0$，所以 $b>0$，故①错误. 当 $m=-\frac{4}{3}$ 时，二次函数的对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=\frac{-\frac{4}{3}+1}{2}=-\frac{1}{6}$，所以 $b=\frac{1}{3}a$，当 $x=1$ 时，$a+b+c=0$，所以 $\frac{4}{3}a+c=0$，所以 $4a+3c=0$，故②正确. 因为点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$ 在抛物线上，$x_1<x_2$，且 $x_1+x_2<-1$，所以 $\frac{x_1+x_2}{2}<-\frac{1}{2}$，所以点 M 到对称轴的距离大于点 N 到对称轴的距离，所以 $y_1>y_2$，故③错误；可设抛物线的函数表达式为 $y=a(x-1)(x-m)$，令 $a(x-1)(x-m)=-1$，整理，得 $ax^2-a(1+m)x+am+1=0$，根的判别式 $[-a(1+m)]^2-4a(am+1)=a^2(m-1)^2-4a=a[a(m-1)^2-4]$，因为 $-2<m<-1$，$a\geqslant 1$，所以 $a(m-1)^2>4$，所以 $a(m-1)^2-4>0$，所以 $a[a(m-1)^2-4]>0$，所以关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=-1$ 必有两个不相等的实数根，故④正确.

5. $\frac{2n}{n+1}$　**提示：**根据题意，得点 $A_1\left(1,\frac{1}{2}\right)$，$A_2(2,2)$，…，$A_n\left(n,\frac{1}{2}n^2\right)$；点 $B_1\left(1,-\frac{1}{2}\right)$，$B_2(2,-1)$，…，$B_n\left(n,-\frac{1}{2}n\right)$. 所以 $A_1B_1=\left|\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|=1$，$A_2B_2=|2-(-1)|=3$，…，$A_nB_n=\left|\frac{1}{2}n^2-\left(-\frac{1}{2}n\right)\right|=\frac{n(n+1)}{2}$，所以 $\frac{1}{A_nB_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，所以 $\frac{1}{A_1B_1}+\frac{1}{A_2B_2}+\cdots+\frac{1}{A_nB_n}=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$.

6. $-2-\sqrt{5}\leqslant x\leqslant -2+\sqrt{5}$　**提示：**函数 $y=-x^2+2x+1$ 的对称轴为直线 $x=-\frac{2}{2\times(-1)}=1$，因为 $a=-1<0$，所以当 $x<1$ 时，y 随 x 的增大而增大. 设 $m\leqslant x\leqslant n<1$，则 $-m^2+2m+1\leqslant y\leqslant -n^2+2n+1$. 因为函数 $y=-x^2+2x+1$ 存在“6 级关联范围”，所以 $\begin{cases}-m^2+2m+1=6m,\\-n^2+2n+1=6n,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-2-\sqrt{5},\\n=-2+\sqrt{5}.\end{cases}$ 所以函数 $y=-x^2+2x+1(x<1)$ 的“6 级关联范围”是 $-2-\sqrt{5}\leqslant x\leqslant -2+\sqrt{5}$.

7. 2 或 -8　**提示：**如图，当 $\triangle AOM$ 为直角三角形时，点 M 存在于以 OA 为直径的圆上，或过点 A 且与 OA 垂直的直线上，或过点 O 且与 OA 垂直的直线上. 易知当抛物线的对称轴不是直线 $x=0$ 或 $x=3$ 时，一定存在两个分别以 A，O 为直角顶点，且点 M 在该对称轴上的直角三角形. 当对称轴为直线 $x=0$ 或 $x=3$ 时，不存在满足条件的点 M. 当以 OA 为直径的圆与抛物线的对称轴直线 $x=-\frac{b}{2a}$ 相切时，对称轴上存在 1 个以 M 为直角顶点的直角三角形，此时对称轴上存在 3 个不同的点 M，使 $\triangle AOM$ 为直角三角形(如图所示). 观察图像可知，此时 $-\frac{b}{2a}=-1$ 或 $-\frac{b}{2a}=4$，所以 $\frac{b}{a}=2$ 或 $\frac{b}{a}=-8$.



8. **解：**(1) 当 $a=b=4$ 时，联立直线与抛物线，得 $\begin{cases}y=4x,\\y=x^2-8x+20,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=2,\\y_1=8,\end{cases}$

$\begin{cases}x_2=10,\\y_2=40.\end{cases}$ 因为点 A 在点 B 的左侧,所以点 $A(2,8)$.

(2) $y_1=y_2$. 理由如下:

因为 $y=x^2-2ax+a^2+b=(x-a)^2+b$,所以抛物线的顶点为 $A(a,b)$. 因为点 A 也在直线 $y=ax+b-4$ 上,所以 $b=a\cdot a+b-4$,所以 $a=\pm2$. 当 $a=-2$ 时,由图像易知点 A 在点 B 的右侧,不合题意,舍去,所以 $a=2$,所以抛物线的对称轴是直线 $x=2$. 又因为 $x_1+x_2=4$,所以 $\frac{x_1+x_2}{2}=2$,所以点 C,D 关于对称轴对称,所以 $y_1=y_2$.

(3) 因为点 A 的横坐标为 4,所以 $x=4$ 是方程 $x^2-2ax+a^2+b=ax+b-4$ 的一个解,所以 $4^2-8a+a^2+b=4a+b-4$,所以 $a_1=2,a_2=10$. 当 $a=2$ 时,点 A 在点 B 的右侧,不合题意,舍去,所以 $a=10$,此时抛物线的函数表达式为 $y=(x-10)^2+b$. 当 $9<m\leqslant10$ 时,$(m-10)^2+b\leqslant y<b+1$,若满足 $b\leqslant y_1<6$,则 $b+1\leqslant6$,解得 $b\leqslant5$;当 $10<m\leqslant11$ 时,$b\leqslant y<b+1$,同理可得 $b\leqslant5$;当 $m>11$ 时,$b\leqslant y<(m-10)^2+b$,若满足 $b\leqslant y_1<6$,则 $(m-10)^2+b\leqslant6$,所以 $b\leqslant5$. 综上所述,$b\leqslant5$.

9. 解:(1) 由待定系数法可知,二次函数的表达式为 $y=-x^2-2x+3$.

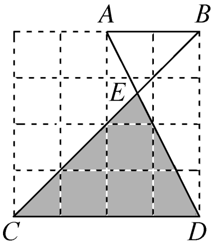
(2) $y=-x^2+6x-5$　$4\leqslant k\leqslant5$　**提示:**因为 $y=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$,所以图像向右平移 $k(k>0)$ 个单位长度后新图像的函数表达式为 $y=-(x-k+1)^2+4$,其对称轴为直线 $x=k-1$. 因为当 $-1<x<3$ 时,y 的值随 x 值的增大而增大;当 $4<x<5$ 时,y 的值随 x 值的增大而减小,且抛物线开口向下,所以 $3\leqslant k-1\leqslant4$,解得 $4\leqslant k\leqslant5$.

(3) 由条件可知,点 $A(m,-m^2-2m+3)$,$B(m+1,-m^2-4m)$,$C(-2-m,-m^2-2m+3)$. 过点 B 作 $BH\perp AC$ 于点 H,则 $BH=|-m^2-4m-(-m^2-2m+3)|=|-2m-3|$,$CH=|(-2-m)-(m+1)|=|-2m-3|$,所以 $BH=CH$,所以 $\triangle BHC$ 是等腰直角三角形,所以 $\angle HCB=45°$. 通过作图可知(图略),$\angle ACB=45°$ 或 $\angle ACB=135°$.

专题强化 2　构造相似三角形解决问题

1. A

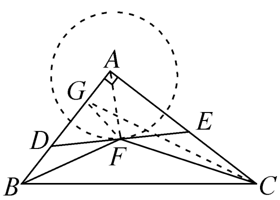
2. C　**提示:**如图,因为 $AB\parallel CD$,所以 $\triangle ABE\backsim\triangle DCE$,所以 $\frac{BE}{CE}=\frac{AB}{DC}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. 所以 $\frac{S_{\triangle BED}}{S_{\triangle CED}}=\frac{BE}{CE}=\frac{1}{2}$,所以 $S_{\triangle CED}=\frac{2}{3}S_{\triangle BCD}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times4=\frac{16}{3}$.



3. C　**提示:**连接 BC,BD,OA,OC,则 $\angle DCB=\angle DAB=90°$,所以 DB 为 $\odot O$ 的直径. 因为 C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点,所以 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$,所以 $\angle CDB=\angle CBE$. 因为 $\angle BCE=\angle DCB=90°$,所以 $\triangle CBE\backsim\triangle CDB$,所以 $\frac{CB}{CD}=\frac{CE}{CB}$,所以 $CE\cdot CD=CB^2=EB^2-CE^2$. 设 $CE=x$,则可得 $6x=16-x^2$,解得 $x_1=-8$(舍去),$x_2=2$. 所以 $CE=2=\frac{1}{2}EB$,所以 $\angle ABC=30°$,$CB=2\sqrt{3}$,所以 $\angle COB=\angle COA=2\angle ABC=60°$,所以 $\triangle OBC$ 为等边三角形,$\angle AOD=60°$,所以 $OB=CB=2\sqrt{3}$,即 $\odot O$ 的半径为 $2\sqrt{3}$,所以 $\overset{\frown}{AD}$ 的长为 $\frac{60\pi\times2\sqrt{3}}{180}=\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$.

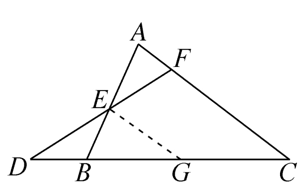
4. D　**提示:**如图,连接 AF,在 AB 上截取 $AG=1.5$,连接 FG,CG. 因为 $\angle BAC=90°$,F 为 DE 的中点,所以 $AF=\frac{1}{2}DE=3$,所以点 F 在以点 A 为圆心,AF 的长为半径的圆上. 因为 $\frac{AG}{AF}=\frac{1}{2}=\frac{AF}{AB}$,

$\angle GAF=\angle FAB$，所以$\triangle AGF\backsim\triangle AFB$，所以$\dfrac{GF}{FB}=\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{1}{2}$，所以$GF=\dfrac{1}{2}BF$，所以$\dfrac{1}{2}BF+CF=GF+CF$，所以当$G,F,C$三点共线时，$GF+CF$的值最小，即$\dfrac{1}{2}BF+CF$的值最小，最小值为$GC$的长. 由勾股定理，得$CG=\sqrt{AG^2+AC^2}=\sqrt{\dfrac{9}{4}+64}=\dfrac{\sqrt{265}}{2}$，所以$\dfrac{1}{2}BF+CF$的最小值为$\dfrac{\sqrt{265}}{2}$.

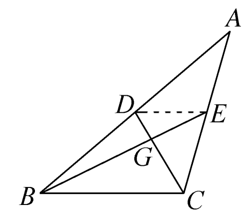


5. $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$

6. 7∶18　**提示：**如图，过点E作$EG/\!/AC$交DC于点G. 则$\triangle DEG\backsim\triangle DFC$，$\triangle BEG\backsim\triangle BAC$，所以$EG∶FC=DE∶DF=5∶9$，$BE∶BA=EG∶AC=2∶5$，即$FC=\dfrac{9}{5}EG$，$AC=\dfrac{5}{2}EG$. 所以$AF=AC-FC=\dfrac{7}{10}EG$，所以$AF∶FC=\dfrac{7}{10}EG∶\dfrac{9}{5}EG=7∶18$.

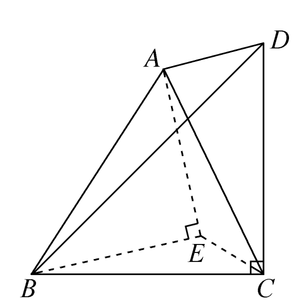


7. 24　**提示：**如图，连接DE. 因为D,E分别是AB，AC的中点，所以DE是$\triangle ABC$的中位线，所以$DE=\dfrac{1}{2}BC$，$DE/\!/BC$，所以$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，所以$\dfrac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{1}{4}$. 因为$BE\perp CD$，$BE=12$，$CD=9$，所以$S_{四边形BCED}=S_{\triangle BDE}+S_{\triangle BCE}=\dfrac{1}{2}BE\cdot DG+\dfrac{1}{2}BE\cdot CG=\dfrac{1}{2}BE\cdot CD=\dfrac{1}{2}\times12\times9=54$，所以$S_{\triangle ABC}=54\times\dfrac{4}{3}=72$，$S_{\triangle ADE}=72\times\dfrac{1}{4}=18$. 因为$E,D$分别是$AC,AB$的中点，所以$BE,CD$是$\triangle ABC$的中线，所以点$G$是$\triangle ABC$的重心. 所以$2DG=CG$，$2GE=BG$，所以$DG=3$，$GE=4$，所以$S_{\triangle DGE}=\dfrac{1}{2}\times3\times4=6$，所以$S_{四边形ADGE}=18+6=24$.



8. 5　**提示：**延长BA,CD相交于点G. 因为D是$\overset{\frown}{AC}$的中点，所以$\angle ACD=\angle ABD=\angle CBD$. 又因为$BC$为$\odot O$的直径，所以$\angle BDC=\angle BAC=90°$，易证$\triangle BCG$为等腰三角形，所以$BD$垂直平分$CG$，所以$CG=2CD=4\sqrt{5}$. 因为$\angle DCE=\angle ACG$，$\angle CDE=\angle CAG=90°$，所以$\triangle CDE\backsim\triangle CAG$，所以$\dfrac{CE}{CG}=\dfrac{CD}{CA}$，即$\dfrac{CE}{4\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{CE+3}$，解得$CE=5$或$CE=-8$(舍去). 所以$CE$的长为5.

9. $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$　**提示：**如图，在直线AB的右侧作等腰直角三角形ABE，使得$EB=EA$，$\angle AEB=90°$. 因为$AB=5$，所以$AE=BE=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$. 因为$\angle ABE=\angle DBC=45°$，所以$\angle ABD=\angle EBC$. 又因为$\dfrac{AB}{EB}=\dfrac{BD}{BC}=\sqrt{2}$，所以$\triangle ABD\backsim\triangle EBC$. 所以$\dfrac{AD}{EC}=\dfrac{BD}{BC}=\sqrt{2}$. 因为$AD=2$，所以$EC=\sqrt{2}$. 因为$AC\leqslant AE+EC$，所以$AC\leqslant\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$. 当$\angle BAC=45°$时，点$E$落在$AC$上，此时取等号.

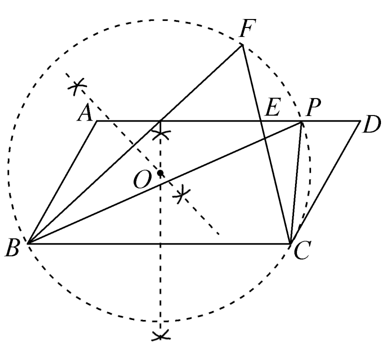


10. $\dfrac{4}{3}$　**提示：**延长CE,DA相交于点Q. 在$\mathrm{Rt}\triangle BAF$中，由勾股定理，得$BF=\sqrt{AB^2+AF^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$. 易证$\triangle QAE\cong\triangle CBE$，所以$AQ=BC=6$，所以

$QF=9$. 易证$\triangle QMF\backsim\triangle CMB$，所以$\dfrac{FM}{BM}=\dfrac{QF}{CB}=\dfrac{9}{6}$，所以$BM=2$，$FM=3$. 延长$BF$，$CD$相交于点$W$. 同理可得$DW=AB=4$，$CW=8$，$FW=BF=5$. 易证$\triangle BNE\backsim\triangle WND$，所以$\dfrac{BN}{WN}=\dfrac{BE}{WD}$，即$\dfrac{BN}{5-BN+5}=\dfrac{1}{2}$，所以$BN=\dfrac{10}{3}$. 所以$MN=BN-BM=\dfrac{4}{3}$.

11. (1) **证明**：因为四边形$ABCD$为平行四边形，所以$AD/\!/BC$，$AD=BC$，所以$\angle CED=\angle BCF$. 因为$CE\cdot FC=DE\cdot AD$，所以$\dfrac{CE}{AD}=\dfrac{DE}{FC}$，所以$\dfrac{CE}{BC}=\dfrac{DE}{FC}$. 所以$\triangle CED\backsim\triangle BCF$，所以$\angle D=\angle F$.

(2) **解**：如图，点P即为所求.



12. (1) **证明**：因为$AC=BC$，$\angle ACB=90^\circ$，所以$\angle ABC=\angle BAC=45^\circ$. 因为$PA=PD$，$\angle APD=90^\circ$，所以$\angle ADP=\angle DAP=45^\circ$，所以$\triangle ABC\backsim\triangle ADP$，所以$\dfrac{AC}{AP}=\dfrac{AB}{AD}$.

(2) **解**：$\angle PBD$的度数是定值，$\angle PBD=45^\circ$. 理由如下：

由(1)可知$\angle ABC=\angle ADP=45^\circ$，又因为$\angle AKB=\angle DKP$，所以$\triangle AKB\backsim\triangle PKD$，所以$\dfrac{AK}{BK}=\dfrac{PK}{DK}$，又因为$\angle AKP=\angle BKD$，所以$\triangle AKP\backsim\triangle BKD$，所以$\angle DBK=\angle PAK=45^\circ$，即$\angle PBD=45^\circ$，所以在点$P$运动过程中，$\angle PBD$的度数是定值，且$\angle PBD=45^\circ$.

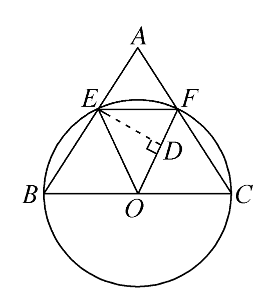
(3) **解**：在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，因为$AB=\sqrt{2}$，所以$BC=AC=1$. 在$\mathrm{Rt}\triangle ACP$中，$PA=\sqrt{AC^2+PC^2}=\sqrt{1+x^2}$，由(2)，得$\angle ADB=\angle APK$，$\angle DBK=\angle PAK=45^\circ$，所以$\angle ABD=\angle ABC+\angle DBK=90^\circ=\angle ACP$，所以$\triangle ABD\backsim\triangle ACP$，所以$\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{PC}{BD}$，所以$\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{x}{BD}$，所以$BD=\sqrt{2}x$，

所以$S=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle APD}-S_{\triangle ABP}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}x+\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+x^2}-\dfrac{1}{2}(1+x)\cdot1=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x$.

专题强化3　锐角三角函数与几何

1. C

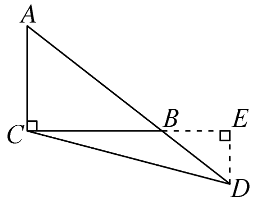
2. C　**提示**：如图，过点E作$ED\perp OF$于点D. 因为四边形$BCFE$是$\odot O$的内接四边形，所以$\angle BEF+\angle C=180^\circ$，又因为$\angle AEF+\angle BEF=180^\circ$，所以$\angle AEF=\angle C$. 因为$AB=AC$，所以$\angle B=\angle C$，所以$\angle AEF=\angle B$，所以$EF/\!/BC$. 因为$\tan\angle EOF=\dfrac{4}{3}$，所以可设$ED=4x$，$OD=3x$，所以$OE=OB=5x$，$DF=5x-3x=2x$，所以$EF=\sqrt{ED^2+DF^2}=2\sqrt{5}x$，所以$\dfrac{S_{\triangle EOF}}{S_{\triangle BOE}}=\dfrac{EF}{BO}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.



3. A　**提示**：过点C作$CH\perp AO$于点H. 由$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{2}{3}$，即$\dfrac{\frac{1}{2}OA\cdot CH}{\frac{1}{2}OB\cdot BE}=\dfrac{2}{3}$，得$\dfrac{CH}{BE}=\dfrac{2}{3}$. 易得$\angle A=\angle COD=\angle BOE$，所以$\tan A=\tan\angle BOE$，即$\dfrac{CH}{AH}=\dfrac{BE}{OB}$. 可得$\dfrac{AH}{OB}=\dfrac{CH}{BE}=\dfrac{2}{3}$. 设$AH=2m$，则

$OB=3m=OA=OC$，可得 $OH=OA-AH=m$，$CH=\sqrt{OC^2-OH^2}=2\sqrt{2}m$. 因为 $OA=OC$，所以 $\angle ACO=\angle A$，所以 $\tan\angle ACO=\tan A=\frac{CH}{AH}=\frac{2\sqrt{2}m}{2m}=\sqrt{2}$.

4. B **提示：**如图，过点 D 作 $DE\perp CB$，交 CB 的延长线于点 E. 因为 $AC\perp CB$，$DE\perp CB$，所以 $\angle ACB=\angle DEB=90°$. 在 Rt $\triangle ABC$ 中，$AC=6$，$\cos\angle BAC=\frac{3}{5}$，所以 $AB=\frac{AC}{\cos\angle BAC}=\frac{6}{\frac{3}{5}}=10$，所以 $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$. 在 Rt$\triangle DEC$ 中，$\tan\angle BCD=\frac{DE}{CE}=\frac{1}{4}$，所以可设 $DE=x$，则 $CE=4x$，所以 $BE=CE-BC=4x-8$. 因为 $\angle ABC=\angle EBD$，$\angle ACB=\angle DEB$，所以 $\triangle ABC\backsim DBE$，所以 $\frac{BE}{BC}=\frac{DE}{AC}$，所以 $\frac{4x-8}{8}=\frac{x}{6}$，解得 $x=3$，所以 $DE=3$，$BE=4x-8=4$，所以 $BD=\sqrt{BE^2+DE^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

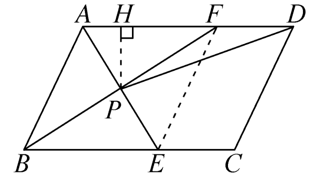


5. D **提示：**设 DE 交 AC 于点 T，过点 E 作 $EH\perp CD$ 于点 H. 因为 $\angle BAC=90°$，D 是边 BC 的中点，所以 $AD=BD=CD$，所以 $\angle B=\angle DAB$. 因为 $\angle B=\angle ADE$，所以 $\angle DAB=\angle ADE$，所以 $AB/\!/DE$，所以 $\angle DTC=\angle BAC=90°$. 因为 $DT/\!/AB$，$BD=DC$，所以 $AT=TC$，所以 $AE=CE=DE$，所以 $\angle EDC=\angle ECD$. 因为 $EH\perp CD$，所以 $CH=DH$. 因为 $DE/\!/AB$，所以 $\angle EDC=\angle B$. 所以 $\angle ECD=\angle B$，所以 $\cos\angle ECH=\cos B=\frac{1}{4}$，所以 $\frac{CH}{CE}=\frac{1}{4}$，所以 $\frac{CE}{AD}=\frac{CE}{CD}=\frac{CE}{2CH}=2$.

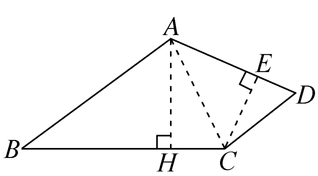
6. 17 或 7

7. $2\sqrt{2}a$ **提示：**连接 AB，过点 C 作 $CE\perp AD$ 于点 E. 因为 $\angle ACB=90°$，$AC=BC$，所以 AB 是 $\odot O$ 的直径，$\angle CDE=\angle CBA=45°$. 所以 $CE=DE=\frac{\sqrt{2}}{2}CD=\frac{\sqrt{2}}{2}a$. 因为 $\angle CAD=\angle CBD$，所以 $\tan\angle CAD=\tan\angle CBD=\frac{1}{3}$，即 $\frac{CE}{AE}=\frac{1}{3}$，所以 $AE=3CE=\frac{3\sqrt{2}}{2}a$. 所以 $AD=AE+DE=2\sqrt{2}a$.

8. 6 **提示：**如图，过点 P 作 $PH\perp AD$ 于点 H. 连接 EF，可证四边形 $ABEF$ 是菱形，可得 $AF=AB=4$，$\angle ABF=\angle AFB=30°$，$AP\perp BF$，所以 $AP=\frac{1}{2}AB=2$，$\angle FAP=60°$. 所以 $PH=\sqrt{3}$，$AH=1$. 由 $\tan\angle ADP=\frac{PH}{DH}=\frac{\sqrt{3}}{5}$，得 $DH=5$. 所以 $AD=AH+DH=6$.



9. $2\sqrt{6}+3$ **提示：**如图，过点 A 作 $AH\perp BC$ 于点 H，过点 C 作 $CE\perp AD$ 于点 E，连接 AC. 在 Rt$\triangle ABH$ 中，$\tan B=\frac{AH}{BH}=\frac{3}{4}$，设 $AH=3k$，则 $BH=4k$，所以 $AB=\sqrt{AH^2+BH^2}=5k=10$，所以 $k=2$，所以 $AH=6$，$BH=8$. 因为 $BC=10$，所以 $CH=BC-BH=2$，所以 $AC=\sqrt{AH^2+CH^2}=2\sqrt{10}$. 在 Rt$\triangle CED$ 中，$\angle D+\angle ECD=90°$，因为 $\angle B+\angle D=90°$，所以 $\angle ECD=\angle B$，所以 $\tan\angle ECD=\tan B=\frac{3}{4}$，所以 $\frac{DE}{CE}=\frac{3}{4}$. 因为 $CD=5$，所以 $DE=3$，$CE=4$，所以 $AE=\sqrt{AC^2-CE^2}=2\sqrt{6}$，所以 $AD=AE+DE=2\sqrt{6}+3$.



10. **解：**(1) 直线 BC 是 $\odot O$ 的切线. 理由如下：连接 OB. 因为 $CP=CB$，所以 $\angle CBP=\angle CPB$. 因为 $\angle APO=\angle CPB$，所以 $\angle CBP=\angle APO$. 因为 $OA=OB$，所以 $\angle PAO=\angle OBA$，所以 $\angle APO+\angle PAO=\angle CBP+\angle OBA$. 又因为 $OC\perp OA$，所以 $\angle AOP=$

90°. 所以 $\angle APO+\angle PAO=\angle CBP+\angle OBA=90^\circ$,所以 $\angle OBC=90^\circ$. 又因为点 B 在 $\odot O$ 上,所以直线 BC 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 设 $OP=a$,则由 $\sin A=\frac{OP}{AP}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,得 $AP=\sqrt{5}a$. 因为 $OA^2+OP^2=AP^2$,所以 $8^2+a^2=(\sqrt{5}a)^2$,解得 $a=4$(负值已舍). 过点 C 作 $CD\perp PB$,垂足为 D. 因为 $CP=CB$,所以 $DP=DB$. 因为 $\angle APO=\angle CPD$,所以 $\angle A=\angle PCD$. 所以 $\sin\angle PCD=\sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}$. 设 $PD=m$,则 $CB=CP=\sqrt{5}m$. 因为 $OB^2+CB^2=OC^2$,所以 $8^2+(\sqrt{5}m)^2=(4+\sqrt{5}m)^2$,解得 $m=\frac{6\sqrt{5}}{5}$. 所以 $CB=\sqrt{5}m=6$.

11. 解:(1) 8　**提示:**在矩形 $ABCD$ 中,$\angle ABC=90^\circ$,$AB=6$,$\sin\angle BAC=\frac{4}{5}$,所以 $\frac{BC}{AC}=\frac{4}{5}$,$AC^2=AB^2+BC^2$,所以可设 $BC=4x$,$AC=5x$,所以 $(5x)^2=(4x)^2+6^2$,解得 $x=2$(负值已舍),所以 $BC=2\times4=8$.

(2) 由(1),知 $AC=10$,在矩形 $ABCD$ 中,$AB=CD=6$,$AD=BC=8$. ①当 $CP=CD=6$ 时,$AP=AC-CP=10-6=4$;②当 $PD=PC$ 时,$\angle PDC=\angle PCD$,因为 $\angle PCD+\angle PAD=90^\circ=\angle PDC+\angle PDA$,所以 $\angle PAD=\angle PDA$,所以 $PD=PA$,所以 $PA=PC=\frac{1}{2}AC=5$;③当 $DP=DC$ 时,如图 1,过点 D 作 $DQ\perp AC$ 于点 Q,则 $PQ=CQ$,因为 $S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}AD\cdot DC=\frac{1}{2}AC\cdot DQ$,所以 $DQ=\frac{AD\cdot DC}{AC}=\frac{8\times6}{10}=\frac{24}{5}$,所以 $CQ=\sqrt{DC^2-DQ^2}=\sqrt{6^2-\left(\frac{24}{5}\right)^2}=\frac{18}{5}$,所以 $PC=2CQ=\frac{36}{5}$,所以 $AP=AC-CP=10-\frac{36}{5}=\frac{14}{5}$. 综上所述,$AP$ 的长为 4 或 5 或 $\frac{14}{5}$.

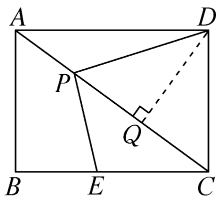


图 1

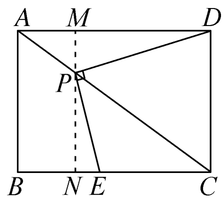


图 2

(3) ① $\frac{3}{4}$　**提示:**设 $AP=x$,如图 2,过点 P 作 $MN\perp BC$,分别交 BC,AD 于点 N,M,则 $MN/\!/CD$. 所以 $\angle AMP=\angle ADC$,$\angle APM=\angle ACD$,所以 $\triangle AMP\backsim\triangle ADC$,所以 $\frac{AP}{AC}=\frac{AM}{AD}=\frac{PM}{CD}$,即 $\frac{x}{10}=\frac{AM}{8}=\frac{PM}{6}$,所以 $PM=\frac{3}{5}x$,$AM=\frac{4}{5}x$,所以 $PN=6-\frac{3}{5}x$,$DM=8-\frac{4}{5}x$. 因为 $\angle MPD+\angle MDP=\angle MPD+\angle NPE=90^\circ$,所以 $\angle MDP=\angle NPE$. 又因为 $\angle DMP=\angle PNE=90^\circ$,所以 $\triangle DMP\backsim\triangle PNE$,所以 $\frac{DM}{PN}=\frac{PD}{PE}=\frac{PM}{NE}=\frac{8-\frac{4}{5}x}{6-\frac{3}{5}x}=\frac{4}{3}$,所以 $\frac{PE}{PD}=\frac{3}{4}$.

②如图 3,连接 PF,DE,设 PF 与 DE 的交点为 O,连接 OC. 因为四边形 $ABCD$ 和四边形 $PEFD$ 均为矩形,所以 $\angle ADC=\angle PDF=90^\circ$,所以 $\angle ADP+\angle PDC=\angle PDC+\angle CDF$,所以 $\angle ADP=\angle CDF$,因为 $\angle BCD=90^\circ$,$OE=OD$,所以 $OC=\frac{1}{2}ED$. 在矩形 $PEFD$ 中,$PF=DE$,所以 $OC=\frac{1}{2}PF$. 因为 $OP=OF=\frac{1}{2}PF$,所以 $OC=OP=OF$,所以 $\angle OCF=\angle OFC$,$\angle OCP=\angle OPC$. 因为 $\angle OPC+\angle OFC+\angle PCF=180^\circ$,所以 $2\angle OCP+2\angle OCF=$

$180°$，所以$\angle PCF=90°$，所以$\angle PCD+\angle FCD=90°$. 在$Rt\triangle ADC$中，$\angle PCD+\angle PAD=90°$，所以$\angle FCD=\angle PAD$，所以$\triangle ADP\backsim\triangle CDF$，所以$\frac{CF}{AP}=\frac{CD}{AD}=\frac{3}{4}$. 因为$AP=\sqrt{2}$，所以$CF=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

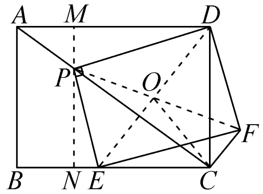


图 3

专题强化 4　以二次函数为背景的综合问题

1. C

2. C　**提示:** 由图像顶点(2,9)可设该二次函数的表达式为$y=a(x-2)^2+9(a\neq 0)$. 将点(8,0)代入，得$0=36a+9$，解得$a=-\frac{1}{4}$，所以$y=-\frac{1}{4}(x-2)^2+9=-\frac{1}{4}x^2+x+8$，故①错误. 因为$5.5-2>2-(-1)$，所以点$A$到对称轴的距离大于点$B$到对称轴的距离，又因为函数图像开口向下，所以$m<n$，故②正确. 因为图像的对称轴为直线$x=2$，且抛物线与$x$轴的一个交点为(8,0)，所以图像与$x$轴另一个交点的横坐标为$2\times 2-8=-4$，故③正确. 由图像可得，当$x=0$时，$y=8$；当$x=5.5$时$y=m$；当$x=2$时，$y=9$. 所以$0<x<5.5$时，$m<y\leqslant 9$，故④错误.

3. (3,0)　**提示:** 将$y=0$代入二次函数，得$-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+4=0$，解得$x_1=-2$，$x_2=8$，所以点$B(-2,0)$，$C(8,0)$，所以$BC=8-(-2)=10$，将$x=0$代入二次函数，得$y=4$，所以点$A(0,4)$，所以$OA=4$. 设点$N(n,0)(-2<n<8)$，则$BN=n+2$，$CN=8-n$，所以$S_{\triangle ABN}=\frac{1}{2}BN\cdot OA=\frac{1}{2}(n+2)\times 4=2n+4$，因为$MN\parallel AC$，所以$\frac{AM}{AB}=\frac{NC}{BC}=\frac{8-n}{10}$，所以$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABN}}=\frac{AM}{AB}=\frac{8-n}{10}$，所以$S_{\triangle AMN}=\frac{8-n}{10}\cdot S_{\triangle ABN}=\frac{8-n}{10}\cdot(2n+4)=-\frac{1}{5}(n-3)^2+5$，因为$-\frac{1}{5}<0$，所以当$n=3$，即点$N(3,0)$时，$\triangle AMN$的面积最大.

4. $y=\frac{8}{3}x^2$

5. $\sqrt{3}$　**提示:** 由题函数图像得，当点F与点A重合时，$EF+BF=y=3$，如图1，此时$EF+BF=AE+AB=3$，因为E为AB的中点，所以$AE=\frac{1}{2}AB$，所以$AE+AB=\frac{3}{2}AB=3$，所以$AB=2$，因为四边形$ABCD$为菱形，所以$AB=BC=CD=AD=2$.

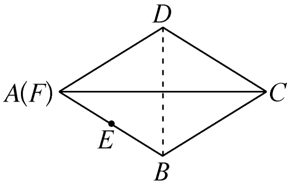


图 1

当点F与点C重合时，$EF+BF=y=2+\sqrt{7}$，如图2，过点E作$EG\perp AC$，垂足为G，设AC与BD交于点H，此时$EF+BF=BC+EF=2+\sqrt{7}$，所以$EF=\sqrt{7}$，因为$EG\perp AC$，$BD\perp AC$，所以$EG\parallel BD$，所以$\triangle AGE\backsim\triangle AHB$，所以$\frac{AG}{AH}=\frac{AE}{AB}=\frac{1}{2}$，所以$AH=2AG$，因为四边形$ABCD$为菱形，所以$AC=2AH=4AG$，所以$CG=AC-AG=3AG$. 设$AG=x$，则$CG=3x$，在$Rt\triangle AGE$中，$EG^2=AE^2-AG^2=1-x^2$，在$Rt\triangle EFG$中，$EF^2=EG^2+CG^2$，即$(\sqrt{7})^2=1-x^2+9x^2$，解得$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$(负值已舍)，所以$AC=4x=2\sqrt{3}$，$AH=2x=\sqrt{3}$，所以$BD=2BH=2\sqrt{AB^2-AH^2}=2$.

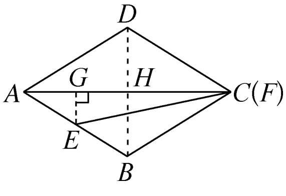


图 2

如图3，连接DF，DE，易证$DF=BF$，所以$EF+BF=EF+DF\geqslant DE$，当E，F，D三点共线时，$EF+BF$有最小值，最小值为DE的长. 因为$AB=AD=BD=2$，E为AB的中点，所以$DE\perp AB$，所

以 $DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=\sqrt{3}$，所以 y 的最小值是 $\sqrt{3}$.

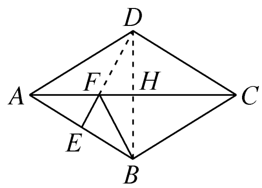


图 3

6. 4　**提示：**① 当 $\angle OQP=90°$，$\angle POQ=\angle OAH=60°$ 时，$\triangle OPQ\cong\triangle AOH$，则点 A，P 重合. 由于 $\angle AOH=30°$，故可设点 $A(a,b)$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle OAH$ 中，$\tan\angle AOH=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{b}{a}$，则 $b=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，所以点 $A\left(a,\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)$. 因为点 A，P 重合，所以点 $P\left(a,\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)$. 因为点 P 在抛物线 $y=x^2$ 上，所以 $\frac{\sqrt{3}}{3}a=a^2$，解得 $a=0$（舍去）或 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故点 $A\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{3}\right)$. ② 当 $\angle PQO=90°$，$\angle POQ=\angle AOH=30°$ 时，$\triangle POQ\cong\triangle AOH$. 易知 $\angle POH=60°$，则直线 OP 的函数表达式为 $y=\sqrt{3}x$. 联立方程组，得 $\begin{cases}y=\sqrt{3}x,\\y=x^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\y=0\end{cases}$（舍去）或 $\begin{cases}x=\sqrt{3},\\y=3,\end{cases}$ 故点 $P(\sqrt{3},3)$，所以点 $A(3,\sqrt{3})$. ③ 当 $\angle OPQ=90°$，$\angle POQ=\angle AOH=30°$ 时，$\triangle QOP\cong\triangle AOH$. 由②可知点 $P(\sqrt{3},3)$，所以 $OH=OP=2\sqrt{3}$，$AH=QP=2$，所以点 $A(2\sqrt{3},2)$. ④ 当 $\angle OPQ=90°$，$\angle POQ=\angle OAH=60°$ 时，$\triangle OQP\cong\triangle AOH$. 此时直线 OP 的函数表达式为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$. 联立抛物线的函数表达式，得 $\begin{cases}y=\frac{\sqrt{3}}{3}x,\\y=x^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\y=0\end{cases}$（舍去）或 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{3},\\y=\frac{1}{3},\end{cases}$ 所以点 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{3}\right)$，所以 $OH=QP=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$AH=OP=\frac{2}{3}$，所以点 $A\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2}{3}\right)$. 综上所述，符合条件的点 A 有 4 个，且坐标分别为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{3}\right)$，$(3,\sqrt{3})$，$(2\sqrt{3},2)$，$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2}{3}\right)$.

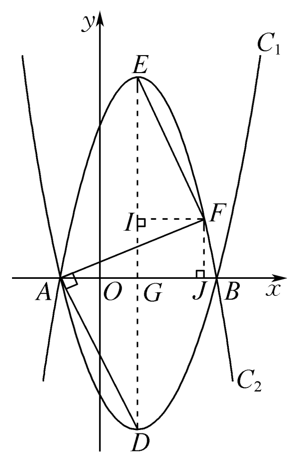
7. ①③④　**提示：**因为点 A，B 的坐标分别为 $(-3,-2)$ 和 $(1,-2)$，所以线段 AB 与 y 轴的交点坐标为 $(0,-2)$，又因为抛物线的顶点在线段 AB 上运动，抛物线与 y 轴的交点坐标为 $(0,c)$，所以 $c\geqslant-2$，故①正确；因为抛物线的顶点在线段 AB 上运动，开口向上，所以当 $x>1$ 时，一定有 y 的值随 x 值的增大而增大，故②错误；若点 D 横坐标的最小值为 -5，则此时抛物线的对称轴为直线 $x=-3$，所以点 C 的横坐标为 -1，$CD=4$，因为抛物线的形状不变，所以当对称轴为直线 $x=1$ 时，点 C 的横坐标为 3，所以点 C 横坐标的最大值为 3，故③正确；令 $y=0$，则 $ax^2+bx+c=0$，设该方程的两根分别为 x_1，x_2，则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$，所以 $CD^2=(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-4\cdot\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{a^2}$，根据顶点坐标公式，得 $\frac{4ac-b^2}{4a}=-2$，所以 $\frac{b^2-4ac}{a}=8$，所以 $CD^2=\frac{8}{a}$，因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形，所以 $CD=AB=1-(-3)=4$，所以 $\frac{8}{a}=4^2=16$，解得 $a=\frac{1}{2}$，故④正确.

8. 解：(1) 将点 $A(-1,0)$，$B(3,0)$ 分别代入 $y=x^2+bx+c$，得 $\begin{cases}1-b+c=0,\\9+3b+c=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-2,\\c=-3.\end{cases}$ 所以图像 C_1 对应的函数表达式为 $y=x^2-2x-3$.

(2) 设图像 C_2 对应的函数表达式为 $y=a(x+1)(x-3)(a<0)$，将点 $C(0,6)$ 代入，得 $-3a=6$，解得 $a=-2$. 所以图像 C_2 对应的函数表达式为 $y=-2(x+1)(x-3)$. 易知图像 C_1，C_2 的对称轴均为直线 $x=\frac{-1+3}{2}=1$，设直线 $x=1$ 交直线 l 于点 H. 由二次函数的对称性，得 $QH=PH$，$NH=MH$. 所以 $NH-QH=MH-PH$，即 $QN=MP$. 因为 $PH+QH=PQ=MP+QN$，所以 $PH=MP$. 设 $PH=t(0<t<2)$，则点 P 的横坐标为 $t+1$，点 M 的横坐标为 $2t+1$. 将 $x=t+1$ 代

入 $y=-2(x+1)(x-3)$，得 $y_P=-2(t+2)(t-2)$，将 $x=2t+1$ 代入 $y=(x+1)(x-3)$，得 $y_M=(2t+2)(2t-2)$. 因为 $y_P=y_M$，所以 $-2(t+2)(t-2)=(2t+2)(2t-2)$，解得 $t_1=\sqrt{2}$，$t_2=-\sqrt{2}$（舍去）. 所以点 P 的坐标为$(\sqrt{2}+1,4)$.

(3) 如图，连接 DE，交 x 轴于点 G，过点 F 分别作 $FI\perp DE$ 于点 I，$FJ\perp x$ 轴于点 J. 易证四边形 $IGJF$ 为矩形，所以 $IF=GJ$，$IG=FJ$. 设图像 C_2 对应的函数表达式为 $y=a(x+1)(x-3)(a<0)$. 将 $x=1$ 分别代入 $y=x^2-2x-3$，$y=a(x+1)(x-3)(a<0)$，得 $y_D=-4$，$y_E=-4a$，所以点 $D(1,-4)$，$E(1,-4a)$，所以 $DG=4$，$AG=2$，$EG=-4a$. 所以在 $\mathrm{Rt}\triangle AGD$ 中，$\tan\angle ADG=\frac{AG}{DG}=\frac{1}{2}$. 因为 $AF\perp AD$，所以$\angle FAB+\angle DAG=90°$. 又因为$\angle DAG+\angle ADG=90°$，所以$\angle ADG=\angle FAB$. 所以 $\tan\angle FAB=\frac{FJ}{AJ}=\tan\angle ADG=\frac{1}{2}$，所以 $FJ=\frac{1}{2}AJ$. 设 $GJ=m(0<m<2)$，则 $FI=m$，$OJ=1+m$，$AJ=2+m$. 所以 $FJ=\frac{2+m}{2}$，所以点 $F\left(1+m,\frac{2+m}{2}\right)$. 因为点 F 在抛物线 C_2 上，所以 $a(1+m+1)(1+m-3)=\frac{2+m}{2}$，即 $a(m+2)(m-2)=\frac{2+m}{2}$. 因为 $m+2\neq 0$，所以 $a(m-2)=\frac{1}{2}$. 因为 $EF\parallel AD$，所以 $\angle FEI=\angle ADG$. 所以 $\tan\angle FEI=\frac{FI}{EI}=\tan\angle ADG=\frac{1}{2}$，所以 $EI=2m$. 又因为 $EG=EI+IG$，所以 $2m+\frac{2+m}{2}=-4a$，所以 $a=-\frac{2+5m}{8}$. 所以$-\frac{2+5m}{8}(m-2)=\frac{1}{2}$，解得 $m_1=0$（舍去），$m_2=\frac{8}{5}$，所以 $a=-\frac{5}{4}$. 所以图像 C_2 的函数表达式为 $y=-\frac{5}{4}(x+1)(x-3)=-\frac{5}{4}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{15}{4}$.



9. 解：(1) 对于 $y=-x^2+2x+3$，令 $x=0$，则 $y=3$，可得点 C 的坐标为$(0,3)$. 令 $y=0$，则$-x^2+2x+3=0$，解得 $x=-1$ 或 $x=3$. 故点 B 的坐标为$(3,0)$，设直线 BC 的函数表达式为 $y=kx+b$，则$\begin{cases}b=3,\\3k+b=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-1,\\b=3.\end{cases}$所以直线 BC 对应的函数表达式为 $y=-x+3$.

(2) 不存在实数 m 使得 $y_1+2y_2=10$. 理由如下：

解法 1 把点 $M(m,y_1)$，$N(m+2,y_2)$代入二次函数 $y=-x^2+2x+3$ 中，可得 $y_1=-m^2+2m+3$，$y_2=-(m+2)^2+2(m+2)+3=-m^2-2m+3$，所以 $y_1+2y_2=-m^2+2m+3+2(-m^2-2m+3)=-3m^2-2m+9$，配方，得 $y_1+2y_2=-3\left(m+\frac{1}{3}\right)^2+9\frac{1}{3}$. 当 $m=-\frac{1}{3}$时，y_1+2y_2 取得最大值 $9\frac{1}{3}<10$. 故不存在实数 m 使得 $y_1+2y_2=10$.

解法 2 由解法 1，得 $y_1+2y_2=-3m^2-2m+9$. 当 $y_1+2y_2=10$ 时，即$-3m^2-$

$2m+9=10$,整理,得 $3m^2+2m+1=0$. 因为根的判别式 $4-12=-8<0$,所以方程没有实数根. 所以不存在实数 m 使得 $y_1+2y_2=10$.

(3) $m=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$或 $m=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. **提示:**由题意可知,点 P,M 位于直线 BC 异侧,点 P,N 位于直线 BC 同侧. 分图1,图2两种情况. 过点 N 作 $NH/\!/y$ 轴,交 x 轴于点 H,交 BC 于点 N',过点 P 作 $PQ\perp NH$,垂足为 Q,过点 M 作 $MM'/\!/y$ 轴,交 BC 于点 M',则 $MM'/\!/NN'$. 当 $x=1-m$ 时,$y=-(1-m)^2+2(1-m)+3=-m^2+4$. 所以点 P 的坐标为$(1-m,-m^2+4)$. 因为点 N 的坐标为$(m+2,-m^2-2m+3)$,所以点 Q 的坐标为$(m+2,-m^2+4)$,点 H 的坐标为$(m+2,0)$,点 N'的坐标为$(m+2,-m+1)$. 所以 $NN'=|-m^2-m+2|$,$NQ=PQ=|2m+1|$,$BH=HN'=|-m+1|$. 所以 $\angle PNQ=\angle BN'H=45°$. 所以 $PN/\!/BC$,所以 $\triangle MDE\backsim\triangle MNP$. 所以 $\left(\frac{MD}{MN}\right)^2=\frac{1}{4}$,所以 $MD=\frac{1}{2}MN$,即 $MD=ND$. 因为 $MM'/\!/NN'$,所以 $\triangle MM'D\backsim\triangle NN'D$. 所以 $\frac{MM'}{NN'}=\frac{MD}{ND}=1$,即 $MM'=NN'$. 因为点 M 的坐标为$(m,-m^2+2m+3)$,所以点 M'的坐标为$(m,-m+3)$. 所以 $MM'=|-m^2+2m+3-(-m+3)|=|m^2-3m|$,所以 $|m^2-3m|=|-m^2-m+2|$,当 $m^2-3m=-m^2-m+2$,即 $m^2-m-1=0$ 时,解得 $m=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $m=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. 当 $m^2-3m=m^2+m-2$ 时,解得 $m=\frac{1}{2}$,此时点 M 与点 P 重合,舍去.

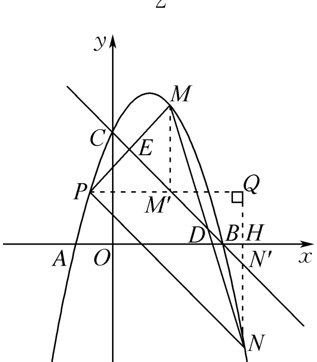


图 1

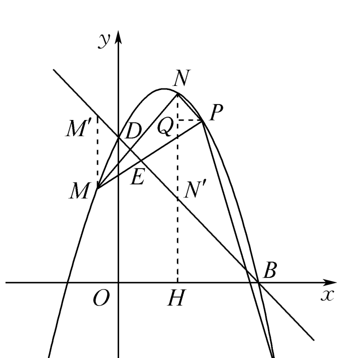


图 2

阶段检测篇

第 5 章检测卷

1. C **2.** C **3.** A **4.** C

5. C **提示:**设每个房间每晚收费提高 x 个 20 元,收入为 y 元,则 $y=(200+20x)(150-10x)$. 所以 $y=-200x^2+1\ 000x+30\ 000=-200\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+31\ 250$. 因为 x 取整数,所以当 $x=2$ 或 $x=3$ 时,y 的值最大. 又因为当 $x=3$ 时,减少 30 个房间,所以投资更少. 为了投资少而获利大,所以每个房间每晚收费应提高 60 元.

6. B **提示:**因为 $y=-x^2+2ax-a^2+3a-2=-(x-a)^2+3a-2$,所以抛物线开口向下,对称轴为直线 $x=a$,顶点坐标为$(a,3a-2)$. 因为二次函数 $y=-x^2+2ax-a^2+3a-2$(a 为常数)的图像上有且仅有两个点到 x 轴的距离等于 3 个单位长度,所以 $-3<3a-2<3$,所以 $-\frac{1}{3}<a<\frac{5}{3}$.

7. B **提示:**由 $y=x^2-2x+a+2=(x-1)^2+a+1$ 知,该抛物线的对称轴为直线 $x=1$,顶点坐标为$(1,a+1)$. 当抛物线与线段 BC 只有一个交点时,$a+1=3$,$a=2$;当抛物线经过点 B 时,有 $3=4+a+1$,解得 $a=-2$;当抛物线经过点 C 时,有 $3=1+a+1$,解得 $a=1$. 所以 a 的取值范围是 $-2\leqslant a\leqslant 2$.

8. D **提示:**因为 $y=ax^2-4ax+3$,所以二次函数的对称轴为直线 $x=-\frac{-4a}{2a}=2$. 因为点 $A(m-1,y_1)$,$B(m+3,y_2)$,$C(2,y_3)$在二次函数 $y=ax^2-4ax+3(a\neq 0)$的图像上,且 $y_3\leqslant y_2\leqslant y_1$,所以 $a>0$,且$|m+3-2|<|m-1-2|$. 所以$|m+1|<|m-3|$. 当 $m\geqslant 3$ 时,$m+1<m-3$,此不等式无解. 当 $-1<m<3$ 时,$m+1<3-m$,解得 $m<1$,此时 $-1<m<1$. 当 $m\leqslant -1$ 时,$-m-1<3-m$,恒成立. 综上所述,m 的取值范围是 $m<1$.

9. 3 **10.** $m\geqslant 4$ **11.** $-\frac{4}{7}$

12. $-3<x<1$ **13.** 48

14. $\frac{2}{3}$ **提示:**因为 $y=ax^2+2ax+1=a(x^2+2x+1)+1-a=a(x+1)^2+1-a$,所以 $m=-1$,$k=1-$

a. 因为抛物线 $y=ax^2+2ax+1(a>0)$ 的“相对深度”为 6,所以 $y_0-k=6$,所以 $y_0=6+k=6+1-a=7-a$. 因为 $\frac{y_0-k}{x_0-m}=2$,所以 $x_0-m=3$,所以 $x_0=m+3=-1+3=2$,所以点 $P(2,7-a)$,所以 $7-a=a(2+1)^2+1-a$,解得 $a=\frac{2}{3}$.

15. $m>3$

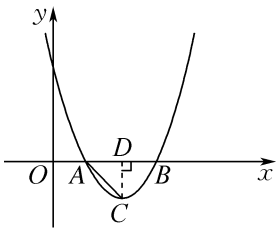
16. $m>-\frac{5}{2}$ **提示:**因为正整数 a,b,c 恰好是一个三角形的三边长,且 $a<b<c$,所以 $a>c-b\geqslant 1$,a 最小是 2,b 最小是 3. 因为 $y_1<y_2<y_3$,抛物线开口向上,所以 $-\frac{m}{2\times\frac{1}{2}}<\frac{2+3}{2}$,解得 $m>-\frac{5}{2}$.

17. ①③⑤ **提示:**根据抛物线的开口向下,得 $a<0$. 根据抛物线的对称轴在 y 轴左侧,得 $-\frac{b}{2a}<0$,所以 $b<0$. 根据抛物线与 y 轴的交点在 y 轴正半轴上,得 $c>0$,所以 $abc>0$,故①正确. 因为直线 $x=-1$ 是抛物线的对称轴,所以 $-\frac{b}{2a}=-1$,所以 $b=2a$. 所以 $a-2b+4c=a-4a+4c=-3a+4c$. 因为 $a<0,c>0$,所以 $-3a>0,4c>0$. 所以 $-3a+4c>0$,即 $a-2b+4c>0$,故②错误. 因为抛物线的对称轴是直线 $x=-1$,且过点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$,所以抛物线与 x 轴的另一个交点的坐标为 $\left(-\frac{5}{2},0\right)$. 当 $x=-\frac{5}{2}$ 时,$y=0$,即 $a\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{5}{2}b+c=0$. 整理,得 $25a-10b+4c=0$,故③正确. 当 $x=1$ 时,$y<0$,所以 $a+b+c<0$. 又因为 $b=2a$,所以 $\frac{1}{2}b+b+c<0$,即 $3b+2c<0$,故④错误. 因为当 $x=-1$ 时,函数值最大,所以 $a-b+c\geqslant a\cdot(-m)^2+b\cdot(-m)+c$,即 $a-b+c\geqslant am^2-bm+c$,所以 $a-b\geqslant m(am-b)$,故⑤正确.

18. $\frac{4}{9}$ **提示:**如图,过点 C 作 $CD\perp x$ 轴于点 D. 由题意可知 $AD=DB=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 6=3$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中,由勾股定理,易得 $CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=4$. 设点 $A(m,0)$,则点 $B(m+6,0)$,$C(m+3,-4)$.

解法 1 易得抛物线的函数表达式为 $y=a(x-m)\cdot(x-m-6)$,将点 $C(m+3,-4)$ 代入,得 $-4=a\cdot(m+3-m)(m+3-m-6)$,解得 $a=\frac{4}{9}$.

解法 2 另设抛物线交 x 轴于点 A,B 的横坐标为 x_1,x_2,则 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\left(\frac{-b}{a}\right)^2-\frac{4c}{a}}=\sqrt{\frac{4}{a}}\cdot\sqrt{-\frac{(4ac-b^2)}{4a}}$,即 $6=\sqrt{\frac{4}{a}}\cdot\sqrt{-(-4)}$,解得 $a=\frac{4}{9}$.



19. **解:**(1) 在 $y_2=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x$ 中,当 $y_2=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x=0$ 时,解得 $x=0$ 或 $x=6$,所以点 $A(6,0)$. 将点 $A(6,0)$ 代入 $y_1=kx+3$,得 $6k+3=0$,解得 $k=-\frac{1}{2}$.

(2) 由(1)可得 $y_1=-\frac{1}{2}x+3$,联立,得

$$\begin{cases}y_1=-\frac{1}{2}x+3,\\ y_2=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}x=2,\\ y=2\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=6,\\ y=0,\end{cases}$$

所以点 $C(2,2)$.

(3) 由函数图像可知,当 $x<2$ 或 $x>6$ 时,$y_1>y_2$.

20. (1) **证明:**当 $y=0$ 时,$x^2-(a-1)x+a-2=0$. 因为根的判别式 $[-(a-1)]^2-4(a-2)=(a-3)^2\geqslant 0$,所以不论 a 为何值,关于 x 的方程 $x^2-(a-1)x+a-2=0$ 总有实数根,所以该二次函数的图像与 x 轴一定有公共点.

(2) **解:**当 $a=4$ 时,$y=x^2-3x+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$,所以点 $A\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$. 当 $y=0$ 时,$x^2-3x+2=0$,解得 $x_1=1,x_2=2$,所以点

$B(1,0)$，$D(2,0)$. 当 $x=0$ 时，$y=2$，所以点 $C(0,2)$. 所以 $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times1\times2=\frac{9}{8}$. 所以四边形 $ABCD$ 的面积为$\frac{9}{8}$.

21. 解：(1) 将点$(5,0)$，$(7,16)$代入 $y=ax^2+bx-75$，得$\begin{cases}25a+5b-75=0,\\49a+7b-75=16,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-1,\\b=20.\end{cases}$

所以 $y=-x^2+20x-75=-(x-10)^2+25$，其顶点坐标是$(10,25)$. 所以当销售单价为 10 元/件时，该种商品每天的销售利润最大，最大利润为 25 元.

(2) 因为函数 $y=-x^2+20x-75$ 图像的对称轴为直线 $x=10$，所以点$(7,16)$关于对称轴对称的点坐标是$(13,16)$. 又因为函数 $y=-x^2+20x-75$ 的图像开口向下，所以当 $7\leqslant x\leqslant13$ 时，$y\geqslant16$. 所以当销售单价不低于 7 元/件且不超过 13 元/件时，该种商品每天的销售利润不低于 16 元.

22. 解：(1) 由题意可知，抛物线过点$(0,0)$，$(1,0.5)$，$(4,0)$. 利用待定系数法，易得绳子所对应的抛物线的函数表达式为 $y=-\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{3}x$.

(2) ①绳子会碰到小丽的头. 理由如下：

因为小丽在小亮拿绳子手的左侧 1.5 m 处，所以小丽在原点的右侧 $4-1.5=2.5$(m)处. 当 $x=2.5$ 时，$y=-\frac{1}{6}\times2.5^2+\frac{2}{3}\times2.5=0.625$. 因为 $1+0.625=1.625<1.65$，所以绳子会碰到小丽的头.

②$1.65-1=0.65$，当 $y=0.65$ 时，$0.65=-\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{3}x$. 整理，得 $10x^2-40x+39=0$，解得 $x=2\pm\frac{\sqrt{10}}{10}$. 因为$\sqrt{10}\approx3.16$，所以 $x_1\approx2.316$，$x_2\approx1.684$. 易得 d 的取值范围约为 $1.684<d<2.316$.

23. 解：(1) 因为二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$，其图像上有不同的两点坐标分别为(m,n)，$(2-m,n)$，所以对称轴为直线 $x=\frac{m+2-m}{2}=1$，抛物线开口向上，所以当 $x=1$，最小值 $p=-4$，所以该二次函数图像的顶点坐标为$(1,-4)$.

(2)由(1)可知，点(m,n)在 $y=a(x-1)^2+p$ 的函数图像上，所以 $n=a(m-1)^2+p$，所以 $n-p=a(m-1)^2=9a$. 因为 $a\neq0$，所以$(m-1)^2=9$，解得 $m_1=4$，$m_2=-2$.

(3)因为点$(m+t,n+t)$和点$(2-m+t,n-2t)$在 $y=a(x-1)^2+p$ 的函数图像上，所以 $n+t=a(m+t-1)^2+p$①，$n-2t=a(2-m+t-1)^2+p$②. ②－①，得 $3t=4at(m-1)$. 因为 $t\neq0$，所以 $a(m-1)=\frac{3}{4}$. 因为(m,n)在 $y=a(x-1)^2+p$ 的函数图像上，所以 $n=a(m-1)^2+p$③.

①－③，得 $2a(m-1)+at=1$，$at=-\frac{1}{2}$，所以$\frac{a(m-1)}{at}=-\frac{3}{2}$，所以$\frac{m-1}{t}=-\frac{3}{2}$.

24. 解：易知抛物线的函数表达式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+8(-4\leqslant x\leqslant4)$.

(1) 若切割成正方形 $DEFG$ 满足题意，则点 D，E 在抛物线上，$DE/\!/AB$，不妨设点 D 在点 E 的左侧. 设正方形的边长为 $2m$ dm，则点 $E(m,2m)$，所以 $2m=-\frac{1}{2}m^2+8$，解得 $m=-2+2\sqrt{5}$ 或 $m=-2-2\sqrt{5}$(不合题意，舍去). 所以此正方形的面积为 $4m^2=(96-32\sqrt{5})\mathrm{dm}^2$.

(2) 若切割成为矩形 $DEFG$(点 D 在点 E 的左侧)，要想该矩形的周长较大，则点 D，E 在抛物线上，$DE/\!/AB$. 设点 $E\Big(m,$

$-\frac{1}{2}m^2+8\Big)$，且 $0<m<4$，则点 $D\Big(-m, -\frac{1}{2}m^2+8\Big)$. 所以 $DE=2m$ dm，$EF=\Big(-\frac{1}{2}m^2+8\Big)$ dm，所以矩形的周长为 $4m+2\Big(-\frac{1}{2}m^2+8\Big)=-m^2+4m+16=[-(m-2)^2+20]$ dm. 所以当 $m=2$ 时，矩形的周长取得最大值，最大值为 20 dm.

(3) 能切得半径为 3 dm 的圆. 理由如下：取点 $M(0,3)$，在抛物线上取点 $N\Big(n, -\frac{1}{2}n^2+8\Big)$，且 $0<n<4$，则 $MN^2=n^2+\Big(-\frac{1}{2}n^2+8-3\Big)^2=\frac{1}{4}(n^2-8)^2+9$，即 $MN=\sqrt{\frac{1}{4}(n^2-8)^2+9}$. 所以当 $n=2\sqrt{2}$ 时，MN 取得最小值，最小值为 3 dm. 此时抛物线上除了点 N，N'（点 N，N'关于 y 轴对称）外，其余各点均在以点 $M(0,3)$ 为圆心，3 dm 为半径的圆外，所以能切得半径为 3 dm 的圆.

第 6 章检测卷

1. C **2.** D **3.** C

4. C **提示：**因为 $\frac{AD}{BD}=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{AD}{AB}=\frac{1}{3}$. 因为 $DE /\!/ BC$，所以 $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$，所以 $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\Big(\frac{AD}{AB}\Big)^2=\frac{1}{9}$，$\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{1}{3}$，所以 $S_{\triangle ADE}=\frac{1}{9}S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle ABE}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$，所以 $S_{\triangle BCE}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ABC}-\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}$. 所以 $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle BCE}}=\frac{\frac{1}{9}S_{\triangle ABC}}{\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{6}$，即 $S_{\triangle ADE} : S_{\triangle BCE}=1:6$.

5. A **提示：**因为 E 是 AD 的中点，所以 $AD=2AE$. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $BC=AD=2AE$，$AD /\!/ BC$. 因为 $AD /\!/ FG$，所以 $FG /\!/ AD /\!/ BC$，所以 $\triangle AFG \backsim \triangle ACB$，$\triangle BFG \backsim \triangle BEA$，所以 $\frac{AG}{AB}=\frac{FG}{CB}$，$\frac{BG}{BA}=\frac{FG}{EA}$，所以 $\frac{2}{BC}+\frac{2}{\frac{1}{2}BC}=\frac{AG}{AB}+\frac{BG}{AB}=1$，解得 $BC=6$.

6. A **提示：**连接 EG. 因为 $\frac{CG}{BG}=\frac{4}{5}$，所以可设 $BG=5x$，$CG=4x$. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形，E 是边 CD 的中点，所以 $AD=BC=BG+CG=9x$，$\angle D=\angle C=\angle B=90^\circ$，$CE=DE$. 因为将 $\triangle ADE$ 沿 AE 折叠得到 $\triangle AFE$，所以 $FE=DE$，$AF=AD=9x$，$\angle AFE=\angle D=90^\circ$，所以 $FE=CE$，$\angle EFG=\angle C=90^\circ$. 在 Rt $\triangle FEG$ 和 Rt $\triangle CEG$ 中，$\begin{cases}EG=EG,\\ FE=CE,\end{cases}$ 所以 Rt$\triangle FEG \cong$ Rt$\triangle CEG$(HL)，所以 $FG=CG=4x$，所以 $AG=AF+FG=13x$，所以 $AB=\sqrt{AG^2-BG^2}=\sqrt{(13x)^2-(5x)^2}=12x$，所以 $\frac{AD}{AB}=\frac{9x}{12x}=\frac{3}{4}$.

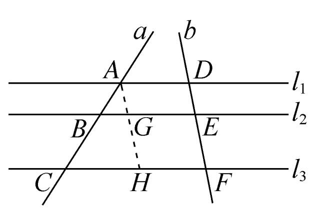
7. D **提示：**过点 N 作 $NG \perp BC$ 于点 G. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $AD /\!/ BC$，且易得四边形 $CDNG$ 是矩形. 所以 $CG=DN$，$\angle ANM=\angle CMN$. 由折叠的性质，得 $AM=CM$，$\angle AMN=\angle CMN$. 所以 $\angle ANM=\angle AMN$，所以 $AM=AN$. 所以 $CM=AN$. 可得四边形 $AMCN$ 是菱形. 因为 $\triangle CDN$ 的面积与 $\triangle CMN$ 的面积之比为 $1:5$，所以 $DN : CM=1:5$. 设 $DN=CG=x\ (x>0)$，则 $AN=AM=CN=CM=5x$，所以 $BC=AD=AN+DN=6x$，所以 $BM=BC-CM=x$，$GM=CM-CG=4x$. 在 Rt$\triangle CGN$ 中，由勾股定理，得 $NG=\sqrt{CN^2-CG^2}=2\sqrt{6}x$. 在 Rt$\triangle MNG$ 中，由勾股定理，得 $MN=\sqrt{GM^2+NG^2}=2\sqrt{10}x$. 所以 $\frac{MN}{BM}=\frac{2\sqrt{10}x}{x}=2\sqrt{10}$.

8. B **提示：**由翻折的性质，可知 $\triangle OEC \cong \triangle BEC$，$\triangle AGE \cong \triangle OGE$，$\triangle DGF \cong \triangle OGF$，所以 $\angle BEC=\angle OEC$，$\angle AEG=\angle OEG$. 因为 $\angle BEC+\angle OEC+\angle AEG+\angle OEG=180^\circ$，所以 $2\angle OEC+2\angle OEG=180^\circ$. 所以 $\angle OEC+\angle OEG=90^\circ$，所以 $\angle GEC=90^\circ$. 同理 $\angle FGE=90^\circ$. 所以 $\angle GEC+\angle FGE=180^\circ$，所以 $GF /\!/ EC$，故①正确. 因为 $\angle GEC=90^\circ$，所以

$\angle GEA+\angle BEC=90°$. 因为$\angle A=\angle B=90°$,所以$\angle GEA+\angle AGE=90°$. 所以$\angle BEC=\angle AGE$. 所以$\triangle CEB\backsim\triangle EGA$,所以$\frac{AG}{AE}=\frac{BE}{BC}$. 设 $DG=GO=AG=a$,$AE=OE=BE=b$,$a>0$,$b>0$,则 $BC=AD=2a$. 所以 $a\cdot 2a=b^2$,所以 $b=\sqrt{2}a$,所以 $AB=AE+BE=2b=2\sqrt{2}a$. 所以$\frac{AB}{AD}=\frac{2\sqrt{2}a}{2a}=\sqrt{2}$,所以 $AB=\sqrt{2}AD$,故②不正确. 同理可得$\triangle GFD\backsim\triangle EGA$,所以$\frac{AG}{AE}=\frac{DF}{DG}$,即$\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{DF}{a}$,所以 $DF=\frac{\sqrt{2}a}{2}$. 因为$GE=\sqrt{AG^2+AE^2}=\sqrt{3}a$,所以$\frac{GE}{DF}=\sqrt{6}$,所以$GE=\sqrt{6}DF$,故③正确. 因为 $OC=BC=2a$,$OF=DF=\frac{\sqrt{2}a}{2}$,所以$\frac{OC}{OF}=2\sqrt{2}$,所以 $OC=2\sqrt{2}OF$,故④正确. 因为 $CE=\sqrt{BC^2+BE^2}=\sqrt{(2a)^2+(\sqrt{2}a)^2}=\sqrt{6}a$,$GE=\sqrt{3}a$,所以 $CE:GE=\sqrt{6}a:\sqrt{3}a=\sqrt{2}\neq OC:OF$,故⑤不正确.

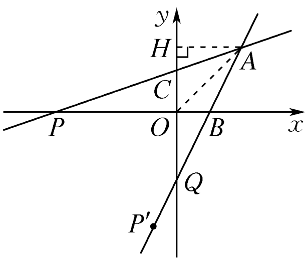
9. 2.8　**10.** 2　**11.** $\frac{1}{2}$　**12.** 137.5°

13. $\frac{1}{2}$　**提示:**如图,过点 A 作 $AH/\!/DF$,交 BE 于点 G,交 CF 于点 H. 因为 $l_1/\!/l_2/\!/l_3$,所以四边形 $AGED$、四边形 $AHFD$ 为平行四边形,所以 $HF=GE=AD=3$. 所以 $BG=BE-GE=1$,$CH=CF-HF=3$. 因为 $l_2/\!/l_3$,所以$\triangle ABG\backsim\triangle ACH$,所以$\frac{AB}{AC}=\frac{BG}{CH}=\frac{1}{3}$,所以$\frac{AB}{BC}=\frac{1}{2}$.



14. 100 cm^2

15. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　**提示:**如图,过点A 作$AH\perp y$ 轴于点H,连接OA. 因为点$A(3,3)$,所以$AH=OH=3$,所以$\triangle AOH$ 是等腰直角三角形,所以 $\angle HOA=\angle HAO=45°$,所以$\angle OQA+\angle OAQ=\angle HOA=45°$. 因为以点$A$ 为旋转中心把直线AP 逆时针旋转 45°得到直线AP',所以$\angle PAQ=45°$,即$\angle CAO+\angle OAQ=45°$,所以$\angle OQA=\angle CAO$. 因为$\angle ACO=\angle QCA$,所以$\triangle ACO\backsim\triangle QCA$,所以$\frac{OC}{AC}=\frac{AC}{QC}$. 因为 $AC=OQ$,所以$\frac{OC}{OQ}=\frac{OQ}{CQ}$,所以$O$ 为CQ 靠近点C 的黄金分割点,所以$\frac{OC}{AC}=\frac{OC}{OQ}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.



16. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　**提示:**因为 $DA=DC$,所以$\angle DAC=\angle C$,所以$\angle ADB=\angle DAC+\angle C=2\angle C$. 因为$\angle ADB=2\angle BAE$,所以$\angle BAE=\angle C$. 因为$\angle B=\angle B$,所以$\triangle EBA\backsim\triangle ABC$,所以$\frac{AB}{CB}=\frac{BE}{BA}$,所以$AB^2=BE\cdot BC$. 因为$\angle B=90°$,$E$ 为 BD 的中点,所以 $AB^2=DA^2-BD^2$,$BD=2BE$,$DA=DC=BC-2BE$,所以 $AB^2=(BC-2BE)^2-(2BE)^2=BC^2-4BE\cdot BC$,所以 $BC^2-4BE\cdot BC=BE\cdot BC$,所以 $BC=5BE$ 或 $BC=0$(不符合题意,舍去),所以 $AB^2=5BE^2$,所以 $AB=\sqrt{5}BE$ 或 $AB=-\sqrt{5}BE$(不符合题意,舍去),所以$\frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{5}BE}{5BE}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

17. ①②③④　**提示:**由题意,知$\angle BNC=\angle BMC=90°$,所以点$N$,$M$ 在以BC 为直径的同一圆周上,且该圆的圆心为点 P. 所以 $BP=PC=PM=PN$,$\angle NPM=2\angle NBM=2\times(90°-\angle A)=60°$,所以$\triangle PMN$ 为等边三角形. 故①③正确. 当$\angle ABC=45°$时,由 $BP=PN$ 可推知,BN 为等腰直角三角形 BPN 的斜边,所以 $BN=\sqrt{2}PN=\sqrt{2}PC$. 故④正确. 易证$\triangle ANC\backsim\triangle AMB$,所以$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$. 故②正确.

18. $\frac{14\sqrt{3}}{3}$　**提示:**因为四边形 $EFGC$ 是平行四边形,所以 $EF/\!/CG$,所以$\triangle EOD\backsim\triangle GOC$,所以$\frac{EO}{GO}=\frac{DE}{CG}$. 因为 $DF=\frac{1}{3}DE$,所以$\frac{DE}{CG}=\frac{DE}{EF}=\frac{3}{4}$. 所以

$\frac{EO}{GO}=\frac{3}{4}$，$EG=\frac{7}{3}EO$. 所以当 EO 取得最小值时，EG 即可取得最小值. 当 $EO\perp CD$ 时，EO 取得最小值. 过点 C 作 $CH\perp AB$ 于点 H. 因为 $\angle B=60°$，所以 $\angle BCH=30°$. 又因为 $BC=4$，所以 $BH=2$，所以 $CH=\sqrt{BC^2-BH^2}=2\sqrt{3}$. 可得 $EO=CH=2\sqrt{3}$，此时 EG 的值最小，最小值为 $\frac{14\sqrt{3}}{3}$.

19. **证明:**(1) 因为 $AB=AC$，所以 $\angle B=\angle C$. 因为 $\angle DEF=\angle B$，$\angle DEF+\angle FEC=\angle EDB+\angle B$，所以 $\angle EDB=\angle FEC$. 所以 $\triangle BDE\backsim\triangle CEF$.

(2) 因为 $\triangle BDE\backsim\triangle CEF$，所以 $\frac{BE}{CF}=\frac{DE}{EF}$. 因为 E 是边 BC 的中点，所以 $BE=CE$. 所以 $\frac{CE}{CF}=\frac{DE}{EF}$，即 $\frac{CE}{ED}=\frac{CF}{EF}$. 由(1)，得 $\angle B=\angle C$. 又因为 $\angle DEF=\angle B$，所以 $\angle C=\angle DEF$. 所以 $\triangle CEF\backsim\triangle EDF$，所以 $\angle CFE=\angle EFD$，所以 FE 平分 $\angle DFC$.

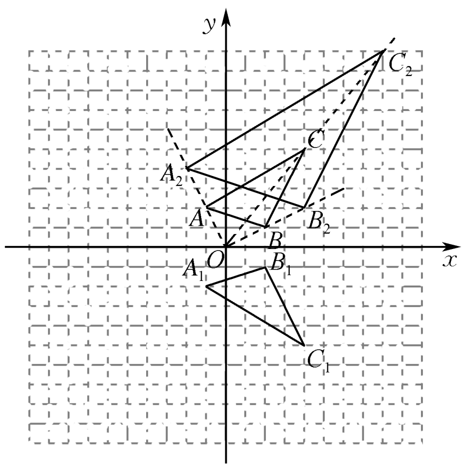
20. **解:**(1) 由题意易得，点 A 的坐标为(4,0)，点 B 的坐标为(0,3).

(2) 过点 O 作 $OP\perp AB$ 于点 P. 易得 $OB=3$，$OA=4$，$AB=5$. 由等积法，$\frac{1}{2}AB\cdot OP=\frac{1}{2}OA\cdot OB$，可得 $OP=\frac{12}{5}$，所以原点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{12}{5}$.

(3) 过点 M 作 $MD\perp AB$ 于点 D. 当 $\odot M$ 与直线 l 相切时，$DM=2$. 因为 $\angle OBA=\angle DBM$，$\angle BOA=\angle BDM$，所以 $\triangle BOA\backsim\triangle BDM$，所以 $\frac{BA}{BM}=\frac{OA}{DM}$，所以 $BM=\frac{BA\cdot DM}{OA}=\frac{5}{2}$. 因为 $OB=3$，所以 $OM=OB-BM=\frac{1}{2}$ 或 $OM=OB+BM=\frac{11}{2}$. 所以点 M 的坐标为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 或 $\left(0,\frac{11}{2}\right)$.

21. **解:**(1) 如图，$\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求.

(2) 如图，$\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求. $S_{\triangle ABC}=4\times5-\frac{1}{2}\times1\times3-\frac{1}{2}\times2\times4-\frac{1}{2}\times5\times3=7$. 因为 $\triangle A_2B_2C_2\backsim\triangle ABC$，所以 $\frac{S_{\triangle A_2B_2C_2}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{A_2B_2}{AB}\right)^2=4$，所以 $S_{\triangle A_2B_2C_2}=4S_{\triangle ABC}=28$.



22. **解:**(1) 根据题意，得 $AB\parallel OP$，所以 $\triangle ABC\backsim\triangle OPC$，所以 $\frac{AC}{OC}=\frac{AB}{OP}$，即 $\frac{AC}{AC+a}=\frac{h}{l}$，解得 $AC=\frac{ah}{l-h}$.

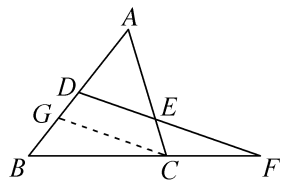
答:他的影子 AC 的长为 $\frac{ah}{l-h}$.

(2) $DA+AC$ 是定值. 理由如下:由(1)知 $AC=\frac{ah}{l-h}$，同理可得 $\triangle ADB\backsim\triangle O'DP'$，所以 $\frac{AD}{O'D}=\frac{AB}{O'P'}$. 因为 $O'A=OO'-OA=m-a$，所以 $\frac{AD}{AD+m-a}=\frac{h}{l}$，解得 $AD=\frac{hm-ah}{l-h}$，所以 $DA+AC=\frac{hm-ah}{l-h}+\frac{ah}{l-h}=\frac{hm}{l-h}$. 因为 l,h,m 都是定值，所以他前后的两个影子的长度之和 $(DA+AC)$ 是定值.

23. **解:**如图，过点 C 作 $CG/\!/DF$ 交 AB 于点 G.

(1) 易得 $\frac{AD}{DG}=\frac{AE}{EC}=2$. 因为 $\frac{AD}{BD}=1$，所以

$BD=AD=2DG$. 易得$\dfrac{BF}{FC}=\dfrac{BD}{DG}=2$.



(2) 同(1)易得 $\dfrac{AD}{DG}=\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{m}{n}$,所以 $AD=\dfrac{m}{n}DG$. 因为 $\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{1}{2}$,所以 $BD=2AD=\dfrac{2m}{n}DG$. 又因为 $CG/\!/DF$,易得 $\dfrac{BF}{FC}=\dfrac{BD}{DG}=\dfrac{2m}{n}$.

(3) 1 **提示:** 同上易得 $\dfrac{BF}{FC}=\dfrac{BD}{DG}$,$\dfrac{AD}{DG}=\dfrac{AE}{EC}$,所以 $\dfrac{BF}{FC}\cdot\dfrac{AD}{DG}=\dfrac{BD}{DG}\cdot\dfrac{AE}{EC}$,所以 $BF\cdot AD\cdot EC=BD\cdot AE\cdot FC$,即 $\dfrac{AD}{BD}\cdot\dfrac{BF}{FC}\cdot\dfrac{EC}{EA}=1$.

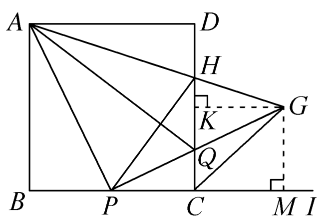
24. (1) ①**证明:** 因为四边形 $ABCD$ 是矩形,所以$\angle B=\angle C=90°$. 所以$\angle APB+\angle BAP=90°$. 因为 $PQ\perp AP$,所以$\angle APQ=90°$,所以$\angle APB+\angle CPQ=90°$. 所以$\angle CPQ=\angle BAP$. 所以 $\triangle ABP\backsim\triangle PCQ$. 所以 $\dfrac{AP}{PQ}=\dfrac{BP}{CQ}$. 因为 P 为 BC 的中点,所以 $BP=PC$,所以$\dfrac{AP}{PQ}=\dfrac{PC}{CQ}$,所以$\dfrac{AP}{PC}=\dfrac{PQ}{CQ}$. 又因为 $\angle APQ=\angle C$,所以 $\triangle APQ\backsim\triangle PCQ$. 所以$\triangle ABP\backsim\triangle PCQ\backsim\triangle APQ$.

②**解:** 因为 P 是 BC 的中点,$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AB}{2BP}=k$,所以$\dfrac{AB}{BP}=2k$. 因为$\triangle ABP\backsim\triangle PCQ$,所以$\dfrac{PC}{AB}=\dfrac{CQ}{BP}$,所以$\dfrac{PC}{CQ}=\dfrac{AB}{BP}=2k$. 设 $CD=AB=2k$,则 $PC=BP=1$,$AD=BC=2$. 所以$CQ=\dfrac{PC}{2k}=\dfrac{1}{2k}$,所以$DQ=CD-CQ=2k-\dfrac{1}{2k}$. 因为$\angle DAQ=60°$,所以$\angle AQD=30°$,所以 $AQ=2AD=4$. 由勾股定理,得 $DQ=\sqrt{AQ^2-AD^2}=2\sqrt{3}$,即 $2k-\dfrac{1}{2k}=2\sqrt{3}$,解得 $k=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$ 或 $k=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1$(舍去).

(2) **解:** 不存在点 Q 和点 D 重合的情况. 理由如下:由(1)知$\dfrac{PC}{AB}=\dfrac{CQ}{BP}$,所以 $AB\cdot CQ=PC\cdot PB$. 当点 Q 和点 D 重合时,$CQ=CD=AB$,此时有 $AB^2=PC\cdot BP$. 因为$\dfrac{AB}{BC}=k$,则 $AB=kBC$. 设 $BC=a$,$BP=x\,(0<x<a)$,则 $PC=a-x$,$AB=ka$. 由 $AB^2=PC\cdot BP$,得 $k^2a^2=(a-x)x$,即 $x^2-ax+k^2a^2=0$. 若关于 x 的方程 $x^2-ax+k^2a^2=0$ 有实数解,则 $a^2-4a^2k^2\geqslant 0$,即 $1-4k^2\geqslant 0$,解得 $-\dfrac{1}{2}\leqslant k\leqslant\dfrac{1}{2}$. 所以当 $k>\dfrac{1}{2}$ 时,该方程无解,即不存在点 Q 和点 D 重合的情况.

(3) **解:** 因为 $k=1$,所以 $CD=AB=BC$. 因为$\triangle ABP\backsim\triangle PCQ$,所以 $\dfrac{PC}{AB}=\dfrac{CQ}{BP}$. 设 $AB=BC=a$,$BP=x\,(0<x<a)$,则 $PC=a-x$. 所以 $\dfrac{a-x}{a}=\dfrac{CQ}{x}$,所以 $CQ=-\dfrac{1}{a}x^2+x$. 所以当 $x=\dfrac{a}{2}$时,CQ 取得最大值,而 DQ,AQ 取得最小值,此时 P 为 BC 的中点. 如图,过点 G 作 $GM\perp CI$,$GK\perp DC$,垂足分别为 M,K. 结合题意可知,四边形 $CMGK$ 是正方形. 由前所述,可得 $\dfrac{CQ}{PC}=\dfrac{BP}{AB}=\dfrac{1}{2}$. 易得$\dfrac{MG}{PM}=\dfrac{CQ}{PC}=\dfrac{1}{2}$,所以$\dfrac{CM}{PC+CM}=\dfrac{1}{2}$,所以 $CM=PC$. 所以 $PM=2PC=BC=a$,所以 $GK=CK=CM=PC=\dfrac{1}{2}a$,$CQ=\dfrac{1}{2}PC=\dfrac{1}{4}a$. 因为 $AD/\!/KG$,$AD=CD=BC=a$,所以$\triangle HAD\backsim$

$\triangle HGK$,所以$\dfrac{DH}{KH}=\dfrac{AD}{GK}=2$. 所以 $DH=\dfrac{2}{3}DK=\dfrac{2}{3}(CD-CK)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}a=\dfrac{1}{3}a$,$HK=\dfrac{1}{2}DH=\dfrac{1}{6}a$. 所以 $HQ=CD-DH-CQ=a-\dfrac{1}{3}a-\dfrac{1}{4}a=\dfrac{5}{12}a$,$CH=CD-DH=\dfrac{2}{3}a$. 在Rt$\triangle PCH$ 中,由勾股定理,得 $PH=\sqrt{PC^2+CH^2}=\dfrac{5}{6}a$. 所以当 AQ 的长最小时,$\dfrac{PH}{HQ}=\dfrac{\frac{5}{6}a}{\frac{5}{12}a}=2$.

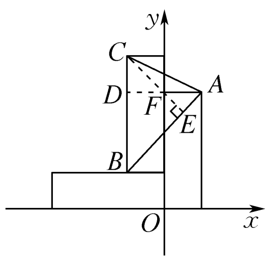


第 7 章检测卷

1. C　**2.** D　**3.** D　**4.** B　**5.** D

6. A　**提示:**过点 D 作 $DE\perp CB$ 于点 E,过点 A 作 $AF\perp DE$ 于点 F. 设 $DE=x$ m($x>0$),则 $CE=2.4x$ m. 由勾股定理,得 $DE^2+CE^2=CD^2$,即 $x^2+(2.4x)^2=195^2$,解得 $x=75$(负值已舍). 所以 $DE=75$ m,$CE=180$ m. 所以 $BE=BC-CE=306-180=126$ (m). 易得四边形 $ABEF$ 为矩形,所以 $AF=BE=126$ m. 易得 $\angle DAF=20°$. 在 Rt$\triangle ADF$ 中,因为 $\tan\angle DAF=\dfrac{DF}{AF}$,所以 $DF=126\times\tan 20°\approx126\times0.364\approx45.86$(m). 所以 $AB=FE=DE-DF=75-45.86\approx29.1$(m).

7. C　**提示:**如图,过点 C 作 $CE\perp AB$ 于点 E,延长 AF 交 BC 于点 D. 根据题意,得 $BC=3$,$AD=BD=2$,$CD=1$. 在 Rt$\triangle ADC$ 中,$AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{5}$. 在 Rt$\triangle ADB$ 中,$AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=2\sqrt{2}$. 因为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AD\cdot BC=\dfrac{1}{2}CE\cdot AB$,所以 $CE=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$,所以 $AE=\sqrt{AC^2-CE^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,所以$\tan\angle BAC=\dfrac{CE}{AE}=3$.



8. A　**提示:**连接 AC 交 OB 于点 M,过点 M 作 $MH\perp OC$ 于点 H,过点 A 作 $AG\perp OC$ 于点 G,过点 P 作 $PG'\perp OC$ 于点 G'. 因为四边形 $ABCO$ 是菱形,所以 $AM\perp OB$,$OM=MB=\dfrac{1}{2}OB=2\sqrt{5}$. 又因为 $AB=5$,所以 $MC=AM=\sqrt{AB^2-MB^2}=\sqrt{5}$. 因为 $MH\perp OC$,$AM\perp OB$,所以 $S_{\triangle OMC}=\dfrac{1}{2}OM\cdot MC=\dfrac{1}{2}OC\cdot MH$,所以 $2\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5MH$,所以 $MH=2$. 因为$\dfrac{PG'}{OP}=\sin\angle MOH=\dfrac{MH}{OM}=\dfrac{2}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,所以 $AP+\dfrac{\sqrt{5}}{5}OP=AP+PG'$. 所以当 A,P,G' 三点共线,即点 G'与点 G 重合时,$AP+\dfrac{\sqrt{5}}{5}OP$ 有最小值,最小值为 AG 的长. 因为菱形 $ABCO$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}OB\cdot AC=OC\cdot AG$,所以 $AG=\dfrac{OB\cdot AC}{2OC}=\dfrac{4\sqrt{5}\times2\sqrt{5}}{2\times5}=4$,所以 $AP+\dfrac{\sqrt{5}}{5}OP$ 的最小值为 4.

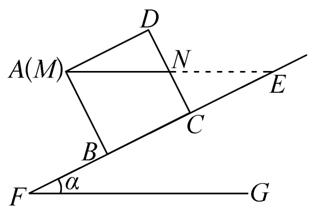
9. $\dfrac{1}{3}$　**10.** $4\sqrt{3}$　**11.** 2　**12.** 0.007 5

13. $\sqrt{2}$　**提示:**过点 B 作 $BH\perp AC$ 于点 H. 设 $BH=x$. 由$\triangle ABH$ 是等腰直角三角形,可得 $AB=\sqrt{2}x$. 由$\angle C=30°$,可得 $BC=2x$. 所以 thi $A=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{2x}{\sqrt{2}x}=\sqrt{2}$.

14. $(25\sqrt{3}-25)$

15. $\dfrac{4}{9}$　**提示:**如图,延长 AN,交直线 BC 于点 E. 由题意,得 $AD=BC=CD=9$ cm,$\angle D=90°$,$AD/\!/BC$,$AN/\!/FG$. 设 $DN=x$ cm,则 $CN=CD-DN=(9-$

x)cm. 所以 $9\times9\times(9-x)+\frac{1}{2}\times9\times9x=9\times9\times7$，解得 $x=4$，即 $DN=4$ cm. 因为 $AN\parallel FG$，所以 $\angle AEF=\angle F=\alpha$. 因为 $AD\parallel BC$，所以 $\angle DAN=\angle AEF=\alpha$，所以 $\tan\alpha=\tan\angle DAN=\frac{DN}{AD}=\frac{4}{9}$.



16. 8 或 24

17. $\frac{4}{5}$ **提示:** 过点 A 作 $AE\perp BC$ 于点 E. 由 $\frac{AE}{AB}=\sin B=\frac{4}{5}$，可设 $AE=4x$，则 $AB=5x$，所以 $BE=3x$. 因为 D 是边 BC 的中点，$BC=2$，所以 $BD=1$. 所以 $DE=BD-BE=1-3x$，$CE=BC-BE=2-3x$. 因为 $AC=2AD$，所以 $AC^2=4AD^2$. 由勾股定理，得 $AC^2=AE^2+CE^2$，$AD^2=AE^2+DE^2$，所以 $AE^2+CE^2=4(AE^2+DE^2)$，即 $(4x)^2+(2-3x)^2=4[(4x)^2+(1-3x)^2]$，解得 $x=0$(不合题意，舍去)或 $x=\frac{4}{25}$. 所以 $AB=5\times\frac{4}{25}=\frac{4}{5}$.

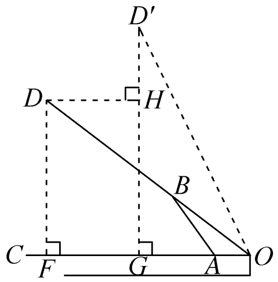
18. $\frac{3}{4}$ **提示:** 设正方形的边长为 $2a$，$DH=x$，则 $CH=2a-x$. 由翻折的性质，得 $DE=AE=a$，$EH=CH=2a-x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle DEH$ 中，由勾股定理，得 $DE^2+DH^2=EH^2$，即 $a^2+x^2=(2a-x)^2$，解得 $x=\frac{3}{4}a$. 因为 $\angle MEH=\angle C=90^\circ$，所以 $\angle AEN+\angle DEH=90^\circ$. 因为 $\angle ANE+\angle AEN=90^\circ$，所以 $\angle ANE=\angle DEH$. 所以 $\tan\angle ANE=\tan\angle DEH=\frac{DH}{DE}=\frac{\frac{3}{4}a}{a}=\frac{3}{4}$.

19. **解:**(1) 过点 B 作 $BE\perp OC$ 于点 E. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，$\angle BAC=53^\circ$，$AB=3$ m，所以 $BE=AB\cdot\sin\angle BAE=3\times\sin53^\circ\approx3\times\frac{4}{5}=\frac{12}{5}$(m). 在 $\mathrm{Rt}\triangle BOE$ 中，$\angle BOE=37^\circ$，$BE=\frac{12}{5}$ m，所以 $OB=\frac{BE}{\sin\angle BOE}\approx\frac{\frac{12}{5}}{\frac{3}{5}}=4$(m).

答:OB 的长为 4 m.

(2) 如图，过点 D 作 $DF\perp OC$ 于点 F，旋转后点 D 的对应点为 D'，过点 D' 作 $D'G\perp OC$ 于点 G，过点 D 作 $DH\perp D'G$ 于点 H. 在 $\mathrm{Rt}\triangle FOD$ 中，$OD=OB+BD=4+6=10$(m)，$\angle DOF=37^\circ$. 所以 $DF=OD\cdot\sin37^\circ\approx10\times\frac{3}{5}=6$(m). 所以 $D'G=D'H+HG=D'H+DF=3+6=9$(m). 在 $\mathrm{Rt}\triangle D'OG$ 中，$OD'=10$ m，所以 $\sin\angle D'OG=\frac{D'G}{D'O}=\frac{9}{10}$，所以 $\angle D'OG\approx64^\circ$，所以 $\angle D'OD=\angle D'OG-\angle DOG=64^\circ-37^\circ=27^\circ$.

答:云梯 OD 大约旋转了 27°.



20. **解:**过点 A 作 $AF\perp ED$ 于点 F. 由题意，得 $ED\perp BD$，$FD=AB=6.8$ m，$AF=BD$，$AF\parallel BD$. 所以 $\angle ACB=\angle FAC=22^\circ$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$BC=\frac{AB}{\tan22^\circ}\approx17$ m. 设 $CD=x$ m，则 $AF=BD=BC+CD=(x+17)$m. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ECD$ 中，$\angle ECD=58^\circ$，所以 $DE=CD\cdot\tan\angle ECD\approx\frac{8}{5}x$ m. 在 $\mathrm{Rt}\triangle EAF$ 中，$\angle EAF=37^\circ$，所以 $EF=AF\cdot\tan\angle EAF\approx\frac{3}{4}(x+17)$ m. 因为 $EF+DF=DE$，所以 $\frac{3}{4}(x+17)+6.8=$

$\frac{8}{5}x$，解得 $x=23$. 所以 $DE=\frac{8}{5}x=36.8$ m.

答：建筑物 DE 的高度约为 36.8 m.

21. 解：(1) 过点 D 作 $DE\perp AB$ 于点 E. 因为 $\angle A=45°$，$\angle ADB=105°$，所以 $\angle DBA=30°$. 在 Rt△ADE 中，$AE=DE=\frac{\sqrt{2}}{2}AD=\sqrt{2}$. 在 Rt△$BDE$ 中，$BE=\frac{DE}{\tan\angle DBA}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{6}$. 所以 $AB=AE+BE=\sqrt{2}+\sqrt{6}$.

(2) 过点 D，B 分别作 $DE\perp AB$，$BF\perp CD$，垂足分别是 E，F. 由(1)，知 $\angle DBA=30°$. 所以 $\angle DBC=75°$. 所以 $\angle CDB=60°$. 设 $DE=x$，易得 $AE=x$，$BE=\sqrt{3}x$，$BD=2x$，所以 $DF=x$，$CF=BF=\sqrt{3}x$. 所以 $AB=(\sqrt{3}+1)x=CD$. 因为 $AB+CD=2\sqrt{3}+2$，所以 $AB=\sqrt{3}+1$.

22. 解：(1) 连接 OP. 因为 D 为 AO 的中点，$PD\perp AO$，所以 PD 是 AO 的垂直平分线，所以 $PO=PA=45$ cm. 因为 $PC\perp OB$ 于点 C，所以 $\angle PCO=90°$. 因为 $BC=12$ cm，$OB=24$ cm，所以 $OC=OB+BC=36$ cm，所以 $PC=\sqrt{PO^2-OC^2}=27$ cm.

(2) 过点 D 分别作 $DE\perp OC$，交 CO 的延长线于点 E，$DF\perp PC$ 于点 F. 由题意，得 $DE=CF$，$DF=EC$，$DF\parallel EC$. 因为 $\angle AOC=120°$，所以 $\angle DOE=180°-\angle AOC=60°$. 因为 D 为 AO 的中点，所以 $OD=\frac{1}{2}OA=12$ cm. 在 Rt△DOE 中，$DE=OD\cdot\sin\angle DOE=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$(cm)，$OE=OD\cdot\cos\angle DOE=12\times\frac{1}{2}=6$(cm). 所以 $CF=DE=6\sqrt{3}$ cm，$DF=EC=OE+OB+BC=42$ cm. 因为 $DF\parallel EC$，所以 $\angle FDO=\angle DOE=60°$. 因为 $\angle PDO=90°$，所以 $\angle PDF=\angle PDO-\angle FDO=30°$. 所以在 Rt△$PDF$ 中，$PF=DF\cdot\tan\angle PDF=42\times\frac{\sqrt{3}}{3}=14\sqrt{3}$(cm). 所以 $PC=PF+CF=20\sqrt{3}\approx34.6$(cm).

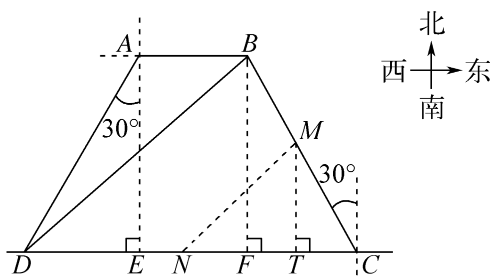
23. 解：(1) 如图，过点 A 作 $AE\perp CD$ 于点 E，过点 B 作 $BF\perp CD$ 于点 F，则 $\angle AED=\angle BFC=90°$. 由题意，得 $\angle DAE=30°$. 在 Rt△ADE 中，$AE=AD\cdot\cos\angle DAE=20\cdot\cos 30°=10\sqrt{3}$(km)，$DE=AD\cdot\sin\angle DAE=20\cdot\sin 30°=10$(km). 因为无人机位于点 A 的正东方向 10 km 的点 B 处，点 D 位于点 C 的正西方向上，所以 $AB\parallel CD$，所以 $AE\perp AB$，$BF\perp AB$，所以四边形 $AEFB$ 是矩形，所以 $EF=AB=10$ km，$BF=AE=10\sqrt{3}$ km，所以 $DF=DE+EF=20$ km，所以 $BD=\sqrt{DF^2+BF^2}=\sqrt{20^2+(10\sqrt{3})^2}=10\sqrt{7}\approx26.5$(km).

答：BD 的长度约为 26.5 km.

(2) 如图，当甲无人机运动到点 M，乙无人机运动到点 N 时，此时满足 $MN=20$ km. 过点 M 作 $MT\perp CD$ 于点 T. 由题意，得 $\angle BCF=60°$，在 Rt△FBC 中，$BC=\frac{BF}{\sin\angle BCF}=\frac{10\sqrt{3}}{\sin 60°}=20$(km)，$CF=\frac{BF}{\tan\angle BCF}=\frac{10\sqrt{3}}{\tan 60°}=10$(km)，所以 $CD=DF+CF=30$ km. 设 $BM=x$(km)，则 $DN=2x$，$CM=20-x$. 在 Rt△CMT 中，$CT=CM\cdot\cos\angle MCT=(20-x)\cdot\cos 60°=\left(10-\frac{1}{2}x\right)$ km，$MT=CM\cdot\sin\angle MCT=(20-x)\cdot\sin 60°=\left(10\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$km，所以 $TN=CD-DN-$

$CT=30-2x-\left(10-\frac{1}{2}x\right)=\left(20-\frac{3}{2}x\right)$ km. 在 Rt$\triangle MNT$ 中,由勾股定理,得 $MN^2=MT^2+TN^2$,所以 $20^2=\left(10\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2+\left(20-\frac{3}{2}x\right)^2$,解得 $x=15-5\sqrt{5}$ 或 $x=15+5\sqrt{5}$(此时大于 BC 的长,舍去),所以 $BM=15-5\sqrt{5}\approx 3.8$(km).

答:甲无人机飞离点 B 处 3.8 km 时,两无人机可以开始相互接收到信号.



24. 解:(1) $\frac{1}{2}$　$2-\sqrt{3}$

(2) ①延长 CB 至点 D,使得 $BD=AB$,则 $\angle D=\angle DAB=\frac{1}{2}\angle ABC=\angle C$. 所以 $\angle ABD=180^\circ-2\angle D$,$\angle CAD=180^\circ-2\angle D$,所以$\angle CAD=\angle ABD$. 所以$\triangle ABD\backsim\triangle CAD$,所以$\frac{AB}{CA}=\frac{AD}{CD}$. 设 $BD=AB=x$. 因为 $BC=5$,$AD=AC=6$,所以 $CD=BC+BD=5+x$. 所以$\frac{x}{6}=\frac{6}{x+5}$,解得 $x=-9$(舍去)或 $x=4$. 所以 AB 的长为 4.

②AP 的长为$\frac{32}{9}$或 4 或$\frac{9}{2}$或$\frac{8}{3}$或 1.

提示:在以 A,B,P 三点为顶点的$\triangle ABP$ 中:

(ⅰ) 当 $AP=BP$ 时,如图 1,分别过点 B,P 作 $BD\perp AC$,$PE\perp AB$,垂足分别为 D,E,则 $AE=BE=\frac{1}{2}AB=2$,由勾股定理,得 $AB^2-AD^2=BD^2=BC^2-CD^2$,即 $16-AD^2=25-(6-AD)^2$,所以 $AD=\frac{9}{4}$,所以$\frac{AD}{AB}=\cos A=\frac{AE}{AP}$,即$\frac{\frac{9}{4}}{4}=\frac{2}{AP}$,所以 $AP=\frac{32}{9}$;

(ⅱ) 当 $AB=AP$ 时,$AP=4$;

(ⅲ) 当 $AB=BP$ 时,如图 2,过点 B 作 $BD\perp AC$,垂足为 D,则 $AD=DP=\frac{1}{2}AP$,由(ⅰ)可知 $AD=\frac{9}{4}$,所以 $AP=2AD=\frac{9}{2}$.

在以 B,C,P 三点为顶点的$\triangle BCP$ 中:

(ⅰ) 当 $BP=CP$ 时,如图 3,分别过点 A,P 作 $AD\perp BC$,$PE\perp BC$,垂足分别为 D,E,则 $BE=CE=\frac{1}{2}BC=\frac{5}{2}$,由勾股定理,得 $AB^2-BD^2=AD^2=AC^2-CD^2$,即 $16-BD^2=36-(5-BD)^2$,所以 $BD=\frac{1}{2}$,所以 $CD=BC-BD=\frac{9}{2}$,所以$\frac{CE}{CP}=\cos C=\frac{CD}{AC}$,即$\frac{\frac{5}{2}}{CP}=\frac{\frac{9}{2}}{6}$,所以 $CP=\frac{10}{3}$,所以 $AP=AC-CP=6-\frac{10}{3}=\frac{8}{3}$;

(ⅱ) 当 $BC=CP$ 时,$AP=AC-CP=6-5=1$;

(ⅲ) 当 $BC=BP$ 时,如图 4,过点 B 作 $BD\perp AC$,垂足为 D,则 $AD=\frac{9}{4}$,$DP=CD=AC-AD=6-\frac{9}{4}=\frac{15}{4}$,所以 $DP>AD$,所以点 P 在 CA 的延长线上,不符合题意,故此情形舍去.

综上所述,AP 的长为$\frac{32}{9}$或 4 或$\frac{9}{2}$或$\frac{8}{3}$或 1.

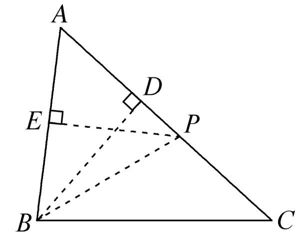


图 1

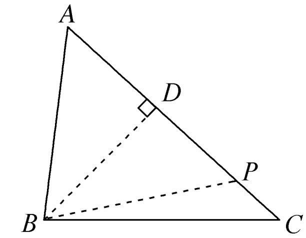


图 2

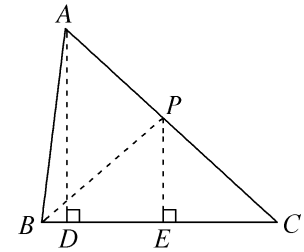


图 3

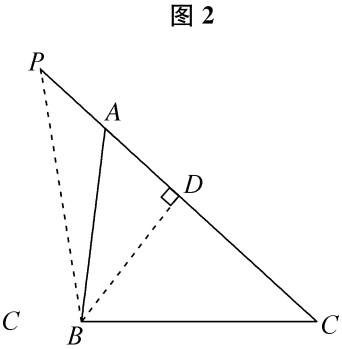


图 4

第 8 章检测卷

1. D　**2.** C　**3.** C　**4.** D　**5.** D　**6.** A

7. C　**提示:**观察统计图可得到各月用水量数据(单位:t)如下:4,6,3,5,6,6.所以众数是 6 t,故选项 A 正确;平均数为(4+3+5+6×3)÷6=5(t),故选项 B 正确;将数据按从小到大的顺序排列为 3,4,5,6,6,6,所以中位数为(5+6)÷2=5.5(t),故选项 C 错误;方差为 $\frac{1}{6}\times[(4-5)^2+(3-5)^2+(5-5)^2+(6-5)^2\times3]=\frac{4}{3}(t^2)$,故选项 D 正确.

8. B　**提示:**最多拿 2 颗,最少拿 1 颗,和为 3,所以要想拿到第 10 颗就必须拿到第 7 颗,以此类推,必须拿到第 4 颗、第 1 颗,所以先拿者获胜.

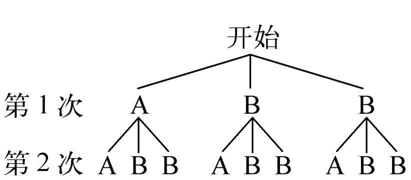
9. 5　**10.** 1 500　**11.** 不同意　**12.** 15

13. 2 000　**14.** 14 000　**15.** 4　**16.** $\frac{1}{12}$

17. 3　**提示:**设保险公司向每名乘客收取保险费 x 元,在 n 次运行中,平均失事 nP 次.根据题意,得 $50nx\geqslant100\ 000\times50n\times0.000\ 03$,解得 $x\geqslant3$.所以保险公司应至少向每名乘客收取保险费 3 元.

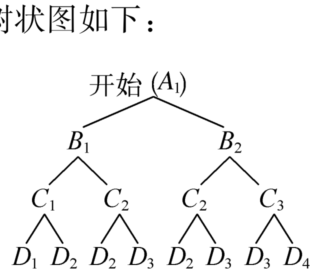
18. 24　**提示:**列表或画树状图可知,同时摸出 2 个颜色相同的球的概率为 $\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$,所以顾客得到奖品的平均价值为 $\frac{1}{5}\times100+\left(1-\frac{1}{5}\right)\times5=24$(元).故摊贩应要求每个摸彩者每次至少交纳 24 元.

19. **解:**画树状图如下:



由树状图可知,共有 9 种等可能的结果,两次摸到卡片字母相同的有 5 种等可能的结果,所以两次摸到卡片字母相同的概率为 $\frac{5}{9}$,所以小明胜的概率为 $\frac{5}{9}$,小亮胜的概率为 $\frac{4}{9}$,因为 $\frac{5}{9}\neq\frac{4}{9}$.所以这个游戏对双方不公平.

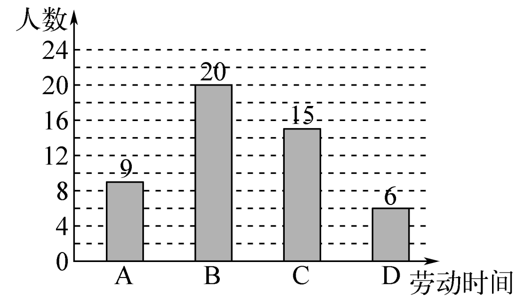
20. **解:**画出树状图如下:



由树状图可知,共有 8 种等可能的情况,其中落入③号槽的有 3 种,所以 P(落入③号槽)$=\frac{3}{8}$.

21. **解:**(1) 20　补全条形统计图如下:

学期初调查数据条形统计图



(2) 500×(52%+16%)=340(人).

答:学期末七年级学生一周参与劳动时间不低于 3 h 的人数约为 340.

(3) 学期末比学期初有提高.理由如下:由表格信息可得学期末比学期初的一周参与劳动时间的平均数、中位数、众数都增加了,所以该校七年级学生一周参与劳动时间,学期末比学期初有提高.

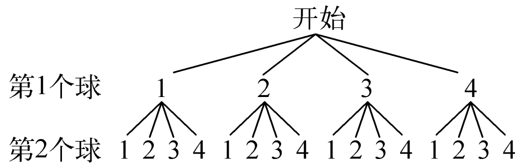
22. **解:**(1) 26　2022 年　**提示:**2022 年、2021 年、2020 年、2019 年我国新能源汽车销售量约占该年各类汽车销售总量的占比分别为:$\frac{688.7}{2\ 686.4}\times100\%\approx26\%$,$\frac{352}{2\ 627.5}\times100\%\approx13\%$,$\frac{136.7}{2\ 531}\times100\%\approx5\%$,$\frac{120.6}{2\ 577}\times100\%\approx5\%$.所以这 4 年中,我国新能源汽车销售量在各类汽车销售总量中占比最高的年份是 2022 年.

(2) 不同意.理由如下:

2022 年、2021 年新能源汽车销售量的增长率分别为 $\frac{688.7-352}{352}\times100\%\approx96\%$,$\frac{352-136.7}{136.7}\times100\%\approx157\%$,所以 2022 年新能源汽车销售量的增长率比 2021 年低.

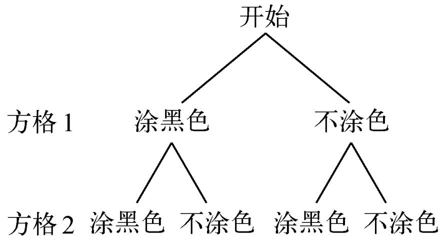
23. **解:**(1) $\frac{1}{4}$

(2) 画树状图如下：



由树状图可知，共有 16 种等可能的结果，其中第 2 次摸到的小球编号比第 1 次摸到的小球编号大 1 出现了 3 次，所以 P(第 2 次摸到的小球编号比第 1 次摸到的小球编号大 1)$=\frac{3}{16}$.

24. 解：(1) 画树状图如下：



所以题图 3 可表示不同信息的总个数为 4.

(2) 16

(3) 3 **提示：**因为 $n\times n$ 的网格共有 n^2 个小方格，每个小方格有 2 种情况(涂黑色或不涂色)，所以可表示不同信息的总个数为 2^{n^2}. 由题意，得 $2^{n^2}\geqslant 492$. 因为 $2^8=256$，$2^9=512$，所以 $n^2\geqslant 9$，即 $n\geqslant 3$，所以 n 的最小值为 3.

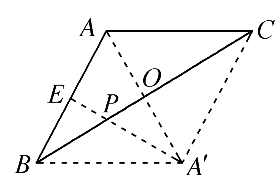
期末检测卷

1. D **2.** A **3.** B **4.** C **5.** C

6. B **提示：**因为 $BE:AE=5:12$，所以 $BE:AE:AB=5:12:13$. 因为 $AB=1\,300$ m，所以 $AE=1\,200$ m，$BE=500$ m. 设 $EC=x$ m，则易得 $BF=EC=x$ m. 因为 $\angle DBF=60°$，所以 $DF=\sqrt{3}x$ m. 又因为 $\angle DAC=30°$，所以 $AC=\sqrt{3}CD$，即 $1\,200+x=\sqrt{3}(500+\sqrt{3}x)$，解得 $x=600-250\sqrt{3}$. 所以 $DF=\sqrt{3}x=(600\sqrt{3}-750)$m，所以 $CD=DF+CF=(600\sqrt{3}-250)$m.

7. C **提示：**由题意和画图知，抛物线开口向下时不能满足 $y_1>y_2>n$，所以 $a>0$，抛物线开口向上. 当对称轴直线 $x=m<-3$ 时，显然不满足条件. 当对称轴直线 $x=m>5$ 时，显然满足. 当对称轴在 $-3<x=m<5$ 之间时，n 显然是最小的，只需 $y_1>y_2$，因此有 $m-(-3)>5-m$，解得 $m>1$，所以 $1<m<5$. 综上所述，$m>1$ 且 $m\neq 5$.

8. B **提示：**如图，将 $\triangle ABC$ 沿 BC 折叠得到 $\triangle A'BC$，则四边形 $ABA'C$ 为菱形，菱形的对角线相交于点 O. 由题图 2 可知，当点 P 与点 B 重合时，$y=PA+PE=AB+BE=AB+\frac{1}{2}AB=3\sqrt{3}$，解得 $AB=2\sqrt{3}$，即菱形的边长为 $2\sqrt{3}$. 连接 $A'E$ 交 BC 于点 P，此时 y 的值最小，为 $A'E$ 的长. 结合题图 2，可知 $a=A'E$. 因为 $AB=AC$，$\angle BAC=120°$，所以 $\angle BAA'=60°$. 所以 $\triangle AA'B$ 为等边三角形. 因为 E 是 AB 的中点，所以 $A'E\perp AB$，$\angle A'EA=90°$. 易得该菱形的高 $A'E=3$，所以 $a=3$. 因为 $AB/\!/A'C$，所以 $\angle PA'C=90°$，$A'C=AB=2\sqrt{3}$，$\angle A'CB=30°$，则 $b=PC=\frac{A'C}{\cos\angle BCA'}=4$. 所以 $a+b=7$.



9. $\frac{1}{4}$ **10.** -3(答案不唯一，$n<0$ 即可)

11. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **12.** 560 **13.** 4

14. $\frac{1}{2}$ **提示：**设图 1 中正方形的边长为 $2a$，则①号和②号三角形的直角边长可表示为 $\sqrt{2}a$. 所以 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}a}{2\sqrt{2}a}=\frac{1}{2}$.

15. 14

16. 8 **提示：**过点 A 作 $AE\perp x$ 轴于点 E. 由题意及图像，可知 $S_{\triangle OAE}=S_{\triangle OCD}$，所以 $S_{四边形AECB}=S_{\triangle BOD}=21$. 因为 $\frac{AO}{AB}=\frac{2}{3}$，所以 $\frac{AO}{OB}=\frac{2}{5}$. 因为 $AE/\!/BC$，所以 $\triangle OAE\backsim\triangle OBC$. 所以 $\frac{S_{\triangle OAE}}{S_{\triangle OBC}}=\left(\frac{AO}{OB}\right)^2$，即 $\frac{S_{\triangle OAE}}{S_{\triangle OAE}+S_{四边形AECB}}=\frac{4}{25}$，所以 $S_{\triangle OAE}=4$，即 $\frac{1}{2}OE\cdot AE=4$. 所以 $k=OE\cdot AE=8$.

17. ①②③④⑤ **提示:**因为抛物线开口向下,所以 $a<0$.因为抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}$,所以 $b=-a>0$.因为抛物线与 y 轴的交点在 x 轴上方,所以 $c>0$,所以 $abc<0$,故①正确.因为抛物线经过点$(2,0)$,所以 $4a+2b+c=0$,故③正确.因为 $b=-a$,$4a+2b+c=0$,所以 $c=-2a$,所以 $-2b+c=2a-2a=0$,故②正确.因为点 $\left(-\frac{5}{2},y_1\right)$到直线 $x=\frac{1}{2}$的距离比点$\left(\frac{5}{2},y_2\right)$到直线 $x=\frac{1}{2}$的距离大,所以 $y_1<y_2$,故④正确.因为抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{1}{2}$,所以当 $x=\frac{1}{2}$时,函数值最大,所以 $\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c>am^2+bm+c\left(m\neq\frac{1}{2}\right)$.因为 $b=-a$,所以$\frac{1}{4}b>m(am+b)$ $\left(m\neq\frac{1}{2}\right)$,故⑤正确.

18. $1<m<4$ 且 $m\neq3$ **提示:**延长 DA,作点 E 关于 AB 的对称点 E',连接 CE',交 AB 于点 F_1,连接 CE,以 CE 为直径作⊙O 交 AB 于点 F_2,F_3.因为四边形 $ABCD$ 是矩形,所以 $AD\parallel BC$,所以 $\triangle AE'F_1\backsim\triangle BCF_1$.由轴对称,得 $\triangle AEF_1\cong\triangle AE'F_1$,所以$\triangle AEF_1\backsim\triangle BCF_1$.当 $m=4$ 时,所以 $AB=BC=CD=DA=4$,所以 $DE=AD-AE=3$,所以 $CE=\sqrt{DE^2+CD^2}=5$,所以⊙O 的直径为 5,过点 O 作 $OG\perp CD$ 于点 G,则 $CG=DG$,$OG\parallel AD$,$OG=\frac{1}{2}DE=1.5$,所以⊙O 的圆心 O 到 AB 的距离为 $4-1.5=2.5$,等于⊙O 的半径,所以点 F_2,F_3 重合,如图 1 所示,此时$\triangle AEF_2\backsim\triangle BF_2C$,即当 $m=4$ 时,符合条件的点 F 有 2 个;当 $m>4$ 时,⊙O 和 AB 相离,如图 2 所示,此时点 F_2,F_3 不存在,即此时符合条件的点 F 只有 1 个,为点 F_1.当点 F_1 与点 F_2 重合时,如图 3 所示,$\triangle AEF_1\backsim\triangle BCF_1$,$\triangle AEF_2\backsim\triangle BF_2C$,易得 $AF_1=AE=1$,$BC=BF_1=3$,故当 $m=3$ 时,符合题意的点 F 有 2 个.综上所述,当 $1<m<4$ 且 $m\neq3$ 时,符合题意的点 F 有 3 个.

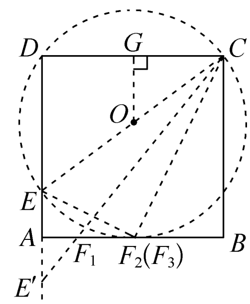


图 1

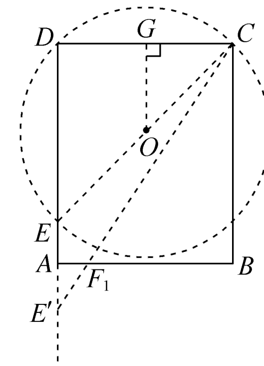


图 2

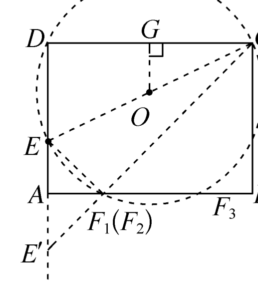


图 3

19. **解:**(1) 5

(2) 因为抛物线的顶点坐标为$(2,1)$,所以抛物线的函数表达式可设为 $y=a(x-2)^2+1$.把点$(0,5)$代入,得 $5=4a+1$,解得 $a=1$,所以抛物线的函数表达式为 $y=(x-2)^2+1$.

(3) $x<2$ 或 $x>3$

20. **解:**(1) 函数图像略.

(2) 当 $y>0$ 时,x 的取值范围是 $-3<x<1$.

(3) 平移后图像所对应的函数表达式为 $y=-\frac{1}{2}x^2-4x-7$.

21. **解:**(1) 列表如下:

卡片上所写内容	消防知识手册	辞海	辞海
消防知识手册	—	(消防知识手册,辞海)	(消防知识手册,辞海)
辞海	(辞海,消防知识手册)	—	(辞海,辞海)
辞海	(辞海,消防知识手册)	(辞海,辞海)	—

共有 6 种等可能的结果,其中抽到的两张卡片上所写内容恰好都是辞海的结果有 2 种,所以抽到的两张卡片上所写内容恰好都是辞海的概率为$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

(2) 设添加 x 张"消防知识手册"卡片,则所有卡片共有$(x+3)$张,"消防知识手册"卡片有$(x+1)$张. 由题意,得$\frac{x+1}{x+3}=\frac{5}{7}$,解得 $x=4$. 经检验,$x=4$ 是原方程的解且符合题意.

答:应该添加 4 张"消防知识手册"卡片.

22. **解:**(1) 这 40 名学生视力的中位数是第 20,21 个数据的平均数,而这 2 个数据均落在 C 组,所以这 40 名学生视力的中位数落在 C 组.

(2) ①$500\times\frac{12+4}{40}=200$(名).

答:这 500 名八年级学生中视力在 $4.8\leqslant x\leqslant5.3$ 范围内的约为 200 名.

②去年视力在 $4.8\leqslant x\leqslant5.3$ 范围内的人数为 263,今年视力在 $4.8\leqslant x\leqslant5.3$ 范围内的人数约为 200,今年视力在该范围内的人数明显减少. 建议:保护性用眼,保持学习、生活环境光线的柔和,避免强烈紫外线的照射. 尽量减少熬夜和过度用眼,减少过度使用电子产品. 增加户外活动,定期远眺.

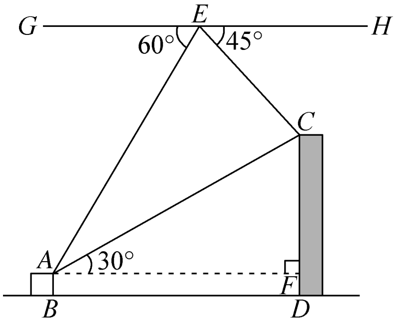
23. (1) **证明:**因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 所以 $OA=OC$, $AB\parallel CD$, 所以 $\angle OAE=\angle OCF$. 在$\triangle AOE$ 和$\triangle COF$ 中,
$\begin{cases}\angle OAE=\angle OCF,\\OA=OC,\\\angle AOE=\angle COF,\end{cases}$ 所以$\triangle AOE\cong\triangle COF$,
所以 $OE=OF$.

(2) **解:**过点 O 作$ON\parallel BC$ 交AB 于点 N,则$\triangle AON\backsim\triangle ACB$. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $BC=AD=4$,$OA=OC$,所以 $ON=\frac{1}{2}BC=2$,$BN=\frac{1}{2}AB=3$.

设 $BE=x$,则 $NE=3-x$. 因为 $ON\parallel BC$,所以$\triangle ONE\backsim\triangle MBE$,所以$\frac{ON}{MB}=\frac{NE}{BE}$,即$\frac{2}{1}=\frac{3-x}{x}$,解得 $x=1$. 所以 BE 的长为 1.

24. **解:**(1) 如图,过点 A 作 $AF\perp CD$ 于点 F. 由题意,得 $DF=AB=10$ m,$AF=BD=100\sqrt{3}$ m. 在 Rt$\triangle AFC$ 中,$\angle CAF=30^\circ$,所以 $CF=AF\cdot\tan30^\circ=100\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=100$(m),所以 $CD=CF+DF=100+10=110$(m).

答:楼 CD 的高为 110 m.



(2) 无人机能安全返航. 如图,在 Rt$\triangle AFC$ 中,$\angle CAF=30^\circ$,$CF=100$ m,所以 $AC=2CF=200$ m. 由题意,得 $GH\parallel AF$,所以$\angle EAF=\angle GEA=60^\circ$, 所以 $\angle EAC=\angle EAF-\angle CAF=30^\circ$. 因为 $\angle HEC=45^\circ$, 所以 $\angle AEC=180^\circ-\angle GEA-\angle HEC=75^\circ$, 所以 $\angle ACE=180^\circ-\angle AEC-\angle EAC=75^\circ$, 所以 $\angle AEC=\angle ACE=75^\circ$,所以 $AE=AC=200$ m. 因为无人机从点 E 处匀速以 5 m/s 的速度沿 EA 方向返航,所以无人机返航需要的时间为$\frac{200}{5}=40$(s). 因为 40 s$<$60 s,所以无人机能安全返航.

25. **解:**(1) $AC\perp AF$. 理由如下:
因为四边形 $ABCD$ 和四边形 $AEFG$ 是矩形,所以 $AG=EF=3$,$GF=AE=4$,$BC=$

$AD=6$，$\angle B=\angle AGF=90°$. 因为 $\frac{GF}{BA}=\frac{1}{2}=\frac{AG}{CB}$，所以 $\triangle AGF\backsim\triangle CBA$，所以 $\angle BAC=\angle GFA$. 因为 $\angle GFA+\angle GAF=90°$，所以 $\angle CAF=\angle BAC+\angle GAF=90°$，所以 $AC\perp AF$.

(2) 如图 1，连接 AF. 因为 $AB=8$，$BC=AD=6$，所以 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=10$. 因为 $AE=4$，$EF=3$，所以 $AF=\sqrt{AE^2+EF^2}=5$，所以 $\frac{AG}{AF}=\frac{3}{5}=\frac{AD}{AC}$. 由 (1)易知 $\angle FAG=\angle ACB=\angle DAC$，所以 $\angle DAG=\angle CAF$，所以 $\triangle DAG\backsim\triangle CAF$，所以 $\frac{DG}{CF}=\frac{AD}{AC}=\frac{3}{5}$.

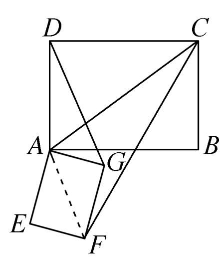


图 1

(3) CF 的长为 $\sqrt{91}+4$ 或 $\sqrt{91}-4$.

提示： 如图 2，当点 G 在线段 CF 上时，因为 $\angle AGC=90°$，所以 $GC=\sqrt{AC^2-AG^2}=\sqrt{91}$，所以 $CF=CG+GF=\sqrt{91}+4$. 如图 3，当点 F 在线段 CG 上时，因为 $\angle AGC=90°$，所以 $GC=\sqrt{AC^2-AG^2}=\sqrt{91}$，所以 $CF=CG-GF=\sqrt{91}-4$. 综上所述，CF 的长为 $\sqrt{91}+4$ 或 $\sqrt{91}-4$.

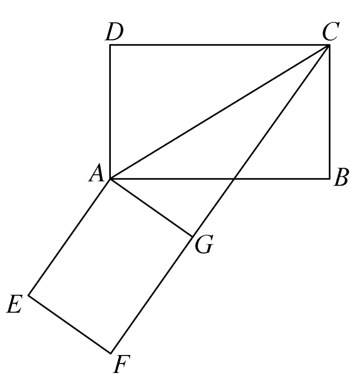


图 2

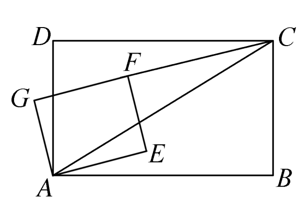
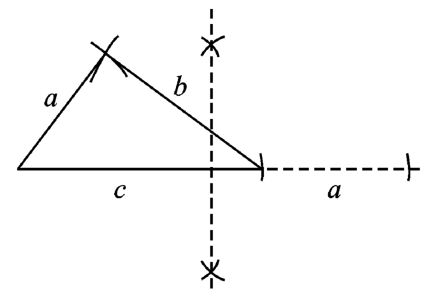


图 3

26. 解：(1) 作图如图所示.



(2) $\triangle AEF$ 是"匀称三角形". 理由如下：连接 AD，OD. 因为 AB 是 $\odot O$ 的直径，所以 $AD\perp BC$. 因为 $AB=AC$，所以 D 是 BC 的中点，所以 $OD\parallel AC$. 因为 EF 切 $\odot O$ 于点 D，所以 $OD\perp EF$. 所以 $AC\perp EF$，即 $EF\perp AF$. 过点 B 作 $BG\perp EF$ 于点 G，则易证 $\triangle BDG\cong\triangle CDF$，所以 $BG=CF$. 因为 $\frac{BE}{CF}=\frac{5}{3}$，所以 $\frac{BE}{BG}=\frac{5}{3}$. 因为 $BG\parallel AF$，所以 $\triangle BEG\backsim\triangle AEF$，所以 $\frac{AE}{AF}=\frac{BE}{BG}=\frac{5}{3}$. 在 Rt$\triangle AEF$ 中，设 $AE=5k(k>0)$，则 $AF=3k$. 由勾股定理，得 $EF=\sqrt{AE^2-AF^2}=4k$. 所以 $\frac{AF+EF+AE}{3}=\frac{3k+4k+5k}{3}=4k=EF$，所以 $\triangle AEF$ 是"匀称三角形".

27. 解：(1) ①连接 HG. 如图 1，当点 E 与点 D 重合时，点 H 在边 CD 上. 易证四边形 $BCHG$ 是正方形，所以 $BG=BC=AD=6$，所以 $AG=AB-BG=4$. 如图 2，当点 E 与点 A 重合时，设 CF 与 AB 相交于点 O. 易证 $\triangle AFO\cong\triangle CBO$，所以 $FO=BO$，$AO=CO$. 设 $FO=BO=x$，则 $CO=AO=10-x$，在 Rt$\triangle BOC$ 中，由勾股定理，得 $CO^2=BC^2+BO^2$，即 $(10-x)^2=36+x^2$，解得 $x=\frac{16}{5}$. 所以 $CO=AO=\frac{34}{5}$，$HO=CO-CH=CO-BC=\frac{4}{5}$. 易证 $\triangle AFO\backsim$

$\triangle GHO$，所以 $\frac{AO}{GO}=\frac{FO}{HO}$，所以 $GO=\frac{AO\cdot HO}{FO}=\frac{17}{10}$. 所以 $AG=AO+GO=\frac{34}{5}+\frac{17}{10}=\frac{17}{2}$. 因为 $\angle ECG=\angle ECF+\angle FCG=\frac{1}{2}\angle DCF+\frac{1}{2}\angle FCB=\frac{1}{2}\angle DCB=45^\circ$，所以随着点 E 从点 D 移动至点 A，点 G 将沿 AB 一直向右移动，所以点 G 的运动路径长为 $\frac{17}{2}-4=\frac{9}{2}$.

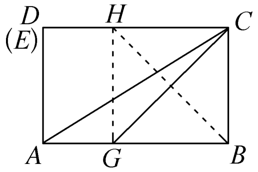


图 1

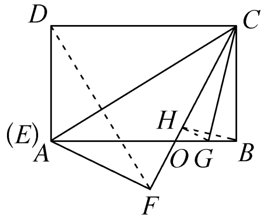


图 2

②当点 F 落在 AC 上时，因为 $\angle AEF=180^\circ-2\angle DEC=180^\circ-2(90^\circ-\angle DCE)=2\angle DCE=\angle DCA$，所以 $\tan\angle AEF=\tan\angle DCA$，即 $m=\frac{AD}{CD}=\frac{3}{5}$. 当点 F 落在 AB 上时，由折叠，可知 $DE=EF$，$CF=CD=10$. 所以 $BF=\sqrt{CF^2-BC^2}=8$，所以 $AF=AB-BF=2$. 设 $DE=EF=x$，则 $AE=AD-DE=6-x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AEF$ 中，由勾股定理，得 $EF^2-AE^2=AF^2$，即 $x^2-(6-x)^2=4$，解得 $x=\frac{10}{3}$. 所以 $AE=\frac{8}{3}$. 所以 $\tan\angle AEF=\frac{AF}{AE}=\frac{3}{4}$，即 $m=\frac{3}{4}$. 综上所述，$\frac{3}{5}<m<\frac{3}{4}$.

(2) AC 的长为 6. **提示：**连接 EF，GH. 易证 $\triangle AEF\backsim\triangle GAH$，所以 $\frac{EF}{AH}=\frac{AF}{GH}=\frac{AE}{GA}=\frac{2}{3}$. 设 $EF=2a$，$AF=2b$，则 $AH=3a$，$GH=3b$，所以 $DE=EF=2a$，$GB=GH=3b$，$CH=BC=AD=2+2a$. 所以 $AC=AH+CH=5a+2$，$AB=AG+GB=3+3b$，$CF=AC-AF=5a+2-2b$. 因为 $AB=CD=CF$，所以 $3+3b=5a+2-2b$，所以 $b=a-\frac{1}{5}$. 易证 $\triangle AHG\backsim\triangle ABC$，所以 $\frac{AH}{AB}=\frac{AG}{AC}$，即 $\frac{3a}{3+3b}=\frac{3}{5a+2}$. 将 $b=a-\frac{1}{5}$ 代入，解得 $a=\frac{4}{5}$ 或 $a=-\frac{3}{5}$（舍去）. 所以 $AC=5a+2=6$.

28. 解：(1) 设函数 $y=ax^3+bx^2+cx$ 的图像与 x 轴交于点 $(x_1,0)$，$(0,0)$，$(x_2,0)$，其中 $x_1<0<x_2$，则 $y=ax^3+bx^2+cx=x(ax^2+bx+c)=ax(x-x_1)(x-x_2)$. 当 $x<x_1$ 时，题图 5 显示 $y=ax\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)>0$，因为 $x(x-x_1)(x-x_2)<0$，所以 $a<0$. 因为 $x_1+x_2>0$，$x_1x_2<0$，所以 $\frac{-b}{a}>0$，$\frac{c}{a}<0$，所以 $b>0$，$c>0$.

(2) 不同意"函数 $y=-x^3+2x^2$ 的图像的对称中心的横坐标为 1"，理由如下：

对任意实数 $m(m>0)$，当 $x=1+m$ 时，$y_1=-(1+m)^3+2(1+m)^2=-m^3-m^2+m+1$，当 $x=1-m$ 时，$y_2=-(1-m)^3+2(1-m)^2=m^3-m^2-m+1$，所以 $y_1+y_2=-2m^2+2$. 若函数 $y=-x^3+2x^2$ 的图像的对称中心的横坐标为 1，则 y_1+y_2 的值与 m 无关，而 $-2m^2+2$ 的值与 m 有关，所以函数 $y=-x^3+2x^2$ 的图像的对称中心的横坐标不是 1.

(3) 当 $a>0$ 时，$ax^3+x^2+cx>0$ 的解集为 $\frac{-1-\sqrt{1-4ac}}{2a}<x<0$ 或 $x>\frac{-1+\sqrt{1-4ac}}{2a}$；当 $a<0$ 时，$ax^3+x^2+cx>0$ 的解集为 $x<\frac{-1+\sqrt{1-4ac}}{2a}$ 或 $0<x<\frac{-1-\sqrt{1-4ac}}{2a}$.

提示：令 $ax^3+x^2+cx=0$，则 $x(ax^2+x+c)=0$，所以 $x=0$ 或 $ax^2+x+c=0$. 因为 $ac<0$，所以 $ax^2+x+c=0$ 的解为 $x_1=\frac{-1-\sqrt{1-4ac}}{2a}$，$x_2=\frac{-1+\sqrt{1-4ac}}{2a}$. 所以 $y=ax^3+x^2+cx$ 与 x 轴的交点的横坐标分别是 $\frac{-1-\sqrt{1-4ac}}{2a}$，0 和 $\frac{-1+\sqrt{1-4ac}}{2a}$. 结合图像即可得出答案.