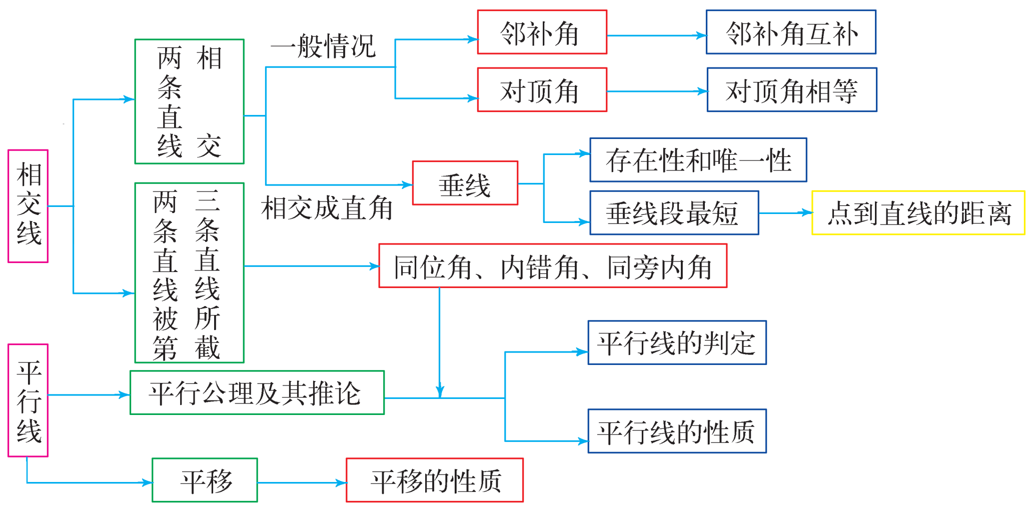
第七章　相交线与平行线

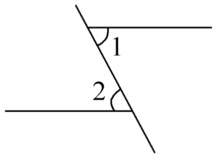
知识回放



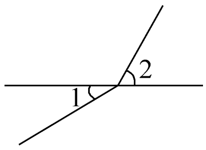
名师精讲

考点一　对顶角与邻补角

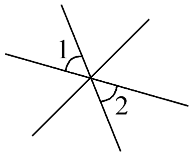
例1　下列各图中，$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是对顶角的是　　(　　)



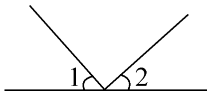
A



B



C



D

分析　根据对顶角的概念判断即可.

答案　C

考点二　垂线

例2　已知直线 AB 与直线 CD 交于点 O，过点 O 作 $OE\perp AB$.

(1) 如图1，OP 为 $\angle AOD$ 内的一条射线. 若 $\angle 1=\angle 2$，求

知识链接

如果两个角有一条公共边，且另一边互为反向延长线，那么这两个角互为邻补角；如果两个角的两边分别互为反向延长线，那么这两个角互为对顶角. 对顶角相等.

证:$OP\perp CD$.

(2) 如图 2,若$\angle BOC=2\angle AOC$,求$\angle COE$ 的度数.

(3) 如图 3,在(2)的条件下,过点 O 作 $OF\perp CD$,经过点 O 画直线 MN. 若射线 OM 平分$\angle BOD$,请直接写出图中与 $2\angle EOF$ 度数相等的角.

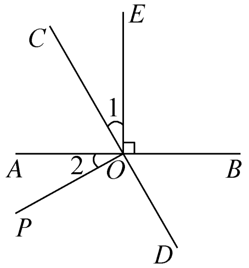


图 1

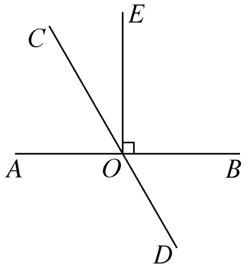


图 2

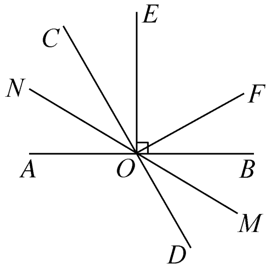


图 3

分析 (1) 根据 $OE\perp AB$,得到$\angle 1$ 与$\angle AOC$ 互余,由$\angle 1=\angle 2$,得到$\angle 2$ 与$\angle AOC$ 互余,从而证得结论.

(2) 根据平角的定义,得$\angle AOC=60°$,再利用垂直的定义,得$\angle AOE=90°$,最后根据互余得到$\angle COE$ 的度数.

(3) 根据(2)中$\angle AOC=60°$,分别计算图中各个角的度数,再从各个角中找出与问题相符合的所有角. 由(2)得$\angle AOC=60°$,$\angle COE=30°$,所以$\angle BOD=\angle AOC=60°$. 因为 OM 平分$\angle BOD$,所以$\angle BOM=\angle DOM=\angle AON=\angle CON=30°$. 因为 $OE\perp AB$,$OC\perp OF$,所以$\angle AOE=\angle COF=90°$. 所以$\angle EOF=\angle AOC=60°$,所以$\angle BOF=30°$,所以$\angle AOD=\angle BOC=\angle FON=\angle EOM=180°-60°=120°=2\angle EOF$.

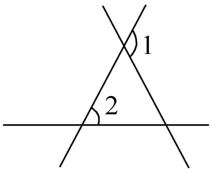
答案 (1) 因为 $OE\perp AB$,所以$\angle AOE=90°$,即$\angle 1+\angle AOC=90°$. 因为$\angle 1=\angle 2$,所以$\angle 2+\angle AOC=90°$,即$\angle POC=90°$,所以 $OP\perp CD$.

(2) 因为$\angle AOC+\angle BOC=180°$,且$\angle BOC=2\angle AOC$,所以$\angle AOC=60°$. 因为 $OE\perp AB$,所以$\angle AOE=90°$,所以$\angle COE=90°-\angle AOC=30°$.

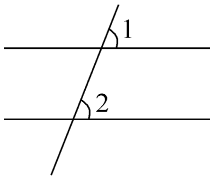
(3) 图中与 $2\angle EOF$ 度数相等的角是$\angle AOD$,$\angle BOC$,$\angle FON$,$\angle EOM$.

考点三　同位角、内错角、同旁内角

例 3 下列所示的四个图形中,$\angle 1$ 和$\angle 2$ 是同位角的是 (　　)



①



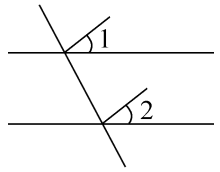
②

知识链接

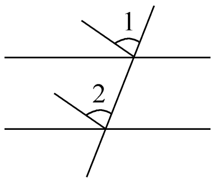
在两条直线相交所成的四个角中,若有一个角是直角时,则这两条直线互相垂直;从直线外一点引一条直线的垂线,这点和垂足之间的线段叫作垂线段,其性质是垂线段最短.

方法与点拨

同位角的边构成“F”形,内错角的边构成“Z”形,同旁内角的边构成“U”形.



③



④

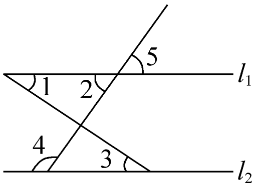
A. ②③　　B. ①②③　　C. ①②④　　D. ①④

分析　此题考查同位角的概念，在截线的同侧，并且在被截线的同一侧的两个角是同位角，据此可以得出答案.

答案　C

考点四　平行线的判定

例4　如图，下列条件中，不能判定 $l_1/\!/l_2$ 的是　（　　）



A. $\angle 1=\angle 3$　　B. $\angle 2+\angle 4=180°$

C. $\angle 2=\angle 3$　　D. $\angle 4+\angle 5=180°$

分析　在三线八角的前提下，“同位角相等，两直线平行”“内错角相等，两直线平行”“同旁内角互补，两直线平行”，据此判断即可.

答案　C

方法与点拨

同位角相等、内错角相等、同旁内角互补，均能推出两被截直线平行. 另有判定定理是：如果两条直线与第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行.

例5　如图，已知 $AC\perp AE$，$BD\perp BF$，$\angle 1=35°$，$\angle 2=35°$. AC 与 BD 平行吗？AE 与 BF 平行吗？请通过填空完善下面的推理过程.

解：因为$\angle 1=35°$，$\angle 2=35°$，所以$\angle 1=\angle 2$(________).

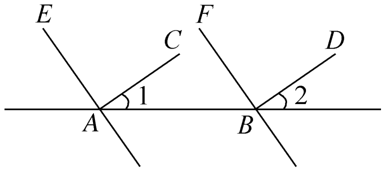
所以(________)//(________)(________________).

又因为 $AC\perp AE$，所以$\angle EAC=90°$.

所以$\angle EAB=\angle EAC+\angle 1=$(________)(________).

同理可得$\angle FBD+\angle 2=$(________).

所以(________)//(________)(________________).



方法与点拨

有关几何证明题，必须“有根有据”，即根据学习的定义、定理来证之.

分析 根据平行线的判定和等量代换等，填上证明结果和依据，解题思路已很明确，注意所得平行的直线一定要填准确.

答案 等量代换 AC BD 同位角相等，两直线平行 $125°$ 等式的性质 $125°$ AE BF 同位角相等，两直线平行

考点五 平行线的性质

例6 如图，已知 $AM/\!/BN$，$\angle A=64°$. P 是射线 AM 上一动点（不与点 A 重合），BC，BD 分别平分 $\angle ABP$ 和 $\angle PBN$，分别交射线 AM 于点 C，D.

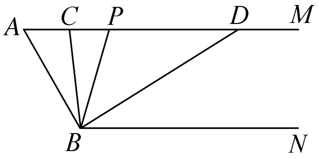
（1）①$\angle ABN$ 的度数是________；

②因为 $AM/\!/BN$，所以 $\angle ACB=\angle$________.

（2）求 $\angle CBD$ 的度数.

（3）当点 P 运动时，$\angle APB$ 与 $\angle ADB$ 之间的数量关系是否随之发生变化？若不变化，请写出它们之间的关系，并说明理由；若变化，请写出变化规律.

（4）当点 P 运动到使 $\angle ACB=\angle ABD$ 时，$\angle ABC$ 的度数是________.



分析 （1）①②由平行线的性质可直接得出答案.

（2）由角平分线的定义可以证明 $\angle CBD=\dfrac{1}{2}\angle ABN$，从而问题得解.

（3）先说明 $\angle APB=\angle PBN$，再由 $\angle PBN=2\angle DBN$ 可推出结论.

（4）先证明 $\angle ABC=\angle DBN$，再结合（2）中 $\angle CBD=58°$，可知 $\angle ABC+\angle DBN=58°$，从而问题得解.

答案 （1）①$116°$ ②CBN

（2）因为 $AM/\!/BN$，所以 $\angle ABN+\angle A=180°$. 所以 $\angle ABN=116°$，所以 $\angle ABP+\angle PBN=116°$. 因为 BC 平分 $\angle ABP$，BD 平分 $\angle PBN$，所以 $\angle ABP=2\angle CBP$，$\angle PBN=2\angle DBP$，所以 $2\angle CBP+2\angle DBP=116°$，所以 $\angle CBD=\angle CBP+\angle DBP=58°$.

> **知识链接** 两直线平行，同位角相等、内错角相等、同旁内角互补.

(3) 不变化，$\angle APB : \angle ADB = 2:1$. 理由如下：

因为 $AM // BN$，所以 $\angle APB = \angle PBN$，$\angle ADB = \angle DBN$. 因为 BD 平分 $\angle PBN$，所以 $\angle PBN = 2\angle DBN$，所以 $\angle APB : \angle ADB = 2:1$.

(4) 29°

例7 (2024 春 · 海安市期中)某学习小组发现一个结论：已知直线 $a//b$，若直线 $c//a$，则 $c//b$. 他们发现这个结论运用很广，请你利用这个结论解决以下问题：

已知直线 $AB//CD$，点 E 在 AB，CD 之间，点 P，Q 分别在直线 AB，CD 上，连接 PE，EQ.

(1) 如图 1，运用上述结论，探究 $\angle PEQ$ 与 $\angle APE + \angle CQE$ 之间的数量关系，并说明理由.

(2) 如图 2，PF 平分 $\angle BPE$，QF 平分 $\angle EQD$，当 $\angle PEQ = 130°$ 时，求出 $\angle PFQ$ 的度数.

(3) 如图 3，若点 E 在 CD 的下方，PF 平分 $\angle BPE$，QH 平分 $\angle EQD$，QH 的反向延长线交 PF 于点 F，当 $\angle PEQ = 80°$ 时，请写出 $\angle PFQ$ 的度数，并说明理由.

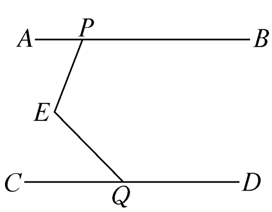


图 1

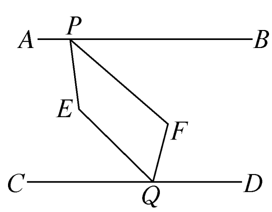


图 2

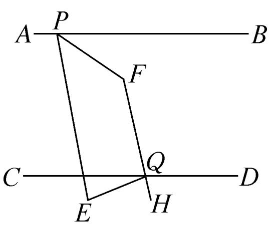


图 3

分析 (1) 由平行线的基本事实，过点 E 作 AB 的平行线，再根据平行线的性质，得出 $\angle APE = \angle PEH$，$\angle CQE = \angle HEQ$，进而得出结论.

(2) 利用第(1)题得到的结论，结合角平分线的定义、平角的定义计算求解.

(3) 同第(2)的方法求之.

答案 解：(1) $\angle PEQ = \angle APE + \angle CQE$，理由如下：如图 1，过点 E 作 $EH//AB$，则 $EH//AB//CD$. 因为 $AB//EH$，所以 $\angle APE = \angle PEH$，又因为 $CD // EH$，所以 $\angle CQE = \angle HEQ$. 因为 $\angle PEQ = \angle PEH + HEQ$，所以 $\angle PEQ = \angle APE + \angle CQE$.

(2) 如图 2，由(1)，得 $\angle PEQ = \angle APE + \angle CQE = 130°$. 因为 $\angle APE + \angle BPE = 180°$，$\angle CQE + \angle DQE = 180°$，所以

方法与点拨

在本题的证明中，通过作平行于一直线的辅助线，将欲证之角“一分为二”，进而分别证此两角与已知角相等. 在以后的学习中，当证明一线段等于另外两线段之和时，也可类似地将该线段一分为二而证之.

规律总结

本题中的几何图形是典型的“M”形，对于题图 1，不仅有 $\angle PEQ = \angle APE + \angle CQE$ 这一结论，而且有 $\angle PEQ + \angle BPE + \angle DQE = 360°$. 对于图 3，也有下列等量关系：$\angle PEQ = \angle APE - \angle CQE$.

$\angle BPE+\angle DQE=360^\circ-130^\circ=230^\circ$. 又因为 PF 平分 $\angle BPE$，QF 平分 $\angle EQD$，所以 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，所以 $\angle 2+\angle 4=\frac{1}{2}(\angle BPE+\angle DQE)=\frac{1}{2}\times 230^\circ=115^\circ$. 由(1)结论可知，$\angle PFQ=\angle 2+\angle 4=115^\circ$.

(3) $\angle PFQ=140^\circ$，理由如下：

如图 3，延长 PF 交 CD 于点 M. 因为 PF 平分 $\angle BPE$，QH 平分 $\angle EQD$，所以 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$. 因为 $AB\parallel CD$，所以 $\angle BPE=\angle DNE$，$\angle 2=\angle PMC=\angle 1$. 又因为 $\angle DQE=180^\circ-\angle EQN=\angle DNE+\angle E$，即 $2\angle 4=2\angle 1+80^\circ$，所以 $\angle 4-\angle 1=40^\circ$，所以 $\angle PFQ=180^\circ-\angle QFM=\angle FQD+\angle PMC=180^\circ-\angle 4+\angle 1=180^\circ-(\angle 4-\angle 1)=180^\circ-40^\circ=140^\circ$.

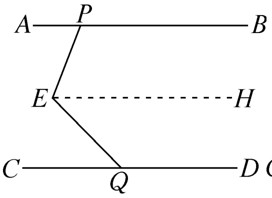


图 1

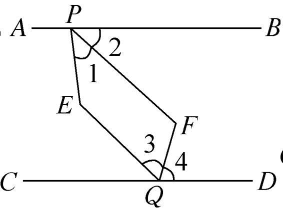


图 2

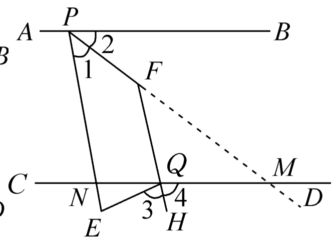


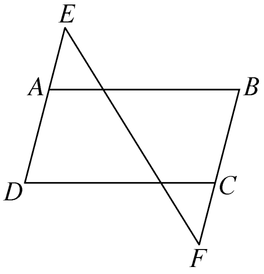
图 3

考点六　命题、定理、证明

例 8　如图，现有以下三个条件：①$AB\parallel CD$；②$\angle B=\angle D$；③$\angle E=\angle F$. 请以其中两个为条件，第三个为结论构造新的命题.

(1) 请写出所有的命题(数学中的命题通常可以写成“如果……那么……”的形式).

(2) 请选择其中的一个真命题进行证明.



分析　(1) 根据命题的概念即可解答.

(2) 根据平行线的性质定理、判定定理进行证明即可.

答案　(1) 共有 3 个命题. ①如果 $AB\parallel CD$，$\angle B=\angle D$，那么 $\angle E=\angle F$；②如果 $AB\parallel CD$，$\angle E=\angle F$，那么 $\angle B=$

知识链接

可以判断为正确(或真)或错误(或假)的陈述语句叫作命题. 数学中的命题常可以写成“如果……那么……”的形式，“如果”后面接的是题设，“那么”后面接的是结论. 有些命题的正确性是经过推理证实的，这样的真命题叫作定理. 要说明一个命题的正确性，一般需要推理、论证，而判断一个命题是假命题，只需举出一个反例即可.

$\angle D$；③如果$\angle B=\angle D$，$\angle E=\angle F$，那么$AB/\!/CD$.

（2）答案不唯一，如选择命题①.

因为$AB/\!/CD$，所以$\angle B=\angle DCF$. 因为$\angle B=\angle D$，所以$\angle D=\angle DCF$. 所以$DE/\!/BF$，所以$\angle E=\angle F$.

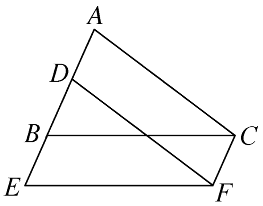
考点七　平移

例9　如图，将三角形ABC沿射线AB的方向移动2 cm到三角形DEF的位置.

（1）找出图中所有平行的直线.

（2）找出图中与AD相等的线段，并写出其长度.

（3）若$\angle ABC=65°$，求$\angle BCF$的度数.



分析　（1）（2）直接根据平移的性质写出结果即可.

（3）首先根据平移的性质得到$AE/\!/CF$，然后利用平行线的性质即可得解.

答案　（1）$AE/\!/CF$，$AC/\!/DF$，$BC/\!/EF$.

（2）$AD=CF=BE=2$ cm.

（3）由平移的性质，得$AE/\!/CF$. 又因为$\angle ABC=65°$，所以$\angle BCF=\angle ABC=65°$.

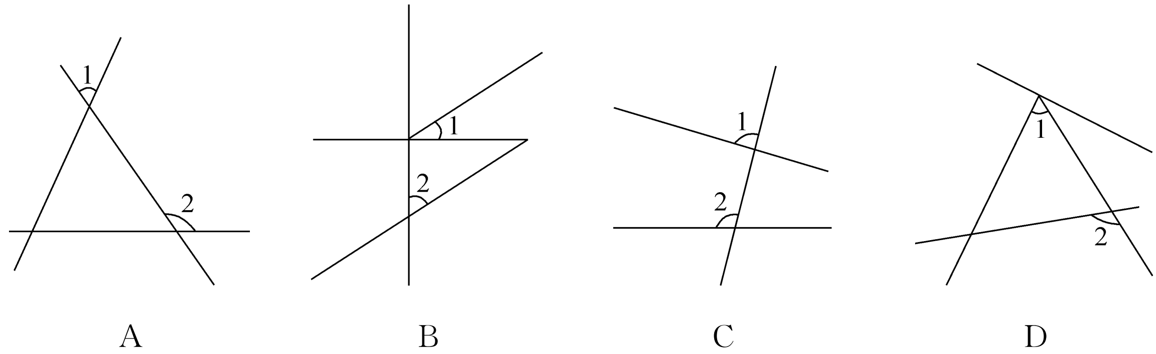
知识链接

平移的性质：把一个图形整体沿某一直线方向移动，会得到一个新的图形，新图形与原图形的形状和大小完全相同；新图形中的每一点都是由原图形中的某一点移动后得到的，这两个点是对应点. 连接各组对应点的线段平行（或共线）且相等.

抢分必做

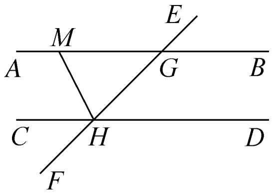
必会题

1. 如图，$\angle 1$和$\angle 2$不是同位角的是（　　）

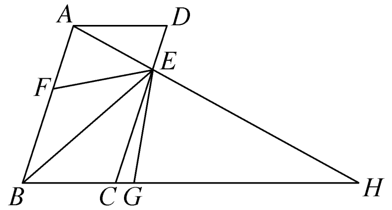


2. 如图，$AB// CD$，EF 与 AB，CD 分别交于点 G，H，$\angle CHG$ 的平分线 HM 交 AB 于点 M. 若 $\angle EGB=50^{\circ}$，则 $\angle GMH$ 的度数为 （　　）

A. 50°　　B. 55°　　C. 60°　　D. 65°



（第 2 题）



（第 3 题）

3. (2024 春·启东市期中)如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD// BC$，$\angle D=\angle ABC$，E 是边 DC 上一点，连接 AE 交 BC 的延长线于点 H. F 是边 AB 上一点. 使得 $\angle FBE=\angle FEB$，作 $\angle FEH$ 的平分线 EG 交 BH 于点 G. 若 $\angle DEH=100^{\circ}$，则 $\angle BEG$ 的度数为 （　　）

A. 30°　　B. 40°　　C. 50°　　D. 60°

4. 如图为一盏可折叠台灯及其平面示意图，其中支架 AO 与底座 OE 垂直，支架 AB，BC 为固定支撑杆，当灯体 CD 与底座 OE 平行时，$\angle BAO=138^{\circ}$，$\angle BCD=154^{\circ}$，则 $\angle B$ 的度数为________°.


图 1

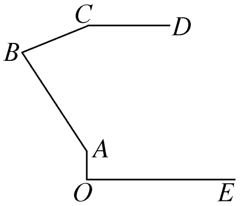
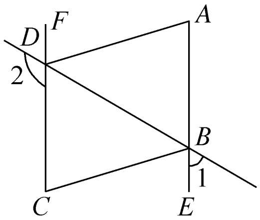


图 2

5. 如图，$AE// FC$，$\angle A=\angle C$，DA 平分 $\angle BDF$.

(1) AD 与 BC 的位置关系如何？为什么？

(2) BC 平分 $\angle DBE$ 吗？为什么？



易错题

6. 如图 1，边长为 4 的等边三角形 ABC 和等边三角形 DEF 互相重合，现将三角形 ABC 沿直线 l 向左平移 m 个单位长度，将三角形 DEF 沿直线 l 向右平移 m 个单位长度，如图 2 所

示，当 E，C 是线段 BF 的三等分点时，平移距离 m 的值为________.

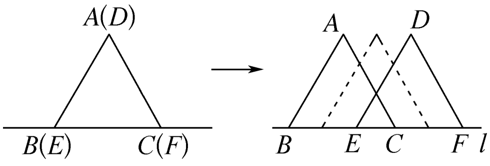
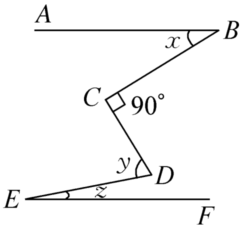


图 1　　　　图 2

热点题

7. 如图，$AB /\!/ EF$，如果 $\angle C=90^\circ$，那么 x，y 和 z 的关系是　　（　　）



A. $y=x+z$　　B. $x+y-z=90^\circ$　　C. $x+y+z=180^\circ$　　D. $y+z-x=90^\circ$

8. 在综合与实践课上，老师让同学们以“两条平行线 AB，CD 和一块含 60° 角的直角三角尺 EFG（$\angle EFG=90^\circ$，$\angle EGF=60^\circ$）”为主题开展数学活动.

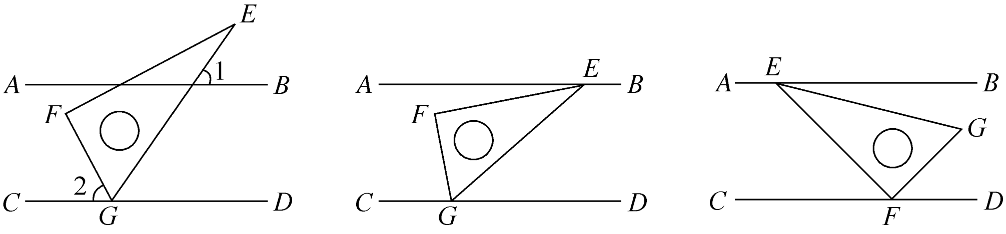


图 1　　　　图 2　　　　图 3

(1) 如图 1，小杰把三角尺的 60° 角的顶点 G 放在 CD 上，若 $\angle 2=2\angle 1$，求 $\angle 1$ 的度数.

(2) 如图 2，小颖把三角尺的两个锐角的顶点 E，G 分别放在 AB 和 CD 上，请你探索并说明 $\angle AEF$ 与 $\angle FGC$ 之间的数量关系.

(3) 如图 3，小亮把三角尺的直角顶点 F 放在 CD 上，30° 角的顶点 E 放在 AB 上. 若 $\angle AEG=\alpha$，$\angle CFG=\beta$，请写出 $\angle AEG$ 与 $\angle CFG$ 的数量关系，并说明理由（用含 α，β 的式子表示）.

拓展题

9. 如图 1，直线 DE 上有一点 O，过点 O 在直线 DE 上方作射线 OC. 将一直角三角尺 AOB（$\angle OAB=30^{\circ}$）的直角顶点放在点 O 处，一条直角边 OA 在射线 OD 上，另一边 OB 在直线 DE 上方. 将直角三角尺绕着点 O 按每秒 10° 的速度逆时针旋转一周，设旋转时间为 t s.

(1) 当直角三角尺旋转到如图 2 所示的位置时，OA 恰好平分 $\angle COD$，此时 $\angle BOC$ 与 $\angle BOE$ 之间有何数量关系？请说明理由.

(2) 若射线 OC 的位置保持不变，且 $\angle COE=140^{\circ}$.

①当 $t=$________时，边 AB 所在的直线与 OC 平行.

②在旋转的过程中，是否存在某个时刻，使得射线 OA，OC 与 OD 中的某一条射线是另外两条射线所夹角的平分线？若存在，请求出所有满足题意的 t 的取值；若不存在，请说明理由.

③在旋转的过程中，当边 AB 与射线 OE 相交时（如图 3），求 $\angle AOC-\angle BOE$ 的值.

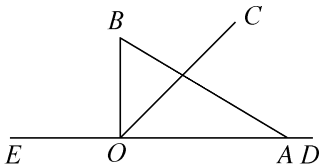


图 1

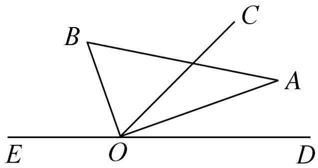


图 2

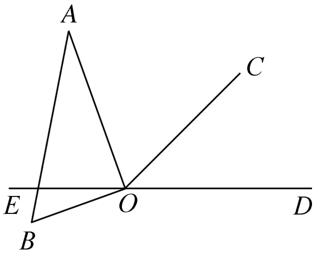


图 3

临门一脚

平面内两条直线的位置关系是“图形与几何”所要研究的基本问题，其中“对顶角相等”“垂线段最短”等为基本定理，具有广泛的用途，三线八角这一基本图形作为培养逻辑推理能力的载体，必须正确认识并精确判断，而垂线也是本章的重点，为后续学习平面直角坐标系打下扎实基础.