# 课时训练篇

## 第十九章　二次根式

### 课时训练 1　二次根式的概念

【基础巩固】

**1.** B　**2.** D　**3.** A　**4.** D　**5.** B

**6.** $x \geqslant 3$　**7.** $x > 6$　**8.** 1

**9.** 三　**提示**：由$\begin{cases}-x \geqslant 0, \\ xy > 0,\end{cases}$得$\begin{cases}x < 0, \\ y < 0.\end{cases}$所以点 $P(x, y)$ 在第三象限.

**10.** $-\frac{3}{5}$

**11.** 解：(1) $x < -2$.　(2) $x$ 为任意实数.
(3) $x \neq 0$.　(4) $x$ 为任意实数.

**12.** 解：设挖去的圆的半径为 $r$.
根据题意，得 $\pi r^2 = \pi(2a+b)^2 - \pi(2a-b)^2$，即 $r^2 = 8ab$. 因为 $r > 0$，所以 $r = \sqrt{8ab}$.
答：挖去的圆的半径为$\sqrt{8ab}$.

【拓展提优】

**1.** D

**2.** $x \leqslant \frac{4}{3}$且 $x \neq -2$　**3.** 0

**4.** 2 025　**提示**：因为 $\sqrt{a-2\ 025}$ 有意义，所以 $a-2\ 025 \geqslant 0$，所以 $a \geqslant 2\ 025$，所以 $2\ 024 - a < 0$，所以 $|2\ 024-a| + \sqrt{a-2\ 025} = a - 2\ 024 + \sqrt{a-2\ 025} = a$，所以 $\sqrt{a-2\ 025} = 2\ 024$，所以 $a - 2\ 025 = 2\ 024^2$，所以 $a - 2\ 024^2 = 2\ 025$.

**5.** 解：(1) 由$\begin{cases}x^2-4 \geqslant 0, \\ 4-x^2 \geqslant 0, \\ x-2 \neq 0,\end{cases}$得 $x=-2$，代入关系式，得 $y=3$，所以 $9x+8y=6$.
(2) 根据题意，得$(y+2)^2 + \sqrt{x+y+1} = 0$，所以$\begin{cases}y+2=0, \\ x+y+1=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1, \\ y=-2.\end{cases}$所以 $y^x = -2$.
(3) 根据题意，得 $50-x \geqslant 0$，$x-40 \geqslant 0$，解得 $40 \leqslant x \leqslant 50$. 又因为 $x, y$ 均为整数，所以当 $x=41$ 时，$y=4$，此时$\sqrt{x+y} = \sqrt{45}$；当 $x=49$ 时，$y=4$，此时$\sqrt{x+y} = \sqrt{53}$.
(4) 根据题意，得$\sqrt{a-2} + (b-3)^2 = 0$，所以 $a-2=0$，$b-3=0$，解得 $a=2$，$b=3$. 所以 $1 < c < 5$. 又因为 $c$ 为整数，所以 $c$ 的值为 2 或 3 或 4.
(5) 根据题意，得 $3a-18 \geqslant 0$，$18-3a \geqslant 0$，所以 $3a-18=0$，解得 $a=6$. 所以 $b-5=0$，解得 $b=5$. 当 $a$ 为腰长时，此等腰三角形的周长为 $6+6+5=17$；当 $b$ 为腰长时，此等腰三角形的周长为 $6+5+5=16$. 综上所述，这个等腰三角形的周长为 17 或 16.

**6.** 解：【解决问题】$\sqrt{97}-9$
【理解应用】设$\sqrt{97} = 9+x$，其中 $0 < x < 1$，则 $97 = (9+x)^2$，即 $97 = 81 + 18x + x^2$. 因为 $0 < x < 1$，所以 $0 < x^2 < 1$，所以 $97 \approx 81 + 18x$，解得 $x \approx 0.89$，即$\sqrt{97}$的近似值为 9.89.

### 课时训练 2　二次根式的性质

【基础巩固】

**1.** C　**2.** B　**3.** C　**4.** C　**5.** C

**6.** (1) 7　(2) 7　(3) 7　(4) $-7$　(5) 0.7
(6) 49　**7.** (1) $a^2+1$　(2) $-\frac{3}{2}$

**8.** 1　**9.** 111 111 111

**10.** (1) $(x^2+3)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$
(2) $3x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$
(3) $4a(\sqrt{2}-a)(\sqrt{2}+a)$
(4) $(\sqrt{3}x-\sqrt{5})(\sqrt{3}x+\sqrt{5})$

**11.** 解：(1) 原式$=6$.　(2) 原式$=\frac{5}{2}$.
(3) 原式$=x-y-2(x-y)=y-x$.

**12.** 解：(1) 原式$=\pi-3.14$.　(2) 原式$=-9$.
(3) 原式$=\frac{3}{2}$.　(4) 原式$=36$.

【拓展提优】

**1.** D　**2.** B

**3.** 1 或 8 或 13 或 16 或 17

**4.** (1) $-\sqrt{3}a$　(2) $2-\sqrt{3}$　(3) 3
(4) 0　**提示**：原式$=|a-b-c|-|b-a+c|=(b+c-a)-(b-a+c)=0$.

**5.** 解：(1) 小明
(2) 因为 $a=9$，所以 $1-a<0$，所以$\sqrt{(1-a)^2} = a-1$.

**6.** 解：(1) 隐含条件 $2-x \geqslant 0$，解得 $x \leqslant 2$，所以 $x-3<0$，所以原式$=-(x-3)-(2-x)=$

$-x+3-2+x=1$.

(2) 若 $a\geqslant 2$,则 $a-2=a+3$,显然不成立,故 $a<2$. 所以 $2-a=a+3$,解得 $a=-\frac{1}{2}$. 因为 $\sqrt{a-b+1}=a-b+1$,所以 $a-b+1=1$ 或 0. 当 $a-b+1=1$ 时,解得 $b=-\frac{1}{2}$,则 $ab=\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$;当 $a-b+1=0$ 时,解得 $b=\frac{1}{2}$,则 $ab=\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$. 综上所述,$ab$ 的值为 $\frac{1}{4}$ 或 $-\frac{1}{4}$.

(3) 根据题意,得 $\begin{cases}3x-2\geqslant 0,\\2-3x\geqslant 0,\end{cases}$ 所以 $x=\frac{2}{3}$,所以 $y>2$. 所以 $\frac{\sqrt{y^2-4y+4}}{2-y}+5-3x=\frac{\sqrt{(y-2)^2}}{2-y}+5-3\times\frac{2}{3}=\frac{y-2}{2-y}+5-2=-1+5-2=2$.

## 课时训练 3 二次根式的乘法

**【基础巩固】**

**1.** B **2.** B **3.** B **4.** D **5.** C

**6.** $\sqrt{3}$(答案不唯一)

**7.** (1) 42 (2) 0.45 (3) $-3\sqrt{5}$ (4) 7

**8.** $4\sqrt{6}$ **9.** $\sqrt{6}\ \text{cm}^2$ **10.** (1) $>$ (2) $<$

**11.** **解**:(1) 原式$=45$. (2) 原式$=24$.

(3) 原式$=\frac{3}{5}$. (4) 原式$=6$.

**12.** **解**:(1) 由题意,得 $y>0$.

原式$=18\sqrt{3x^2y^3\cdot\frac{12x^4}{y}}=108\sqrt{x^6y^2}$

$=108|x^3|y$.

(2) 由题意,得 $a>0,b\geqslant 0$.

原式$=\frac{1}{3}\sqrt{b}$.

(3) 由题意,得 $x>0,y>0$.

原式$=6x^2y^2\cdot\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{9x^2}{2y}}=6x^2y^2\cdot\sqrt{9x}=18x^2y^2\sqrt{x}$.

(4) 由题意,得 $a>0,b\geqslant 0,x>0$.

原式$=-x\cdot\left(-\frac{a}{x}\right)\cdot(-2ab)\cdot\sqrt{\frac{b}{a}\cdot bx\cdot\frac{x}{a}}=-2a^2b\cdot\frac{bx}{a}=-2ab^2x$.

**【拓展提优】**

**1.** B **2.** B

**3.** $-\sqrt{1-y}$

**4.** $\sqrt{(n+1)^2-1}=\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+2}\,(n\geqslant 1)$

**5.** $\frac{3}{10}ab$ **提示**:$\sqrt{0.54}=\frac{3}{10}\times\sqrt{6}=\frac{3}{10}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}$. 将 $\sqrt{2}=a,\sqrt{3}=b$ 代入,则原式$=\frac{3}{10}ab$.

**6.** **解**:(1) $m^2+5n^2$ $2mn$ **提示**:因为 $a+b\sqrt{5}=(m+n\sqrt{5})^2=m^2+2mn\sqrt{5}+5n^2$,所以 $a=m^2+5n^2,b=2mn$.

(2) 因为 $a+6\sqrt{7}=(m+n\sqrt{7})^2$,所以 $a+6\sqrt{7}=m^2+2mn\sqrt{7}+7n^2$,所以 $a=m^2+7n^2,2mn=6$,所以 $mn=3$. 因为 $a,m,n$ 均为正整数,所以 $m=1,n=3,a=64$ 或 $m=3,n=1,a=16$. 综上所述,$a$ 的值为 64 或 16.

(3) ①$\sqrt{13-2\sqrt{42}}=\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{6})^2}=\sqrt{7}-\sqrt{6}$;

②$\sqrt{7-\sqrt{40}}=\sqrt{7-2\sqrt{10}}=\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$;

③$\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{8-4\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

## 课时训练 4 二次根式的除法

**【基础巩固】**

**1.** A **2.** D **3.** B **4.** D **5.** A

**6.** $3\leqslant a<4$ **提示**:由 $\begin{cases}a-3\geqslant 0,\\4-a>0,\end{cases}$ 得 $3\leqslant a<4$.

**7.** (1) $2\sqrt{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) 1 **8.** $\sqrt{2}$ **9.** $4\sqrt{3}$

**10.** (1) $27\sqrt{30}$ (2) $-\frac{5\sqrt{3}}{4}$

**11.** (1) $\frac{\sqrt{ab}}{|b|}$ (2) $3\sqrt{3x}$

**12.** **解**:原式$=\sqrt{x}$. $x$ 取大于 2 的任意一个数均可,如当 $x=3$ 时,化简后的式子的值为 $\sqrt{3}$.

**【拓展提优】**

**1.** C

2. B　提示：$(\sqrt{5})^{-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，故①错误；$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{12}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=6-2\sqrt{6}$，故②错误；$\sqrt{4\frac{4}{15}}=\sqrt{\frac{64}{15}}=\sqrt{\frac{16\times 4}{15}}=4\sqrt{\frac{4}{15}}$，故③正确.

3. B

4. 补全表格如下所示.

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{6}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| $\frac{\sqrt{6}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{6}}{3}$ |
| $\sqrt{2}$ | $\frac{\sqrt{6}}{6}$ | $\sqrt{3}$ |

5. 解：(1) $x=\pm\sqrt{39}$　提示：$(\sqrt{x^2+42}+\sqrt{x^2+10})(\sqrt{x^2+42}-\sqrt{x^2+10})=(\sqrt{x^2+42})^2-(\sqrt{x^2+10})^2=(x^2+42)-(x^2+10)=32$. 因为 $\sqrt{x^2+42}+\sqrt{x^2+10}=16$，所以 $\sqrt{x^2+42}-\sqrt{x^2+10}=32\div 16=2$，所以 $\begin{cases}\sqrt{x^2+42}=9,\\ \sqrt{x^2+10}=7.\end{cases}$ 因为 $(\sqrt{x^2+42})^2=x^2+42=9^2=81$，所以 $x=\pm\sqrt{39}$，经检验，$x=\pm\sqrt{39}$ 都是原方程的解.

(2) $(\sqrt{4x^2+6x-5}+\sqrt{4x^2-2x-5})\cdot(\sqrt{4x^2+6x-5}-\sqrt{4x^2-2x-5})=(\sqrt{4x^2+6x-5})^2-(\sqrt{4x^2-2x-5})^2=(4x^2+6x-5)-(4x^2-2x-5)=8x$. 因为 $\sqrt{4x^2+6x-5}+\sqrt{4x^2-2x-5}=4x$，所以 $\sqrt{4x^2+6x-5}-\sqrt{4x^2-2x-5}=8x\div 4x=2$，所以 $\begin{cases}\sqrt{4x^2+6x-5}=2x+1,\\ \sqrt{4x^2-2x-5}=2x-1.\end{cases}$ 因为 $(\sqrt{4x^2+6x-5})^2=(2x+1)^2$，所以 $4x^2+6x-5=4x^2+4x+1$，所以 $2x=6$，解得 $x=3$. 经检验，$x=3$ 是原方程的解.

## 课时训练 5　二次根式的化简

**【基础巩固】**

1. C　2. C　3. B　4. D

5. $\sqrt{32}$，$2\sqrt{8}$，$\sqrt{18}$　$\sqrt{27}$，$\sqrt{12}$　$\sqrt{125}$，$4\sqrt{45}$

6. $\sqrt{3}+1$　7. 1　2

8. $<$　提示：因为 $a>0$，$b>0$，所以 $2a\sqrt{\frac{3b}{4a^3}}=\frac{2a}{2a^2}\sqrt{3ab}=\frac{\sqrt{3ab}}{a}$，$\frac{2}{ab}\sqrt{ab^3}=\frac{2b}{ab}\sqrt{ab}=\frac{2}{a}\sqrt{ab}=\frac{\sqrt{4ab}}{a}$. 因为 $\sqrt{3ab}<\sqrt{4ab}$，所以 $2a\sqrt{\frac{3b}{4a^3}}<\frac{2}{ab}\sqrt{ab^3}$.

9. 解：(1) 原式 $=\frac{\sqrt{6}}{5}$.　(2) 原式 $=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

(3) 原式 $=\frac{a\sqrt{30bc}}{12bc}$.

(4) 原式 $=\frac{\sqrt{15(a^2-b^2)}}{9|a+b|}$.

10. 解：(1) 原式 $=\frac{\sqrt{6xy}}{2xy}$.　(2) 原式 $=\sqrt{m-n}$.

(3) 原式 $=\frac{\sqrt{2a+2b}}{3}$.

**【拓展提优】**

1. C　2. C

3. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　4. $\sqrt{n+\frac{1}{n+2}}=(n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$

5. 解：(1) 因为 $a+b=10>0$，$ab=6>0$，所以 $a>0$，$b>0$. 所以原式 $=\frac{b}{a}\sqrt{ab}+\frac{a}{b}\sqrt{ab}=\frac{a^2+b^2}{ab}\cdot\sqrt{ab}=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}\cdot\sqrt{ab}=\frac{100-12}{6}\times\sqrt{6}=\frac{44\sqrt{6}}{3}$.

(2) 因为 $a+b=-8<0$，$ab=8>0$，所以 $a<0$，$b<0$. 所以原式 $=-\frac{b}{a}\sqrt{ab}-\frac{a}{b}\sqrt{ab}=-\sqrt{8}\cdot\frac{a^2+b^2}{ab}=-2\sqrt{2}\cdot\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}=-2\sqrt{2}\times\frac{(-8)^2-2\times 8}{8}=-12\sqrt{2}$.

(3) 原式 $=\sqrt{ab}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{b}}=2\sqrt{ab}$. 当 $a=3-\sqrt{5}$，$b=3+\sqrt{5}$ 时，$ab=4$，所以原式 $=2\times\sqrt{4}=4$.

## 课时训练 6　二次根式的加法与减法

**【基础巩固】**

1. C　2. C　3. D　4. C　5. B

6. (1) 0　(2) 2　7. 2　8. ①④

9. $(5\sqrt{2}+2\sqrt{3})$　10. 5.20

11. 解:(1) 原式$=\frac{11\sqrt{2}}{2}+\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

(2) 原式$=0$.

(3) 原式$=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

12. 解:(1) 原式$=14\sqrt{2x}$.

(2) 原式$=(4x-5)\sqrt{x}$.

(3) 原式$=(1-|b|)\sqrt{ab}$.

【拓展提优】

1. D

2. 答案不唯一,如:2,22,62　提示:根据题意,得$2a+1=5k^2$,其中$k$为非零有理数,则$k$可取1,3,5……相应的$a$的值为2,22,62……

3. $2\sqrt{5}$　提示:因为$\left(\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{9+4\sqrt{5}}\right)^2=9-4\sqrt{5}+2\sqrt{(9-4\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})}+9+4\sqrt{5}=20$,所以原式$=2\sqrt{5}$.

4. (1) 4　(2) $-\sqrt{3}-2\sqrt{5}$　提示:因为$1<\sqrt{3}<2$,$2<\sqrt{5}<3$,所以$\sqrt{3}$的小数部分为$a=\sqrt{3}-1$,$\sqrt{5}$的小数部分为$b=\sqrt{5}-2$,所以$\sqrt{3}\cdot a+\sqrt{5}\cdot b-8=\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)+\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)-8=3-\sqrt{3}+5-2\sqrt{5}-8=-\sqrt{3}-2\sqrt{5}$.

5. $4\sqrt{2}-\sqrt{3}$　提示:因为$\sqrt{3}>\sqrt{2}$,$2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$,所以原式$=\sqrt{3}+\sqrt{2}-(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})=4\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

6. 解:(1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　$\frac{\sqrt{10}}{5}$

(2) $\sqrt{6}-\sqrt{5}$　提示:因为$(\sqrt{5}+\sqrt{6})\times(\sqrt{6}-\sqrt{5})=6-5=1$,所以$\sqrt{5}+\sqrt{6}$的倒数为$\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

(3) 原式$=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1+\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{5}+\cdots+\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}+1)=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)(\sqrt{2n+1}+1)=\frac{1}{2}(2n+1-1)=n$.

## 课时训练7　二次根式的混合运算

【基础巩固】

1. D　2. A　3. C　4. D

5. (1) 3　(2) $\sqrt{6}$

6. (1) $3\sqrt{2}-2+\frac{\sqrt{3}}{3}$　(2) 5

7. (1) $\sqrt{2}+4$　(2) 6

8. $2\sqrt{b}$　提示:原式$=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{b}-\sqrt{a}=2\sqrt{b}$.

9. $-6$　提示:原式$=\sqrt{6}-3-2\sqrt{6}-(3-\sqrt{6})=-6$.

10. 解:(1) 原式$=2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-3$.

(2) 原式$=2+1-3+2=2$.

(3) 原式$=(40\sqrt{3}-18\sqrt{3}+8\sqrt{3})\div\sqrt{6}=30\sqrt{3}\div\sqrt{6}=15\sqrt{2}$.

(4) 原式$=5-3+(\sqrt{2})^2=4$.

11. 解:(1) 原式$=a^2+2ab+b^2+2a^2-ab-b^2-3a^2=ab$.将$a=-2-\sqrt{3}$,$b=\sqrt{3}-2$代入,得原式$=1$.

(2) 原式$=\left[\frac{a+1}{a(a-1)}-\frac{4}{(a+1)(a-1)}\right]\div\frac{(a-1)(a+3)}{a(a+3)}=\frac{(a+1)^2-4a}{a(a+1)(a-1)}\cdot\frac{a}{a-1}=\frac{1}{a+1}$.将$a=\sqrt{3}-1$代入,得原式$=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【拓展提优】

1. B　2. D

3. 4　提示:因为$m$是$\sqrt{5}$的小数部分,所以$m=\sqrt{5}-2$.易知原式$=\sqrt{\left(m-\frac{1}{m}\right)^2}=\left|m-\frac{1}{m}\right|$.因为$m=\sqrt{5}-2$,所以$\frac{1}{m}=\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}+2$,即$\frac{1}{m}>m$,所以原式$=-\left(m-\frac{1}{m}\right)=-m+\frac{1}{m}=-(\sqrt{5}-2)+\sqrt{5}+2=4$.

4. 0　提示:由题意,得$m=\frac{2\,025}{\sqrt{2\,026}-1}=\frac{2\,025(\sqrt{2\,026}+1)}{(\sqrt{2\,026}-1)(\sqrt{2\,026}+1)}=\frac{2\,025(\sqrt{2\,026}+1)}{2\,025}=\sqrt{2\,026}+1$,所以原式$=m^3(m^2-2m-2\,025)=m^3[(m-1)^2-2\,026]=m^3[(\sqrt{2\,026}+1-1)^2-2\,026]=0$.

5. $\frac{1}{2}$　提示:因为$\sqrt{x}(\sqrt{x}+2\sqrt{y})=\sqrt{y}(6\sqrt{x}+5\sqrt{y})$,所以$x-4\sqrt{xy}-5y=0$,即$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-5\sqrt{y})=0$.因为$x>0$,$y>0$,所以$\sqrt{x}-5\sqrt{y}=0$,即$\sqrt{x}=5\sqrt{y}$,所以$x=25y$,则原式$=\frac{25y+\sqrt{25y^2}-y}{50y+\sqrt{25y^2}+3y}=\frac{29y}{58y}=\frac{1}{2}$.

6. 解:(1) $\sqrt{2}-1$

(2) 9　提示:原式$=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{(\sqrt{4}+\sqrt{3})(\sqrt{4}-\sqrt{3})}+\cdots+$

$\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{(\sqrt{100}+\sqrt{99})(\sqrt{100}-\sqrt{99})}=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{100}-\sqrt{99}=\sqrt{100}-1=10-1=9$.

(3) 因为 $a=\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\sqrt{5}+2$,所以 $a-2=\sqrt{5}$. 所以 $(a-2)^2=5$,即 $a^2-4a+4=5$,所以 $a^2-4a=1$. 所以 $3a^2-12a-1=3(a^2-4a)-1=3\times1-1=2$.

(4) $2-\sqrt{3}$　提示:$\sqrt{a+2}-\sqrt{a+1}=\frac{(\sqrt{a+2}+\sqrt{a+1})(\sqrt{a+2}-\sqrt{a+1})}{\sqrt{a+2}+\sqrt{a+1}}=\frac{1}{\sqrt{a+2}+\sqrt{a+1}}$. 因为 $2\leqslant a\leqslant4$,所以当 $a=2$ 时,$\sqrt{a+2}+\sqrt{a+1}$ 有最小值 $2+\sqrt{3}$,此时 $\frac{1}{\sqrt{a+2}+\sqrt{a+1}}$ 有最大值 $\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$.

## 提优专题 1　二次根式的应用

**1.** C　提示:由题意,得 $p=\frac{BC+AC+AB}{2}=\frac{4+5+7}{2}=8$. 所以 $S=\sqrt{p(p-BC)(p-AC)(p-AB)}=\sqrt{8\times(8-4)\times(8-5)\times(8-7)}=4\sqrt{6}$.

**2.** D　提示:由题图,得当 A4 纸的宽为 $x$ m 时,A0 纸的宽为 $4x$ m. 因为纸张长与宽的比为 $\sqrt{2}:1$,所以 A0 纸的长为 $4\sqrt{2}x$ m. 因为 A0 纸的面积为 1 $m^2$,所以 $4\sqrt{2}x\cdot4x=1$,所以 $x^2=\frac{\sqrt{2}}{32}$,所以 $x$ 的值为 $\frac{\sqrt{2}}{32}$ 的算术平方根.

**3.** $\sqrt{2}$　提示:由题意,得 $a^2=8,b^2=9,c^2=1$,所以 $a^2b^2=72,\frac{a^2+b^2-c^2}{2}=8$,所以 $S=\sqrt{\frac{1}{4}\times(72-8^2)}=\sqrt{2}$.

**4.** $\frac{\pi}{5}$ s　提示:把 $l=0.1$ 代入 $t=2\pi\sqrt{\frac{l}{10}}$,得 $t=2\pi\sqrt{\frac{0.1}{10}}=2\pi\times\frac{1}{10}=\frac{\pi}{5}$.

**5.** **解**:连接 $AC$. 因为 $\angle B=90^\circ,AB=3,BC=4$,所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC=6$, $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=5$. 所以在 $\triangle ACD$ 中,$a=AC=5,b=CD=\sqrt{65},c=AD=5\sqrt{2}$,根据秦九韶公式,得该三角形的面积 $S_{\triangle ACD}=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]}=\frac{35}{2}$.

所以 $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=6+\frac{35}{2}=\frac{47}{2}$.

**6.** **解**:(1) 因为 $(x+2)^2\geqslant0$,所以 $(x+2)^2+7\geqslant7$,所以 $\sqrt{(x+2)^2+7}\geqslant\sqrt{7}$,所以当 $x+2=0$ 时,$\sqrt{(x+2)^2+7}$ 的最小值为 $\sqrt{7}$. 因为 $(x-5)^2\geqslant0$,所以 $-3(x-5)^2\leqslant0$,所以 $-3(x-5)^2+9\leqslant9$,所以 $\sqrt{-3(x-5)^2+9}\leqslant\sqrt{9}=3$,所以当 $x-5=0$ 时,$\sqrt{-3(x-5)^2+9}$ 的最大值为 3.

(2) 因为 $\sqrt{x^2-4x+20}=\sqrt{x^2-4x+4+16}=\sqrt{(x-2)^2+16}$,且 $(x-2)^2\geqslant0$,所以 $(x-2)^2+16\geqslant16$,所以 $\sqrt{(x-2)^2+16}\geqslant\sqrt{16}=4$,所以当 $x-2=0$ 时,$\sqrt{(x-2)^2+16}$ 的最小值为 4.

(3) 当 $p=5,c=4$ 时,$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{5(5-a)(5-b)}$. 因为 $a+b+c=2p$,所以 $b=6-a$,所以此三角形的面积 $S=\sqrt{5(5-a)(5-b)}=\sqrt{5(5-a)(a-1)}=\sqrt{-5(a^2-6a+5)}=\sqrt{-5(a^2-6a+9-4)}=\sqrt{-5(a-3)^2+20}$,所以此三角形面积的最大值为 $2\sqrt{5}$.

# 第二十章　勾股定理

## 课时训练 8　勾股定理及其应用(1)

**【基础巩固】**

**1.** A　**2.** B　**3.** B　**4.** D　**5.** B

**6.** 12　$\sqrt{2}$　$\sqrt{3}$　$2\sqrt{26}$　**7.** 12　5　13

**8.** **解**:(1) $a=45,b=60$.

(2) $\triangle ABC$ 的面积为 540.

(3) $a=30,c=34$.

(4) $h=6\sqrt{3}$.

**9.** (1) **证明**:因为 $DE\perp BC$,$D$ 是斜边 $BC$ 的中点,所以 $DE$ 是线段 $BC$ 的垂直平分线,所以 $BE=CE$. 在 Rt$\triangle ACE$ 中,由勾股定理,得 $CE^2=AC^2+AE^2$,所以 $BE^2=AC^2+AE^2$,所以 $BE^2-AE^2=AC^2$.

(2) **解**:因为 $BD=5$,$D$ 是 $BC$ 的中点,所以 $BC=2BD=10$. 在 Rt$\triangle ABC$ 中,由勾股定

理，得 $AB=\sqrt{BC^2-AC^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$，所以 $AB=BE+AE=8$. 设 $AE=x$，则 $BE=CE=8-x$. 在 $Rt\triangle ACE$ 中，由勾股定理，得 $CE^2=AC^2+AE^2$，即 $(8-x)^2=6^2+x^2$，解得 $x=\frac{7}{4}$，所以 $AE=\frac{7}{4}$，即 $AE$ 的长为$\frac{7}{4}$.

**【拓展提优】**

**1.** D　**提示**：由勾股定理，得 $AC=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$. 因为 $S_{\triangle ABC}=3\times3-\frac{1}{2}\times1\times2-\frac{1}{2}\times1\times3-\frac{1}{2}\times2\times3=\frac{7}{2}$，所以$\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{7}{2}$，所以 $BD=\frac{7\sqrt{13}}{13}$.

**2.** A　**提示**：过点 $A$ 作 $AD\perp BC$ 于点 $D$. 因为 $AD\perp BC$，所以 $\triangle ADP$ 与 $\triangle ABD$ 都为直角三角形，所以 $AP^2=AD^2+DP^2$，$AB^2=AD^2+BD^2$. 因为 $AB=AC$，所以 $BD=CD$，所以 $PC=CD+DP=BD+DP$. 因为 $BP=BD-DP$，所以 $BP\cdot PC=BD^2-DP^2$. 因为 $AP^2=AD^2+DP^2$，所以 $AP^2+BP\cdot PC=AD^2+BD^2=AB^2$. 因为 $AB=4$，所以 $AP^2+BP\cdot PC=16$.

**3.** 4　**提示**：根据题意及勾股定理，得 $S_1+S_2=1$，$S_3+S_4=3$，故 $S_1+S_2+S_3+S_4=4$.

**4.** **解**：(1) 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$BC^2=AB^2-AC^2=10^2-6^2=64(cm^2)$，所以 $BC=8$ cm.

(2) 由题意可知，$BP=2t$ cm.

①当$\angle APB$ 为直角时，点 $P$ 与点 $C$ 重合，如图 1，所以 $BP=BC=8$ cm，即 $t=4$.

②当$\angle BAP$ 为直角时，如图 2，此时 $BP=2t$ cm，$CP=(2t-8)$ cm，$AC=6$ cm. 在 $Rt\triangle ACP$ 中，$AP^2=6^2+(2t-8)^2$，在 $Rt\triangle BAP$ 中，$AB^2+AP^2=BP^2$，即 $10^2+[6^2+(2t-8)^2]=(2t)^2$，解得 $t=\frac{25}{4}$. 故当 $\triangle ABP$ 为直角三角形时，$t=4$ 或 $t=\frac{25}{4}$.

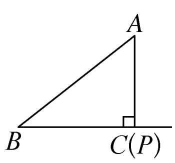



图 1

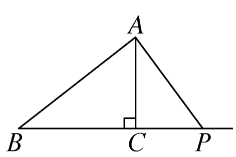



图 2

(3) ①当 $AB=BP$ 时，如图 3，$t=5$.

②当 $AB=AP$ 时，如图 4，$BP=2BC=16$ cm，$t=8$.

③当 $BP=AP$ 时，如图 5，$AP=BP=2t$ cm，$CP=|2t-8|$ cm，$AC=6$ cm. 在 $Rt\triangle ACP$ 中，$AP^2=AC^2+CP^2$，所以 $(2t)^2=6^2+(2t-8)^2$，解得 $t=\frac{25}{8}$.

综上所述，当$\triangle ABP$ 为等腰三角形时，$t=5$ 或 $t=8$ 或 $t=\frac{25}{8}$.

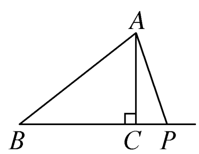



图 3

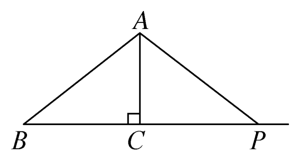



图 4

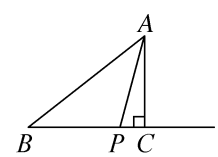



图 5

## 课时训练 9　勾股定理及其应用(2)

**【基础巩固】**

**1.** C　**2.** A　**3.** D　**4.** C

**5.** 17 尺　**提示**：设水池的深度为 $x$ 尺. 根据题意，得 $x^2+8^2=(x+2)^2$，解得 $x=15$，则 $x+2=17$. 所以这根芦苇的高度是 17 尺.

**6.** 是　**提示**：根据勾股定理，得 $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{50^2-30^2}=40(m)$，所以小汽车的速度是 $40\div2=20(m/s)$. 因为 $20\ m/s=72\ km/h>70\ km/h$，所以小汽车超速了.

**7.** **解**：设 $AE=x$ km，则 $BE=(25-x)$ km. 在 $Rt\triangle ADE$ 中，根据勾股定理，得 $AD^2+AE^2=DE^2$. 在 $Rt\triangle ECB$ 中，根据勾股定理，得 $EB^2+CB^2=CE^2$. 因为要使 $C$，$D$ 两村到 $E$ 站的距离相等，所以 $DE=CE$，所以 $DE^2=CE^2$，所以 $AD^2+AE^2=EB^2+CB^2$，即 $15^2+x^2=(25-x)^2+10^2$，解得 $x=10$.

答：$E$ 站应建在距 $A$ 站 10 km 处.

**【拓展提优】**

**1.** B

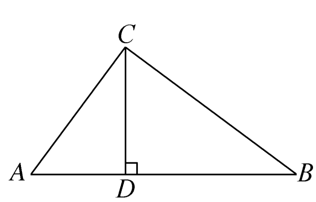
**2.** A　**提示**：设这个直角三角形的两直角边长分别为 $a$，$b$. 由题意，得 $\begin{cases}a+b=m-n,\\a^2+b^2=n^2,\end{cases}$ 所以 $2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)=(m-n)^2-n^2=m^2-2mn$，所以这个直角三角形的面积为$\frac{1}{2}ab=\frac{m^2-2mn}{4}$.

**3.** 2.5 **提示**：在△$ABC$ 中，易求得 $AB=5$. 因为 $E$，$F$ 分别为 $AD$，$BD$ 的中点，所以 $EF=\frac{1}{2}AB=2.5$. 过点 $F$ 作直线 $l/\!/CD$，过点 $E$ 作 $EG\perp$ 直线 $l$ 于点 $G$. 根据题意，可知 $m+n$ 的值即为线段 $EG$ 的长. 由作图可知，$EG\leqslant EF$，所以当直线 $l\perp AB$，即 $CD\perp AB$ 时，$EG$ 取得最大值，此时 $EG=EF=2.5$. 所以 $m+n$ 的最大值为 2.5.

**4.** **解**：(1) 13 **提示**：如题图 3，因为 $AH=AC+CH=AC+DF=3+2=5$，$HD=CF=12$，所以 $AD=\sqrt{AH^2+HD^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13$，所以 $\sqrt{x^2+3^2}+\sqrt{(12-x)^2+2^2}$ 的最小值是 13.

(2) 因为 $AC=2$，$DF=1$，$CF=5$，$AH=2+1=3$，$HD=5$，所以 $AD=\sqrt{AH^2+HD^2}=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$，所以$\sqrt{x^2+4}+\sqrt{(5-x)^2+1}$ 的最小值是$\sqrt{34}$.

(3) 构造△$ABC$，作 $CD\perp BC$ 于点 $D$，且 $AC=6$，$BC=8$，如图所示. 设 $CD=x$，则 $AD=\sqrt{36-x^2}$，$BD=\sqrt{64-x^2}$，所以 $AB=\sqrt{36-x^2}+\sqrt{64-x^2}=10$. 因为 $6^2+8^2=10^2$，所以 $\angle ACB=90°$. 由等积法，得 $\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot CD$，所以 $CD=\frac{AC\cdot BC}{AB}$，即 $x=\frac{6\times8}{10}=4.8$.

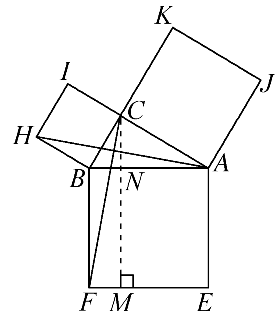



## 提优专题 2 勾股定理的证明

**1.** C

**2.** A **提示**：根据勾股定理、面积分割法等知识进行判断：大正方形的面积是 49，则其边长是 7，利用勾股定理可得 $x^2+y^2=49$，故①正确；小正方形的面积为 4，则其边长是 2，因为四个直角三角形全等，所以有 $x=y+2$，即 $x-y=2$，故②正确；根据图形可得四个直角三角形的面积＋小正方形的面积＝大正方形的面积，即 $4\times\frac{1}{2}xy+4=49$，化简，得 $2xy+4=49$，故③正确；因为 $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=49+45=94$，所以 $x+y=\sqrt{94}$，故④不正确.

**3.** D **提示**：如图，过点 $C$ 作 $CM\perp EF$ 于点 $M$，交 $AB$ 于点 $N$. 因为正方形 $ABFE$ 的面积为 5，正方形 $BCIH$ 的面积为 1，所以 $CN\perp AB$，$BC=1$，$AB=MN=\sqrt{5}$，$BN=FM$. 因为△$ABC$ 是直角三角形，$\angle ACB=90°$，所以 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AC=\frac{1}{2}AB\cdot CN$，即$\frac{1}{2}\times1\times2=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}CN$，所以 $CN=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $FM=BN=\sqrt{BC^2-CN^2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $CM=CN+MN=\frac{2\sqrt{5}}{5}+\sqrt{5}=\frac{7\sqrt{5}}{5}$，所以 $CF^2=CM^2+FM^2=\left(\frac{7\sqrt{5}}{5}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2=10$，所以以 $CF$ 为边长的正方形的面积为 10.




**4.** C **提示**：因为 $S_{正方形ABCD}=24$，所以 $AB^2=24$. 设 $DH=x$，则 $AH=3DH=3x$，所以 $x^2+9x^2=24$，所以 $x^2=\frac{24}{10}=\frac{12}{5}$. 根据题意可知，$AE=CG=DH=x$，$CF=AH=3x$，所以 $FE=FG=CF-CG=2x$，所以 $S_{\triangle FGN}=2S_{\triangle CGN}$. 因为 $S_{\triangle AEM}=S_{\triangle CGN}$，所以 $S_{\triangle FGN}=S_{\triangle AEM}+S_{\triangle CGN}$，所以阴影部分的面积之和为 $S_{梯形NGFM}=\frac{1}{2}(NG+FM)\cdot FG=\frac{1}{2}(EM+MF)\cdot FG=\frac{1}{2}FE\cdot FG=\frac{1}{2}\cdot(2x)^2=2x^2=\frac{24}{5}=4.8$.

**5.** 10 **提示**：由题意可知，$GD=GH=a$，$CD=BC=b$. 因为朱入与朱出的三角形全等，所以△$FNK\cong$△$GHI$，所以 $FN=GH=a$. 因为两个青入的三角形分别与两个青出的三角形全等，所以△$IJC\cong$△$KAM$，△$GFN\cong$△$CMB$，所以 $S_{\triangle IJC}=S_{\triangle KAM}$，$BM=FN=a$，所以阴影部分的面积为 $S_{四边形GDJI}+S_{\triangle KAM}+S_{\triangle BCM}=S_{四边形GDJI}+S_{\triangle IJC}+S_{\triangle BCM}=S_{\triangle GDC}+S_{\triangle BCM}=\frac{1}{2}GD\cdot CD+\frac{1}{2}BM\cdot BC=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab=ab$. 因为 $b-a=3$，$a^2+b^2=29$，所以 $ab=\frac{(a^2+b^2)-(b-a)^2}{2}=\frac{29-3^2}{2}=10$，即题图 2 中阴影部分的面积为 10.

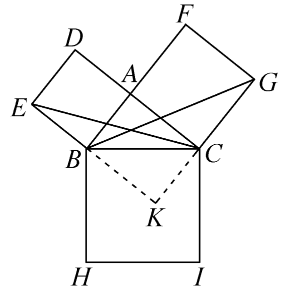
6. $2\sqrt{2}$　**提示**:设全等的直角三角形的两条直角边长分别为 $a,b$ 且 $a>b$,由题意可知,$S_1=(a+b)^2$,$S_2=a^2+b^2$,$S_3=(a-b)^2$.因为 $S_1+S_2+S_3=24$,即$(a+b)^2+a^2+b^2+(a-b)^2=24$,$3(a^2+b^2)=24$,所以 $3S_2=24$,$S_2$ 的值是 8.所以正方形 $EFGH$ 的边长为$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

7. (1) **证明**:如题图 1,因为大正方形的面积既可以表示为$(a+b)^2$,又可以表示为 $c^2+4\times\frac{1}{2}ab$,所以 $c^2+2ab=a^2+b^2+2ab$,所以 $a^2+b^2=c^2$.

(2) 13　**提示**:如题图 2,空白部分的面积=边长为 $c$ 的正方形的面积-2 个直角三角形的面积$=c^2-2\times\frac{1}{2}ab$.因为 $a=3,b=4$,所以空白部分的面积$=3^2+4^2-2\times\frac{1}{2}\times3\times4=13$.

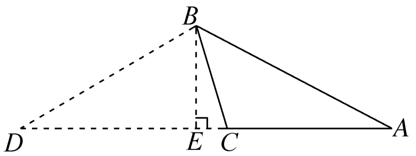
(3) **解**:如题图 3,在 Rt$\triangle ABH$ 中,$AB=\sqrt{AH^2+BH^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.因为$\triangle ABH\cong\triangle AFH\cong\triangle ADI\cong\triangle ADG$,所以 $AD=AF=AB=5$,所以 $DH=AD-AH=5-3=2$,$BI=AB-AI=5-3=2$,所以 $DH=BI$.因为 $\angle DCH=\angle BCI$,$\angle CHD=\angle CIB=90°$,所以 $\triangle CDH\cong\triangle CBI$(AAS),所以 $CD=BC$.设 $BC=x$,则 $CD=x$,$CH=4-x$.在 Rt$\triangle CDH$ 中,$CH^2+DH^2=CD^2$,所以$(4-x)^2+2^2=x^2$,解得 $x=\frac{5}{2}$,所以 $BC=CD=\frac{5}{2}$.同理可得 $DE=EF=BC=\frac{5}{2}$,所以“帽子”外围轮廓(实线)的周长为 $AB+AF+BC+CD+DE+EF=5+5+\frac{5}{2}+\frac{5}{2}+\frac{5}{2}+\frac{5}{2}=20$.

(4) $S_3=2(S_1+S_2)$　**提示**:如图,延长 $EB$,$GC$,相交于点 $K$.易证 $BK\perp CK$.由题意可知,$S_{正方形ABED}=AB^2$,$S_{\triangle EBC}=\frac{1}{2}EB\cdot CK=\frac{1}{2}EB\cdot AB=\frac{1}{2}AB^2=S_1$,所以 $S_{正方形ABED}=2S_1$.同理可得,$S_{正方形ACGF}=AC^2$,$S_{\triangle BCG}=\frac{1}{2}CG\cdot BK=\frac{1}{2}CG\cdot AC=\frac{1}{2}AC^2=S_2$,所以 $S_{正方形ACGF}=2S_2$.在 Rt$\triangle ABC$ 中,$AB^2+AC^2=BC^2$,所以 $S_{正方形ABED}+S_{正方形ACGF}=S_{正方形BCIH}$,所以 $2S_1+2S_2=S_3$,即 $S_3=2(S_1+S_2)$.




8. **解**:(1) 9　12　**提示**:由题易知,$DC=BC=8$,所以 $AD=DC+AC=8+10=18$,所以 $AE=DE=9$,所以 $EC=DE-CD=9-8=1$.所以在 Rt$\triangle BCE$ 和 Rt$\triangle AEB$ 中,由勾股定理,得 $BC^2-CE^2=AB^2-AE^2$,即 $8^2-1^2=AB^2-9^2$,解得 $AB=12$.

(2) 如图,作 $BE\perp AC$ 于点 $E$,在 $AC$ 的延长线上取一点 $D$,使得 $DE=AE$,连接 $BD$,则 $BE$ 是线段 $AD$ 的垂直平分线,所以 $AB=BD$,$\angle A=\angle D$.因为 $3\angle A+2\angle B=180°$,$\angle A+\angle ABC+\angle BCA=180°$,所以 $2\angle A+\angle ABC=\angle ACB$.因为 $\angle ACB=\angle D+\angle DBC$,所以 $2\angle A+\angle ABC=\angle D+\angle DBC$.因为 $\angle A=\angle D$,所以 $\angle A+\angle ABC=\angle DBC$,$BD=AB=c$,即$\angle DCB=\angle DBC$,所以 $DB=DC=c$.由题意,得 $DE=AE=\frac{b+c}{2}$,所以 $EC=AE-AC=\frac{b+c}{2}-b=\frac{c-b}{2}$.在 Rt$\triangle BEC$ 中,$BE^2=BC^2-EC^2$.在 Rt$\triangle BEA$ 中,$BE^2=BA^2-EA^2$,所以 $BC^2-EC^2=BA^2-EA^2$,即 $a^2-\left(\frac{c-b}{2}\right)^2=c^2-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2$,整理,得 $b=\frac{c^2-a^2}{c}$.




## 课时训练 10　勾股定理的逆定理及其应用(1)

**【基础巩固】**

1. A　2. C　3. D

4. C　**提示**:观察发现,第 $n$ 个等式为$(n^2-1)^2+(2n)^2=(n^2+1)^2$,故存在以 $n^2-1$,$2n$ 为直角边,$n^2+1$ 为斜边的直角三角形.当一个直角三角形的边长为 14,$2n=14$ 时,解得 $n=7$,所以直角三角形的另一条直角边长为 $7^2-1=48$,所以这个直角三

角形的面积为$\frac{1}{2}\times14\times48=336$.

5. C

6. 24　7. $45^\circ$

8. 6 m,8 m,10 m　直角三角形　提示:设三角形的三条边的长分别为$(2n-2)$ m,$2n$ m,$(2n+2)$ m.根据题意,得$(2n-2)+2n+(2n+2)=24$,解得$n=4$,故三条边的长分别为6 m,8 m,10 m.因为$6^2+8^2=10^2$,所以此三角形为直角三角形.

9. 解:因为$BD=12$ cm,$CD=16$ cm,$BC=20$ cm,且$12^2+16^2=20^2$,所以$BD^2+CD^2=BC^2$,所以$\triangle BCD$为直角三角形,即$CD\perp AB$.在Rt$\triangle ADC$中,根据勾股定理,得$AC^2=AD^2+DC^2$.因为$AB=AC$,所以$AC=BD+AD$,即$(12+AD)^2=AD^2+16^2$,解得$AD=\frac{14}{3}$ cm,所以$AB=AD+BD=\frac{50}{3}$ cm.故$\triangle ABC$的周长为$2AB+BC=\frac{160}{3}$ cm.

10. 解:(1) 由题意可知,第二条边的长为$(2a+2)$m,所以第三条边的长为$30-a-(2a+2)=(28-3a)$m.

(2) 当$a=7$时,三条边的长分别为7 m,16 m,7 m.由于$7+7<16$,所以不能构成三角形,即第一条边的长不可以为7 m.

由$\begin{cases}(2a+2)+a>28-3a,\\(2a+2)-a<28-3a,\end{cases}$解得$\frac{13}{3}<a<\frac{13}{2}$,即$a$的取值范围是$\frac{13}{3}<a<\frac{13}{2}$.

(3) 能围成,三条边的长分别为5 m,12 m,13 m.理由如下:在(2)的条件下,因为$a$为整数,所以$a$只能取5或6.当$a=5$时,三角形的三边长分别为5 m,12 m,13 m.根据勾股定理的逆定理,由$5^2+12^2=13^2$,得此时恰好能构成直角三角形.当$a=6$时,三角形的三边长分别为6 m,14 m,10 m.根据勾股定理的逆定理,由$6^2+10^2\neq14^2$,得此时不能构成直角三角形.综上所述,能使得围成的小圈为直角三角形,它的三条边的长分别为5 m,12 m,13 m.

【拓展提优】

1. A　提示:原式可变形为$a^2-6a+9+b^2-8b+16+c^2-10c+25=0$,即$(a-3)^2+(b-4)^2+(c-5)^2=0$,所以$a=3,b=4,c=5$,所以$a^2+b^2=c^2$,所以$\triangle ABC$是直角三角形.

2. 等腰三角形或直角三角形　提示:原式可变形为$(a^2-b^2)\cdot(a^2+b^2-c^2)=0$,解得$a=b$或$a^2+b^2=c^2$.所以$\triangle ABC$的形状为等腰三角形或直角三角形.

3. 45　提示:连接$AD$,设小正方形的边长为1.根据勾股定理,得$AD^2=10$,$CD^2=10$,$AC^2=20$,所以$AD^2+CD^2=AC^2$,所以$\triangle ACD$是等腰直角三角形,$\angle ADC=90^\circ$,所以$\angle DAC=\angle ACD=45^\circ$.因为$AB/\!/DE$,所以$\angle BAD+\angle ADE=180^\circ$,所以$\angle BAC+\angle CDE=180^\circ-(\angle ADC+\angle DAC)=45^\circ$.

4. 解:(1) $a=2\ 024$　提示:观察表格可知,$a=m^2-1,b=2m,c=m^2+1(m\geqslant2$,且$m$为整数),所以当$b=90$时,$m=45$,所以$a=m^2-1=45^2-1=2\ 025-1=2\ 024$.

(2) 不存在,理由如下:

当$m^2-1=71$时,$m^2=72$,则$m$不为整数;

当$2m=71$时,$m=35.5$,则$m$不为整数;

当$m^2+1=71$时,$m^2=70$,则$m$不为整数.

所以不存在一组数,既符合上述规律,且其中一个数为71.

(3) 可以,理由如下:

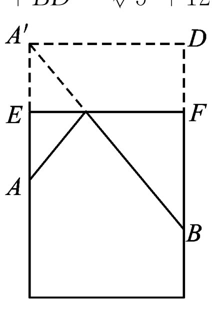
对于一组数:$m^2-1,2m,m^2+1(m\geqslant2$,且$m$为整数),因为$(m^2-1)^2+(2m)^2=m^4+2m^2+1=(m^2+1)^2$,所以若一个三角形的三边长分别为$m^2-1,2m,m^2+1(m\geqslant2$,且$m$为整数),则该三角形为直角三角形.因为当$m\geqslant2$,且$m$为整数时,$2m$表示任意一个大于2的偶数,$m^2-1,m^2+1$均为正整数,所以以任意一个大于2的偶数为一条直角边的长,一定可以画出一个直角三角形,使得该直角三角形的另两条边的长都是正整数.

## 课时训练11　勾股定理的逆定理及其应用(2)

【基础巩固】

1. C　2. D　3. A

4. A　提示:如图,将容器侧面展开,作点$A$关于$EF$的对称点$A'$,连接$A'B$,则$A'B$即为最短距离.由题意,得$A'D=5$ cm,$BD=12$ cm.根据勾股定理,得$A'B=\sqrt{A'D^2+BD^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13$(cm).



**5.** 135　**6.** 3

**7.** **解**:因为 $BD^2+AD^2=6^2+8^2=10^2=AB^2$,所以$\triangle ABD$是直角三角形,且$\angle ADB=90°$.所以$\angle ADC=90°$.在$\mathrm{Rt}\triangle ADC$中,$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=15$,所以$BC=BD+CD=6+15=21$,所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}\times 21\times 8=84$.

**【拓展提优】**

**1.** A　**提示**:根据勾股定理,得$AC=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.因为$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\times 2=\frac{1}{2}AC\cdot BD$,即$\frac{1}{2}\times 2\times 2=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times BD$,解得$BD=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.在$\mathrm{Rt}\triangle BDC$中,根据勾股定理,得$CD=\sqrt{BC^2-BD^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

**2.** 144　**3.** (400,800)

**4.** **解**:(1) 13　**提示**:$AB=\sqrt{(2+3)^2+(4+8)^2}=13$.

(2) $\triangle DEF$是等腰直角三角形,理由如下:因为点$D(1,6)$,$E(-3,3)$,$F(4,2)$,所以$DE^2=(1+3)^2+(6-3)^2=16+9=25$,$DF^2=(1-4)^2+(6-2)^2=9+16=25$,$EF^2=(-3-4)^2+(3-2)^2=50$,所以$DE=DF$,$EF^2=DE^2+DF^2$.所以$\triangle DEF$为等腰直角三角形.

(3) 作点$F$关于$x$轴的对称点$F'$,连接$DF'$交$x$轴于点$P$.易得$PF=PF'$,所以$PF+PD=PF'+PD=DF'$,此时$PD+PF$的长度最短.因为点$F(4,2)$,所以点$F'(4,-2)$,所以$DF'=\sqrt{(1-4)^2+(6+2)^2}=\sqrt{73}$,所以$PF+PD$的最短长度为$\sqrt{73}$.

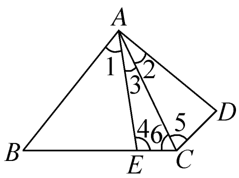
# 第二十一章　四边形

## 课时训练 12　四边形及其内角和

**【基础巩固】**

**1.** D　**2.** B　**3.** C

**4.** A　**提示**:因为$\angle B+\angle 1=\angle 4$,$\angle 4+\angle 3+\angle 6=180°$,所以$\angle B+\angle 1=180°-\angle 3-\angle 6$.因为$\angle 3+\angle 2=\angle 1$,所以$\angle B+\angle 3+\angle 2=180°-\angle 3-\angle 6$.因为$\angle 5+\angle 2+\angle D=180°$,$\angle 5=\angle 6$,所以$\angle D=180°-\angle 2-\angle 6$,所以$\angle B+2\angle 3=\angle D$,即$\angle B+2\angle CAE=\angle D$,所以选项A符合题意,选项D不成立.由选项A可知$\angle B+2\angle CAE=\angle D$,代入选项B,得$4\angle CAE=90°$,$\angle CAE=22.5°$.由于题干中未给出$\angle CAE$的度数,所以选项B不成立,同理选项C也不成立.




**5.** 4(答案不唯一)　**提示**:当$a>4$时,需要$a<1+2+4$,即$a<7$,故可取5或6;当$a\leqslant 4$时,需要$4<1+2+a$,即$a>1$,故可取2,3或4.因此符合条件的整数为2,3,4,5,6,任选其一即可.

**6.** 230°

**7.** 15°　**提示**:因为$AE\perp BC$,所以$\angle AEB=90°$.因为$\angle B=50°$,所以$\angle BAE=90°-\angle B=40°$.因为$\angle C=110°$,$\angle D=90°$,所以$\angle DAE=360°-\angle D-\angle C-\angle AEC=70°$,所以$\angle DAB=\angle BAE+\angle DAE=40°+70°=110°$.因为$AF$平分$\angle DAB$,所以$\angle FAB=\frac{1}{2}\angle DAB=\frac{1}{2}\times 110°=55°$,所以$\angle EAF=\angle FAB-\angle BAE=55°-40°=15°$.

**8.** 110°　**提示**:由题意可知,$\angle BAD+\angle CDA+\angle ABC+\angle BCD=360°$.因为$AQ$平分$\angle BAD$,$QD$平分$\angle ADC$,所以$\angle BAD=2\angle QAD$,$\angle ADC=2\angle ADQ$.因为$\angle Q=70°$,所以$\angle QAD+\angle ADQ=180°-\angle Q=110°$,所以$\angle BAD+\angle ADC=2(\angle QAD+\angle ADQ)=220°$,所以$\angle ABC+\angle BCD=140°$.又因为$PB$平分$\angle ABC$,$PC$平分$\angle BCD$,所以$\angle PBC+\angle PCB=\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle BCD=\frac{1}{2}\times 140°=70°$,所以$\angle P=180°-(\angle PBC+\angle PCB)=110°$.

**9.** **解**:(1) 因为$\angle ABC=80°$,所以$\angle ABE=180°-80°=100°$.因为$BF$平分$\angle ABE$,所以$\angle ABF=\angle EBF=50°$.因为$BF/\!/CD$,所以$\angle DCB=\angle EBF=50°$.

(2) 因为$CF$平分$\angle BCD$,$BF$平分$\angle ABE$,所以$\angle BCF=\angle DCF=\frac{1}{2}\angle BCD$,$\angle EBF=\angle ABF$.因为$\angle A+\angle D+\angle ABC+\angle BCD=360°$,$\angle A=110°$,$\angle D=120°$,所以$\angle ABC+\angle BCD=360°-110°-120°=130°$,即$180°-\angle ABE+2\angle BCF=130°$.因为$\angle ABE=2\angle EBF$,$\angle EBF=\angle F+\angle BCF$,所以$180°-$

$2(\angle F+\angle BCF)+2\angle BCF=130°$，所以 $2\angle F=50°$，所以 $\angle F=25°$.

(3) $\angle F=\frac{1}{2}(\angle A+\angle D-180°)$，理由如下：因为 $\angle A+\angle D+\angle ABC+\angle BCD=360°$，$\angle ABC=180°-\angle ABE$，$\angle ABE=2\angle EBF$，$\angle BCD=2\angle BCF$，$\angle EBF=\angle F+\angle BCF$，所以 $\angle A+\angle D+180°-\angle ABE+2\angle BCF=360°$，所以 $\angle A+\angle D-2\angle EBF+2\angle BCF=180°$，所以 $\angle A+\angle D-2(\angle F+\angle BCF)+2\angle BCF=180°$，即 $2\angle F=\angle A+\angle D-180°$，所以 $\angle F=\frac{1}{2}(\angle A+\angle D-180°)$.

**【拓展提优】**

**1.** B　**提示：**因为 $\angle 1+\angle 2=140°$，所以 $\angle AMN+\angle DNM=\frac{360°-140°}{2}=110°$. 因为 $\angle A+\angle D+\angle AMN+\angle DNM=360°$，$\angle A+\angle D+\angle B+\angle C=360°$，所以 $\angle B+\angle C=\angle AMN+\angle DNM=110°$.

**2.** 130　**提示：**设 $\angle GEF=\alpha$，因为 $EG$ 平分 $\angle BEF$，所以 $\angle GEB=\angle GEF=\alpha$，$\angle BEF=2\angle GEF=2\alpha$，所以 $\angle AEF=180°-\angle BEF=180°-2\alpha$. 由折叠的性质，得 $\angle A'EF=\angle AEF=180°-2\alpha$，$\angle A=\angle A'$，所以 $\angle A'EG=\angle A'EF-\angle GEF=180°-2\alpha-\alpha=180°-3\alpha$. 因为 $AB/\!/CD$，所以 $\angle DFE=\angle BEF=2\alpha$. 因为 $\angle A+\angle DFE=125°$，所以 $\angle A=125°-\angle DFE=125°-2\alpha$，所以 $\angle A'=\angle A=125°-2\alpha$. 因为 $EG/\!/A'D'$，所以 $\angle A'+\angle A'EG=180°$，即 $125°-2\alpha+180°-3\alpha=180°$，解得 $\alpha=25°$，所以 $\angle DFE=2\alpha=50°$，所以 $\angle CFE=180°-\angle DFE=130°$.

**3.** (1) ①115°

②**证明：**因为 $\angle BAD+\angle BCD+\angle B+\angle D=360°$，且四边形 $ABCD$ 是对补四边形，所以 $\angle BAD+\angle BCD=180°$. 因为 $AE$，$CF$ 分别平分 $\angle BAD$，$\angle BCD$，所以 $\angle EAF+\angle ECF=90°$. 因为 $\angle ECF=\angle DCF$，所以 $\angle EAF+\angle DCF=90°$. 在 Rt$\triangle CDF$ 中，$\angle D=90°$，所以 $\angle CFD+\angle DCF=90°$，所以 $\angle EAF=\angle CFD$，所以 $AE/\!/CF$.

(2) **解：**四边形 $ABCD$ 是对补四边形，理由如下：

如图 1，因为 $\angle BEC$ 是 $\triangle ABE$ 的外角，所以 $\angle BEC=\angle 1+\angle 3$. 又因为 $\angle ABC=\angle BEC$，所以 $\angle 2+\angle 3=\angle 1+\angle 3$，所以 $\angle 1=\angle 2$. 因为 $CF\perp BD$，所以 $\angle BGC=90°$. 在 Rt$\triangle BGC$ 中，$\angle BGC=90°$，所以 $\angle 2+\angle BCG=90°$. 又因为 $\angle 1=\angle 2$，所以 $\angle 1+\angle BCG=90°$. 因为 $AC$，$CF$ 分别平分 $\angle BAD$，$\angle BCD$，所以 $\angle BAD=2\angle 1$，$\angle BCD=2\angle BCG$，所以 $\angle BAD+\angle BCD=2(\angle 1+\angle BCG)=180°$，所以四边形 $ABCD$ 是对补四边形.

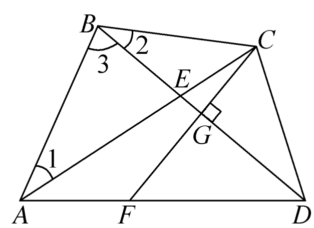


图 1

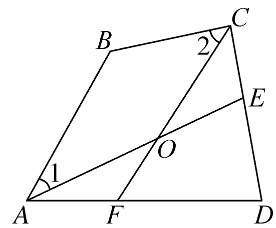


图 2

(3) **解：**$\angle AOC-\angle D=90°$ 或 $\angle D+\angle AOC=90°$ 或 $\angle D-\angle AOC=90°$　**提示：**

①如图 2，因为四边形 $ABCD$ 是对补四边形，所以 $\angle B+\angle D=180°$，$\angle BAD+\angle BCD=180°$. 因为 $AE$ 平分 $\angle BAD$，$CF$ 平分 $\angle BCD$，所以 $\angle 1+\angle 2=\frac{1}{2}\angle BAD+\frac{1}{2}\angle BCD=90°$，所以 $\angle B+\angle AOC=360°-(\angle 1+\angle 2)=270°$，即 $\angle AOC=270°-\angle B$. 因为 $\angle B+\angle D=180°$，所以 $\angle AOC=270°-(180°-\angle D)$，即 $\angle AOC-\angle D=90°$.

②如图 3，因为四边形 $ABCD$ 是对补四边形，所以 $\angle BAD+\angle BCD=180°$. 因为 $AE$ 平分 $\angle BAD$，$CF$ 平分 $\angle BCD$，所以 $\angle 1+\angle 2=90°$. 在 $\triangle AFO$ 中，$\angle AFO=180°-\angle 2-\angle AOC$. 在 $\triangle CDF$ 中，$\angle AFO=1+\angle D$，所以 $\angle 1+\angle D=180°-\angle 2-\angle AOC$，即 $\angle D+\angle AOC=90°$.

③如图 4，因为四边形 $ABCD$ 是对补四边形，所以 $\angle B+\angle D=180°$，$\angle BAD+\angle BCD=180°$. 因为 $AE$ 平分 $\angle BAD$，$CF$ 平分 $\angle BCD$，所以 $\angle 1+\angle 2=\frac{1}{2}\angle BAD+\frac{1}{2}\angle BCD=90°$. 在 $\triangle OEC$ 中，$\angle BEA=\angle AOC+\angle 2$. 在 $\triangle ABE$ 中，$\angle BEA=180°-\angle 1-\angle B$，所以 $\angle AOC+\angle 2=180°-\angle 1-\angle B$. 因为 $\angle B=180°-\angle D$，所以 $\angle AOC+\angle 2=180°-\angle 1-180°+\angle D$，即 $\angle D-\angle AOC=90°$.

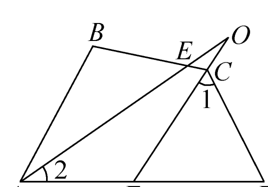


图 3

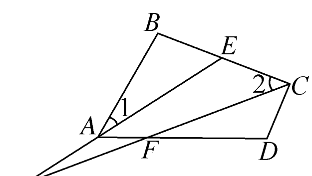


图 4

## 课时训练 13　多边形及其内角和

【基础巩固】

**1.** D　**2.** A　**3.** C

**4.** B　**提示**:连接 $BE$.易证四边形 $DEBC$ 为平行四边形,所以 $BE=AB=AE$,所以 $\angle AEB=60°$.因为 $CD/\!/BE$,所以 $\angle D=\angle AEB=60°$.因为 $AD/\!/BC$,所以 $\angle C+\angle D=180°$,所以 $\angle C=120°$.在正五边形中,$\angle C=180°-(360°\div5)=108°$,所以 $\angle C$ 的度数将增加 $120°-108°=12°$.

**5.** 8　**6.** 210°

**7.** 40°　**提示**:由题意可知,$\angle1+\angle2+\angle3+\angle4+220°=4\times180°$,所以 $\angle1+\angle2+\angle3+\angle4=500°$.因为五边形 $OAGFE$ 的内角和为 $(5-2)\times180°=540°$,所以 $\angle1+\angle2+\angle3+\angle4+\angle BOD=540°$,所以 $\angle BOD=540°-500°=40°$.

**8.** 230　**提示**:设一个多边形的顶点数为 $n$,由表格数据可得,$2=\frac{4\times(4-3)}{2}$,$5=\frac{5\times(5-3)}{2}$,$9=\frac{6\times(6-3)}{2}$,…,则顶点数为 $n$ 的多边形的对角线条数为 $\frac{n(n-3)}{2}$,那么二十三边形的对角线条数为 $\frac{23\times(23-3)}{2}=230$.

**9.** **解**:(1) 540

(2) 因为 $\angle EAB+\angle ABC+\angle C+\angle D+\angle E=540°$,$\angle C=100°$,$\angle D=75°$,$\angle E=135°$,所以 $\angle EAB+\angle ABC=230°$.因为 $AP$ 平分 $\angle EAB$,$BP$ 平分 $\angle ABC$,所以 $\angle PAB=\frac{1}{2}\angle EAB$,$\angle PBA=\frac{1}{2}\angle ABC$,所以 $\angle PAB+\angle PBA=115°$,所以 $\angle P=180°-(\angle PAB+\angle PBA)=65°$.

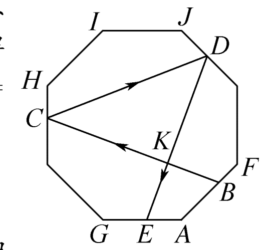
**10.** **解**:(1) 六边形 $ABCDEF$ 的内角和为 $(6-2)\times180°=720°$.

(2) 因为 $AF/\!/BE$,$\angle A=110°$,所以 $\angle ABE=180°-\angle A=70°$.因为 $\angle ABC=100°$,所以 $\angle CBE=\angle ABC-\angle ABE=30°$.因为 $DE/\!/AB$,所以 $\angle BED=\angle ABE=70°$.又因为 $CD/\!/BE$,所以 $\angle C=180°-\angle CBE=150°$,$\angle D=180°-\angle BED=110°$.

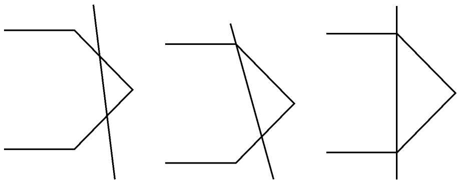
(3) 由题意,得蚂蚁一共转过的角度和就是六边形的外角和,是 360°.

【拓展提优】

**1.** A　**提示**:如图,设 $CD$ 上方的正八边形的顶点依次为 $H,I,J$,$BC$ 与 $DE$ 的交点为 $K$.由正八边形的性质,得 $\angle CHI=\angle HIJ=\angle IJD=\angle BAE=180°-\frac{360°}{8}=135°$.设 $\angle BCD=x$,$\angle CDE=y$.由光的反射定律,可知 $\angle DCH=\frac{1}{2}(180°-\angle BCD)=90°-\frac{1}{2}x$,$\angle CDJ=\frac{1}{2}(180°-\angle CDE)=90°-\frac{1}{2}y$.因为多边形 $CHIJD$ 是五边形,所以 $\angle CHI+\angle HIJ+\angle IJD+\angle CDJ+\angle DCH=540°$,即 $3\times135°+90°-\frac{1}{2}x+90°-\frac{1}{2}y=540°$,解得 $x+y=90°$,所以 $\angle CKD=180°-(x+y)=90°$,所以 $\angle BKE=90°$.因为多边形 $AEKB$ 是四边形,所以 $\angle AED=360°-(\angle BKE+\angle BAE+\angle ABC)=360°-(90°+135°+65°)=70°$.




**2.** 13 或 14 或 15　**提示**:设新多边形的边数为 $n$.由题意,得 $(n-2)\times180°=2\ 160°$,所以 $n=14$.因为剪去一个角有如图所示的三种剪法,所以剪完后新多边形的边数有比原多边形多一条边或相等或少一条边三种情况,故原多边形的边数为 13 或 14 或 15.



**3.** **解**:设这个多边形的边数是 $m$,重复加的那个角的度数是 $x°$.由题意,得 $(m-2)\times180°+x°=1\ 280°$,所以 $(m-2)\times180°=1\ 280°-x°$.因为 $1\ 280°\div180°=7\cdots\cdots20°$,所以 $x=20$,所以 $(m-2)\times180°=1\ 260°$,解得 $m=9$.

答:这个多边形的边数是 9,重复加的那个角的度数是 20°.

**4.** (1) **证明**:因为 $AD/\!/BC$,所以 $\angle GAD=\angle BGA$.因为 $AG$ 平分 $\angle BAD$,所以 $\angle BAG=\angle GAD$,所以 $\angle BAG=\angle BGA$.

(2) **解**:①因为 $CF$ 平分 $\angle BCD$,$\angle BCD=90°$,所以 $\angle GCF=45°$.因为 $AD/\!/BC$,所以 $\angle AEF=\angle GCF=45°$.因为 $\angle ABC=50°$,所以 $\angle DAB=180°-50°=130°$.因为 $AG$ 平分 $\angle BAD$,所以 $\angle BAG=\angle GAD=65°$,所以 $\angle AFC=65°-45°=20°$.

②$\angle AFC=160°$.　**提示**:如图 1,因为 $\angle AGB=65°$,所以 $\angle AGC=180°-\angle AGB=115°$.又因为

$\angle BCF=45°$，所以$\angle AFC=\angle CGF+\angle BCF=115°+45°=160°$.

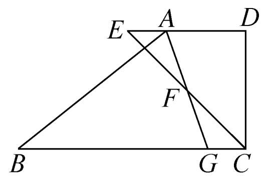



**图 1**

(3) $\angle ABM:\angle PBM$的值是$\frac{7}{3}$或$\frac{1}{3}$.　**提示：**分两种情况讨论：①当点$M$在$BP$的下方时，如图 2，设$\angle ABC=3x$. 因为$\angle ABP=2\angle PBG$，所以$\angle ABP=2x$，$\angle PBG=x$. 因为$AG\parallel CH$，所以$\angle BCH=\angle AGB=\frac{180°-3x}{2}$. 因为$\angle BCD=90°$，所以$\angle DCH=\angle PBM=90°-\frac{180°-3x}{2}=\frac{3x}{2}$，所以$\angle ABM=\angle ABP+\angle PBM=2x+\frac{3x}{2}=\frac{7x}{2}$，所以$\angle ABM:\angle PBM=\frac{7x}{2}:\frac{3x}{2}=\frac{7}{3}$.

②当点$M$在$BP$的上方时，如图 3，同理，得$\angle ABM=\angle ABP-\angle PBM=2x-\frac{3}{2}x=\frac{1}{2}x$，所以$\angle ABM:\angle PBM=\frac{1}{2}x:\frac{3}{2}x=\frac{1}{3}$.

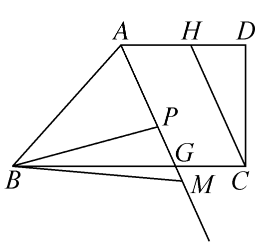



**图 2**

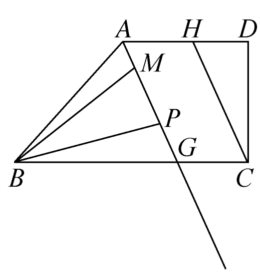



**图 3**

## 提优专题 3　用多边形镶嵌平面

**1.** B

**2.** C　**提示：**由题意，知这三个正多边形的 3 个内角之和为 360°. 已知正多边形的边数分别为$x,y,z$，可得$\frac{(x-2)\times180}{x}+\frac{(y-2)\times180}{y}+\frac{(z-2)\times180}{z}=360$，两边都除以 180，得$1-\frac{2}{x}+1-\frac{2}{y}+1-\frac{2}{z}=2$. 移项，合并同类项，得$\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}=1$. 两边都除以 2，得$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$.

**3.** C　**提示：**因为正六边形的每个内角是 120°，所以$\angle ACB=120°-75°=45°$，所以$\angle CAB=180°-120°=60°$. 所以题图 3 中正多边形的每个内角为$60°+75°=135°$，所以$n=360°\div(180°-135°)=8$.

**4.** 1 080°　**提示：**设正多边形为$n$边形，则$2\times\left(180-\frac{360}{n}\right)+90=360$，解得$n=8$，所以$180°\times(8-2)=1\ 080°$.

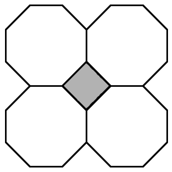
**5.** 3　**提示：**因为正方形的每个内角是 90°，正三角形的每个内角为 60°，所以$90\times2+60n=360$，解得$n=3$.

**6.** 661　**提示：**根据题意分析，可得从里向外的第 1 圈包括 6 个正三角形、6 个正方形；第 2 圈包括 18 个正三角形、6 个正方形，此后，每圈都比前一圈多 12 个等边三角形. 以此类推，第 10 圈中含有正三角形个数是$6+12\times9=114$，所以铺设该广场共用地砖$6+18+\cdots+114+6\times10+1=661$(块).

**7. 解：**(1) 60°　90°　108°　120°　$\left(180-\frac{360}{n}\right)°$

(2) 如果限于用一种正多边形镶嵌，那么由一顶点的周围角的和等于 360°，得正三角形、正四边形(或正方形)、正六边形都能镶嵌成一个平面图形.

(3) 答案不唯一，如：正方形和正八边形(如图)，设在一个顶点周围有$m$个正方形的角，$n$个正八边形的角，那么$m,n$应是方程$m\cdot90°+n\cdot135°=360°$的正整数解，即$2m+3n=8$的正整数解. 因为只有$m=1,n=2$一组，所以符合条件的图形只有一种.



**8. 解：**(1) 360°

(2) 12　**提示：**按图 1 所示镶嵌该长方形周长最小.

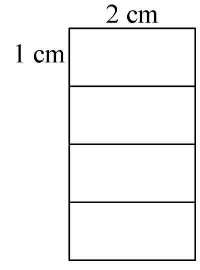



**图 1**

(3) 七边形如图 2 所示.

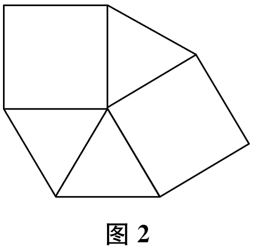


**图 2**

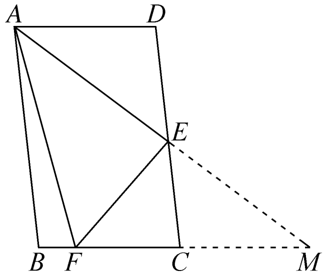
## 课时训练 14　平行四边形及其性质(1)

**【基础巩固】**

**1.** D　**2.** D　**3.** C

**4.** $50^\circ$　**5.** $72^\circ$　**6.** 10　**7.** $25^\circ$

**8.** 7　**提示**:如图,延长 $AE$,$BC$ 相交于点 $M$.因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形,所以 $AD//BC$,即 $AD//BM$,所以$\angle M=\angle EAD$,$\angle ECM=\angle D$.因为 $AE$ 平分$\angle DAF$,所以$\angle EAD=\angle EAF$,所以$\angle M=\angle EAF$,所以 $AF=FM$.因为 $E$ 是边 $CD$ 的中点,所以 $EC=ED$,易证$\triangle ADE\cong\triangle MCE$(AAS).因为 $AD=BC=BF+CF=4$,所以 $CM=AD=4$,所以 $AF=FM=FC+CM=3+4=7$.




**9.** **证明**:(1) 因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形,所以 $AD//BC$,所以$\angle DAF=\angle GEF$.又因为 $F$ 为 $AE$ 的中点,所以 $AF=EF$.在$\triangle ADF$ 和$\triangle EGF$ 中,$\begin{cases}\angle DAF=\angle GEF,\\ AF=EF,\\ \angle DFA=\angle GFE,\end{cases}$ 所以$\triangle ADF\cong\triangle EGF$(ASA).

(2) 由(1)知,$\triangle ADF\cong\triangle EGF$,所以 $GE=DA$.因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $AD=BC$,所以 $GE=BC$.因为 $GE=GB+BE$,$BC=BE+CE$,所以 $BG=CE$.

**10.** (1) **证明**:因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $AD//BC$,所以$\angle DAE=\angle F$.因为 $E$ 是边 $CD$ 的中点,所以 $DE=CE$.在$\triangle AED$ 和$\triangle FEC$ 中,$\begin{cases}\angle DAE=\angle F,\\ \angle AED=\angle FEC,\\ DE=CE,\end{cases}$ 所以$\triangle AED\cong\triangle FEC$(AAS),所以 $AD=FC$.

(2) **解**:因为 $CD//AB$,$\angle BAF=90^\circ$,所以$\angle CEF=\angle BAF=90^\circ$.因为 $AD=FC$,且 $AD=BC=5$,所以 $FC=5$.因为 $EF=3$,所以 $CE=\sqrt{FC^2-EF^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$,所以 $CD=2CE=2\times4=8$.

**【拓展提优】**

**1.** D　**提示**:设$\angle BAD$ 的平分线交 $BC$ 于点 $E$.因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $BC//AD$,所以$\angle BEA=\angle DAE$.因为$\angle BAE=\angle DAE$,所以$\angle BEA=\angle BAE$,所以 $AB=EB$.当 $EB=4$ cm,$EC=3$ cm 时,如图 1,则 $AB=EB=4$ cm,$BC=EB+EC=7$ cm,所以 $2AB+2BC=2\times4+2\times7=22$(cm);当 $EB=3$ cm,$EC=4$ cm 时,如图 2,则 $AB=EB=3$ cm,$BC=EB+EC=7$ cm,所以 $2AB+2BC=2\times3+2\times7=20$(cm).综上所述,▱$ABCD$ 的周长为 22 cm 或 20 cm.

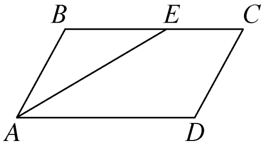



图 1

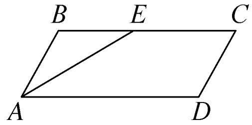



图 2

**2.** $\frac{12}{5}$　**提示**:因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $BC=AD=12$,$AB=CD=5$,$\angle B=\angle D$.由翻折,得 $BE=EF$,$\angle B=\angle EFC$,$CF=BC=12$.因为 $EF\perp AD$,所以$\angle CFE+\angle CFD=90^\circ$,所以$\angle D+\angle CFD=90^\circ$,所以$\angle FCD=90^\circ$.在 Rt$\triangle FCD$ 中,由勾股定理,得 $DF=\sqrt{CF^2+CD^2}=13$,所以 $AF=DF-AD=1$.设 $BE=EF=x$,则 $AE=AB-BE=5-x$.在 Rt$\triangle AFE$ 中,由勾股定理,得$(5-x)^2=x^2+1$,解得 $x=\frac{12}{5}$,所以 $BE=\frac{12}{5}$.

**3.** $3\leqslant m\leqslant6$　**提示**:因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以$\angle ABC+\angle BCD=180^\circ$.因为 $BP$ 平分$\angle ABC$,$CP$ 平分$\angle BCD$,所以$\angle PBC=\frac{1}{2}\angle ABC$,$\angle PCB=\frac{1}{2}\angle BCD$,所以$\angle PBC+\angle PCB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle BCD)=90^\circ$,所以$\angle BPC=90^\circ$.当点 $Q$ 与点 $C$ 重合时,如图 1 所示,则$\angle APB=\angle BPC=90^\circ$,易证$\triangle ABP\cong\triangle CBP$(ASA),所以 $AB=BC$.因为 $BC=6$,所以 $AB=m=6$.当点 $Q$ 与点 $D$ 重合时,如图 2 所示,延长 $CP$ 交 $BA$ 的延长线于点 $K$,则$\angle KPB=\angle BPC=90^\circ$,易证$\triangle KBP\cong\triangle CBP$(ASA),所以 $BK=BC$,$KP=CP$.因为 $AB//CD$,所以$\angle K=\angle DCP$.又因为$\angle KPA=\angle CPD$,所以$\triangle KPA\cong\triangle CPD$(ASA),所以 $CD=AK$.因为 $AB=CD$,所以 $BC=2AB=6$,所以 $AB=m=3$.综上所述,当点 $Q$ 落在线段 $CD$ 上(包括端点 $C$,$D$)时,$m$ 的取值范围是 $3\leqslant m\leqslant6$.

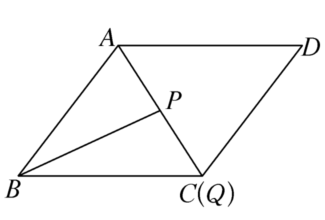



图 1

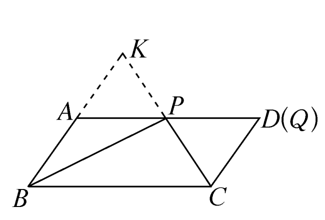
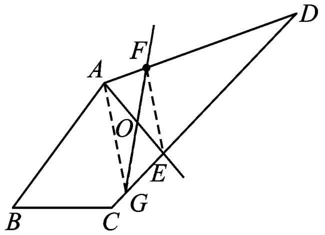



图 2

**4. 解**:(1) 设 $AE$ 交 $OC$ 于点 $F$. 因为 $OE//AC$,所以 $S_{\triangle AOE}=S_{\triangle COE}$,所以 $S_{\triangle AOF}=S_{\triangle CEF}$. 又因为折线 $A—O—C$ 能平分四边形 $ABCD$ 的面积,所以直线 $AE$ 平分四边形 $ABCD$ 的面积,即直线 $AE$ 是"好线".

(2) 如图,连接 $EF$,过点 $A$ 作 $EF$ 的平行线 $AG$,交 $CD$ 于点 $G$,连接 $GF$ 并延长,则直线 $GF$ 为一条"好线". **提示**:设 $AE$ 与 $FG$ 的交点是 $O$. 因为 $AG//EF$,所以 $S_{\triangle AGE}=S_{\triangle AFG}$,所以 $S_{\triangle AOF}=S_{\triangle GOE}$. 因为 $AE$ 为一条"好线",所以 $GF$ 为一条"好线".




## 课时训练 15　平行四边形及其性质(2)

**【基础巩固】**

**1.** B

**2.** D　**提示**:由题意可知,$AB//CD$,$AB=CD=5$,$OA=OC$,所以 $\angle AEO=\angle CFO$. 在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COF$ 中,
$\begin{cases}\angle AEO=\angle CFO,\\ \angle AOE=\angle COF,\\ OA=OC,\end{cases}$ 所以 $\triangle AOE\cong\triangle COF$(AAS),
所以 $AE=CF$,$OE=OF=3$,所以 $AE+DF=CF+DF=CD=5$,$EF=2OE=6$. 因为 $AD=6$,所以四边形 $ADFE$ 的周长为 $AE+DF+EF+AD=5+6+6=17$.

**3.** C

**4.** 9 $cm^2$　**5.** 18　**6.** 6　**7.** $\sqrt{73}$

**8.** (1) **证明**:因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $AD//BC$,$OA=OC$,所以 $\angle EAO=\angle FCO$. 又因为 $\angle AOE=\angle COF$,所以 $\triangle AOE\cong\triangle COF$(ASA).

(2) **解**:因为 $\triangle AOE\cong\triangle COF$,所以 $OF=OE=3$,$AE=CF$,所以 $ED+CF=ED+AE=AD=BC=7$. 又因为 $CD=AB=4$,所以四边形 $EFCD$ 的周长为 $ED+CF+CD+EF=7+4+3\times2=17$.

**9.** (1) **解**:共有 4 对全等三角形. 分别为 $\triangle AOM\cong\triangle CON$,$\triangle AOE\cong\triangle COF$,$\triangle AME\cong\triangle CNF$,$\triangle ABC\cong\triangle CDA$.

(2) **证明**:因为 $O$ 为 $AC$ 的中点,所以 $OA=OC$. 又因为 $\angle1=\angle2$,$OE=OF$,所以 $\triangle OAE\cong\triangle OCF$(SAS),所以 $\angle EAO=\angle FCO$. 又因为在▱$ABCD$ 中,$AB//CD$,所以 $\angle BAO=\angle DCO$,所以 $\angle MAE=\angle NCF$.

**【拓展提优】**

**1.** C　**提示**:由题意,得 $AA_1=DC_4$,$AA_1//DC_4$,所以四边形 $AA_1C_4D$ 是平行四边形,所以 $A_1C_4//AD$,$A_1C_4=AD$. 同理可证,$A_2C_3//A_3C_2//A_4C_1//BC$,$AB//B_1D_2//B_2D_1//CD$. 所以题图中每个小块都是平行四边形,且面积相等. 设每个小块面积是 $a$,则▱$ABCD$ 的面积是 $15a$,角上四个三角形的面积分别是 $a$,$2a$,$a$,$2a$,所以四边形 $A_4B_2C_4D_2$ 的面积为 $9a$. 因为 $9a=1$,所以 $15a=\frac{5}{3}$.

**2.** 12 或 20　**提示**:当点 $E$ 在线段 $BC$ 上时,如图 1,易知 $AE=4$. 因为 $AC=2\sqrt{5}$,所以 $EC=\sqrt{AC^2-AE^2}=2$,$AB=CD=5$,$BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=3$,所以 $AD=BC=5$,所以▱$ABCD$ 的周长为 20. 当点 $E$ 在线段 $BC$ 的延长线上时,如图 2,易知 $AE=4$. 因为 $AC=2\sqrt{5}$,所以 $EC=\sqrt{AC^2-AE^2}=2$,$AB=CD=5$,$BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=3$,所以 $BC=3-2=1$,所以▱$ABCD$ 的周长为 $2(AB+BC)=12$. 综上所述,▱$ABCD$ 的周长为 12 或 20.

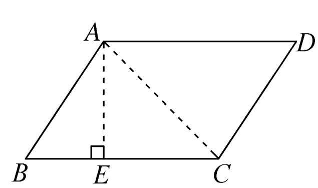


**图 1**

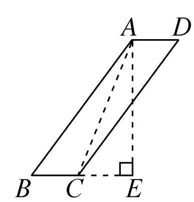


**图 2**

**3.** $\frac{21\sqrt{3}}{2}$

**4.** $4\sqrt{2}$　**提示**:设 $AC$ 和 $PQ$ 交于点 $O$. 因为四边形 $PAQC$ 是平行四边形,所以 $OA=OC$,$OP=OQ$,所以 $O$ 是 $AC$ 的中点,即 $O$ 为定点. 当 $PQ$ 取最小值时,$OP$ 取最小值. 由垂线段最短可知,当 $OP\perp AB$ 时,$OP$ 的值最小. 因为 $\angle BAC=45°$,所以 $\triangle APO$ 是等腰直角三角形. 因为 $OA=\frac{1}{2}AC=4$,所以 $OP=2\sqrt{2}$. 所以 $PQ$ 长的最小值为 $2OP=4\sqrt{2}$.

**5.** (1) **证明**:因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $OA=OC$,$AD//BC$,所以 $\angle OAF=\angle OCE$. 在 $\triangle AOF$ 和 $\triangle COE$ 中,
$\begin{cases}\angle OAF=\angle OCE,\\ OA=OC,\\ \angle AOF=\angle COE,\end{cases}$ 所以 $\triangle AOF\cong\triangle COE$

(ASA),所以 $OE=OF$.

(2) **解**:成立,理由如下:

因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $OA=OC$,$AB/\!/CD$,所以 $\angle E=\angle F$. 在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COF$ 中,$\begin{cases}\angle E=\angle F,\\ \angle AOE=\angle COF,\\ OA=OC,\end{cases}$ 所以 $\triangle AOE\cong\triangle COF$(AAS),所以 $OE=OF$.

(3) **解**:①当直线 $EF$ 在绕点 $O$ 旋转的过程中,直线 $EF$ 与 $AD$,$BC$ 相交,$EF\perp BC$ 时,$EF$ 最短. 因为▱$ABCD$ 的面积为 20,$BC=10$,所以 $S_{▱ABCD}=BC\cdot EF=10EF=20$,所以 $EF=2$.

②当直线 $EF$ 在绕点 $O$ 旋转的过程中,直线 $EF$ 与 $DC$,$BA$ 的延长线相交,且 $EF\perp AB$ 时,$EF$ 最短. 同①的方法,得出 $EF$ 的最小值为 $\frac{20}{6}=\frac{10}{3}$. 所以直线 $EF$ 在绕点 $O$ 旋转的过程中,当 $EF\perp BC$ 时,$EF$ 最短,$EF$ 的最小值为 2.

## 课时训练 16　平行四边形的判定(1)

**【基础巩固】**

**1.** D　**2.** B　**3.** D　**4.** B

**5.** ①③　**6.** 平行四边形

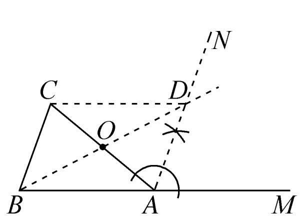
**7.** ▱$AP_1CP_5$(答案不唯一)

**8.** 两组对边分别相等的四边形是平行四边形

**9.** **证明**:(1) 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $DC=BA$,$DC/\!/BA$,所以 $\angle CDF=\angle ABE$. 又因为 $DF=BE$,所以 $\triangle DCF\cong\triangle BAE$(SAS),所以 $CF=AE$.

(2) 连接 $AC$ 交 $BD$ 于点 $O$. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $OA=OC$,$OD=OB$. 因为 $DF=BE$,所以 $OF=OE$,所以四边形 $FAEC$ 是平行四边形.

**10.** **解**:(1) 如图,$AN$,$CD$ 即为所求.

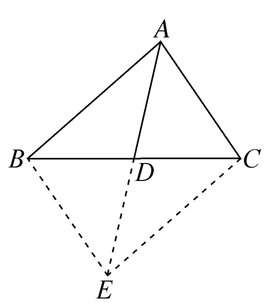



(2) 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,证明如下:因为 $AN$ 是 $\angle MAC$ 的平分线,所以 $\angle MAC=2\angle MAN=2\angle CAN$. 因为 $AB=AC$,所以 $\angle ABC=\angle ACB$. 因为 $\angle MAC=\angle ABC+\angle ACB$,所以 $2\angle MAN=2\angle ABC$,所以 $\angle MAN=\angle ABC$,所以 $AN/\!/BC$,所以 $\angle OAD=\angle OCB$. 因为 $O$ 是 $AC$ 的中点,所以 $OA=OC$. 在 $\triangle OAD$ 和 $\triangle OCB$ 中,$\begin{cases}\angle OAD=\angle OCB,\\ OA=OC,\\ \angle AOD=\angle COB,\end{cases}$ 所以 $\triangle OAD\cong\triangle OCB$(ASA),所以 $OD=OB$,所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

**【拓展提优】**

**1.** 平行四边形　**提示**:由条件,得 $(a-c)^2+(b-d)^2=0$. 因为 $(a-c)^2\geqslant0$,$(b-d)^2\geqslant0$,所以 $a=c$,$b=d$,所以这个四边形为平行四边形.

**2.** $\frac{\sqrt{46}}{2}$　**提示**:如图,延长 $AD$ 至点 $E$,使 $DE=AD$,连接 $BE$,$CE$. 因为 $D$ 是 $BC$ 的中点,所以 $BD=CD$. 因为 $AD=DE$,所以四边形 $ABEC$ 是平行四边形. 由阿波罗尼奥斯定理,得 $AE^2+BC^2=2AB^2+2AC^2$,所以 $6^2+AE^2=2\times(5^2+4^2)$,所以 $AE=\sqrt{46}$,所以 $AD=\frac{1}{2}AE=\frac{\sqrt{46}}{2}$.




**3.** (3,5)或(−3,1)或(1,−1)　**提示**:①当 $AB$ 为边且 $AB$ 与 $AC$ 为邻边时,如图 1. 因为点 $A(-1,0)$,$B(2,2)$,所以点 $A$ 先向右平移 3 个单位长度,再向上平移 2 个单位长度得点 $B$,相应的点 $C$ 先向右平移 3 个单位长度,再向上平移 2 个单位长度得点 $D$. 因为点 $C(0,3)$,所以点 $D(3,5)$. ②当 $AB$ 为边且 $AB$ 与 $AD$ 为邻边时,如图 2. 因为点 $B(2,2)$,$C(0,3)$,所以点 $B$ 先向左平移 2 个单位长度,再向上平移 1 个单位长度得点 $C$,相应的点 $A$ 先向左平移 2 个单位长度,再向上平移 1 个单位长度得点 $D$. 因为点 $A(-1,0)$,所以点 $D(-3,1)$. ③当 $AB$ 为对角线时,如图 3. 因为点 $B(2,2)$,$C(0,3)$,所以点 $C$ 先向右平移 2 个单位长度,再向下平移 1 个单位长度得点 $B$,相应的点 $A$ 先向右平移 2 个单位长度,再向下平移 1 个单位长度得点 $D$. 因为点 $A(-1,0)$,所以点 $D(1,-1)$. 故点 $D$ 的坐标为(3,5)或(−3,1)或(1,−1).

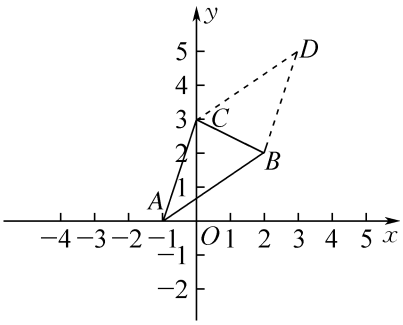


图 1

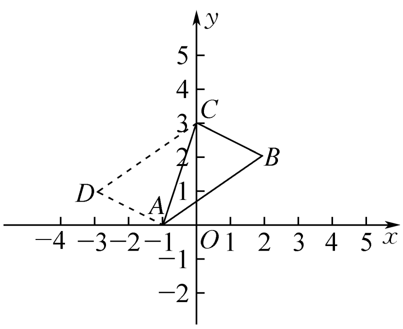


图 2

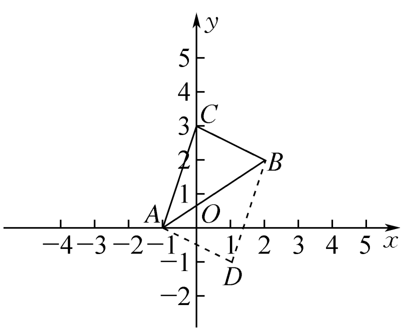


图 3

4. (1) **证明**:因为 $DE//AC$,$DF//AB$,所以四边形 $AEDF$ 是平行四边形,所以 $DE=AF$,$\angle FDC=\angle B$. 又因为 $AB=AC$,所以$\angle B=\angle C$,所以$\angle FDC=\angle C$,所以 $DF=FC$,所以 $DE+DF=AF+FC=AC$.

(2) **解**:当点 $D$ 在边 $BC$ 的延长线上时,$DE-DF=AC$;当点 $D$ 在边 $BC$ 的反向延长线上时,$DF-DE=AC$.

(3) 2 或 10

## 课时训练 17　平行四边形的判定(2)

**【基础巩固】**

1. B　2. D　3. B

4. B　**提示**:对于选项 A,由平行四边形的对角线相等知 $OB=OD$,$OA=OC$,所以 $OE=OF$,所以四边形 $DEBF$ 是平行四边形. 对于选项 C,因为 $AD//BC$,所以$\angle DAE=\angle BCF$. 又因为 $AD=BC$,可证出 $\triangle ADE\cong\triangle CBF$,所以 $DE=BF$,$\angle DEA=\angle BFC$,所以$\angle DEF=\angle BFE$,所以 $DE//BF$,所以四边形 $DEBF$ 是平行四边形. 对于选项 D,由 $\angle AED=\angle CFB$,得$\angle DEF=\angle BFE$,所以 $DE//BF$,所以同理选项 C 可说明选项 D 条件也可以.

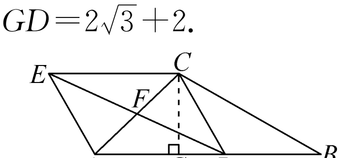
5. ③或④　6. $ADE$　$CBF$　$CBF$

7. **证明**:(1) 因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形,所以 $AD//BC$,$AD=BC$,$\angle NDF=\angle MBE$. 因为 $AM\perp BC$,$CN\perp AD$,所以 $AM//CN$,所以四边形 $AMCN$ 为平行四边形,所以 $AN=CM$,所以 $AD-AN=BC-CM$,即 $DN=BM$. 又因为 $\angle BME=\angle DNF$,$\angle MBE=\angle NDF$,所以$\triangle BME\cong\triangle DNF$(ASA).

(2) 由(1),得 $NF=ME$,$AM=CN$,$AM//CN$,所以 $AE//CF$,$AM-EM=CN-NF$,即 $AE=CF$,所以四边形 $AECF$ 为平行四边形.

8. (1) **证明**:因为 $CE//AB$,所以$\angle CAD=\angle ACE$,$\angle ADE=\angle CED$. 因为 $F$ 是 $AC$ 的中点,所以 $AF=CF$. 在$\triangle AFD$ 和$\triangle CFE$ 中,$\begin{cases}\angle CAD=\angle ACE,\\ \angle ADE=\angle CED,\\ AF=CF,\end{cases}$ 所以$\triangle AFD\cong\triangle CFE$(AAS),所以 $AD=CE$,所以四边形 $ADCE$ 是平行四边形.

(2) **解**:如图,过点 $C$ 作 $CG\perp AB$ 于点 $G$. 因为 $CD=BD$,$\angle B=30°$,所以$\angle DCB=\angle B=30°$,所以$\angle CDA=60°$. 在$\triangle ACG$ 中,$\angle AGC=90°$,$AC=2\sqrt{6}$,$\angle CAG=45°$,所以 $AG=CG=\dfrac{AC}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{3}$. 在$\triangle CGD$ 中,$\angle DGC=90°$,$\angle CDG=60°$,$CG=2\sqrt{3}$,所以$\angle GCD=30°$,所以 $CD=2GD$. 因为 $CD^2=CG^2+GD^2$,即$(2GD)^2=(2\sqrt{3})^2+GD^2$,所以 $GD=2$,所以 $AD=AG+GD=2\sqrt{3}+2$.



**【拓展提优】**

1. B

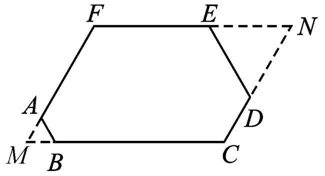
2. 2 或 3.5　**提示**:因为 $E$ 是 $BC$ 的中点,所以 $BE=CE=\frac{1}{2}BC=9$. 因为 $AD//BC$,所以 $PD//QE$,所以当 $PD=QE$ 时,以 $P,Q,E,D$ 为顶点的四边形是平行四边形. ①当点 $Q$ 运动到点 $E$ 和点 $C$ 之间时,得 $5-t=9-3t$,解得 $t=2$;②当点 $Q$ 运动到点 $E$ 和点 $B$ 之间时,得 $5-t=3t-9$,解得 $t=3.5$.

**3.** 432　**提示**:连接 $AC$ 交 $BD$ 于点 $G$,连接 $AE$ 交 $DF$ 于点 $H$. 易得四边形 $AEDB$ 是平行四边形,四边形 $AFDC$ 是平行四边形,所以 $AE /\!/ BD$,$AC /\!/ FD$,所以 $AH /\!/ GD$,$AG /\!/ HD$,所以四边形 $AHDG$ 为平行四边形,所以 $AH=GD$,所以 $AE-AH=BD-GD$,即 $EH=BG$. 因为 $BD \perp FD$,所以 $EH \perp FD$. 所以 $S_{六边形ABCDEF}=S_{\square AFDC}+S_{\triangle ABC}+S_{\triangle EFD}=FD \cdot AH+\frac{1}{2}AC \cdot BG+\frac{1}{2}FD \cdot HE=FD \cdot AH+FD \cdot HE=FD \cdot BD=24 \times 18=432(\mathrm{cm}^2)$.

**4.** **解**:(1) 平行四边形　**提示**:因为 $\angle ACB=90°$,$\angle ABC=30°$,所以 $\angle BAC=60°$,$AC=\frac{1}{2}AB$. 因为 $\triangle ACD$ 是等边三角形,所以 $\angle ACD=60°$,$AC=CD$,所以 $\angle ACD=\angle BAC$,所以 $CD /\!/ AB$. 因为 $F$ 为 $AB$ 的中点,所以 $BF=\frac{1}{2}AB$,所以 $BF=CD$,所以四边形 $BCDF$ 是平行四边形.

(2) $\frac{1}{7}$　**提示**:设 $AC=x$,则 $AB=2x$,所以 $S_{\triangle ACD}=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$,$S_{\triangle ACB}=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$,$S_{\triangle ABE}=\sqrt{3}x^2$,所以 $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{四边形BCDE}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}x^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+\sqrt{3}x^2}=\frac{1}{7}$.

**5.** **解**:如图,延长 $FA$,$CB$ 交于点 $M$,延长 $FE$,$CD$ 交于点 $N$. 因为 $\angle FAB=\angle ABC=\angle CDE=\angle DEF=120°$,所以 $\angle ABM=\angle BAM=\angle DEN=\angle EDN=60°$,所以 $\triangle AMB$ 和 $\triangle END$ 都是等边三角形. 所以 $\angle AMB=\angle END=60°$. 又因为 $\angle F=\angle C=120°$,所以四边形 $FMCN$ 是平行四边形,所以 $MC=FN$,$MF=CN$. 因为 $AM=BM=AB=10\ \mathrm{cm}$,$BC=70\ \mathrm{cm}$,$CD=20\ \mathrm{cm}$,$DN=EN=DE=40\ \mathrm{cm}$,所以 $AF=CD+DN-AM=50\ \mathrm{cm}$,$EF=BC+BM-EN=40\ \mathrm{cm}$.




## 课时训练 18　三角形的中位线

**【基础巩固】**

**1.** C　**2.** D　**3.** C　**4.** C

**5.** 30 m　**6.** 16　**7.** 20°

**8.** 12 cm,20 cm,24 cm

**9.** (1) **证明**:因为 $AD \perp BG$,所以 $\angle ADB=\angle ADG=90°$. 因为 $AD$ 平分 $\angle BAC$,所以 $\angle BAD=\angle CAD$. 又因为 $AD=AD$,所以 $\triangle ADB \cong \triangle ADG$(ASA),所以 $BD=DG$. 因为 $E$ 为边 $BC$ 的中点,所以 $DE$ 为 $\triangle CGB$ 的中位线,所以 $DE /\!/ CG$. 又因为 $CF=DE$,所以四边形 $CEDF$ 是平行四边形.

(2) **解**:$AB+2CF=AC$. 证明如下:由(1),得 $DE=CF$. 因为 $D$,$E$ 分别是 $BG$,$BC$ 的中点,所以 $CF=DE=\frac{1}{2}CG$. 因为 $\triangle ADB \cong \triangle ADG$,所以 $AB=AG$. 因为 $AG+CG=AC$,所以 $AB+2CF=AC$.

**【拓展提优】**

**1.** B　**提示**:因为 $A$,$B$ 为定点,$M$,$N$ 分别为 $PA$,$PB$ 的中点,所以 $MN$ 是 $\triangle PAB$ 的中位线,所以 $MN=\frac{1}{2}AB$,即线段 $MN$ 的长度不变,故①不符合题意;$PA$,$PB$ 的长度随点 $P$ 的移动而变化,所以 $\triangle PAB$ 的周长会随点 $P$ 的移动而变化,故②符合题意;因为 $MN$ 的长度不变,点 $P$ 到 $MN$ 的距离等于直线 $l$ 与 $AB$ 之间距离的一半,所以 $\triangle PMN$ 的面积不变,故③不符合题意;直线 $MN$,$AB$ 之间的距离不随点 $P$ 的移动而变化,故④不符合题意;$\angle APB$ 的大小随点 $P$ 的移动而变化,故⑤符合题意.

**2.** B　**提示**:连接 $DN$. 因为 $E$,$F$ 分别为 $DM$,$MN$ 的中点,所以 $EF=\frac{1}{2}DN$. 所以当 $DN$ 的值最大时,$EF$ 的值最大;当 $DN$ 的值最小时,$EF$ 的值最小. 因为当点 $N$ 与点 $B$ 重合时,$DN$ 的值最大,此时 $DN=DB=\sqrt{AD^2+AB^2}=13$,所以 $EF$ 的最大值为 6.5. 因为 $\angle A=90°$,$AD=5$,所以 $DN \geqslant 5$,所以 $EF \geqslant 2.5$. 所以 $2.5 \leqslant EF \leqslant 6.5$,所以线段 $EF$ 长度的可能值为 5.

**3.** $3\sqrt{2}+1$　**提示**:由作图可知,$EF$ 垂直平分 $CD$. 如图 1,取 $AC$ 的中点 $M$,连接 $PM$,$BM$. 因为 $\angle ACB=90°$,$BC=3$,$AC=6$,所以 $AM=CM=\frac{1}{2}AC=3$,所以 $BM=\sqrt{CM^2+BC^2}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$. 因为 $P$,$M$ 分别是 $CD$,$AC$ 的中点,所以 $PM=\frac{1}{2}AD=1$. 因为 $BP \leqslant BM+PM=3\sqrt{2}+1$,所以如图 2,当 $AD$ 在 $AC$ 的下方,且 $B$,$M$,$P$ 三点共线时,$BP$ 有最大值,最大值为 $BM+MP=3\sqrt{2}+1$.

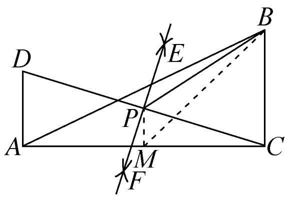



图 1

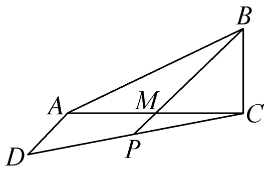



图 2

4. 13　**提示**：连接 $BD$，取 $BD$ 的中点 $F$，连接 $MF$，$NF$. 因为 $M,N,F$ 分别是 $AB,DE,BD$ 的中点，所以 $NF,MF$ 分别是 $\triangle BDE,\triangle ABD$ 的中位线，所以 $NF\parallel BE$，$MF\parallel AD$，$NF=\frac{1}{2}BE=5$，$MF=\frac{1}{2}AD=12$. 因为 $\angle ACB=90°$，所以 $AD\perp BC$，所以 $NF\perp MF$. 在 $Rt\triangle MFN$ 中，根据勾股定理，得 $MN=\sqrt{NF^2+MF^2}=13$.

5. **证明**：取 $BC$ 的中点 $O$，连接 $OM,ON$. 易得 $OM\parallel CE$ 且 $OM=\frac{1}{2}CE$，$ON\parallel BD$ 且 $ON=\frac{1}{2}BD$. 因为 $BD=CE$，所以 $ON=OM$，所以 $\angle ONM=\angle OMN$. 由 $\angle ONM=\angle APQ$，$\angle OMN=\angle AQP$，得 $\angle APQ=\angle AQP$，所以 $AP=AQ$.

## 课时训练 19　矩形的性质

**【基础巩固】**

1. D　2. B　3. A　4. C　5. C

6. $16+4\sqrt{3}$

7. $\frac{21}{8}$　**提示**：连接 $EC$. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $AO=OC$，$CD=AB=9$. 因为 $EO\perp AC$，所以 $OE$ 为线段 $AC$ 的垂直平分线，所以 $EC=AE$. 设 $ED=x$，则 $AE=EC=12-x$. 在 $Rt\triangle ECD$ 中，根据勾股定理，得 $EC^2=DE^2+DC^2$，即 $(12-x)^2=x^2+9^2$，解得 $x=\frac{21}{8}$. 所以 $ED=\frac{21}{8}$.

8. 6　**提示**：因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $AD\parallel BC$，$OA=OC$，所以 $\angle AEO=\angle CFO$. 在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COF$ 中，$\begin{cases}\angle AEO=\angle CFO,\\ \angle AOE=\angle COF,\\ OA=OC,\end{cases}$ 所以 $\triangle AOE\cong\triangle COF$(AAS)，所以 $S_{\triangle AOE}=S_{\triangle COF}$. 设阴影部分的面积为 $S$，所以 $S=S_{\triangle AOE}+S_{\triangle BOF}+S_{\triangle COD}=S_{\triangle COF}+S_{\triangle BOF}+S_{\triangle COD}=S_{\triangle BCD}$. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形，$AB=3$，所以 $CD=3$，所以 $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot CD=6$，所以 $S=6$.

9. $2\sqrt{2}$　**提示**：因为 $\angle ADC=90°$，$\angle CAD=30°$，$F$ 是 $AC$ 的中点，所以 $DF=AF=\frac{1}{2}AC=2$，所以 $\angle FDA=\angle CAD=30°$，所以 $\angle DFC=\angle FDA+\angle CAD=60°$. 因为 $E,F$ 分别是 $BC,AC$ 的中点，所以 $EF\parallel AB$，$EF=\frac{1}{2}AB=2$，所以 $\angle EFC=\angle CAB=30°$，所以 $\angle EFD=90°$，所以 $ED=\sqrt{DF^2+EF^2}=2\sqrt{2}$.

10. **解**：因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $AD\parallel BC$，所以 $\angle DAE=\angle AEB$. 因为 $AE$ 平分 $\angle BAD$，所以 $\angle DAE=\angle BAE=45°$，所以 $\angle BAE=\angle AEB$，所以 $AB=BE$. 因为 $\angle EAO=15°$，所以 $\angle BAO=60°$. 因为 $OA=OB$，所以 $\triangle AOB$ 是等边三角形，所以 $BO=AB=BE$，所以 $\angle BOE=\angle BEO$. 因为 $\angle ABE=90°$，$\angle ABO=60°$，所以 $\angle OBE=30°$. 在 $\triangle BOE$ 中，$\angle BOE=\frac{1}{2}(180°-\angle OBE)=75°$.

**【拓展提优】**

1. B

2. 7　**提示**：连接 $AC,AP,CP$. 根据题意，易求得 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=10$. 因为 $P$ 是线段 $EF$ 的中点，所以 $AP=\frac{1}{2}EF=3$. 易证四边形 $PGCH$ 是矩形，所以 $GH=CP$. 当 $A,P,C$ 三点共线时，$CP$ 的值最小，最小值为 $AC-AP=7$，所以 $GH$ 的最小值是 7.

3. $22.5°$　**提示**：取 $AB$ 的中点 $D$，连接 $OD,CD$. 因为 $\angle AOB=90°$，$AB=4$，所以 $OD=\frac{1}{2}AB=AD=2$. 因为 $\angle BAC=90°$，$AC=2$，所以 $\triangle ACD$ 是等腰直角三角形，所以 $\angle ADC=45°$，$CD=2\sqrt{2}$. 因为 $OC\leqslant OD+CD$，所以当 $O,D,C$ 三点共线时，$OC$ 的值最大. 因为 $AD=OD$，所以 $\angle BAO=\angle AOD=\frac{1}{2}\angle ADC=22.5°$.

4. ①②④　**提示**：由题意，得 $AF=FD=CD$，所以 $\angle DFC=\angle DCF$. 因为 $AD\parallel BC$，所以 $\angle DFC=\angle BCF$，所以 $\angle DCF=\angle BCF$，所以 $\angle DCF=\frac{1}{2}\angle BCD$，故①正确. 延长 $EF$ 交 $CD$ 的延长线于点 $M$. 因为 $AB\parallel CD$，所以 $\angle A=\angle MDF$. 易证 $\triangle AEF\cong\triangle DMF$，所以 $EF=MF$，$\angle AEF=\angle M$. 因为 $CE\perp AB$，所以 $\angle AEC=\angle ECD=90°$. 因为 $EF=MF$，所以 $CF=MF=EF$，故②正确. 由②，得 $EF=FM$，所以 $S_{\triangle CEF}=S_{\triangle CFM}$. 因为 $MC>BE$，所以 $S_{\triangle BEC}<2S_{\triangle CEF}$，故③错误. 设 $\angle FEC=x$，则

$\angle FCE=x$，所以 $\angle DCF=\angle DFC=90^\circ-x$，所以 $\angle EFC=180^\circ-2x$，所以 $\angle DFE=270^\circ-3x$. 因为 $\angle AEF=90^\circ-x$，所以 $\angle DFE=3\angle AEF$，故④正确.

**5. 解**：(1) 因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $\angle D=90^\circ$，$AD=BC=8$. 由折叠的性质可得，$AB=AQ=10$，所以 $DQ=\sqrt{AQ^2-AD^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$.

(2) 当 $DE=DB'$ 时，作 $DJ\perp EB'$ 于点 $J$，如图1，易得 $EJ=JB'$. 由折叠的性质可知，$\angle FEB'=\angle FEB$，$EB'=EB$. 因为 $DE\perp EF$，所以 $\angle BEF+\angle DEA=90^\circ$，$\angle FEB'+\angle DEB'=90^\circ$，所以 $\angle DEB'=\angle DEA$. 因为 $\angle A=\angle DJE=90^\circ$，$DE=DE$，所以 $\triangle DEA\cong\triangle DEJ$(AAS)，所以 $AE=EJ=JB'=\frac{1}{2}EB'$. 因为 $EB=EB'$，所以 $BE=2AE$. 因为 $AB=10$，所以 $AE=\frac{1}{3}AB=\frac{10}{3}$.

当 $DE=EB'$ 时，设 $BE=EB'=DE=x$，则 $AE=10-x$. 由勾股定理，得 $AD^2+AE^2=DE^2$，即 $x^2=8^2+(10-x)^2$，解得 $x=\frac{41}{5}$，所以 $AE=AB-BE=10-\frac{41}{5}=\frac{9}{5}=1.8$.

综上所述，$AE$ 的长为 $1.8$ 或 $\frac{10}{3}$.

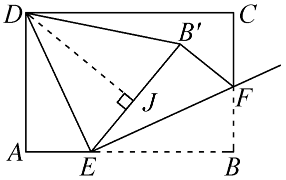


**图 1**

(3) $AM$ 的长为 4 或 16. **提示**：当点 $M$ 在线段 $AB$ 上时，如图 2，因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $AB\parallel CD$，所以 $\angle CDM=\angle AMD$. 因为 $\angle A'MD=\angle AMD$，所以 $\angle CDM=\angle CMD$，所以 $CD=CM=10$. 因为 $\angle CBM=90^\circ$，所以 $BM=\sqrt{CM^2-BC^2}=6$，所以 $AM=AB-BM=4$. 当点 $M$ 在 $AB$ 的延长线上时，如图 3，同理可得，$CD=CM=10$. 因为 $\angle CBM=90^\circ$，$CB=8$，所以 $BM=\sqrt{CM^2-CB^2}=6$，所以 $AM=AB+BM=10+6=16$. 综上所述，满足条件的 $AM$ 的长为 4 或 16.

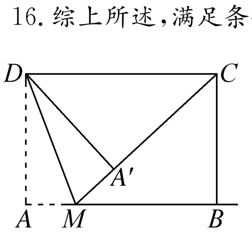


**图 2**

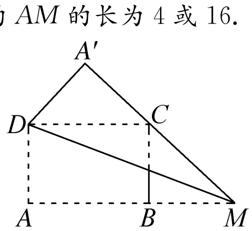


**图 3**

## 课时训练 20　矩形的判定

**【基础巩固】**

**1.** D　**2.** A　**3.** A

**4.** B　**提示**：易证四边形 $DBCE$ 是平行四边形，若 $AB=BE$，则由 $AB=CD$，得 $BE=CD$，故平行四边形 $DBCE$ 是矩形，故选项 A 不符合题意；若 $\angle ADB=90^\circ$，则 $\angle EDB=90^\circ$，故平行四边形 $DBCE$ 是矩形，故选项 C 不符合题意；同理可得，选项 D 不符合题意.

**5.** 矩形　对角线互相平分且相等的四边形是矩形

**6.** 6

**7.** 12　**提示**：因为 $E$，$F$ 分别为 $AD$，$AB$ 的中点，所以 $EF\parallel BD$，且 $EF=\frac{1}{2}BD=3$. 同理可得，$GH\parallel BD$，且 $GH=\frac{1}{2}BD=3$，$EH\parallel AC\parallel GF$，且 $EH=GF=\frac{1}{2}AC=4$，所以四边形 $EFGH$ 为平行四边形. 又因为 $AC\perp BD$，所以 $EF\perp FG$，所以四边形 $EFGH$ 是矩形，所以四边形 $EFGH$ 的面积为 $EF\cdot EH=12$.

**8.** ①②⑥，①③⑥，①②⑤，①③⑤，②④⑤，②④⑥，③④⑤，③④⑥(答案不唯一，只要写出一组即可)

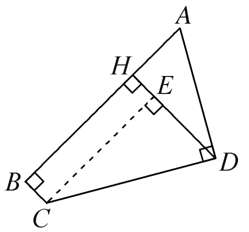
**9.** (1) **证明**：因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AB=CD$，$AB\parallel CD$，$OB=OD$，$OA=OC$，所以 $\angle ABE=\angle CDF$. 因为 $E$，$F$ 分别为 $OB$，$OD$ 的中点，所以 $BE=\frac{1}{2}OB$，$DF=\frac{1}{2}OD$，所以 $BE=DF$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中，$\begin{cases}AB=CD,\\ \angle ABE=\angle CDF,\\ BE=DF,\end{cases}$ 所以 $\triangle ABE\cong\triangle CDF$(SAS).

(2) **解**：当 $AC=2AB$ 时，四边形 $EGCF$ 是矩形. 理由如下：

因为 $AC=2OA$，$AC=2AB$，所以 $AB=OA$. 因为 $E$ 是 $OB$ 的中点，所以 $AG\perp OB$，所以 $\angle OEG=90^\circ$. 同理，$CF\perp OD$，所以 $EG\parallel CF$. 因为 $EG=AE$，$OA=OC$，所以 $OE$ 是 $\triangle ACG$ 的中位线，所以 $OE\parallel CG$，所以 $EF\parallel CG$，所以四边形 $EGCF$ 是平行四边形. 又因为 $\angle OEG=90^\circ$，所以四边形 $EGCF$ 是矩形.

【拓展提优】

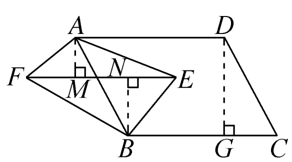
1. A　提示：如图，过点 $C$ 作 $CE\perp DH$ 交 $DH$ 于点 $E$. 易证四边形 $BCEH$ 是矩形，所以 $HE=BC=2$. 在 $Rt\triangle AHD$ 中，$\angle A=60^\circ$，所以 $\angle ADH=30^\circ$. 又因为 $\angle ADC=90^\circ$，所以 $\angle CDE=60^\circ$，所以 $\angle DCE=30^\circ$，所以在 $Rt\triangle CED$ 中，$DE=\frac{1}{2}CD=5.5$. 所以 $DH=7.5$.




2. A　提示：在 $Rt\triangle ABC$ 中，易求得 $BC=13$. 易证四边形 $AEPF$ 是矩形. 因为 $M$ 是 $EF$ 的中点，所以 $AM$ 的延长线经过点 $P$，所以 $EF=PA$，$AM=\frac{1}{2}EF=\frac{1}{2}PA$. 当 $PA\perp BC$ 时，$PA$ 的值最小，由等积法可知，$PA=\frac{AB\cdot AC}{BC}=\frac{60}{13}$，所以 $AM$ 的最小值为 $\frac{30}{13}$. 因为 $PA<AC$，$AC>AB$，所以 $PA<12$，所以 $AM<6$. 所以 $\frac{30}{13}\leqslant AM<6$.

3. 60　提示：设矩形相邻的两边长分别为 $a$，$b$. 根据题意，得 $a+b=17$，$a^2+b^2=13^2$，从而 $ab=\frac{1}{2}[(a+b)^2-(a^2+b^2)]=60$.

4. $90^\circ$　$3\sqrt{3}$　提示：如图，分别过点 $A$，$B$ 作 $AM\perp EF$ 于点 $M$，$BN\perp EF$ 于点 $N$，过点 $D$ 作 $DG\perp BC$ 于点 $G$. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以当 $\angle BCD=90^\circ$ 时，四边形 $ABCD$ 是矩形. 由平移可知，$EF=BC=4$. 因为 $S_{四边形AEBF}=S_{\triangle AEF}+S_{\triangle BEF}$，即 $S_{四边形AEBF}=\frac{1}{2}EF\cdot AM+\frac{1}{2}EF\cdot BN=\frac{1}{2}EF\cdot DG=2DG$，所以当 $DG$ 取最小值时，四边形 $AEBF$ 的面积最小. 因为 $60^\circ\leqslant\alpha\leqslant90^\circ$，所以当 $\angle BCD=60^\circ$ 时，$DG$ 的值最小，此时四边形 $AEBF$ 的面积有最小值. 易得 $\angle CDG=30^\circ$，所以 $CG=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}AB=\frac{3}{2}$，所以 $DG=\sqrt{CD^2-CG^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 即最小值为 $S_{四边形AEBF}=2DG=3\sqrt{3}$.




5. 解：(1) 四边形 $ABCD$ 是矩形，证明如下：在 $\triangle ABC$ 中，$AB=2$，$BC=4$，$AC=2\sqrt{5}$，所以 $AB^2+BC^2=AC^2$，所以 $\angle B=90^\circ$. 由平移可知，$AB=CD$，$AB/\!/CD$，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 又因为 $\angle B=90^\circ$，所以四边形 $ABCD$ 是矩形.

(2) 因为 $AF$ 平分 $\angle DAE$，所以 $\angle DAF=\angle FAE$. 如图1，在线段 $AD$ 上取一点 $G$，使 $AG=AE$. 因为 $AF=AF$，所以 $\triangle AFE\cong\triangle AFG$(SAS)，所以 $\angle AFE=\angle AFG=45^\circ$，$EF=GF$，所以 $\angle EFG=90^\circ$. 因为 $\angle DFG+\angle DGF=90^\circ$，$\angle GFD+\angle CFE=90^\circ$，所以 $\angle DGF=\angle CFE$. 因为 $\angle D=\angle C=90^\circ$，$EF=GF$，所以 $\triangle ECF\cong\triangle FDG$(AAS)，所以 $CE=DF$，$CF=DG$. 设 $EC=FD=x$，则 $CF=DG=CD-x=2-x$，$BE=BC-x=4-x$. 又因为 $AE^2=BE^2+AB^2=(4-x)^2+2^2=AG^2$，而 $AG^2=(AD-GD)^2=(4-2+x)^2$，所以 $(4-2+x)^2=(4-x)^2+2^2$，解得 $x=\frac{4}{3}$，所以 $CE$ 的长为 $\frac{4}{3}$.

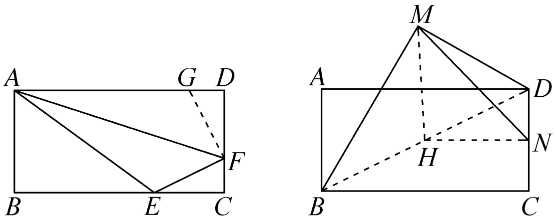



图 1　　图 2

(3) $\sqrt{5}-2\leqslant MN\leqslant\sqrt{5}+2$　提示：如图2，连接 $BD$，取 $BD$ 的中点 $H$，连接 $MH$，$NH$. 因为 $BC=4$，$BD=AC=2\sqrt{5}$，$H$ 是 $BD$ 的中点，$N$ 是 $CD$ 的中点，所以 $NH=\frac{1}{2}BC=2$，$HM=\frac{1}{2}BD=\sqrt{5}$，故 $MN$ 的取值范围为 $\sqrt{5}-2\leqslant MN\leqslant\sqrt{5}+2$.

## 课时训练 21　菱形的性质

【基础巩固】

1. A　2. B　3. C　4. C　5. 6

6. 16　提示：连接 $BD$ 交 $AC$ 于点 $O$. 根据题意，易得 $AC\perp BD$，$AO=CO=15$，$OB=OD$. 因为 $E$，$F$ 分别是边 $CD$，$BC$ 的中点，所以 $EF/\!/BD$，所以 $EG/\!/BD$. 又因为 $AB/\!/CD$，所以 $DE/\!/BG$. 所以四边形 $BDEG$ 是平行四边形，所以 $BD=EG$. 在 $\triangle COD$ 中，因为 $OC\perp OD$，$CD=17$，$CO=15$，所以 $OB=OD=\sqrt{CD^2-CO^2}=8$，所以 $EG=BD=2OB=16$.

**7.** (1) **证明**:因为四边形 $AECF$ 是菱形,所以 $AD\parallel BC$. 因为 $CD\parallel AB$,所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 因为 $AB\perp BC$,所以 $\angle B=90°$,所以四边形 $ABCD$ 是矩形.

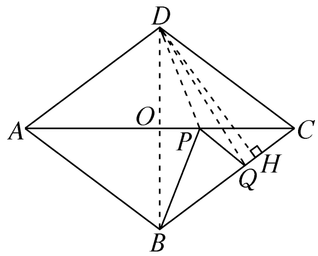
(2) **解**:设 $BF=x$. 因为四边形 $AECF$ 是菱形,$AB=4$,$BC=8$,所以 $AF=FC=8-x$. 在 $Rt\triangle ABF$ 中,$AB^2+BF^2=AF^2$,即 $4^2+x^2=(8-x)^2$,解得 $x=3$,所以 $FC=5$. 所以 $S_{菱形AECF}=FC\cdot AB=5\times4=20$.

**8.** (1) **证明**:连接 $AC$. 因为 $BD$ 是菱形 $ABCD$ 的对角线,所以 $BD$ 垂直平分 $AC$,所以 $AE=EC$.

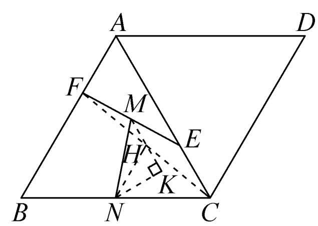
(2) **解**:$F$ 是线段 $BC$ 的中点. 理由如下:
因为四边形 $ABCD$ 是菱形,所以 $AB=CB$. 因为 $\angle ABC=60°$,所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形,所以 $\angle BAC=60°$. 因为 $AE=EC$,所以 $\angle EAC=\angle ACE$. 因为 $\angle CEF=60°$,所以 $\angle EAC=30°$,所以 $AF$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线. 又因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形,所以 $BF=CF$,即 $F$ 是线段 $BC$ 的中点.

**【拓展提优】**

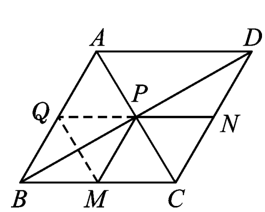
**1.** A **提示**:因为四边形 $ABCD$ 是菱形,$\angle DAB=\alpha$,所以 $\angle BAC=\angle BCA=\frac{1}{2}\alpha$. 因为 $PB=PC$,所以 $\angle PBC=\angle BCP=\frac{1}{2}\alpha$,所以 $\angle APB=\angle PBC+\angle BCP=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\alpha=\alpha$,所以 $\angle ABP=180°-\angle APB-\angle BAP=180°-\alpha-\frac{1}{2}\alpha=180°-\frac{3}{2}\alpha$,故①正确. 如图,连接 $BD$ 交 $AC$ 于点 $O$,连接 $DP$,$DQ$,过点 $D$ 作 $DH\perp BC$ 于点 $H$. 因为四边形 $ABCD$ 为菱形,所以点 $B$ 和点 $D$ 关于对角线 $AC$ 对称,$AO=\frac{1}{2}AC=4$,$AC\perp BD$,$DO=\frac{1}{2}BD$,$BC=AD=5$,所以 $BP=DP$,所以 $BP+PQ=DP+PQ\geqslant DQ$. 因为 $DO=\sqrt{AD^2-AO^2}=3$,所以 $BD=2DO=6$,所以当点 $D$,$P$,$Q$ 在同一直线上,且 $DQ\perp BC$ 时,$BP+PQ$ 的值最小,最小值为 $DH$ 的长. 因为 $S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=BC\cdot DH$,所以 $DH=\frac{\frac{1}{2}\times8\times6}{5}=\frac{24}{5}$,所以 $PB+PQ$ 的最小值为 $\frac{24}{5}$,故②错误.




**2.** B **提示**:如图,连接 $CF$,取 $CF$ 的中点 $H$,连接 $MH$,$NH$,过点 $N$ 作 $NK\perp MH$ 于点 $K$. 因为四边形 $ABCD$ 是菱形,$\angle B=60°$,所以 $AB=BC$,所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形,所以 $\angle ACB=60°=\angle BAC$. 因为 $M$,$N$ 分别为线段 $EF$,$BC$ 的中点,$H$ 是 $CF$ 的中点,$BF=4$,$CE=2$,所以 $MH\parallel CE$,且 $MH=\frac{1}{2}CE=1$,$NH\parallel BF$,且 $NH=\frac{1}{2}BF=2$,所以 $\angle ACF=\angle FHM$,$\angle BFH+\angle FHN=180°$,所以 $\angle FHN=180°-\angle BFH=180°-(60°+\angle ACF)=120°-\angle ACF$,所以 $\angle MHN=\angle FHN+\angle FHM=\angle FHN+\angle ACF=120°$,所以 $\angle NHK=60°$. 因为 $NK\perp MH$,所以 $\angle HNK=30°$,所以 $HK=\frac{1}{2}HN=1$,所以 $NK=\sqrt{NH^2-HK^2}=\sqrt{3}$. 所以 $MK=MH+KH=2$,所以 $MN=\sqrt{MK^2+NK^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+3}=\sqrt{7}$.

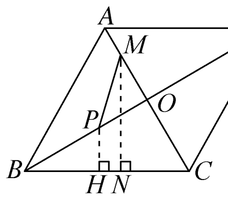



**3.** 5 **提示**:如图,作点 $M$ 关于 $BD$ 的对称点 $Q$,连接 $NQ$ 交 $BD$ 于点 $P$,连接 $MP$,此时 $MP+NP$ 的值最小. 因为四边形 $ABCD$ 是菱形,所以 $AC\perp BD$,$\angle QBP=\angle MBP$,即点 $Q$ 在 $AB$ 上,且 $BQ=BM=\frac{1}{2}AB$,即 $Q$ 为 $AB$ 的中点. 又因为 $N$ 为 $CD$ 的中点,四边形 $ABCD$ 是菱形,所以 $BQ\parallel CD$,$BQ=CN$,所以四边形 $BQNC$ 是平行四边形,所以 $NQ=BC$. 因为四边形 $ABCD$ 是菱形,所以 $CP=AP=3$,$BP=PD=4$. 在 $Rt\triangle BPC$ 中,根据勾股定理,得 $BC=5$,即 $NQ=5$,所以 $PM+PN=QP+NP=NQ=5$.




**4.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ **提示**:如图,过点 $P$ 作 $PH\perp BC$ 于点 $H$,过点 $M$ 作 $MN\perp BC$ 于点 $N$. 因为四边形 $ABCD$ 为菱形,所以 $AB=BC$,$BO$ 平分 $\angle ABC$,$AO\perp BD$. 又因为 $AB=AC=6$,所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形,所以 $\angle ABC=\angle ACB=60°$,所以 $\angle OBC=\frac{1}{2}\angle ABC=30°$,所以 $PH=\frac{1}{2}BP$,所以 $MP+\frac{1}{2}PB=MP+$

$PH$，当 $M,P,H$ 三点共线时，$MP+PH$ 的值最小，即 $MP+PH$ 的最小值为 $MN$ 的长. 因为 $AM=1$，所以 $CM=AC-AM=5$. 在 Rt$\triangle MNC$ 中，因为 $\angle MCN=60^\circ$，所以 $\angle CMN=30^\circ$，所以 $CN=\frac{1}{2}CM=\frac{5}{2}$，所以 $MN=\sqrt{MC^2-CN^2}=\sqrt{5^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$，即 $MP+\frac{1}{2}PB$ 的最小值为 $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.




**5. 解：**(1) 由题意可知，$OA=4$，$BC=6$. 若点 $P$ 在点 $A$ 的左侧，四边形 $PABQ$ 为平行四边形，则 $PA=QB$，由题意，得 $4-2t=t$，解得 $t=\frac{4}{3}$. 若点 $P$ 在点 $A$ 的右侧，四边形 $PAQB$ 为平行四边形，则 $PA=QB$，所以 $2t-4=t$，解得 $t=4$. 综上所述，当 $t=\frac{4}{3}$ 或 4 时，以 $A,B,P,Q$ 为顶点的四边形为平行四边形.

(2) 存在，点 $N$ 的坐标为 $(-5,3)$ 或 $(5,3)$ 或 $(0,-3)$ 或 $\left(\frac{25}{8},3\right)$.

**提示：**因为点 $A(4,0)$，$C(0,3)$，所以 $AO=4$，$OC=3$，所以 $AC=\sqrt{OA^2+OC^2}=5$. 如图 1，以 $AC$ 为边，四边形 $ACMN$ 是菱形，因为点 $C(0,3)$，所以点 $N(0,-3)$；如图 2，以 $AC$ 为边，四边形 $ACNM$ 是菱形，因为 $CN=AC=5$，$CN/\!/AM$，所以点 $N(5,3)$；如图 3，以 $AC$ 为边，四边形 $ACNM$ 是菱形，因为 $CN=AC=5$，$CN/\!/AM$，所以点 $N(-5,3)$；如图 4，以 $AC$ 为对角线，四边形 $AMCN$ 是菱形，设 $CM=AM=CN=x$，则 $OM=4-x$，因为 $OC^2+OM^2=CM^2$，所以 $3^2+(4-x)^2=x^2$，解得 $x=\frac{25}{8}$，所以 $CN=\frac{25}{8}$，所以点 $N\left(\frac{25}{8},3\right)$. 综上所述，当以 $A,C,M,N$ 为顶点的四边形是菱形时，点 $N$ 的坐标为 $(-5,3)$ 或 $(5,3)$ 或 $(0,-3)$ 或 $\left(\frac{25}{8},3\right)$.

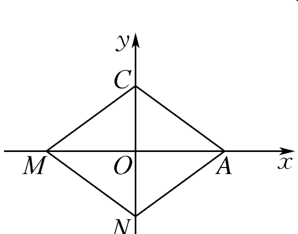



**图 1**

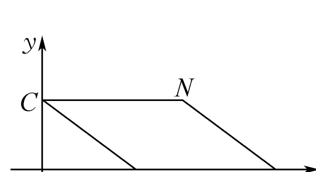



**图 2**

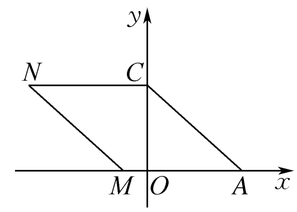



**图 3**

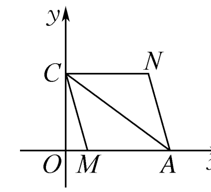



**图 4**

## 课时训练 22　菱形的判定

**【基础巩固】**

**1.** B　**2.** C

**3.** $AB=CD$　**4.** ③　**5.** 菱形

**6.** (1) **证明：**因为 $D,E$ 分别是 $AB,AC$ 的中点，所以 $DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线，所以 $DE/\!/BC$. 又因为 $EF/\!/AB$，所以四边形 $DBFE$ 是平行四边形.

(2) **解：**当 $AB=BC$ 时，四边形 $DBFE$ 是菱形. 理由如下：

因为 $D$ 是 $AB$ 的中点，所以 $BD=\frac{1}{2}AB$. 因为 $DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线，所以 $DE=\frac{1}{2}BC$. 因为 $AB=BC$，所以 $BD=DE$. 又因为四边形 $DBFE$ 是平行四边形，所以四边形 $DBFE$ 是菱形.

**7.** (1) **证明：**因为 $BD/\!/AG$，$BD=FG$，所以四边形 $BGFD$ 是平行四边形. 因为 $CF\perp BD$，所以 $CF\perp AG$. 又因为 $D$ 是 $AC$ 的中点，$\angle ABC=90^\circ$，所以 $BD=DF=\frac{1}{2}AC$. 所以四边形 $BGFD$ 是菱形.

(2) **解：**设 $BG=GF=BD=x$，则 $AF=13-x$，$AC=2BD=2x$. 在 Rt$\triangle ACF$ 中，由勾股定理，得 $AF^2+CF^2=AC^2$，即 $(13-x)^2+6^2=(2x)^2$，解得 $x=5$(负值舍去). 所以 $BG=5$.

**【拓展提优】**

**1.** C　**提示：**能使四边形 $ABCD$ 是菱形的选法有①②③，①③⑤，③④⑤，②③④.

**2.** C　**提示：**当点 $P$ 从点 $D$ 开始运动到如题图位置时，四边形 $PEQF$ 是平行四边形，理由如下：因为 $O$ 为 $AC$ 的中点，所以 $OA=OC$. 因为 $AE=CF$，所以 $OE=OF$. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $AB/\!/CD$，$\angle B=90^\circ$，所以 $\angle PAO=\angle QCO$，$\angle APO=\angle CQO$，所以 $\triangle APO\cong\triangle CQO$(AAS)，所以 $OP=$

$OQ$. 因为 $AB=6$,$BC=8$,所以 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=10$,所以 $OA=OC=5$. 因为 $AE=CF=2$,所以 $OE=OF=5-2=3$,所以四边形 $PEQF$ 是平行四边形. 当点 $P$ 运动到 $PQ\perp EF$ 时,如图 1 所示,因为四边形 $PEQF$ 是平行四边形,所以四边形 $PEQF$ 是菱形. 当点 $P$ 运动到未达到 $AD$ 的中点 $M$ 时,如图 2 所示,此时四边形 $PEQF$ 是平行四边形. 当点 $P$ 运动到 $AD$ 的中点 $M$ 时,点 $Q$ 恰好运动到 $BC$ 的中点,此时 $PQ=AB=EF=6$,如图 3 所示,所以四边形 $PEQF$ 是矩形. 当点 $P$ 运动到过点 $M$ 且未到点 $A$ 时,如图 4 所示,四边形 $PEQF$ 是平行四边形. 综上所述,在点 $P$ 从点 $D$ 运动到点 $A$ 的整个过程中,四边形 $PEQF$ 的形状变化依次是平行四边形→菱形→平行四边形→矩形→平行四边形.

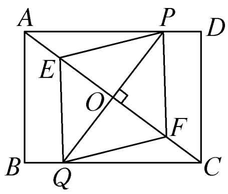



**图 1**

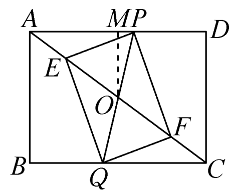



**图 2**

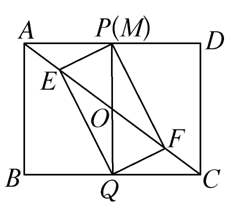



**图 3**

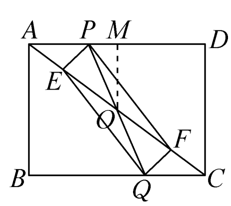
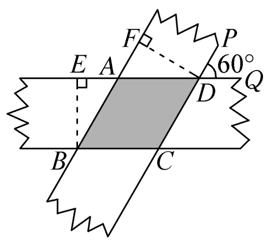



**图 4**

**3.** $24\sqrt{3}$ **提示**:如图,作 $BE\perp DA$ 交 $DA$ 的延长线于点 $E$,$DF\perp BA$ 交 $BA$ 的延长线于点 $F$. 由题意可知,$AB/\!/CD$,$AD/\!/CB$,$BE=DF=9$ cm,所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 因为 $S_{\square ABCD}=\frac{1}{2}AD\cdot BE=\frac{1}{2}AB\cdot DF$,所以 $AD=AB$,所以四边形 $ABCD$ 是菱形,所以 $AD=AB=CB=CD$. 因为 $\angle AFD=90^\circ$,$\angle FAD=\angle PDQ=60^\circ$,所以 $\angle ADF=90^\circ-\angle FAD=30^\circ$,所以 $AF=\frac{1}{2}AD$. 因为 $DF=\sqrt{AD^2-AF^2}=\sqrt{AD^2-\left(\frac{1}{2}AD\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}AD=9$ cm,所以 $AD=6\sqrt{3}$ cm,所以 $AD+AB+CB+CD=4AD=24\sqrt{3}$ cm,即四边形 $ABCD$ 的周长为 $24\sqrt{3}$ cm.




**4. 解:【概念理解】**A

(1) $DE=EF$ **提示**:由题意可知,$DE=\frac{1}{2}AC$,$EF=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}AC$,所以 $DE=EF$.

(2) 四边形 $CDEF$ 为菱形,理由如下:

由(1),得 $DE=EF$. 因为 $E$ 是 $AC$ 的中点,$F$ 是 $BC$ 的中点,所以 $EF/\!/AB$. 因为 $CD/\!/AB$,所以 $CD/\!/EF$,所以 $\angle DCE=\angle FEC$. 因为 $AC$ 平分 $\angle BCD$,所以 $\angle DCE=\angle FCE$,所以 $\angle FCE=\angle FEC$,所以 $CF=EF$. 因为 $AB=AC$,所以 $\angle ABC=\angle ACB$,所以 $\angle ECF=\angle EFC$,易得 $\triangle ECF$ 为等边三角形,所以 $\angle ECF=60^\circ$,所以 $\angle DCA=60^\circ$,易得 $CD=DE=\frac{1}{2}AC$,所以 $CD=DE=EF=CF$,所以四边形 $CDEF$ 为菱形.

(3) 连接 $AF$. 因为 $AB=AC$,$F$ 是 $BC$ 的中点,所以 $AF\perp BC$,$CF=BF=\frac{1}{2}BC=3$. 因为 $E$ 为 $AC$ 的中点,所以 $EF=\frac{1}{2}AB=\frac{5}{2}$. 因为 $\triangle DEF$ 是以 $EF$ 为直角边的等腰直角三角形,且 $\angle DEF=90^\circ$,所以 $EF=DE=\frac{5}{2}$,所以 $S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}DE\cdot EF=\frac{25}{8}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AFC$ 中,由勾股定理,得 $AF=\sqrt{AC^2-CF^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$,所以 $S_{\triangle CEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ACF}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}CF\cdot AF=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times3\times4=3$. 如图 1,以 $C$,$D$,$E$,$F$ 为顶点的四边形的面积为 $S_{\text{四边形}CEDF}=S_{\triangle CEF}+S_{\triangle DEF}=3+\frac{25}{8}=\frac{49}{8}$. 如图 2,过点 $D$ 作 $DG\perp AC$ 于点 $G$,过点 $F$ 作 $FH\perp AC$ 于点 $H$,易证 $\triangle DEG\cong\triangle EFH$. 由 $S_{\triangle CEF}=\frac{1}{2}CE\cdot FH=3$,得 $FH=\frac{12}{5}$,即 $EG=\frac{12}{5}$. 所以 $DG=\sqrt{DE^2-EG^2}=\frac{7}{10}$,所以 $S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}CE\cdot DG=\frac{7}{8}$,所以以 $C$,$D$,$E$,$F$ 为顶点的四边形的面积为 $S_{\triangle\text{四边形}CEDF}=S_{\triangle CEF}+S_{\triangle CDE}=$

$3+\frac{7}{8}=\frac{31}{8}$.

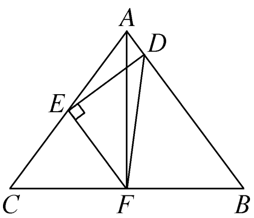



图 1

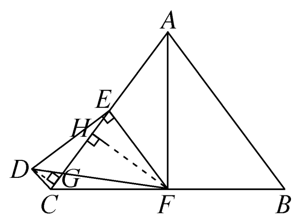


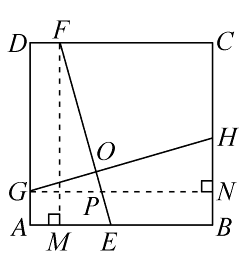

图 2

## 课时训练 23　正方形的性质

**【基础巩固】**

**1.** D

**2.** A　**提示**:如图,过点 $F$ 作 $FM\perp AB$ 于点 $M$,过点 $G$ 作 $GN\perp BC$ 于点 $N$,设 $GN$ 与 $EF$ 交于点 $P$,所以$\angle GNH=\angle FME=90°$. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以 $GN=FM$. 又因为 $AB\perp BC$,所以 $GN/\!/AB$,所以 $FM\perp GN$,所以$\angle EFM+\angle FPG=90°$. 因为$\angle FOH=90°$,所以 $EF\perp GH$,所以$\angle HGN+\angle FPG=90°$,所以$\angle HGN=\angle EFM$. 在$\triangle HGN$ 和$\triangle EFM$ 中,$\begin{cases}\angle GNH=\angle FME=90°,\\ GN=FM,\\ \angle HGN=\angle EFM,\end{cases}$ 所以$\triangle HGN\cong\triangle EFM$(ASA),所以 $GH=EF=4$.




**3.** D

**4.** 22.5°　**5.** 30°

**6.** 6　**提示**:过点 $F$ 作 $FH\perp NA$ 交 $NA$ 的延长线于点 $H$. 根据题意,得 $AN=AC=4$,$AB=AF$,$\angle ACB=\angle BAF=90°$,所以$\angle CAB+\angle BAH=\angle BAH+\angle HAF=90°$,所以$\angle CAB=\angle HAF$. 易证$\triangle ACB\cong\triangle AHF$,所以 $FH=BC=3$. 所以 $S_{\triangle ANF}=\frac{1}{2}NA\cdot FH=6$.

**7.** **证明**:(1) 在正方形 $ABCD$ 与正方形 $CEFH$ 中,$BC=DC$,$CH=CE$,$\angle BCD=\angle ECH=90°$,所以$\angle BCD+\angle DCH=\angle ECH+\angle DCH$,即$\angle BCH=\angle DCE$,所以$\triangle BCH\cong\triangle DCE$(SAS),所以 $BH=DE$.

(2) 设 $BH$ 与 $DC$ 的交点为 $P$. 由(1),得$\angle CBH=\angle CDE$,即$\angle PBC=\angle PDM$. 又因为$\angle PBC+\angle BPC+\angle BCP=\angle PDM+\angle DPM+\angle PMD=180°$,$\angle BPC=\angle DPM$,所以$\angle PMD=\angle BCP=90°$,所以 $BH\perp DE$.

**8.** (1) **证明**:因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以 $AD=CD$,$\angle ADE=\angle CDE$. 又因为 $DE=DE$,所以$\triangle ADE\cong\triangle CDE$(SAS).

(2) **解**:$EC\perp PC$,理由如下:

如图 1,因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以 $AD/\!/BC$,$\angle BCD=\angle DCF=\angle 5+\angle 4=90°$,所以$\angle 1=\angle 3$. 因为 $P$ 是 $MF$ 的中点,所以 $PC=PF$,所以$\angle 4=\angle 3$,所以$\angle 4=\angle 1$,所以$\angle 5+\angle 1=90°$. 因为$\triangle ADE\cong\triangle CDE$,所以$\angle 1=\angle 2$,所以$\angle 5+\angle 2=90°$,即$\angle ECP=90°$,所以 $EC\perp PC$.

(3) **解**:如图 2,连接 $DF$. 因为 $P$ 是 $MF$ 的中点,$N$ 是 $DM$ 的中点,所以 $PN$ 是$\triangle MDF$ 的中位线. 因为 $PN=2$,所以 $DF=2NP=4$. 所以在 Rt$\triangle DCF$ 中,$CF=\sqrt{DF^2-CD^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$.

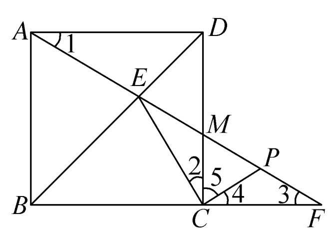



图 1

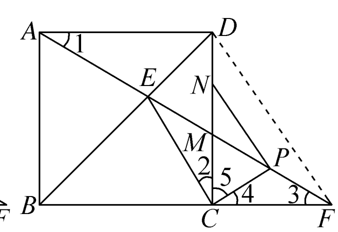



图 2

**【拓展提优】**

**1.** A

**2.** $\frac{n-1}{4}$ cm$^2$　**提示**:由题意可得,2 个正方形重叠部分的面积等于 1 个正方形面积的$\frac{1}{4}$,即是$\frac{1}{4}$ cm$^2$;5 个这样的正方形重叠部分的面积和为$\frac{1}{4}\times 4=1$(cm$^2$);$n$ 个这样的正方形重叠部分的面积和为$\frac{1}{4}\times(n-1)=\frac{n-1}{4}$ (cm$^2$).

**3.** 1　**提示**:连接 $AO$. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以 $AB=AD=\sqrt{2}$,所以 $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=2$,$\angle DAB=90°$. 又因为 $OM\perp AD$,$ON\perp AB$,所以四边形 $AMON$ 是矩形,所以 $AO=MN$. 当 $AO\perp BD$ 时,$AO$ 有最小值,此时,$MN$ 有最小值,且 $AO=\frac{1}{2}BD=1$,所以 $MN$ 长的最小值为 1.

**4.** (1) **证明**:因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所

以$\angle ABM+\angle FBC=90°$，$\angle ABP=\angle C$，$AB=BC$. 因为$BF\perp AP$，所以$\angle ABM+\angle BAP=90°$，所以$\angle BAP=\angle FBC$，所以$\triangle ABP\cong\triangle BCF$(ASA)，所以$AP=BF$.

(2) ①$EM+NF=MN$，理由如下：

由平移，得$EF=BF=PA$，如图1，连接$AN$，$PN$. 因为$M$为$AP$的中点，$EF\perp AP$，所以$AN=PN$. 过点$N$作$NH\perp AB$于点$H$，$NI\perp BC$于点$I$，易得$NH=NI$，$\angle AHN=\angle PIN=90°$，所以$\triangle ANH\cong\triangle PNI$(HL)，所以$\angle ANH=\angle PNI$，所以$\angle ANP=\angle HNI=90°$. 因为$M$为$AP$的中点，所以$MN=\frac{1}{2}AP=\frac{1}{2}EF$. 又因为$EM+NF=EF-MN=\frac{1}{2}EF$，所以$EM+NF=MN$.

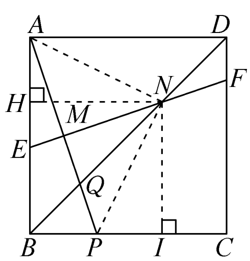



图1

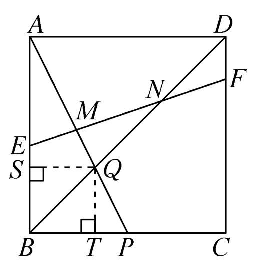



图2

②$\frac{4\sqrt{2}}{3}$ 提示：如图2，过点$Q$分别作$AB$，$BC$的垂线，垂足分别为$S$，$T$. 因为$BD$是正方形$ABCD$的对角线，所以$BD$平分$\angle ABC$，所以$QS=QT$，所以$\frac{S_{\triangle ABQ}}{S_{\triangle BPQ}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot SQ}{\frac{1}{2}BP\cdot QT}=\frac{AB}{BP}=2$，所以$\frac{AQ}{PQ}=\frac{S_{\triangle ABQ}}{S_{\triangle BPQ}}=2$. 因为正方形的边长为4，且$P$为$BC$的中点，所以$BP=\frac{1}{2}BC=2$，所以$S_{\triangle ABQ}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABP}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}AB\cdot BP=\frac{8}{3}$. 又因为$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD=8$，所以$\frac{S_{\triangle ABQ}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{BQ}{BD}=\frac{\frac{8}{3}}{8}=\frac{1}{3}$，所以$BQ=\frac{1}{3}BD=\frac{1}{3}\sqrt{AB^2+AD^2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

## 课时训练 24　正方形的判定

**【基础巩固】**

**1.** B

**2.** B　**提示**：因为$DE/\!/AC$，$DF/\!/AB$，所以四边形$AEDF$是平行四边形. 因为$\angle A=90°$，所以平行四边形$AEDF$是矩形. 所以在点$D$的运动过程中，四边形$AEDF$始终是矩形，当$AE=AF$时，矩形$AEDF$是正方形，所以四边形$AEDF$形状的变化依次为矩形→正方形→矩形.

**3.** $45°$　**4.** 正方形　**5.** $AC=BC$

**6.** 互相垂直且相等

**7.** **证明**：(1) 因为$AD=CD$，$E$是边$AC$的中点，所以$DE\perp AC$，即$DE$垂直平分线段$AC$，所以$FA=FC$，所以$\angle FAC=\angle ACB$. 在Rt$\triangle ABC$中，由$\angle BAC=90°$，得$\angle B+\angle ACB=90°$，$\angle FAC+\angle BAF=90°$，所以$\angle B=\angle BAF$，所以$AF=BF$.

(2) 因为$AG/\!/CF$，所以$\angle AGE=\angle CFE$. 又因为$E$是边$AC$的中点，所以$AE=CE$. 又因为$\angle AEG=\angle CEF$，所以$\triangle AEG\cong\triangle CEF$，所以$AG=CF$. 又因为$AG/\!/CF$，所以四边形$AFCG$是平行四边形. 又因为$AF=CF$，所以四边形$AFCG$是菱形. 在Rt$\triangle ABC$中，因为$AF=CF$，$AF=BF$，所以$BF=CF$. 又因为$AB=AC$，所以$AF\perp BC$，即$\angle AFC=90°$，所以四边形$AFCG$是正方形.

**【拓展提优】**

**1.** B　**提示**：因为$AD/\!/BC$，所以当$PD=CQ$时，四边形$PQCD$为平行四边形，所以$15-t=2t$，所以$t=5$，故选项A不符合题意. 由选项A可知，当$t=5$时，四边形$PQCD$为平行四边形，所以当$PD=CD$时，四边形$PQCD$为菱形，作$DH\perp BC$于点$H$，则四边形$ABHD$是矩形，所以$BH=AD=15$ cm，$DH=AB=8$ cm，所以$CH=BC-BH=6$ cm，所以$CD=\sqrt{CH^2+DH^2}=10$ cm，所以$15-t=10$，所以$t=5$，故选项B符合题意. 因为$\angle B=90°$，$AD/\!/BC$，所以当$AP=BQ$时，四边形$ABQP$为矩形，所以$t=21-2t$，所以$t=7$，故选项C不符合题意. 因为当$t=8$时，$AP=8$ cm，$BQ=BC-2t=5$ cm，因为$AP\neq BQ$，所以四边形$ABQP$不可能为正方形，故选项D不符合题意.

**2.** D　**提示**：在▱$ABCD$中，$AB/\!/CD$，所以$\angle BAC=\angle ACD$. 因为$O$是$AC$的中点，所以$AO=CO$. 又因为$\angle AOM=\angle CON$，所以$\triangle AOM\cong\triangle CON$，所以$AM=CN$. 因为$AM/\!/CN$，所以四边形$AMCN$为平行四边形，故选项A正确，不符合题意. 因为$AC\perp BC$，$AC=6$，$BC=8$，所以$AB=\sqrt{BC^2+AC^2}=10$，所以

当 $AM=5$ 时，$M$ 为 $AB$ 的中点，所以 $CM=\frac{1}{2}AB=5$，所以 $AM=CM$，即▱$AMCN$ 是菱形，故选项 C 正确，不符合题意. 设 Rt△$ACB$ 的斜边 $AB$ 上的高是 $h$，因为 $\frac{1}{2}AB\cdot h=\frac{1}{2}AC\cdot BC$，所以 $h=\frac{6\times8}{10}=4.8$，因为 $CM=4.8$，所以 $CM\perp AB$. 又因为四边形 $AMCN$ 是平行四边形，所以四边形 $AMCN$ 是矩形，故选项 B 正确，不符合题意. 由上可知 $CM=4.8$，四边形 $AMCN$ 是矩形，所以此时 $AM=\sqrt{6^2-4.8^2}\neq4.8$，所以 $AM\neq CM$，所以四边形 $AMCN$ 不可能为正方形，故选项 D 错误，符合题意.

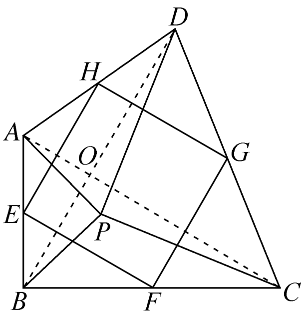
**3.** ①③④　**提示**：连接 $CF$. 因为△$ABC$ 是等腰直角三角形，且 $F$ 是 $AB$ 的中点，所以 $CF=AF=FB$，$\angle FCB=\angle A=\angle B=45°$. 因为 $AD=CE$，所以 $\triangle ADF\cong\triangle CEF$，所以 $EF=DF$，$\angle AFD=\angle CFE$. 因为 $\angle AFD+\angle CFD=90°$，所以 $\angle CFE+\angle CFD=\angle EFD=90°$，所以△$DFE$ 是等腰直角三角形，故①正确. 当 $D$，$E$ 分别为 $AC$，$BC$ 的中点，$CD=DF=\frac{1}{2}AC$，$FE=EC=\frac{1}{2}BC$，所以 $CD=DF=FE=EC$，所以四边形 $CDFE$ 是菱形. 又因为 $\angle C=90°$，所以四边形 $CDFE$ 是正方形，故②错误. 由于△$DEF$ 是等腰直角三角形，因此当 $DE$ 的值最小时，$DF$ 的值也最小，当 $DF\perp AC$ 时，$DE$ 的值最小，此时 $EF=DF=\frac{1}{2}AC=3$. 所以 $DE=\sqrt{DF^2+EF^2}=3\sqrt{2}$，故③正确. 因为 $\triangle ADF\cong\triangle CEF$，所以 $S_{\triangle CEF}=S_{\triangle ADF}$，所以 $S_{四边形CEFD}=S_{\triangle AFC}$. 因为 $F$ 是 $AB$ 的中点，所以 $S_{四边形CEFD}=S_{\triangle AFC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，所以四边形 $CDFE$ 的面积保持不变，故④正确. 由③可知当 $DE$ 的值最小时，$DF$ 的值也最小，$DF$ 长的最小值是 3，则 $DE$ 的最小值为 $3\sqrt{2}$，当△$CDE$ 的面积最大时，此时△$DEF$ 的面积最小. 此时 $S_{\triangle CDE}=S_{四边形CEFD}-S_{\triangle DEF}=S_{\triangle AFC}-S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}-S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}AC\cdot BC-\frac{1}{2}DF\cdot EF=\frac{9}{2}$，故⑤错误. 综上，正确的是①③④.

**4.** 1　**提示**：过点 $D$ 作 $DG\perp AB$ 于点 $G$. 因为 $DE\perp BC$，$DF\perp AC$，$\angle C=90°$，所以四边形 $CEDF$ 为矩形，所以 $\angle DFA=\angle DEB=90°$. 因为 $\angle A$，$\angle B$ 的平分线交于点 $D$，所以 $\angle FAD=\angle GAD$，$\angle EBD=\angle GBD$. 因为 $AD=AD$，所以 $\triangle ADF\cong\triangle ADG$，所以 $AF=AG$，$DF=DG$. 同理可证 $\triangle BDE\cong\triangle BDG$，所以 $BE=BG$，$DE=DG$，所以 $DF=DE$，所以四边形 $CEDF$ 为正方形. 设 $DF=a$，则 $AF=AC-FC=3-a$. 在 Rt△$ABC$ 中，$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，所以 $BE=BC-EC=4-a$，$AB=AG+BG=AF+BE=3-a+4-a=7-2a=5$，所以 $a=1$，即 $DF=1$，所以四边形 $CEDF$ 的面积为 $DF^2=1$.

**5.** (1) **证明**：连接 $BD$，$AC$. 因为 $E$，$F$，$G$，$H$ 分别为边 $AB$，$BC$，$CD$，$DA$ 的中点，所以 $EH$ 为△$ABD$ 的中位线，所以 $EH\parallel BD$. 同理可得，$EF\parallel AC$，$FG\parallel BD$，$HG\parallel AC$. 所以 $EH\parallel GF$，$EF\parallel GH$，所以四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

(2) **解**：四边形 $EFGH$ 是菱形. 证明如下：连接 $AC$，$BD$. 易证 $\triangle APC\cong\triangle BPD$，所以 $AC=BD$. 因为 $E$，$F$，$G$，$H$ 分别为边 $AB$，$BC$，$CD$，$DA$ 的中点，所以 $EF=\frac{1}{2}AC$，$FG=\frac{1}{2}BD$，$EH=\frac{1}{2}BD$，$GH=\frac{1}{2}AC$. 所以 $EF=FG=EH=GH$，所以四边形 $EFGH$ 是菱形.

(3) **解**：四边形 $EFGH$ 是正方形. 证明如下：如图，连接 $AC$，$BD$，设 $AC$，$BD$ 的交点为 $O$. 易证 $\triangle APC\cong\triangle BPD$，所以 $\angle ACP=\angle BDP$. 因为 $\angle CPD=90°$，所以 $\angle PDC+\angle PCD=90°$，即 $\angle ODC-\angle BDP+\angle OCD+\angle ACP=90°$，所以 $\angle ODC+\angle OCD=90°$，所以 $\angle COD=90°$，所以 $AC\perp BD$. 又因为 $EH\parallel BD$，$AC\parallel HG$，所以 $EH\perp HG$. 又因为四边形 $EFGH$ 是菱形，所以四边形 $EFGH$ 是正方形.




## 提优专题 4　利用菱形的性质和判定尺规作图

**1.** C　**提示**：由作图可知四边形 $OACB$ 是菱形，所以 $\frac{1}{2}OC\cdot AB=4\ cm^2$. 因为 $AB=2$ cm，所以 $OC=4$ cm.

2. C　**提示**：由作图知，$MN$ 垂直平分 $BD$，所以 $BE=DE$，故选项 A 正确. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $AB//CD$，所以 $\angle ABD=\angle CDB$. 因为 $BE=DE$，所以 $\angle EBD=\angle EDB$，所以 $\angle ABD=\angle DBE$，故选项 B 正确. 设 $BD$ 与 $EF$ 的交点为 $O$，因为 $MN$ 垂直平分 $BD$，$BE=DE$，所以 $\angle BEO=DEO$. 因为 $CD//AB$，所以 $\angle DEO=\angle BFO$，所以 $\angle BEO=\angle BFO$，所以 $BE=BF$. 因为 $CE=6$，$BF=10$，所以 $BC=\sqrt{BE^2-CE^2}=8$，所以 $AD=BC=8$，故选项 D 正确. 因为 $BD=\sqrt{BC^2+(CE+DE)^2}=8\sqrt{5}$，所以 $AD\neq\frac{1}{2}BD$，所以 $\angle ABD\neq30°$，故选项 C 错误.

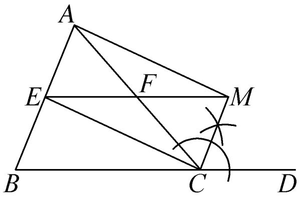
3. A　**提示**：连接 $BE$，设直线 $MN$ 交 $AB$ 于点 $F$. 因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $BC=AB=2$，$\angle ABC=180°-\angle A=135°$. 由作图过程可知，直线 $MN$ 为线段 $AB$ 的垂直平分线，所以 $AE=BE$，$\angle AFE=90°$，$AF=\frac{1}{2}AB=1$. 因为 $\angle A=45°$，所以 $\angle ABE=\angle A=45°$，$BE=AE=\sqrt{2}AF=\sqrt{2}$，所以 $\angle EBC=\angle ABC-\angle ABE=90°$. 在 $Rt\triangle BCE$ 中，由勾股定理，得 $CE=\sqrt{BC^2+BE^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$.

4. 66　**提示**：由作图可得 $AB=AD=BC=DC$，所以四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $AD//BC$，$\angle ABD=\angle CBD=\frac{1}{2}\angle ABC$. 因为 $\angle A=48°$，所以 $\angle ABC=180°-\angle A=132°$，所以 $\angle CBD=\frac{1}{2}\angle ABC=66°$.

5. 24　**提示**：由作图过程可知，直线 $EF$ 为线段 $AB$ 的垂直平分线，所以 $AM=BM$，$AN=BN$，$OA=\frac{1}{2}AB$，$OM\perp AB$，所以 $\triangle ABM$ 为等腰三角形，所以 $\angle AMO=\angle BMO$. 因为 $BN//AM$，所以 $\angle AMO=\angle BNO$，所以 $\angle BMO=\angle BNO$，所以 $BM=BN$，所以 $AM=BM=AN=BN$，所以四边形 $AMBN$ 为菱形，所以 $MN=2OM$. 因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形，所以 $AB=CD=8$，所以 $OA=4$，所以 $OM=\sqrt{AM^2-OA^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，所以 $MN=6$，所以菱形 $AMBN$ 的面积为 $\frac{1}{2}AB\cdot MN=24$.

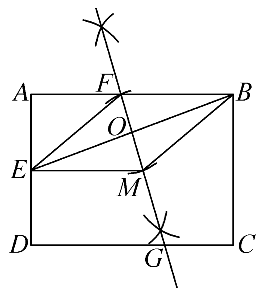
6. 16　**提示**：由题意可知，$BE$ 是 $\angle ABC$ 的平分线，$AB=BF$，所以 $\angle ABE=\angle FBE$. 由条件可知 $AD//BC$，所以 $\angle EBF=\angle AEB$，所以 $\angle ABE=\angle AEB$，所以 $AB=AE$，所以 $AE=BF$. 因为 $BF//AE$，所以四边形 $ABFE$ 是平行四边形. 又因为 $AB=BF$，所以 $\square ABFE$ 是菱形，所以 $AO=\frac{1}{2}AF=\frac{1}{2}\times12=6$，且 $BE\perp AF$. 所以在 $Rt\triangle ABO$ 中，$BO=\sqrt{AB^2-AO^2}=8$，所以在菱形 $ABFE$ 中，$BE=2BO=16$.

7. (1) **解**：如图，$CM$，$AM$ 即为所求.

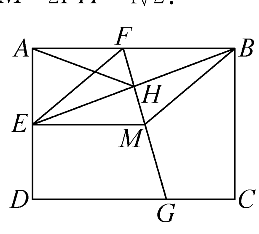



(2) **证明**：因为 $CM$ 为 $\angle ACD$ 的平分线，所以 $\angle ACM=\angle DCM$. 因为 $E$，$F$ 分别是 $AB$，$AC$ 的中点，所以 $AF=CF$，$EF$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线，所以 $EF//BC$，即 $EM//BD$，所以 $\angle DCM=\angle CMF$，所以 $\angle ACM=\angle CMF$，所以 $CF=FM$. 因为 $CF=FE$，所以 $EF=CF=AF=FM$，所以 $AC=EM$ 且 $AC$ 与 $EM$ 互相平分，所以四边形 $AECM$ 是矩形.

8. **解**：(1) 如图，直线 $FG$ 为折痕，点 $M$ 为所求作. 证明如下：
由题意可知，点 $B$，$E$ 关于直线 $FG$ 对称，所以 $FG$ 垂直平分线段 $BE$，所以 $BF=EF$，$OE=OB$. 在射线 $OG$ 上取点 $M$，使得 $OM=OF$，所以四边形 $BFEM$ 是平行四边形. 又因为 $BF=EF$，所以四边形 $BFEM$ 是菱形.




(2) $FM$ 的长为 $4\sqrt{2}$.　**提示**：如图，因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $\angle BAE=90°$. 因为 $H$ 为 $BE$ 的中点，$AH=6$，所以 $BE=2AH=12$. 因为四边形 $BFEM$ 是菱形，所以 $EF=BF=2\sqrt{11}$，$FM\perp BE$，$EH=\frac{1}{2}BE=6$，$FM=2FH$，所以 $FH=\sqrt{EF^2-EH^2}=2\sqrt{2}$，所以 $FM=2FH=4\sqrt{2}$.



# 第二十二章　函　　数

## 课时训练 25　函数的概念(1)

**【基础巩固】**

**1.** C　**2.** B　**3.** D　**4.** D　**5.** C

**6.** 温度　时间　时间

**7.** $y=x, 2x^2-y=0$　**8.** $y=6x$

**9.** (1) $y=100-\frac{9}{50}x$

(2) $y=x(15-x)$

**【拓展提优】**

**1.** C

**2.** B　**提示**:因为 $ON$ 是 $\angle AOB$ 的平分线,$DE\perp OC$,所以 $\triangle ODE$ 是等腰直角三角形,所以 $CD=CE$. 因为 $OC=x$,所以 $DE=2OC=2x$. 因为 $\angle DFE=\angle GFH=120°$,所以 $\angle EDF=90°-\frac{120°}{2}=30°$. 在 $\text{Rt}\triangle DCF$ 中,$CF=\frac{x}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}x$,所以 $S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}x=\frac{\sqrt{3}}{3}x^2$. 连接 $GH$. 易证 $\triangle DEF\cong\triangle GHF$,所以 $S_{\triangle GHF}=S_{\triangle DEF}=S_{\triangle GHM}$,所以 $y=S_{\triangle DEF}+S_{\triangle GHF}+S_{\triangle GHM}=3S_{\triangle DEF}=\sqrt{3}x^2$.

**3.** A　**提示**:初始点(2,1)(第 0 次运算). 第 1 次运算:横坐标 2 为偶数,$f(2)=\frac{2}{2}=1$;纵坐标 1 为奇数,$f(1)=3\times1+1=4$,得到点(1,4). 第 2 次运算:横坐标 1 为奇数,$f(1)=3\times1+1=4$;纵坐标 4 为偶数,$f(4)=\frac{4}{2}=2$,得到点(4,2). 第 3 次运算:横坐标 4 为偶数,$f(4)=\frac{4}{2}=2$;纵坐标 2 为偶数,$f(2)=\frac{2}{2}=1$,得到点(2,1). 第 3 次运算后的点的坐标与初始点相同,即三次运算为一循环,$2\,025\div3=675$,所以第 2 025 次运算后对应点的坐标与第 3 次运算后的点的坐标相同,即点(2,1).

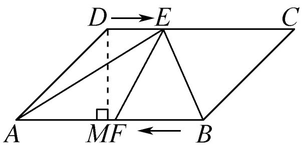
**4.** **解**:根据题意,得 $t=x-8$,代入 $y=2t-8$,得 $y=2(x-8)-8$,即 $y=2x-24$.

**5.** **解**:(1) 由题意,得 $DE=2t$ cm,$BF=3t$ cm,所以 $AF=AB-BF=(12-3t)$cm. 因为四边形 $AFED$ 为平行四边形,所以 $DE=AF$,所以 $2t=12-3t$,解得 $t=\frac{12}{5}$.

(2) 不存在. 理由如下:

因为点 $D$ 关于直线 $AE$ 的对称点在直线 $AB$ 上,所以 $AE$ 为 $\angle DAF$ 的平分线,即 $\angle DAE=\angle EAF$. 又因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形,所以 $AF /\!/ DC$,所以 $\angle EAF=\angle DEA$,所以 $\angle DAE=\angle DEA$,所以 $DE=DA$,所以 $2t=8$,解得 $t=4$. 因为 $0<t<4$,所以不存在符合题意的 $t$ 的值.

(3) 如图,过点 $D$ 作 $DM\perp AB$ 于点 $M$,所以 $\angle AMD=90°$. 因为 $AD=8$ cm,$\angle DAB=45°$,所以 $AM=DM$,$AM^2+DM^2=AD^2$,即 $2DM^2=64\ \text{cm}^2$,所以 $DM=4\sqrt{2}$ cm,所以 $S=\frac{1}{2}(DE+AF)\cdot DM=\frac{1}{2}(2t+12-3t)\times4\sqrt{2}=(24\sqrt{2}-2\sqrt{2}t)\text{cm}^2$.




## 课时训练 26　函数的概念(2)

**【基础巩固】**

**1.** B　**2.** C　**3.** B　**4.** C

**5.** $x\geqslant1$ 且 $x\neq2$　**6.** 340 m/s　**7.** 17　$\pm3$

**8.** $5<x<10$　**提示**:根据题意,由 $\begin{cases}x>0,\\y>0,\\2x>y,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x>0,\\20-2x>0,\\2x>20-2x,\end{cases}$ 解得 $5<x<10$.

**9.** **解**:(1) 全体实数.

(2) $x\neq-1$.

(3) $x\geqslant-\frac{1}{2}$.

(4) $x\geqslant-2$ 且 $x\neq\pm1$.

**10.** **解**:(1) $l=3n+2$($n$ 为正整数).

(2) 当 $n=11$ 时,$l=3\times11+2=35$.

**【拓展提优】**

**1.** C　**提示**:将 $x=8$,$y=-3$ 代入 $y=\frac{-x+b}{2}$,得 $-3=\frac{-8+b}{2}$,解得 $b=2$. 则当 $x=-8$ 时,$y=-2\times(-8)+2=18$.

**2.** D　**提示**:把 $y=8$ 代入函数 $y=x^2+2(x\leqslant2)$,得 $x=\pm\sqrt{6}$. 因为 $x\leqslant2$,所以 $x=-\sqrt{6}$. 再把 $y=8$ 代

入 $y=2x(x>2)$，得 $x=4$. 因为 $x>2$，所以 $x=4$. 综上所述，$x$ 的值为 4 或 $-\sqrt{6}$.

**3.** $-43$ **提示**：当 $x=-3$ 时，$y=x^3=-27$；当 $x=4$ 时，$y=x^2+m=16+m$. 根据题意，得 $16+m=-27$，解得 $m=-43$.

**4.** 2 028 **提示**：$f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{x-1+2}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}$，当 $x=2$ 时，$f(2)=1+\dfrac{2}{2-1}=3$，即 $[f(2)]=3$；当 $x=3$ 时，$f(3)=1+\dfrac{2}{3-1}=2$，即 $[f(3)]=2$；当 $x>3$ 时，$0<\dfrac{2}{x-1}<1$，即 $[f(x)]=1$. 所以 $[f(2)]+[f(3)]+\cdots+[f(2\,026)]=3+2+1+\cdots+1=2\,028$.

**5. 解**：(1) $y=\dfrac{9}{2}x(0\leqslant x\leqslant 4)$.

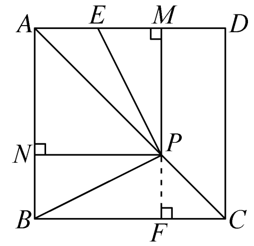
(2) $\dfrac{27}{4}$

(3) 当点 $Q$ 在 $AB$ 上运动时，$y=\dfrac{1}{2}\times 9\times[4-(x-9-4)]=\dfrac{9}{2}\times(17-x)=-\dfrac{9}{2}x+\dfrac{153}{2}$，其中 $13\leqslant x\leqslant 17$.

(4) 1 或 16 **提示**：当 $y=\dfrac{9}{2}$ 时，$\dfrac{9}{2}x=\dfrac{9}{2}$ 或 $-\dfrac{9}{2}x+\dfrac{153}{2}=\dfrac{9}{2}$，解得 $x=1$ 或 $x=16$.

**6.** (1) **证明**：因为四边形 $ABCD$ 是正方形，$AC$ 为其对角线，所以 $\angle BAD=90°$，$AC$ 平分 $\angle BAD$. 又因为 $PM\perp AD$，$PN\perp AB$，所以 $PM=PN$，$\angle PMA=\angle PNA=90°=\angle BAD$. 所以四边形 $PMAN$ 是正方形.

(2) **解**：如图，过点 $P$ 作 $PF\perp BC$ 于点 $F$，则 $\angle PFC=90°$. 因为四边形 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形，所以 $\angle ABC=90°$，$AB=BC=1$，$\angle PCF=45°$，所以 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{2}$. 因为 $\angle CPF=45°$，所以 $\triangle PCF$ 是等腰直角三角形. 因为 $PC=x$，所以 $AP=AC-PC=\sqrt{2}-x$，$PF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$. 因为 $PN\perp AB$，所以 $\angle PNB=90°$. 又因为 $\angle ABC=90°$，$\angle PFB=90°$，所以四边形 $BNPF$ 为矩形，所以 $BN=PF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$. 易得 $\angle MPN=\angle EPB=90°$，所以 $\angle MPE=\angle NPB$. 在 $\triangle EPM$ 和 $\triangle BPN$ 中，$\begin{cases}\angle PME=\angle PNB=90°,\\ PM=PN,\\ \angle MPE=\angle NPB,\end{cases}$ 所以 $\triangle EPM\cong\triangle BPN(\text{ASA})$，所以 $EM=BN=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$. 由(1)可知，四边形 $PMAN$ 是正方形，所以 $AM=MP$，所以 $AP=\sqrt{2}AM=\sqrt{2}(AE+EM)$，即 $\sqrt{2}-x=\sqrt{2}\left(y+\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)$，整理，得 $y=1-\sqrt{2}x$，其中自变量 $x$ 的取值范围为 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.




## 课时训练 27　函数的表示(1)

**【基础巩固】**

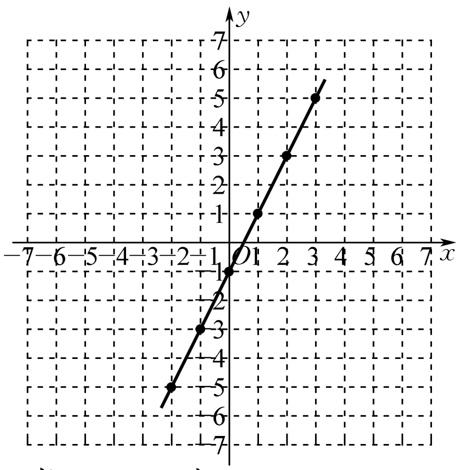
**1.** B **2.** D **3.** A

**4.** B **提示**：根据题意，得 $\begin{cases}-x\geqslant 0\\ \sqrt{-x}\neq 0\end{cases}$，解得 $x<0$，所以 $x^2>0$，$\dfrac{1}{\sqrt{-x}}>0$，所以 $y=x^2+\dfrac{1}{\sqrt{-x}}>0$，所以点 $P(x,y)$ 一定在第二象限.

**5.** 3 **6.** 2 **7.** 1

**8. 解**：(1) $-5$　5

(2) 函数图象如图所示.



(3) 当 $x=-4$ 时，$y=2x-1=2\times(-4)-1=-9$，$-9\neq-6$，所以点 $A$ 不在函数图象

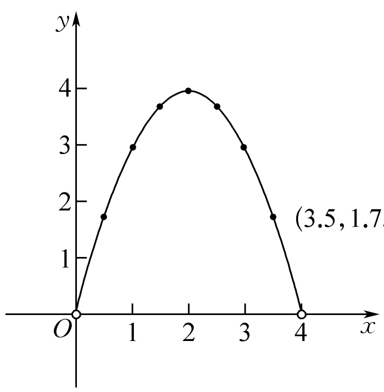
上；当 $x=2.5$ 时，$y=2x-1=2\times2.5-1=4$，$4=4$，所以点 $B$ 在函数图象上.

**9.** **解**：(1) $-x^2+4x$

(2) $0<x<4$

(3) 1.75

(4) 函数图象如图所示.




【拓展提优】

**1.** B

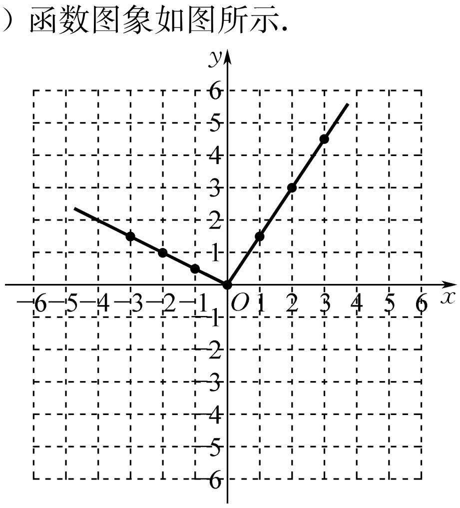
**2.** $F_4$　$-\sqrt{b}$　**提示**：根据旋转的规律知：$F_1$ 的函数解析式是 $y=x^2$，其图象位于第二象限，$F_2$ 的函数解析式是 $y=-\sqrt{-x}$，其图象位于第三象限，$F_3$ 的函数解析式是 $y=-x^2$，其图象位于第四象限，$F_4$ 的函数解析式是 $y=\sqrt{x}$，其图象位于第一象限……$2\,025\div4=506$……1，即 $F_{2\,025}$ 的图象位于第二象限，该图象的函数解析式是 $y=x^2$. 因为 $P(4,2)$ 位于第一象限，所以点 $P$ 所在的图象是 $F_4$. 因为点 $P(a,b)$ 在图象 $F_{2\,025}$ 上，所以 $b=a^2$，所以 $a=-\sqrt{b}$.

**3.** $-1$

**4.** **解**：③⑦在函数 $y=x$ 的图象上；④在函数 $y=\dfrac{2}{x}$ 的图象上；①⑧在函数 $y=x^2-1$ 的图象上.

**5.** **解**：(1) 全体实数　(2) 0

(3) 函数图象如图所示.




## 课时训练 28　函数的表示(2)

【基础巩固】

**1.** B　**2.** D　**3.** C

**4.** $-4\leqslant x\leqslant4$　$2\leqslant y\leqslant5$

**5.** **解**：(1) 1 500　**提示**：根据图象的纵坐标，由出发点是小明的家可知，小明家到学校的路程是 1 500 m.

(2) 4　2 700　**提示**：根据题意，小明在书店停留的时间为从第 8 min 到第 12 min，故小明在书店停留了 $12-8=4$(min)；一共骑行的总路程为 $1\,200+(1\,200-600)+(1\,500-600)=1\,200+600+900=2\,700$(m).

(3) 当时间在 0～6 min 时，速度为 $1\,200\div6=200$(m/min)；当时间在 6～8 min 时，速度为 $(1\,200-600)\div(8-6)=300$(m/min)；当时间在 12～14 min 时，速度为 $(1\,500-600)\div(14-12)=450$(m/min). 因为 $450>300$，所以在 12～14 min 时，小明的骑车速度最快，最快速度不在安全限度内.

【拓展提优】

**1.** D　**2.** ②③

**3.** ①③④　**提示**：“配速”是每行进 1 km 所用的时间，从图中可知，第 1 km 所用的时间最长，故说法①正确；平均速度＝路程÷时间，由图可知，第 5 km 配速最小，故第 5 km 所用时间最短，故第 5 km 的平均速度最大，故说法④正确；第 2 km 所用的时间与第 3 km 所用的时间一致，故第 2 km 的和第 3 km 的平均速度相同，故说法③正确；由于前 2 km 的时间大于最后 2 km 的时间，故前 2 km 的平均速度小于最后 2 km 的平均速度，故说法②错误. 综上所述，说法正确的是①③④.

**4.** **解**：(1) 6　5　**提示**：因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $AC\perp BD$，$OA=OC$，$OB=OD$，所以 $\angle AOB=\angle AOD=90^\circ$. 因为 $G$，$H$ 分别是 $AB$，$AD$ 的中点，所以 $GA=GB=\dfrac{1}{2}AB$，$GH=\dfrac{1}{2}BD$. 观察表格可知，当 $BE=0$ 时，点 $E$ 与点 $B$ 重合，所以 $GB=GE=2.50$，所以 $\dfrac{1}{2}AB=2.50$，所以 $AB=5$；当点 $E$ 与点 $O$ 重合时，$GE=GO=\dfrac{1}{2}AB=2.50$，此时 $BE=3$，所以 $\dfrac{1}{2}BD=3$，所以 $BD=6$.

(2) 3 或 3.7 或 2.3　**提示**：观察图象可知，当

$BE=3$ 时，$GE=HE=2.50$，此时$\triangle GEH$ 是等腰三角形. 因为 $GH=\frac{1}{2}BD=3$，所以当 $HE=GH=3$ 或 $GE=GH=3$ 时，$\triangle GEH$ 是等腰三角形. 过点 $G$ 作$GK\perp BO$ 于点 $K$. 易得 $BK=1.5$，$GK=2$. 当 $GE=3$ 时，在 $\mathrm{Rt}\triangle EGK$ 中，$EK^2+GK^2=GE^2$，即 $(BE-1.5)^2+2^2=3^2$，解得 $BE=\frac{3+2\sqrt{5}}{2}\approx3.7$；同理，当 $HE=3$ 时，由函数图象和表格数据，易得 $DE=\frac{3+2\sqrt{5}}{2}$，所以 $BE=BD-DE=\frac{9-2\sqrt{5}}{2}\approx2.3$. 综上所述，当$\triangle GEH$ 是等腰三角形时，$BE$ 的长度为 3 或 3.7 或 2.3

# 第二十三章　一次函数

## 课时训练 29　一次函数的概念

**【基础巩固】**

**1.** B　**2.** C　**3.** D　**4.** D　**5.** C

**6.** $-3$　**7.** $y=0.3x+6(0\leqslant x\leqslant5)$

**8.** ①③④

**9.** $y=6x+2$　**提示**：因为 $y=(m+3)x^{m^2-8}+|m-5|$ 是关于 $x$ 的一次函数，所以 $m^2-8=1$ 且 $m+3\neq0$，解得 $m=3$，所以一次函数的解析式是 $y=6x+2$.

**10.** ①②④⑥　②⑥

**11.** **解**：(1) 因为函数 $y=(k-2)x+k^2-4$ 是正比例函数，所以$\begin{cases}k^2-4=0,\\k-2\neq0,\end{cases}$所以 $k=-2$.

(2) 由(1)，得 $k=-2$，所以函数的解析式为 $y=-4x$. 所以当 $y=-2$ 时，$-2=-4x$，解得 $x=\frac{1}{2}$，所以 $x$ 的值为$\frac{1}{2}$.

**12.** **解**：(1) 因为初始存水量为 702 $m^3$，排水速度为每小时 78 $m^3$，排水时间为 $x$ h，那么排水的量为 $78x$ $m^3$，所以存水量 $y=702-78x$.

(2) 当 $x=5$ 时，$y=702-78\times5=702-390=312(m^3)$.

答：泳池的存水量为 312 $m^3$.

**【拓展提优】**

**1.** $-4$　**2.** 0 或$-2$

**3.** $-8$　**提示**：设 $y=k(x+3)$($k$ 为常数). 当 $x=0$ 时，$y=-6$，所以 $3k=-6$，所以 $k=-2$，所以 $y=-2(x+3)=-2x-6$. 当 $x=1$ 时，$y=-2\times1-6=-8$.

**4.** $x=\frac{5}{2}$　**提示**：根据题意，得 $y=x+m-3$. 因为 $y=x+m-3$ 是正比例函数，所以 $m-3=0$，所以 $m=3$. 所以关于 $x$ 的方程为$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{3}=1$，解得 $x=\frac{5}{2}$. 经检验，$x=\frac{5}{2}$是原方程的解.

**5.** **解**：(1) 由题意，得供给量 $q_1=\frac{p-5}{4}$，需求量 $q_2=25-p$.

(2) 因为达到市场的供需平衡点时供给量和需求量相等，所以$\frac{p-5}{4}=25-p$. 所以 $p=21$.

答：达到市场的供需平衡点时该产品的市场价格为 21 万元.

**6.** **解**：因为 $y=m*(x+1)(m\neq1)$为正比例函数，所以设 $y=m*(x+1)=kx$. 因为 $a*0=1-a$，所以只需令 $m*(x+1)=kx$ 中 $x=-1$ 即可，即 $m*(-1+1)=m*0=1-m=-k$，所以 $k=m-1$，所以 $y=m*(x+1)=(m-1)x$. 令 $m=4$，$x=4$，代入 $y=m*(x+1)=(m-1)x$，得 $4*5=4*(4+1)=(4-1)\times4=12$.

## 课时训练 30　一次函数的图象和性质(1)

**【基础巩固】**

**1.** C　**2.** A

**3.** A　**提示**：12:00 时时针与分针的夹角为 0°. 因为分针每分钟转动 6°，时针每分钟转动 0.5°，所以 $y$ 越来越大. 12:30 时，$y=(6-0.5)\times30=165$.

**4.** C　**5.** B

**6.** (1) 2　(2) $-2$　**7.** 二　**8.** $m>\frac{1}{2}$

**9.** $-5$　**提示**：根据题意，得$\begin{cases}2m-9<0,\\|m|-4=1,\end{cases}$解得 $m=-5$.

**10.** 8

**11.** **解**：(1) 要使函数图象经过第一、三象限，则 $2m+4>0$，解得 $m>-2$.

(2) 要使 $y$ 随 $x$ 的增大而减小，则 $2m+4<0$，解得 $m<-2$.

(3) 要使点(1,3)在该函数图象上，则 $2m+4=3$，解得 $m=-\frac{1}{2}$.

**12.** **解**：(1) 设 $y=kx$，将 $x=1$，$y=2$ 代入，得 $k=2$，故 $y=2x$.

(2) 当 $x=-1$ 时，$y=2\times(-1)=-2$.

(3) 因为 $0\leqslant y\leqslant 5$，所以 $0\leqslant 2x\leqslant 5$，解得 $0\leqslant x\leqslant \frac{5}{2}$.

**【拓展提优】**

1. A　**提示**：把 $y=3$ 代入 $y=2x$，解得 $x=\frac{3}{2}$. 因为直线 $y=2x$ 与线段 $AB$ 有公共点，所以 $n\geqslant \frac{3}{2}$.

2. C　**提示**：过点 $D$ 作 $DF\perp y$ 轴于点 $F$，过点 $C$ 作 $CE\perp x$ 轴于点 $E$，设点 $B$ 的坐标为 $(b,0)$，则 $OB=b$，且 $b>0$. 因为点 $A(0,2)$，所以 $OA=2$. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $AB=DA$，$\angle BAD=90°$，所以 $\angle BAO+\angle DAF=\angle ADF+\angle DAF=90°$，所以 $\angle BAO=\angle ADF$. 可证 $\triangle ABO\cong\triangle DAF$，所以 $FD=OA=2$，$FA=OB=b$，所以 $OF=OA+FA=2+b$，所以点 $D$ 的坐标为 $(2,2+b)$. 将点 $D$ 的坐标代入直线 $y=\frac{7}{2}x$，得 $2+b=\frac{7}{2}\times 2$，解得 $b=5$. 同理，可得 $\triangle ABO\cong\triangle BCE$，所以 $EB=OA=2$，$EC=OB=5$，所以 $OE=OB+EB=5+2=7$，所以点 $C$ 的坐标为 $(7,5)$，将点 $C$ 的坐标代入直线 $y=kx$，得 $5=7k$，解得 $k=\frac{5}{7}$.

3. $(-1,-1)$

4. $\frac{27}{2}$　$\frac{6\ 561}{32}$　**提示**：因为点 $A(27,9)$，把 $x=27$ 代入 $y=\frac{1}{2}x$，得 $y=\frac{27}{2}$. 所以第 4 个正方形的边长为 $\frac{27}{2}$. 同理可得，第 5 个正方形的边长为 $\frac{81}{4}$，第 6 个正方形的边长为 $\frac{243}{8}$. 所以 $S_3=\frac{1}{2}\times\frac{81}{4}\times\frac{81}{4}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{81}{4}+\frac{243}{8}\right)\times\frac{243}{8}-\frac{1}{2}\times\left(\frac{81}{4}+\frac{243}{8}\right)\times\frac{243}{8}=\frac{6\ 561}{32}$.

5. **解**：由题意，得 $a=2$，$b=4$. 分三种情况讨论：

①如图 1，当 $BM\perp BA$，且 $BM=BA$ 时，过点 $M$ 作 $MN\perp y$ 轴于点 $N$. 因为 $BM\perp BA$，$MN\perp y$ 轴，$OB\perp OA$，所以 $\angle MBA=\angle MNB=\angle BOA=90°$. 所以 $\angle NBM+\angle NMB=90°$，$\angle OBA+\angle NBM=90°$，所以 $\angle NMB=\angle OBA$. 在 $\triangle BMN$ 和 $\triangle ABO$ 中，$\begin{cases}\angle MNB=\angle BOA,\\ \angle NMB=\angle OBA,\\ BM=AB,\end{cases}$ 所以 $\triangle BMN\cong\triangle ABO$. 所以 $MN=BO=b=4$，$BN=AO=a=2$，所以 $ON=2+4=6$. 所以点 $M$ 的坐标为 $(4,6)$，代入 $y=mx$，得 $m=\frac{3}{2}$.

②如图 2，当 $AM\perp BA$，且 $AM=BA$ 时，过点 $M$ 作 $MN\perp x$ 轴于点 $N$. 易证 $\triangle BOA\cong\triangle ANM$，同理求出点 $M$ 的坐标为 $(6,2)$，$m=\frac{1}{3}$.

③如图 3，当 $AM\perp BM$，且 $AM=BM$ 时，过点 $M$ 作 $MN\perp x$ 轴于点 $N$，$MH\perp y$ 轴于点 $H$. 易证 $\triangle BHM\cong\triangle ANM$，所以 $MH=MN$. 设点 $M$ 的坐标为 $(x,x)$，代入 $y=mx$，得 $x=mx$. 因为 $x\neq 0$，所以 $m=1$.

综上所述，$m$ 的值是 $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{3}$ 或 1.

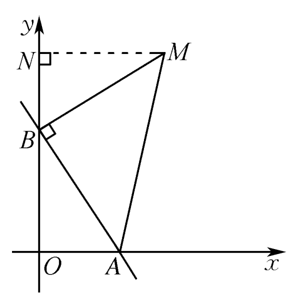



图 1

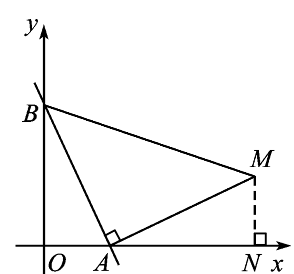



图 2

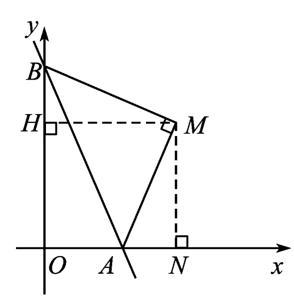



图 3

## 课时训练 31　一次函数的图象和性质(2)

**【基础巩固】**

1. D　2. C　3. D　4. C　5. C

6. $y=x-3$　7. $\frac{1}{2}$　$k<0$

8. 第三象限　**提示**：因为一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过第一、三、四象限，所以 $k>0$，$b<0$，所以直线 $y=bx+k$ 经过第一、二、四象限，不经过第三象限.

9. **解**：(1) 令 $y=0$，得 $x=-\frac{3}{2}$，所以点 $A$ 的坐标为 $\left(-\frac{3}{2},0\right)$. 令 $x=0$，得 $y=3$，所以点 $B$ 的坐标为 $(0,3)$.

(2) 因为 $OP=2OA$，所以点 $P$ 的坐标为

$P_1(3,0)$或$P_2(-3,0)$. 所以$S_{\triangle ABP_1}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}+3\right)\times 3=\frac{27}{4}$，$S_{\triangle ABP_2}=\frac{1}{2}\times\left(3-\frac{3}{2}\right)\times 3=\frac{9}{4}$. 所以$\triangle ABP$的面积为$\frac{27}{4}$或$\frac{9}{4}$.

**【拓展提优】**

**1.** D　**2.** B

**3.** D　**提示：**由函数解析式，得点$B$的坐标为$(0,4)$，点$A$的坐标为$(-3,0)$，所以$OA=3$，$OB=4$. 所以$BO_1=BO=4$，故点$A_1$的横坐标为4. 又因为$A_1O_1=AO=3$，故点$A_1$的纵坐标为1，所以点$A_1$的坐标是$(4,1)$.

**4.** $2^{2n-3}$　**提示：**由直线$y=x+1$，易得$OA_1=1$，$OD=1$. 所以$\angle ODA_1=45°$，所以$\angle A_2A_1B_1=45°$. 所以$A_2B_1=A_1B_1=1$，所以$S_1=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$. 因为$A_2B_1=A_1B_1=1$，所以$A_2C_1=2=2^1$，所以$S_2=\frac{1}{2}\times(2^1)^2=2^1$. 同理可得，$A_3C_2=4=2^2$，$S_3=\frac{1}{2}\times(2^2)^2=2^3$，…，所以$S_n=\frac{1}{2}\times(2^{n-1})^2=2^{2n-3}$.

**5.** **解：**(1) 函数$y=-2x+4$的图象与$x$轴交于点$A(2,0)$，与$y$轴交于点$B(0,4)$. 画直线$AB$即为函数$y=-2x+4$的图象，图略.

(2) 设直线$y=m$与函数$y=|-2x+4|$的图象交于点$C$，$D$，(点$C$在点$D$左侧)，围成$\triangle CAD$($A$为函数$y=-2x+4$的图象与$x$轴的交点). 令$|-2x+4|=m$，其中$m>0$，则当$x\leqslant2$时，$-2x+4=m$，解得$x=2-\frac{1}{2}m$；当$x>2$时，$-(-2x+4)=m$，解得$x=\frac{1}{2}m+2$. 所以$CD=\frac{1}{2}m+2-\left(2-\frac{1}{2}m\right)=m$. 因为$S_{\triangle CAD}=\frac{1}{2}CD\cdot m=\frac{1}{2}m^2=3$，所以$m=\sqrt{6}$(负根舍去).

## 课时训练32　用待定系数法求一次函数的解析式

**【基础巩固】**

**1.** A　**2.** B　**3.** A

**4.** B　**提示：**由题可知，设一次函数的解析式为$y=kx+b(k\neq0)$. 根据$y$值变化的规律性，9，5，1是以4为间隔逐渐减小的，所以把$(-3,9)$，$(-2,5)$代入解析式中，得$\begin{cases}-3k+b=9,\\-2k+b=5,\end{cases}$解得$k=-4$，$b=-3$，所以$y=-4x-3$. 当$x=0$时，$y=-3$，所以函数值$-4$是错误的.

**5.** $-8$

**6.** $y=100x-40$　**提示：**设所求函数解析式为$y=kx+b\ (k\neq0)$. 将点$(1,60)(2,160)$代入，得$\begin{cases}k+b=60,\\2k+b=160,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=100,\\b=-40.\end{cases}$所以当$1\leqslant x\leqslant2$时，$y=100x-40$.

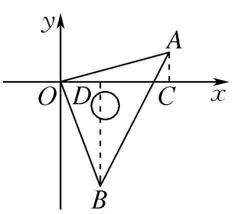
**7.** 2或$-7$　**提示：**若$k>0$，则当$x=1$时，$y=3$；当$x=4$时，$y=6$. 所以$\begin{cases}k+b=3,\\4k+b=6,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=1,\\b=2,\end{cases}$所以$\frac{b}{k}=2$. 若$k<0$，则当$x=1$时，$y=6$；当$x=4$时，$y=3$. 所以$\begin{cases}k+b=6,\\4k+b=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-1,\\b=7,\end{cases}$所以$\frac{b}{k}=-7$.

**【拓展提优】**

**1.** A

**2.** D　**提示：**①当点$B$在$y$轴的正半轴上时. 因为$\triangle AOB$的面积为8，所以$\frac{1}{2}OA\cdot OB=8$. 因为$OA=2$，所以$OB=8$，所以点$B(0,8)$. 因为直线经过点$A(-2,0)$和点$B(0,8)$，所以$\begin{cases}-2k+b=0,\\b=8,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=4,\\b=8.\end{cases}$②当点$B$在$y$轴的负半轴上时，同①可得$k=-4$.

**3.** C　**提示：**如图，过点$A$作$AC\perp x$轴于点$C$，过点$B$作$BD\perp x$轴于点$D$. 因为$\angle AOB=90°$. $\angle OAB=45°$，所以$OA=OB$，$\angle AOC+\angle BOD=90°$. 又因为$\angle AOC+\angle OAC=90°$，所以$\angle BOD=\angle OAC$. 在$\triangle AOC$和$\triangle OBD$中，$\begin{cases}\angle ACO=\angle ODB=90°,\\\angle OAC=\angle BOD,\\OA=BO,\end{cases}$所以$\triangle AOC\cong\triangle OBD$(AAS). 所以$OD=AC$，$BD=OC$. 因为点$A(3,1)$，所以$AC=1$，$OC=3$，所以$OD=AC=1$，$BD=OC=3$，所以点$B(1,-3)$. 设直线$AB$的函数解析式为$y=kx+b$，则$\begin{cases}3k+b=1,\\k+b=-3,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=2,\\b=-5.\end{cases}$所以直线$AB$的函数解析式为$y=2x-5$.



**4.** $y=\frac{1}{3}x+3$ 　**提示**：因为四边形 $ABCD$ 为矩形，点 $B(-2,4)$，点 $D(-4,0)$，点 $C$ 在 $x$ 轴上，所以矩形 $ABCD$ 对角线交点的坐标为$(-3,2)$. 设直线 $l$ 的函数解析式为 $y=kx+3$，将点$(-3,2)$代入，得 $2=-3k+3$，解得 $k=\frac{1}{3}$，所以 $y=\frac{1}{3}x+3$.

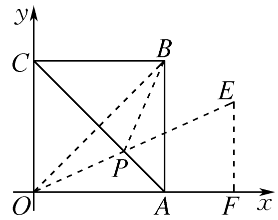
**5.** $y=\begin{cases}2x-3(x<1),\\-2x+1(x\geqslant1)\end{cases}$ 　**提示**：由题意，设点 $P(m,n)$在函数 $y=-2x+1$ 关于直线 $x=1$ 的"镜面函数"上，所以点 $P$ 关于 $x=1$ 的对称点为$(2-m,n)$，所以 $n=-2(2-m)+1=2m-3$，即"镜面函数"的解析式为 $y=\begin{cases}2x-3(x<1),\\-2x+1(x\geqslant1).\end{cases}$

**6.** **解**：(1) 因为四边形 $OABC$ 是正方形，$OA=3$，所以 $AB=BC=OC=OA=3$，$AB\perp x$ 轴，所以点 $B$ 的坐标为$(3,3)$，点 $C$ 的坐标为$(0,3)$.

(2) 因为 $OA=3$，所以点 $A(3,0)$. 又因为点 $C(0,3)$，所以可设直线 $AC$ 的函数解析式为 $y=kx+b$. 把 $A$，$C$ 两点坐标代入，得 $\begin{cases}3k+b=0,\\b=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-1,\\b=3,\end{cases}$所以直线 $AC$ 的函数解析式为 $y=-x+3$.

(3) 如图，连接 $BO$，$OE$. 当点 $P$ 为直线 $OE$ 与直线 $AC$ 的交点时，$PB+PE$ 的值最小，理由如下：

因为四边形 $OABC$ 是正方形，$AC$ 为对角线，所以点 $B$ 与点 $O$ 关于直线 $AC$ 对称，所以 $BP=OP$，$PB+PE=OP+PE\geqslant OE$，所以 $OE$ 的长即为 $PB+PE$ 的最小值. 设直线 $OE$ 的函数解析式为 $y=kx$. 把点 $E(8,4)$代入，得 $4=8k$，解得 $k=\frac{1}{2}$，所以直线 $OE$ 的函数解析式为 $y=\frac{1}{2}x$. 联立，得 $\begin{cases}y=-x+3,\\y=\frac{1}{2}x,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$所以点 $P$ 的坐标为$(2,1)$. 过点 $E$ 作 $EF\perp x$ 轴，垂足为 $F$，则 $OE=\sqrt{OF^2+EF^2}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$. 所以 $PB+PE$ 的最小值为 $4\sqrt{5}$.




## 课时训练 33　一次函数与方程(组)、不等式

**【基础巩固】**

**1.** D　**2.** A

**3.** $x>1$　**4.** $x>2$　**5.** $(2,5)$　**6.** $y=-2x-1$

**7.** $\begin{cases}x=3,\\y=8\end{cases}$　**8.** 16

**9.** **解**：(1) 把点 $A(-5,0)$，$B(-1,4)$代入 $y=kx+b$，得$\begin{cases}0=-5k+b,\\4=-k+b,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=1,\\b=5.\end{cases}$所以直线 $AB$ 的函数解析式为 $y=x+5$.

(2) 由图象可知，直线 $CE$ 与直线 $AB$ 相交于点 $C$. 联立，得 $\begin{cases}y=-2x-4,\\y=x+5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-3,\\y=2.\end{cases}$故点 $C(-3,2)$. 易知点 $D(0,5)$，$E(0,-4)$，所以 $DE=9$. 所求面积为 $DE$ 与点 $C$ 到 $y$ 轴距离乘积的一半，即为 $\frac{1}{2}\times9\times3=\frac{27}{2}$.

(3) $x>-3$.

**10.** **解**：(1) 由题意，将点 $P(1,b)$代入 $y=2x+1$，得 $2+1=b$，即 $b=3$. 所以点 $P$ 的坐标为$(1,3)$. 将点 $P(1,3)$代入 $y=mx+4$，得 $m+4=3$，所以 $m=-1$. 所以直线 $l_2$ 的函数解析式为 $y=-x+4$.

(2) ①$\begin{cases}x=1,\\y=3\end{cases}$

②$x\leqslant1$　**提示**：因为$(2-m)x-3\leqslant0$，所以 $2x+1-(mx+4)\leqslant0$，所以 $2x+1\leqslant mx+4$. 所以关于 $x$ 的不等式$(2-m)x-3\leqslant0$ 的解集为函数 $y=2x+1$ 的图象在 $y=mx+4$ 图象下方时对应的自变量取值范围. 所以结合图象可得，$x\leqslant1$.

(3) 由题意,得点 $C$ 的坐标为$(a,2a+1)$,点 $D$ 的坐标为$(a,-a+4)$. 因为线段 $CD$ 的长为 3,所以$|2a+1-(-a+4)|=3$,所以 $a=0$ 或 2. 所以点 $C(0,1)$,$D(0,4)$或点 $C(2,5)$,$D(2,2)$. 因为直线 $l_2$ 与 $x$ 轴交于点 $B$,所以点 $B(4,0)$. 因为 $CD\perp x$ 轴,所以点 $B$ 到直线 $CD$ 的距离 $h$ 为 4 或 2. 所以 $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}CD\cdot h=\frac{3}{2}h$,所以$\triangle BCD$ 的面积为 6 或 3.

【拓展提优】

**1.** B　**2.** C

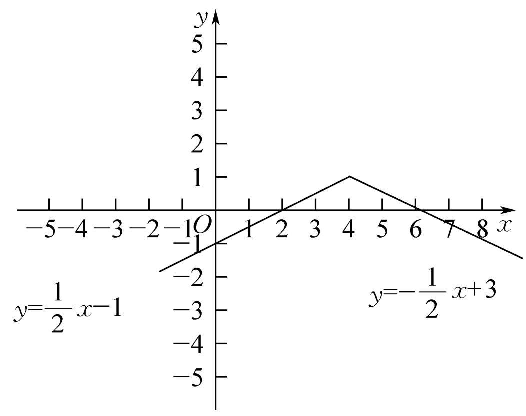
**3.** A　**提示:**由$\begin{cases}y=x+2k+1,\\y=-\frac{1}{2}x+2,\end{cases}$得$\begin{cases}x=-\frac{4}{3}k+\frac{2}{3},\\y=\frac{2}{3}k+\frac{5}{3}.\end{cases}$因为两直线的交点在第一象限,所以$-\frac{4}{3}k+\frac{2}{3}>0$,$\frac{2}{3}k+\frac{5}{3}>0$,解得$-\frac{5}{2}<k<\frac{1}{2}$.

**4.** **解:**(1) 0

(2) 由题意,当 $x=-2$ 时,$y=-2$;当 $x=0$ 时,$y=-1$,所以$-2\leqslant y<-1$ 时,$-2\leqslant x<0$. 又当 $x=8$ 时,$y=-1$;当 $x=10$ 时,$y=-2$,所以$-2\leqslant y<-1$ 时,$8<x\leqslant 10$. 综上所述,当输出 $y$ 的值满足$-2\leqslant y<-1$ 时,$x$ 的取值范围是$-2\leqslant x<0$ 或 $8<x\leqslant 10$.

(3) 当 $x<4$ 时,将点$(-2,-2)$和点$(0,-1)$代入 $y=kx+b$,得$\begin{cases}-2k+b=-2,\\b=-1,\end{cases}$解得 $k=\frac{1}{2}$,$b=-1$,所以 $y=\frac{1}{2}x-1$. 所以该函数为 $y=\begin{cases}\frac{1}{2}x-1(x<4),\\-\frac{1}{2}x+3(x\geqslant 4),\end{cases}$ 且函数图象如图所示. 因为 $y_1>y_2$ 恒成立,所以当 $m\geqslant 4$ 时,$y=-\frac{1}{2}x+3$ 单调递减,$y_1>y_2$ 恒成立;当 $m<4$,$m+4\geqslant 4$ 时,若 $y_1>y_2$ 恒成立,则 $\frac{1}{2}m-1>-\frac{1}{2}(m+4)+3$,解得 $m>2$.

综上所述,当 $m>2$ 时,$y_1>y_2$ 恒成立.




## 课时训练 34　实际问题与一次函数(1)

【基础巩固】

**1.** C　**2.** A

**3.** 120

**4.** (4,160)　**提示:**由题意可知,图中的点 $D$ 表示甲、乙两货车相遇,所以甲、乙两货车的速度和为 $240\div 2.4=100$(km/h),所以乙货车的速度为 $100-40=60$(km/h). 所以乙货车从 B 地行驶至 A 地所需时间为 $240\div 60=4$(h). 由题意可知,图中点 $E$ 表示的是乙货车到达 A 地,$EF$ 段表示的是乙货车停止后,甲货车继续行驶至 B 地. 所以点 $E$ 的横坐标为 4,纵坐标为乙货车停止时,甲货车行驶的距离,即 $40\times 4=160$(km). 所以点 $E$ 的坐标为(4,160).

**5.** **解:**(1) 乙　甲　乙槽中铁块的高度

(2) 设线段 $AB$,$DE$ 所在直线的函数解析式分别为 $y_1=k_1x+b_1$,$y_2=k_2x+b_2$($k_1\neq 0$ 且 $k_2\neq 0$). 由图可知,$AB$ 经过点(0,2)和点(4,14),$DE$ 经过点(0,12)和点(6,0),分别代入,得$\begin{cases}k_1=3,\\b_1=2,\end{cases}\begin{cases}k_2=-2,\\b_2=12.\end{cases}$所以 $y_1=3x+2$,$y_2=-2x+12$. 令 $3x+2=-2x+12$,解得 $x=2$.

答:当注水 2 min 时,两个水槽中水的深度相同.

(3) 由图象可知,当水面没有没过铁块时,水面 4 min 上升了 12 cm,即 1 min 上升 3 cm. 当水面没过铁块时,水面 2 min 上升了 5 cm,即 1 min 上升 2.5 cm. 设铁块的底面积为 $x$ cm$^2$,则 $3(36-x)=2.5\times 36$,解得 $x=6$. 所以铁块的体积为 $6\times 14=84$(cm$^3$).

(4) 60　**提示:**设乙槽的底面积为 $S$ cm$^2$,则

$3\left(S-\frac{112}{14}\right)=2.5S$,解得 $S=48$. 所以甲槽的底面积为 $\left[\left(48-\frac{112}{14}\right)\times(14-2)+48\times(19-14)\right]\div 12=60(\mathrm{cm}^2)$.

【拓展提优】

1. C　提示:由题图可知,$y=\begin{cases}\frac{25}{6}t+100(0\leqslant t\leqslant 24),\\ -\frac{25}{3}t+400(24<t\leqslant 30),\end{cases}$ $z=\begin{cases}-t+25(0\leqslant t\leqslant 20),\\ 5(20<t\leqslant 30).\end{cases}$ 由题图 1 可知,选项 A 正确. 当 $t=10$ 时,$z=-10+25=15$,所以选项 B 正确. 第 12 天的销售量是 $y=\frac{25}{6}\times 12+100=150$(件),一件产品的销售利润是 $z=-12+25=13$(元),所以第 12 天的日销售利润是 $150\times 13=1\ 950$(元),第 30 天的销售量是 150 件,一件产品的销售利润是 5 元,所以第 30 天的日销售利润是 750 元,故选项 C 错误,选项 D 正确.

2. **解**:(1) 60　7　350

(2) 由题可知,当 $x=\frac{a}{2}=3.5$ 时,甲车距 $A$ 地的距离 $y=350$ km. 设甲车距 $A$ 地的距离 $y$ 与甲车出发时间 $x$ 之间的函数解析式为 $y=kx+b(k\neq 0)$. 当 $0\leqslant x\leqslant 3.5$ 时,有 $\begin{cases}b=0,\\ 3.5k+b=350,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=100,\\ b=0,\end{cases}$ 此时 $y=100x(0\leqslant x\leqslant 3.5)$;当 $3.5<x\leqslant 7$ 时,有 $\begin{cases}3.5k+b=350,\\ 7k+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-100,\\ b=700,\end{cases}$ 此时 $y=-100x+700(3.5<x\leqslant 7)$. 综上所述,$y=\begin{cases}100x(0\leqslant x\leqslant 3.5),\\ -100x+700(3.5<x\leqslant 7).\end{cases}$

(3) 甲车出发 3 h 或 $\frac{29}{8}$ h 或 $\frac{35}{8}$ h 后两车相距 60 km.　提示:设乙车距 $A$ 地的距离 $y$ 与甲车出发的时间 $x$ 之间的函数解析式为 $y=mx+n(m\neq 0)$,则有 $\begin{cases}60=n,\\ 480=7m+n,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=60,\\ n=60.\end{cases}$ 所以 $y=60x+60$. 当 $0\leqslant x\leqslant 3.5$ 时,有 $100x-(60x+60)=60$ 或 $60x+60-100x=60$,解得 $x=3$ 或 $x=0$(舍去);当 $3.5<x\leqslant 7$ 时,有 $-100x+700-(60x+60)=60$ 或 $60x+60-(-100x+700)=60$,解得 $x=\frac{29}{8}$ 或 $x=\frac{35}{8}$.

## 课时训练 35　实际问题与一次函数(2)

【基础巩固】

1. C　提示:设一年内在该游泳馆游泳的次数为 $x$,消费 $y$ 元. 根据题意,得 $y_A=50+25x$,$y_B=200+20x$,$y_C=400+15x$. 当 $45\leqslant x\leqslant 50$ 时,$1\ 175\leqslant y_A\leqslant 1\ 300$,$1\ 100\leqslant y_B\leqslant 1\ 200$,$1\ 075\leqslant y_C\leqslant 1\ 150$. 由此可见,最省钱的方式为购买 C 类会员年卡.

2. 2　提示:由线段 $OA$ 可知,当 $0\leqslant x<2$ 时,$y=10x$. 设射线 $AB$ 所在直线的函数解析式为 $y=kx+b(k\neq 0$,且 $x\geqslant 2)$. 将点 $(2,20)$,$(4,36)$ 代入,得 $\begin{cases}2k+b=20,\\ 4k+b=36,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=8,\\ b=4.\end{cases}$ 所以 $y=8x+4$. 当 $x=3$ 时,$y=8\times 3+4=28$. 当分三次每次购买 1 kg 时,花费 $10\times 3=30$(元),因此可节省 $30-28=2$(元).

3. 29　提示:设购买 A 种型号盒子 $x$ 个,购买盒子所需费用为 $y$ 元,则购买 B 种型号盒子的个数为 $\frac{15-2x}{3}$. ①当 $0\leqslant x<3$ 时,$y=5x+\frac{15-2x}{3}\times 6=x+30$. 因为 $k=1>0$,所以 $y$ 随 $x$ 的增大而增大,所以当 $x=0$ 时,$y$ 有最小值,最小值为 30. ②当 $x\geqslant 3$ 时,$y=5x+\frac{15-2x}{3}\times 6-4=x+26$. 因为 $k=1>0$,所以 $y$ 随 $x$ 的增大而增大,所以当 $x=3$ 时,$y$ 有最小值,最小值为 29. 综上所述,购买盒子所需要的最少费用为 29 元.

4. **解**:(1) 90

(2) 设 $y=kx+b(k\neq 0)$. 把点 $(0,90)$,$(50,115)$ 代入,得 $\begin{cases}90=b,\\ 115=50k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{1}{2},\\ b=90.\end{cases}$ 所以 $y=\frac{1}{2}x+90$.

(3) 180

(4) 当 $x=200$ 时,乙复印店的费用为 $\frac{1}{2}\times 200+90=190$(元),甲复印店的费用为 $1\times 200=200$(元). 因为 $190<200$,所以选择乙复印店更划算.

【拓展提优】

1. C　提示:当 $0\leqslant x\leqslant 120$ 时,$y_A=30$;当 $x>120$ 时,$y_A=0.4x-18$. 当 $0\leqslant x\leqslant 200$ 时,$y_B=50$;当 $x>200$ 时,$y_B=0.4x-30$. 所以当 $x<120$ 时,A 方案比 B 方案便宜 20 元,故①正确. 当 $x>200$ 时,$0.4x-18-(0.4x-30)=12$,故②正确. 当 $y=60$ 时,由 $60=$

$0.4x-18$,得 $x=195$,由 $60=0.4x-30$,得 $x=225$,故③正确. 当 B 方案为 50 元,A 方案为 40 元或 60 元时,两种方案通信费用相差 10 元,将 $y_A=40$ 或 $y_A=60$ 代入,得 $x=145$ 或 $x=195$,故④错误.

**2.** **解**:(1) 设 A 种花的单价为 $a$ 元/盆,B 种花的单价为 $b$ 元/盆. 根据题意,得 $\begin{cases}3a+2b=22,\\2a+b=13,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=4,\\b=5.\end{cases}$

答:A 种花的单价为 4 元/盆,B 种花的单价为 5 元/盆.

(2) 设购买 $m$ 盆 A 种花,总费用为 $W$ 元. 由题意,得 $W=4m+5(250-m)=-m+1\ 250(75\leqslant m\leqslant 125)$. 因为 $-1<0$,所以 $W$ 随 $m$ 的增大而减小,所以当 $m=125$ 时,$W$ 取最小值,此时 $W=1\ 125$,$250-m=125$.

答:当购买 125 盆 A 种花,125 盆 B 种花时,总花费最少,最少费用为 1 125 元.

**3.** **解**:(1) 根据题意知,调配给甲连锁店 B 型电子体温测量仪 $(70-x)$ 台,调配给乙连锁店 A 型电子体温测量仪 $(40-x)$ 台,B 型电子体温测量仪 $(x-10)$ 台. 所以 $y=200x+170(70-x)+160(40-x)+150(x-10)=20x+16\ 800$. 因为 $\begin{cases}x\geqslant 0,\\70-x\geqslant 0,\\40-x\geqslant 0,\\x-10\geqslant 0,\end{cases}$ 所以 $10\leqslant x\leqslant 40$. 所以 $y=20x+16\ 800(10\leqslant x\leqslant 40)$.

(2) 由题意,得 $y=(200-a)x+170(70-x)+160(40-x)+150(x-10)$,即 $y=(20-a)x+16\ 800$. 因为 $200-a>170$,所以 $a<30$. 若 $0<a<20$,则 $y$ 随着 $x$ 的增大而增大,当 $x=40$ 时,总利润达到最大,即调配给甲连锁店 A 型 40 台,B 型 30 台,乙连锁店 A 型 0 台,B 型 30 台;若 $a=20$,所有方案利润相同;若 $20<a<30$,则 $y$ 随着 $x$ 的增大而减小,当 $x=10$ 时,总利润达到最大,即调配给甲连锁店 A 型 10 台,B 型 60 台,乙连锁店 A 型 30 台,B 型 0 台.

# 第二十四章　数据的分析

## 课时训练 36　平均数

**【基础巩固】**

**1.** B　**2.** B　**3.** C　**4.** 83　**5.** 90　**6.** 22

**7.** $-4$　**提示**:因为数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数是 $-2$,所以数据 $3x_1,3x_2,\cdots,3x_n$ 的平均数是 $3\times(-2)=-6$,所以数据 $3x_1+2,3x_2+2,\cdots,3x_n+2$ 的平均数是 $-6+2=-4$.

**8.** **解**:(1) 甲的得分是 $200\times 25\%=50$(分),乙的得分是 $200\times 40\%=80$(分),丙的得分是 $200\times 35\%=70$(分).

(2) 甲的成绩是 $(75\times 4+93\times 3+50\times 3)\div(4+3+3)=729\div 10=72.9$(分),乙的成绩是 $(80\times 4+70\times 3+80\times 3)\div(4+3+3)=770\div 10=77$(分),丙的成绩是 $(90\times 4+68\times 3+70\times 3)\div(4+3+3)=774\div 10=77.4$(分). 因为 $77.4>77>72.9$,所以丙的成绩最好.

**【拓展提优】**

**1.** B

**2.** D　**提示**:由题意可知,调整价格前两种糖果混合后的平均价格为 $\frac{ax+by}{x+y}$ 元/kg. 因为甲种糖果单价下降 15%,乙种糖果单价上涨 20%,所以调整价格后两种糖果混合后的平均价格为 $\frac{a\left(1-\frac{15}{100}\right)x+b\left(1+\frac{20}{100}\right)y}{x+y}$ 元/kg. 所以 $\frac{ax+by}{x+y}=\frac{a\left(1-\frac{15}{100}\right)x+b\left(1+\frac{20}{100}\right)y}{x+y}$. 整理,得 $3ax=4by$,即 $\frac{x}{y}=\frac{4b}{3a}$.

**3.** $m=n=p=q$　**4.** 1　3

**5.** 5 ∶ 6　**提示**:设男生人数为 $m$,女生人数为 $n$,则有 $78(m+n)=81m+75.5n$. 整理,得 $3m=2.5n$,所以 $m:n=2.5:3=5:6$.

**6.** **解**:(1) $\frac{1}{2}$　16 m², 20 m², 44 m²

(2) $y=\frac{1}{4}x$

(3) 设分配 $x$ 人去擦玻璃,则 $(13-x)$ 人去擦课桌椅.

根据题意,得 $\frac{16}{\frac{1}{4}x}=\frac{20}{\frac{1}{2}(13-x)}$,解得 $x=8$.

经检验,$x=8$ 是原方程的根. 所以 $13-x=13-8=5$(人).

答:应分配 8 人去擦玻璃,5 人去擦课桌椅.

才能使这两组恰好同时完成任务.

## 课时训练 37 中位数和众数

**【基础巩固】**

**1.** C **2.** D **3.** D

**4.** 1 **提示**:由统计图知,共有 $8+19+10+3=40$(人),中位数应为第 20 个数与第 21 个数的平均数,而第 20 个数和第 21 个数都是 1 h,则中位数是 1 h.

**5.** $-1$ 或 3 或 9 **提示**:根据题意,得 $\frac{1+4+6+x}{4}=\frac{1+4}{2}$ 或 $\frac{1+4+6+x}{4}=\frac{x+4}{2}$ 或 $\frac{1+4+6+x}{4}=\frac{4+6}{2}$,解得 $x=-1$ 或 $x=3$ 或 $x=9$.

**6.** 2 **提示**:根据题意,得这个样本共有 $12+24+18+10+6=70$(个)数据,且 $12+24=36$,所以第 35 个数据和第 36 个数据都在第 2 组,所以中位数在第 2 组.

**7.** **解**:(1) 70 65

(2) 这 10 名技术员组装个数的平均数为 $\frac{1}{10}\times(55\times2+60\times2+65\times2+70\times3+80\times1)=65$.

(3) 我认为这个"定额"确定为 65 比较合理. 因为 65 既是中位数,又是平均数,是大多数人能达到的定额,故定额为 65 较为合理.

**【拓展提优】**

**1.** C **提示**:两次测试,最低分在第一次测试中,选项 A 错误;根据此条形统计图,第二次测试的分数明显高于第一次的分数,选项 B 错误;共有 100 名学生,所以中位数应是第 50 个数和第 51 个数的平均数,第一次测试的中位数落在 20~39 段内,选项 C 正确;第二次测试的中位数应落在 40~59 段内,选项 D 错误.

**2.** B **提示**:$\bar{x}=\frac{15\times4+25\times6+35\times7+45\times13+20n}{50}=\frac{1\,040+20n}{50}=20+\frac{4+2n}{5}$,$n$ 对 $\bar{x}$ 有影响,故①不正确,②正确;由表知,数据已经排序,第 25 个数与第 26 个数的平均数是 45,故③正确;众数不一定是 50,故④不正确.

**3.** 6 **提示**:由题意,得 $\begin{cases}a+2b=6\times4-3-5,\\a+b=6\times3-6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=8,\\b=4.\end{cases}$ 若将这两组数据合并为一组数据,则按从小到大的顺序排列为 3,4,5,6,8,8,8. 所以这组数据的中位数是 6.

**4.** 21 **提示**:由条件可知,其中有三个数一定是 4,6,6. 又因为这 5 个数是整数且 6 为唯一的众数,并且从小到大排列,所以当前面两个数是 2 和 3 时,这 5 个整数的和最大. 所以这 5 个整数的和最大是 21.

**5.** $2k^2-k$ **提示**:由题意可知,题中这组数据的中位数与平均数相等. 因为这组数据的各数之和是 $s$,中位数是 $k$,所以 $s=nk$. 因为 $\frac{n+1}{2}=k$,所以 $n=2k-1$,所以 $s=nk=(2k-1)k=2k^2-k$.

**6.** **解**:(1) 85 100

(2) 因为两个班级的平均数相同,九年级(1)班的中位数高,所以九年级(1)班的成绩好些.

(3) 如果在两个班参加复赛的选手中分别选出 2 人参加决赛,那么九年级(2)班实力更强些. 因为平均数相同,在高分区中,九年级(1)班两人成绩分别为 100 分、85 分,而九年级(2)班两人成绩均为 100 分.

## 课时训练 38 数据的离散程度

**【基础巩固】**

**1.** D **2.** D **3.** C

**4.** 10 **提示**:100,101,99,98,102 的平均数为 $\bar{x}=\frac{100+101+99+98+102}{5}=100$,所以离差平方和 $d^2=(100-100)^2+(101-100)^2+(99-100)^2+(98-100)^2+(102-100)^2=10$.

**5.** 0 **提示**:由于方差是反映一组数据波动大小的,而这一组数据没有波动,故它的方差为 0.

**6.** 1.5 **7.** 甲 **8.** $\frac{5}{3}$

**9.** **解**:第 6 个零件最好. 因为 $|+0.2|=0.2$,$|+0.3|=0.3$,$|-0.2|=0.2$,$|-0.3|=0.3$,$|+0.4|=0.4$,$|-0.1|=0.1$,且 $0.1<0.2<0.3<0.4$,所以第 6 个零件最好.

**10.** **解**:(1) 补全折线统计图略.

B 产品第三次的单价比上一次的单价降低了 $\frac{4-3}{4}\times100\%=25\%$.

(2) $\bar{x}_B=\frac{1}{3}\times(3.5+4+3)=3.5$(元/件),

$s_B^2=\frac{(3.5-3.5)^2+(4-3.5)^2+(3-3.5)^2}{3}=\frac{1}{6}$.

因为 B 产品的方差小,所以 B 产品的单价

波动小.

(3) 第四次调价后，对于 A 产品，这四次单价的中位数为$\frac{6+6.5}{2}=\frac{25}{4}$；对于 B 产品，因为 $m>0$，所以第四次单价大于 3 元/件. 因为$\frac{3.5+4}{2}\times2-1>\frac{25}{4}$，所以第四次单价小于 4 元/件，所以$\frac{3(1+m\%)+3.5}{2}\times2-1=\frac{25}{4}$，解得 $m=25$.

【拓展提优】

**1.** A **提示**：换人前，6 名队员身高的平均数为 $\bar{x}=\frac{180+184+188+190+192+194}{6}=188$，方差为 $s^2=\frac{1}{6}\times[(180-188)^2+(184-188)^2+(188-188)^2+(190-188)^2+(192-188)^2+(194-188)^2]=\frac{68}{3}$；换人后，6 名队员身高的平均数为 $\bar{x}=187$，方差为 $s^2=\frac{59}{3}$. 因为 $188>187$，$\frac{68}{3}>\frac{59}{3}$，所以平均数变小，方差变小.

**2.** =

**3.** **解**：(1) $\bar{x}_A=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$，$\bar{x}_B=\frac{3+3+2+4+3}{5}=3$，$s_A^2=\frac{1}{5}\times[(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2]=2$，$s_B^2=\frac{1}{5}\times[(3-3)^2+(3-3)^2+(2-3)^2+(4-3)^2+(3-3)^2]=\frac{2}{5}$.

从 2021 到 2025 年，A，B 两个旅游点平均每年的旅游人数均为 3 万人，但 A 旅游点较 B 旅游点的旅游人数波动大.

(2) 根据题意，得 $5-\frac{x}{100}\leqslant4$，解得 $x\geqslant100$.

$100-80=20$(元).

答：A 旅游点的门票至少要提高 20 元.

## 课时训练 39　数据的四分位数

【基础巩固】

**1.** D　**2.** C

**3.** B **提示**：这组数据的下四分位数是 4，上四分位数是 15，中位数为 10.5，故选项 A 与选项 C 正确，选项 B 错误；箱线图最小值是 3，最大值是 18，被墨水污染的数据中一个数是 3，一个数是 18，故选项 D 正确.

**4.** C

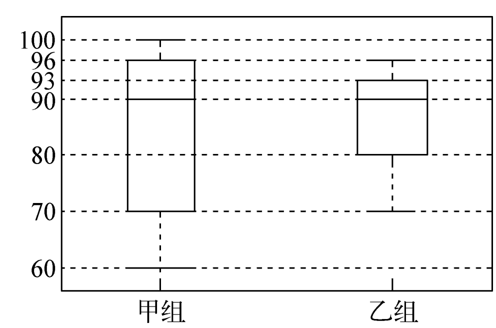
**5.** 2.5 **提示**：这组数据重新排列为 1,2,3,4,5,6,7,8,9. 前一组数据为 1,2,3,4，其中位数为 $a=\frac{2+3}{2}=2.5$，即第一四分位数为 2.5.

**6.** 9 **提示**：已知数据是从小到大排列，且共有 10 个数，$10\times0.75=7.5$，则第 75 百分位数是第 8 个数，即这组数据的上四分位数是 9.

**7.** 13 **提示**：因为这组数据的众数为 5，所以 $a=5$. 因为数据的个数为 14，且 $14\times\frac{3}{4}=10.5$，所以这组数据的上四分位数是第 11 个数，故 $b=8$. 所以 $a+b=13$.

**8.** **解**：(1) 将甲组的成绩从小到大排列为 60，70，70，80，89，91，92，96，98，100，所以 $Q_1=70$，$Q_2=\frac{89+91}{2}=90$，$Q_3=96$.

(2) 根据甲组的四分位数绘制箱线图如下：

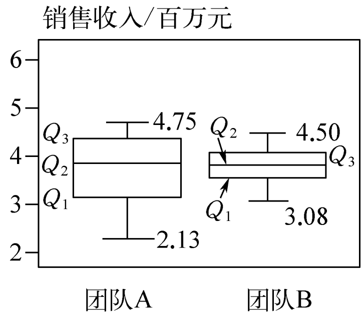



(3) 根据箱线图和四分位数可知甲组成绩的中位数和乙组相同，但甲组成绩明显比乙组的波动大.

**9.** **解**：(1) 3.630　4.125 **提示**：将团队 B 12 个月的销售收入(单位：百万元)从小到大排列为 3.08，3.40，3.60，3.66，3.74，3.87，3.93，3.99，4.10，4.15，4.32，4.50，因为 $a$ 为前 6 个数据的中位数，$b$ 为后 6 个数据的中位数，所以 $a=\frac{3.60+3.66}{2}=3.630$，$b=\frac{4.10+4.15}{2}=4.125$.

(2) 补全团队 B 的箱线图，如图所示. 由箱线图可知，团队 A 销售收入的中位数与团队 B 的几乎相等，但团队 A 各月销售收入比团队 B 各月销售收入的波动性大，即团

队 B 的销售水平更稳定.




【拓展提优】

1. B　**提示**:根据下四分位数的定义可知,$\frac{a+b}{2}=77$,所以 $a+b=154$,所以该名考生这次面试的平均得分为 $\frac{76+a+b+80+80+81+84+85}{8}=\frac{640}{8}=80$(分).

2. C　**提示**:将这 12 个数据从小到大排序,得 7.8,7.9,8.0,8.3,8.4,8.5,8.5,8.5,8.6,8.9,9.0,9.9. 由 $12\times25\%=3$ 可知,这组数据的第一四分位数为 $\frac{8.0+8.3}{2}=8.15$;由 $12\times50\%=6$ 可知,这组数据的第二四分位数为 $\frac{8.5+8.5}{2}=8.5$;由 $12\times75\%=9$ 可知,这组数据的第三四分位数为 $\frac{8.6+8.9}{2}=8.75$,所以这组数据的四分位数不可能是 9.9.

3. 33　**提示**:因为该组数据的中位数是 16,所以 $\frac{x+17}{2}=16$,解得 $x=15$. 因为该组数据的 75%分位数是 20,所以 $\frac{y+22}{2}=20$,解得 $y=18$. 则 $x+y=33$.

4. **解**:(1) 由直方图可得,$(0.02+0.06+0.08+a+0.01)\times5=1$,解得 $a=0.03$.

(2) 设上四分位数为 $x$. 因为 $(0.02+0.06)\times5=0.4<0.75$,$(0.02+0.06+0.08)\times5=0.8>0.75$,所以 $85\leqslant x<90$,则 $0.4+(x-85)\times0.08=0.75$,解得 $x=89.375$.

## 课时训练 40　数据的分组

【基础巩固】

1. B

2. B　**提示**:对于选项 A,因为 $(2-2)^2=0$,$\frac{4+8+10+12}{4}=8.5$,所以 $(4-8.5)^2+(8-8.5)^2+(10-8.5)^2+(12-8.5)^2=35$,所以 $0+35=35$;对于选项 B,因为 $\frac{2+4}{2}=3$,所以 $(2-3)^2+(4-3)^2=2$,又因为 $\frac{8+10+12}{3}=10$,所以 $(8-10)^2+(10-10)^2+(12-10)^2=8$,所以 $2+8=10$;对于选项 C,因为 $\frac{2+4+8}{3}=\frac{14}{3}$,所以 $\left(2-\frac{14}{3}\right)^2+\left(4-\frac{14}{3}\right)^2+\left(8-\frac{14}{3}\right)^2=\frac{56}{3}$,又因为 $\frac{10+12}{2}=11$,所以 $(10-11)^2+(12-11)^2=2$,所以 $\frac{56}{3}+2=\frac{62}{3}$;对于选项 D,因为 $\frac{2+4+8+10}{4}=6$,所以 $(2-6)^2+(4-6)^2+(8-6)^2+(10-6)^2=40$,$(12-12)^2=0$,所以 $40+0=40$. 因为 $10<\frac{62}{3}<35<40$,所以选项 B 符合题意.

3. 小　大　7

4. 4　**提示**:$-1$,1 的平均数为 0,则 $\{-1,1\}$ 的离差平方和为 $(-1-0)^2+(1-0)^2=2$;3,4,5 的平均数为 4,则 $\{3,4,5\}$ 的离差平方和为 $(3-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2=2$. 所以这种分组情况的组内离差平方和为 $2+2=4$.

5. 24　**提示**:第一组数据的平均数为 $(87+88+90+91+92+92)\div6=90$,则离差平方和为 $(87-90)^2+(88-90)^2+\cdots+(92-90)^2=22$;第二组数据的平均数为 $(96+98)\div2=97$,则离差平方和为 $(96-97)^2+(98-97)^2=2$. 所以组内离差平方和为 $22+2=24$.

6. **解**:将 4 个数据从小到大排序为 15,15,18,24. 把 4 个数据分成两组,共有 3 种情况:第一种情况:第一组 1 个数据 $\{15\}$,组内离差平方和为 0;第二组 3 个数据 $\{15,18,24\}$,平均数是 $\frac{15+18+24}{3}=19$,组内离差平方和为 $(15-19)^2+(18-19)^2+(24-19)^2=42$,故第一种情况的组内离差平方和为 $0+42=42$. 第二种情况:第一组 2 个数据 $\{15,15\}$,平均数是 $\frac{15+15}{2}=15$,组内离差平方和为 0;第二组 2 个数据 $\{18,24\}$,平均数是 $\frac{18+24}{2}=21$,组内离差平方和为 $(18-21)^2+(24-21)^2=18$,故第二种情况的组内离差平方和为 $0+18=18$. 第三种情况:第一组 3 个数据 $\{15,15,18\}$,平均数是 $\frac{15+15+18}{3}=16$,组内离差平方和为 $(15-16)^2+(15-16)^2+(18-16)^2=6$;第二组 1

个数据{24}，组内离差平方和为 0，故第三种情况的组内离差平方和为 $0+6=6$. 因为 $6<18<42$，所以第三种情况的组内离差平方和最小，所以将竞赛成绩分成的两组是{15，15，18}，{24}.

**【拓展提优】**

1. B
2. 解：(1) 36

(2) 85　90

(3) 方式二利于开展小组学习，由表知，方式二的组内离差平方和小于方式一，更利于开展小组学习，促进同学间的互帮互助、共同进步.

# 专题强化篇

## 专题强化 1　分式与二次根式

1. D　提示：由题意，得三个正方形的边长从左到右依次为 $\sqrt{3}$，2，$\sqrt{2}$，所以矩形的长为 $\sqrt{3}+2+\sqrt{2}$，宽为 2. 所以阴影部分的面积，即剪掉的面积＝矩形的面积－三个正方形的面积和 $=(\sqrt{3}+2+\sqrt{2})\times 2-(3+4+2)=2\sqrt{3}+2\sqrt{2}-5$.

2. C　提示：由数轴可知 $b<0$，$c>a>0$，$|c|>|b|>|a|$. 因为 $b+c>0$，$a>0$，所以 $ab+ac=a(b+c)>0$，故①正确. 因为 $\frac{a}{|a|}=1$，$\frac{b}{|b|}=-1$，$\frac{abc}{|abc|}=-1$，所以 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{abc}{|abc|}=1-1-1=-1$，故②正确. 因为 $b<0$，$c>a>0$，$|b|>|a|$，所以 $-a-b>0$，所以 $-a-b+c>0$，故③错误. 因为 $|c|>|b|>|a|$，所以 $c+b>0$，$a-b>0$，$a-c<0$，所以 $(\sqrt{a-b})^2=a-b$，$|b+c|=b+c$，$\sqrt{(a-c)^2}=c-a$，所以 $(\sqrt{a-b})^2+|b+c|-\sqrt{(a-c)^2}=a-b+b+c-c+a=2a$，故④错误. 当 $x<b$ 时，$|x-b|+|x-a|=b-x+a-x=a+b-2x>a+b-2b$，即 $|x-b|+|x-a|>a-b$；当 $b\leqslant x\leqslant a$ 时，$|x-b|+|x-a|=a-b$；当 $a<x$ 时，$|x-b|+|x-a|=x-b+x-a=2x-a-b>2a-a-b$，即 $|x-b|+|x-a|>a-b$. 因为 $x$ 为数轴上任意一点所表示的数，所以 $|x-b|+|x-a|$ 的最小值为 $a-b$，故⑤正确.

3. D　提示：$\frac{x^3-xy^2}{x(x-y)}=\frac{x(x+y)(x-y)}{x(x-y)}=x+y$，当 $x=\sqrt{5}-1$，$y=\sqrt{5}+1$ 时，原式 $=\sqrt{5}-1+\sqrt{5}+1=2\sqrt{5}$.

4. B　提示：因为被开方数是非负数，所以 $a(x-a)\geqslant 0$，$a(y-a)\geqslant 0$，$x-a\geqslant 0$，$a-y\geqslant 0$. 由 $a(x-a)\geqslant 0$ 和 $x-a\geqslant 0$，得 $a\geqslant 0$；由 $a(y-a)\geqslant 0$ 和 $a-y\geqslant 0$，得 $a\leqslant 0$. 所以 $a$ 只能等于 0. 将 $a=0$ 代入等式，得 $\sqrt{x}-\sqrt{-y}=0$，所以 $x=-y$，即 $y=-x$，将 $y=-x$ 代入原式，得原式 $=\frac{3x^2+x(-x)-(-x)^2}{x^2-x(-x)+(-x)^2}=\frac{1}{3}$.

5. $\frac{7}{2}$　提示：因为 $2<\sqrt{7}<3$，所以 $3<6-\sqrt{7}<4$，所以 $m=3$，$n=6-\sqrt{7}-3=3-\sqrt{7}$. 把 $m=3$，$n=3-\sqrt{7}$ 代入 $amn+bn^2=1$，得 $3(3-\sqrt{7})a+(3-\sqrt{7})^2b=1$. 化简，得 $-3\sqrt{7}(a+2b)+16b+9a=1$. 因为 $a$，$b$ 为有理数，所以 $a+2b=0$ 且 $9a+16b=1$，解得 $a=1$，$b=-\frac{1}{2}$. 所以 $2a-3b=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$.

6. $\sqrt{14}$　提示：因为 $x=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}$，$y=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$，所以 $\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{y}{\sqrt{xy}}+\frac{x}{\sqrt{xy}}=\frac{x+y}{\sqrt{xy}}=\frac{\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=\sqrt{14}$.

7. 解：(1) $1\frac{1}{20}$

(2) $1+\frac{1}{n(n+1)}$　提示：$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\frac{\sqrt{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}}{n(n+1)}=\frac{\sqrt{[n(n+1)+1]^2}}{n(n+1)}=\frac{n(n+1)+1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n(n+1)}$.

8. ①③④　提示：$a_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\sqrt{5}=1$，故①正确. $a_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\sqrt{5}=1$，故②错误. “斐波那契数列”中的前 8 个数是 1，1，2，3，5，8，13，21，故③正确. 1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89……除以 4 所得的余数分别是 1，1，2，3，1，0，1，1，2，3，1……余数每 6 个为一循环，$2\,026\div 6=337$……4，所以在新数列中，第 2 026 项的值是 3，故④正确.

**9.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$　提示：原式$=\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{x+2}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x+1}$. 因为 $x=\frac{4}{\sqrt{2}}-(\sqrt{7}+\sqrt{6})(\sqrt{7}-\sqrt{6})=2\sqrt{2}-(7-6)=2\sqrt{2}-1$，所以原式$=\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}-1+1}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

**10.** 45　提示：因为 $x=\frac{1}{\sqrt{2\,026}-\sqrt{2\,025}}=\sqrt{2\,026}+\sqrt{2\,025}$，所以原式$=x^5(x-2\sqrt{2\,025})-x^4+x^3-2\sqrt{2\,026}x^2+2x-\sqrt{2\,026}=x^5(\sqrt{2\,026}-\sqrt{2\,025})-x^4+x^3-2\sqrt{2\,026}x^2+2x-\sqrt{2\,026}=x^4[x(\sqrt{2\,026}-\sqrt{2\,025})-1]+x^3-2\sqrt{2\,026}x^2+2x-\sqrt{2\,026}=x^4[(\sqrt{2\,026}+\sqrt{2\,025})(\sqrt{2\,026}-\sqrt{2\,025})-1]+x^3-2\sqrt{2\,026}x^2+2x-\sqrt{2\,026}=x^4(2\,026-2\,025-1)+x^3-2\sqrt{2\,026}x^2+2x-\sqrt{2\,026}=x^3-2\sqrt{2\,026}x^2+2x-\sqrt{2\,026}=x^2(x-2\sqrt{2\,026})+2x-\sqrt{2\,026}=x^2(\sqrt{2\,025}-\sqrt{2\,026})+2x-\sqrt{2\,026}=x[x(\sqrt{2\,025}-\sqrt{2\,026})+2]-\sqrt{2\,026}=x[(\sqrt{2\,025}+\sqrt{2\,026})\times(\sqrt{2\,025}-\sqrt{2\,026})+2]-\sqrt{2\,026}=x(2\,025-2\,026+2)-\sqrt{2\,026}=x-\sqrt{2\,026}=\sqrt{2\,026}+\sqrt{2\,025}-\sqrt{2\,026}=\sqrt{2\,025}=45$.

**11.** **解**：(1) 原式$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}(\sqrt{2}+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

(2) 原式$=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{2}-\sqrt{3})+\sqrt{7}(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{\sqrt{5}(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{7}(\sqrt{2}+\sqrt{3})}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\sqrt{6}-2-3+\sqrt{6}=2\sqrt{6}-5$.

(3) 原式$=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{11}+4(\sqrt{7}+\sqrt{6})}{\sqrt{7}(\sqrt{7}+\sqrt{11})+\sqrt{6}(\sqrt{7}+\sqrt{11})}=\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{11})+4(\sqrt{7}+\sqrt{6})}{(\sqrt{7}+\sqrt{6})(\sqrt{7}+\sqrt{11})}=\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}+\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{11}}=\sqrt{7}-\sqrt{6}+\sqrt{11}-\sqrt{7}=\sqrt{11}-\sqrt{6}$.

**12.** **解**：(1) 6　3　提示：当 $x>0$ 时，$x+\frac{9}{x}\geqslant2\sqrt{x\cdot\frac{9}{x}}$，所以 $x+\frac{9}{x}\geqslant6$，当且仅当 $x=\frac{9}{x}$，即 $x=3$ 时，$x+\frac{9}{x}$ 有最小值，最小值为 6.

(2) $6\sqrt{2}$　$\sqrt{2}$　提示：当 $x>0$ 时，$3x+\frac{6}{x}\geqslant2\sqrt{3x\cdot\frac{6}{x}}$，所以 $3x+\frac{6}{x}\geqslant2\sqrt{18}=6\sqrt{2}$，当且仅当 $3x=\frac{6}{x}$，即 $x=\sqrt{2}$ 时，$3x+\frac{6}{x}$ 有最小值，最小值为 $6\sqrt{2}$.

(3) 10　40　提示：因为 $AB=x$ m，所以 $AD=\frac{200}{x}$ m，所以篱笆的总长度为$\left(2x+\frac{200}{x}\right)$m. 因为 $2x+\frac{200}{x}\geqslant2\sqrt{2x\cdot\frac{200}{x}}$，所以 $2x+\frac{200}{x}\geqslant40$，当且仅当 $2x=\frac{200}{x}$，即 $x=10$ 时，$2x+\frac{200}{x}$ 有最小值，最小值为 40.

## 专题强化 2　平行四边形中的折叠问题

**1.** C　**2.** A　**3.** D

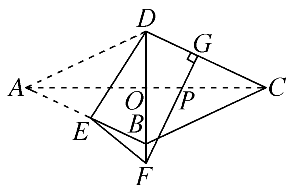
**4.** C　提示：设 $EF$ 与 $OA$ 的交点为 $M$. 根据题意，得 $OB=\frac{1}{2}BD=4$，所以 $OA=\sqrt{AB^2-OB^2}=3$. 由折叠可知，$EF$ 垂直平分 $AO$，所以 $AE=EO$，所以 $\angle EAO=\angle EOA$. 因为 $\angle AOD=90°$，所以 $\angle AOE+\angle EOD=90°$，$\angle EAO+\angle EDO=90°$，所以 $\angle EOD=\angle EDO$，所以 $EO=ED=AE$，同理，$BF=AF$，所以 $EF=\frac{1}{2}BD=4$. 又因为 $AM=OM=\frac{1}{2}OA=\frac{3}{2}$，所以$\triangle OEF$ 的面积为$\frac{1}{2}EF\cdot OM=\frac{1}{2}\times4\times\frac{3}{2}=3$.

**5.** D　提示：根据题意，得$\angle DAF=\angle FAO=\angle OAE=\frac{1}{3}\angle DAB=30°$. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，设 $BC=x$，则 $AC=2x$，由勾股定理，得 $AB^2+BC^2=AC^2$，即 $3^2+x^2=(2x)^2$，解得 $x=\sqrt{3}$（负值舍去）. 所以 $BC$ 的长为$\sqrt{3}$.

**6.** 114°

**7.** 1　提示：如图，连接 $AC$ 交 $DF$ 于点 $O$，交 $FG$ 于点 $P$. 因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $AD=CD=AB=7$，$BD\perp AC$，$OD=OB$. 由翻折，得 $FD=AD=7$，所以 $CD=FD$. 因为 $CG=4$，所以 $DG=CD-CG=3$. 因为 $FG\perp DC$，$BD\perp AC$，所以$\angle FGD=\angle COD=90°$. 在$\triangle OCD$ 和$\triangle GFD$ 中，$\begin{cases}\angle COD=\angle FGD,\\ \angle ODC=\angle GDF,\\ CD=FD,\end{cases}$所以$\triangle OCD\cong\triangle GFD$(AAS)，所以 $OD=DG=3$，所以 $OB=OD=3$，所以 $BD=$

$OD+OB=6$，所以 $BF=FD-BD=1$.




**8.** $\dfrac{5}{3}$或 15　**提示**：由矩形的性质，得 $CD=AB=3$，$BC=AD=5$，$\angle D=90^\circ$. 由折叠的性质，得 $CF=BC=5$，$EF=BE$. 在 Rt$\triangle CDF$ 中，由勾股定理，得 $DF=\sqrt{CF^2-CD^2}=4$. 设 $BE=EF=x$. 如图 1，当点 $E$ 在线段 $AB$ 上时，$AF=AD-DF=1$，$AE=AB-BE=3-x$. 在 Rt$\triangle EAF$ 中，由勾股定理，得 $EF^2=AE^2+AF^2$，即 $x^2=(3-x)^2+1$，解得 $x=\dfrac{5}{3}$，所以 $BE=\dfrac{5}{3}$. 如图 2，当点 $E$ 在 $BA$ 的延长线上时，$AF=AD+DF=9$，$AE=BE-AB=x-3$. 在 Rt$\triangle AEF$ 中，由勾股定理，得 $EF^2=AE^2+AF^2$，即 $x^2=(x-3)^2+9^2$，解得 $x=15$，所以 $BE=15$.

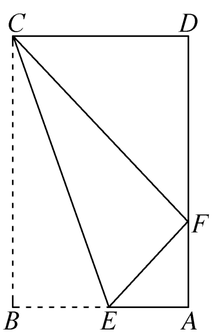



**图 1**

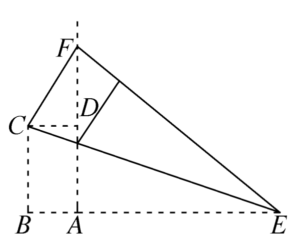
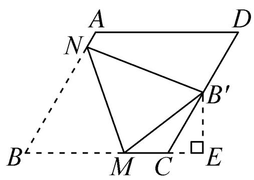



**图 2**

**9.** 2.8　**提示**：如图，过点 $B'$ 作 $B'E\perp BC$，交 $BC$ 的延长线于点 $E$. 因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $AB=BC=CD=AD=4$，$AB/\!/CD$. 因为 $B'$ 是 $CD$ 的中点，所以 $B'C=2$. 因为 $\angle B'CE=\angle B=60^\circ$，所以 $CE=\dfrac{1}{2}B'C=1$. 由勾股定理可得，$B'E=\sqrt{B'C^2-CE^2}=\sqrt{3}$. 设 $BM=x$，则 $ME=BC+CE-BM=4+1-x=5-x$. 由折叠的性质，知 $B'M=BM=x$. 由勾股定理，得 $B'M^2-ME^2=B'E^2$，所以 $x^2-(5-x)^2=(\sqrt{3})^2$，解得 $x=2.8$.




**10.** 3 或$\dfrac{7}{2}$　**提示**：由 $DA'=1$，则分两种情况讨论：①当点 $A'$ 在边 $AD$ 上，如图 1 所示，因为菱形 $ABCD$ 的边长为 4，即 $AD=4$，所以 $AA'=AD-DA'=3$. 由翻折，得 $AF=A'F=\dfrac{3}{2}$，且 $EF\perp AA'$. 在 Rt$\triangle AEF$ 中，$\angle AFE=90^\circ$，$\angle A=60^\circ$，所以 $\angle AEF=30^\circ$，所以 $AE=2AF=2\times\dfrac{3}{2}=3$. ②当点 $A'$在边 $CD$ 上，如图 2 所示，过点 $B$ 作 $BM\perp CD$ 于点 $M$，过点 $E$ 作 $EN\perp CD$ 于点 $N$，所以 $EN/\!/BM$. 因为 $BC=CD=AB=4$，所以 $CA'=CD-DA'=3$，由翻折，得 $AE=A'E$，连接 $AA'$，则 $EF\perp AA'$. 在 Rt$\triangle BCM$ 中，$\angle C=\angle A=60^\circ$，所以$\angle CBM=30^\circ$，所以 $CM=\dfrac{1}{2}BC=2$. 由勾股定理，得 $BM=\sqrt{BC^2-CM^2}=2\sqrt{3}$. 又因为 $AB/\!/CD$，$EN/\!/BM$，所以四边形 $BMNE$ 是平行四边形，则 $EN=BM=2\sqrt{3}$，$EB=MN$. 因为 $EN\perp CD$，所以$\angle A'NE=90^\circ$. 在Rt$\triangle A'EN$ 中，由勾股定理，得 $EN^2+A'N^2=A'E^2$. 设 $AE=x$，则 $A'E=AE=x$，$MN=EB=4-x$，$A'N=A'C-MC-MN=3-2-(4-x)=x-3$，所以$(2\sqrt{3})^2+(x-3)^2=x^2$，解得 $x=\dfrac{7}{2}$. 综上所述，$AE$ 的长为 3 或$\dfrac{7}{2}$.

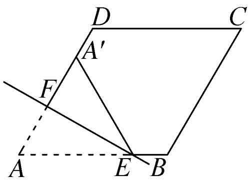



**图 1**

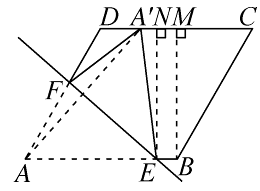



**图 2**

**11.** (1) **证明**：由折叠的性质，得$\angle DBC=\angle DBE$. 又由矩形的性质，得 $AD/\!/BC$，所以 $\angle DBC=\angle ADB$，所以 $\angle DBE=\angle ADB$，所以 $BF=DF$.

(2) ①**证明**：因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $AD/\!/BC$，所以 $FD/\!/BG$. 又因为 $DG/\!/BE$，即 $DG/\!/BF$，所以四边形 $BFDG$ 是平行四边形. 由(1)，得 $BF=DF$，所以四边形 $BFDG$ 是菱形.

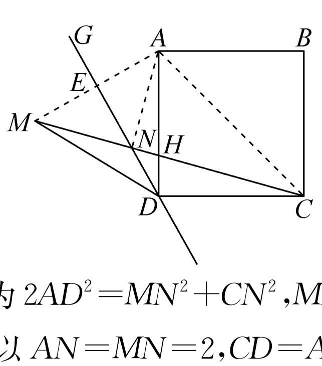
②**解**：因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以$\angle A=90^\circ$. 在 Rt$\triangle BAD$ 中，由勾股定理，

得 $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$. 由①,得四边形 $BFDG$ 是菱形,所以 $OB=\frac{1}{2}BD=\frac{5}{2}$. 设 $DF=BF=x$,所以 $AF=AD-DF=4-x$. 在 $Rt\triangle BAF$ 中,由勾股定理,得 $AB^2+AF^2=BF^2$,即 $3^2+(4-x)^2=x^2$,解得 $x=\frac{25}{8}$,所以 $BF=\frac{25}{8}$. 在 $Rt\triangle BOF$ 中,由勾股定理,得 $OF=\sqrt{BF^2-OB^2}=\sqrt{\left(\frac{25}{8}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{15}{8}$,所以 $FG=2OF=\frac{15}{4}$.

**12. 解**:(1) 等腰三角形 **提示**:因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以 $AD=CD$. 由翻折,得 $AD=DM$,所以 $CD=DM$,所以$\triangle MDC$ 是等腰三角形.

(2) $2AD^2=MN^2+CN^2$,证明如下:

如图,连接 $AM$,$AN$,$AC$. 设 $AD$ 与 $CM$ 的交点为 $H$. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以 $AD=CD$,$\angle ADC=90°$. 在 $Rt\triangle ADC$ 中,$AC^2=AD^2+CD^2=2AD^2$. 由轴对称,得 $AN=MN$,$\angle DAN=\angle DMN$. 因为 $CD=DM$,所以$\angle DCM=\angle DMC$,所以$\angle DCM=\angle DAN$. 又因为 $\angle AHN=\angle CHD$,$\angle DCM+\angle CHD+\angle CDH=\angle DAN+\angle AHN+\angle ANH=180°$,所以$\angle ANH=\angle CDH=90°$. 在$Rt\triangle ANC$ 中,$AC^2=AN^2+CN^2=MN^2+CN^2$,所以 $2AD^2=MN^2+CN^2$.

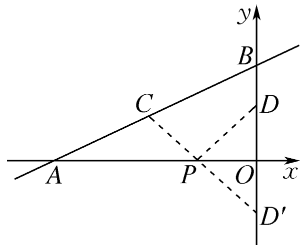



(3) 因为 $2AD^2=MN^2+CN^2$,$MN=2$,$CN=2\sqrt{3}$,所以 $AN=MN=2$,$CD=AD=2\sqrt{2}$. 因为 $\angle ANM=\angle ANC=90°$,所以 $AM=\sqrt{2}AN=2\sqrt{2}$. 由轴对称,得 $DE\perp AM$,$AE=\frac{1}{2}AM=\sqrt{2}$,所以 $EN=\sqrt{AN^2-AE^2}=\sqrt{2}$,所以 $ED=\sqrt{AD^2-AE^2}=\sqrt{6}$,所以 $DN=ED-EN=\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

## 专题强化 3　一次函数与动点、几何图形的综合运用

**1.** B **提示**:由图象可知,点 $P$ 从点 $A$ 运动到点 $C$ 所用的时间为 4 s. 因为点 $P$ 的运动速度为 1 cm/s,所以 $AB+BC=4$ cm,所以正方形 $ABCD$ 的边长为 2cm. 因为 $E$ 是边 $AD$ 的中点,所以 $DE=1$ cm,所以 $EC=\sqrt{CD^2+DE^2}=\sqrt{5}$ cm. 当点 $P$ 在 $AB$ 上运动时,$\triangle PEC$ 的边 $EC$ 不变,边 $EC$ 上的高越来越大,即 $y$ 随 $x$ 的增大而增大;当点 $P$ 在 $BC$ 上运动时,$\triangle PEC$ 的边 $CP$ 上的高为 2 cm,边 $CP$ 越来越小,即 $y$ 随 $x$ 的增大而减小. 所以当点 $P$ 运动到点 $B$ 时,$\triangle PEC$ 的面积最大,所以$\triangle PEC$ 面积的最大值为 $\frac{1}{2}\times2\times2=2(cm^2)$.

**2.** D **提示**:如图,作点 $D$ 关于 $x$ 轴的对称点 $D'$,连接 $CD'$ 交 $x$ 轴于点 $P$,连接 $PD$,此时 $PC+PD$ 的值最小,最小值为 $CD'$的长. 将 $y=0$,$x=0$ 分别代入 $y=\frac{1}{2}x+8$,易得点 $A(-16,0)$,点 $B(0,8)$. 因为 $C$,$D$ 分别为线段 $AB$,$OB$ 的中点,所以点 $C(-8,4)$,点 $D(0,4)$,所以点 $D'$的坐标为$(0,-4)$. 设直线 $CD'$ 的函数解析式为 $y=kx+b$,将点 $C(-8,4)$,$D'(0,-4)$代入,得 $\begin{cases}-8k+b=4,\\b=-4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=-4.\end{cases}$ 所以直线 $CD'$的函数解析式为 $y=-x-4$. 令 $y=0$,则 $0=-x-4$,解得 $x=-4$,所以点 $P$ 的坐标为$(-4,0)$.



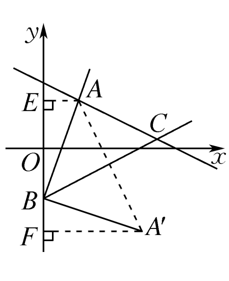

**3.** B **提示**:作点 $A(0,1)$关于 $x$ 轴的对称点 $D$,连接 $BD$ 交 $x$ 轴于点 $C$,则点 $D(0,-1)$,此时 $CA+CB$ 的值最小. 设直线 $BD$ 的函数解析式为 $y=kx+b(k\neq0)$,将点 $B(3,2)$,$D(0,-1)$代入,得 $\begin{cases}2=3k+b,\\-1=b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1,\\b=-1.\end{cases}$ 所以直线 $BD$ 的函数解析式为 $y=x-1$. 当 $y=0$ 时,$x=1$,所以点 $C(1,0)$.

**4.** $1+\sqrt{5}$ 或 3 **提示**:由 $y=-2x+2$,得点 $A(1,0)$,$B(0,2)$,即 $OA=1$,$OB=2$. 在 $Rt\triangle AOB$ 中,$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{5}$. ① 当 $\angle ACD=90°$ 时,易证$\triangle AOB\cong\triangle DCA$,所以 $DA=AB=\sqrt{5}$,所以 $OD=OA+DA=1+\sqrt{5}$;② 当 $\angle ADC=90°$ 时,易证

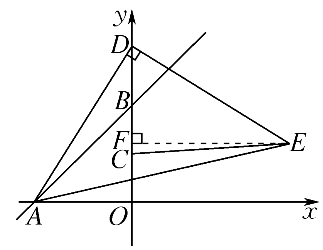
$\triangle AOB \cong \triangle CDA$，所以 $DA=OB=2$，所以 $OD=OA+DA=3$.

**5.** $3\sqrt{3}$　**提示**：连接 $OM$. 因为 $ME\perp OA$，$MF\perp OB$，所以$\angle MFO=\angle MEO=90^{\circ}$. 又因为$\angle AOB=90^{\circ}$，所以四边形 $MEOF$ 是矩形，所以 $OM=EF$，所以要求 $EF$ 的最小值，只需求出 $OM$ 的最小值. 根据垂线段最短可知，当 $OM\perp AB$ 于点 $M$ 时，$OM$ 的长有最小值. 由题意，易得点 $A(-6,0)$，$B(0,6\sqrt{3})$，所以 $OA=6$，$OB=6\sqrt{3}$. 因为$\angle AOB=90^{\circ}$，所以根据等积法可得，$OM=\dfrac{OA\cdot OB}{AB}=\dfrac{6\times6\sqrt{3}}{12}=3\sqrt{3}$，所以 $EF$ 的最小值为 $3\sqrt{3}$.

**6.** $\left(7,\dfrac{1}{2}\right)$　**提示**：如图，将线段 $AB$ 绕点 $B$ 顺时针旋转 $90^{\circ}$，得到 $A'B$，过点 $A$ 作 $AE\perp y$ 轴于点 $E$，过点 $A'$ 作 $A'F\perp y$ 轴于点 $F$，连接 $AA'$. 易求得点 $A(2,3)$. 又因为点 $B(0,-3)$，所以 $AE=2$，$BE=6$. 易证$\triangle ABE\cong\triangle BA'F$，所以 $BF=AE=2$，$A'F=BE=6$，所以点 $A'(6,-5)$，所以线段 $AA'$ 的中点的坐标为$(4,-1)$. 易求得直线 $AA'$ 的函数解析式为 $y=-2x+7$. 易知$\triangle ABA'$为等腰直角三角形，又因为$\angle ABC=45^{\circ}$，所以 $BC$ 经过点$(4,-1)$. 易得直线 $BC$ 的函数解析式为 $y=\dfrac{1}{2}x-3$. 联立，得 $\begin{cases}y=-\dfrac{1}{2}x+4,\\ y=\dfrac{1}{2}x-3,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=7,\\ y=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$ 故点 $C\left(7,\dfrac{1}{2}\right)$.




**7.** 18　**提示**：如图，过点 $E$ 作 $EF\perp y$ 轴于点 $F$，则$\angle DFE=\angle AOD=\angle ADE=90^{\circ}$，所以$\angle ADO+\angle DAO=90^{\circ}$. 因为$\angle ADE=90^{\circ}$，所以$\angle ADO+\angle EDF=90^{\circ}$，所以$\angle DAO=\angle EDF$. 因为$\triangle ADE$ 是等腰直角三角形，所以 $AD=DE$，所以$\triangle AOD\cong\triangle DFE$，所以 $OA=DF$，$OD=EF$. 因为直线 $y=x+4$ 与 $x$ 轴、$y$ 轴分别交于点 $A$，$B$，所以点 $A(-4,0)$，$B(0,4)$，所以 $DF=OA=4$，$OB=4$. 因为 $C$ 是 $OB$ 的中点，所以点 $C(0,2)$. 设 $OD=EF=m>0$，所以点 $E$ 的纵坐标 $y_E=y_F=m-4$，所以点 $E(m,m-4)$，所以 $CE^2=EF^2+CF^2=m^2+(m-4-2)^2=2(m-3)^2+18$，所以当 $m=3$ 时，$CE^2$ 取得最小值，且最小值为 18.




**8. 解**：(1) 在 $y=-x+6$ 中，令 $x=0$，得 $y=6$；令 $y=0$，得 $x=6$. 故点 $B(6,0)$，$C(0,6)$.
联立$\begin{cases}y=-x+6,\\ y=\dfrac{1}{2}x,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=4,\\ y=2.\end{cases}$所以点 $A$ 的坐标为$(4,2)$.
(2) 过点 $A$ 作 $AD\perp y$ 轴于点 $D$. 由(1)可知，$OC=6$，$AD=4$，所以 $S_{\triangle OAC}=\dfrac{1}{2}OC\cdot AD=\dfrac{1}{2}\times6\times4=12$.
(3) 由题意，得 $S_{\triangle OMC}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle OAC}=\dfrac{1}{2}\times12=6$，而 $S_{\triangle OMC}=\dfrac{1}{2}OC\cdot|x_M|=\dfrac{1}{2}\times6\times|x_M|=6$，所以$|x_M|=2$，所以 $x_M=\pm2$. 分情况讨论：当 $x_M=2$ 时，$y_M=-2+6=4$，此时点 $M$ 的坐标为$(2,4)$；当 $x_M=-2$ 时，$y_M=2+6=8$，此时点 $M$ 的坐标为$(-2,8)$. 综上所述，点 $M$ 的坐标为$(2,4)$或$(-2,8)$.

**9. 解**：当点 $C$ 在 $y$ 轴的右侧时，如图 1，连接 $AC$，因为$\angle CAB=\angle ABO$，所以 $AC/\!/OB$. 因为点 $A(0,4)$，所以点 $C$ 的纵坐标为 4. 又因为点 $C$ 在直线 $y=x+2$ 上，把 $y=4$ 代入可求得 $x=2$，所以点 $C$ 的坐标为$(2,4)$.
当点 $C$ 在 $y$ 轴的左侧时，如图 2，过点 $A$，$C$ 作直线交 $x$ 轴于点 $D$，设点 $C$ 的坐标为$(a,a+2)$，直线 $AC$ 的函数解析式为 $y=kx+b$. 把点 $A$，$C$ 的坐标代入可得$\begin{cases}b=4,\\ ak+b=a+2,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=\dfrac{a-2}{a}\\ b=4\end{cases}$，所以直线 $AC$ 的函数解析式为 $y=\dfrac{a-2}{a}x+4$. 令 $y=0$，得 $x=\dfrac{4a}{2-a}$，所以点 $D$ 的坐标为$\left(\dfrac{4a}{2-a},0\right)$.

易得 $AD^2=OD^2+OA^2=\left(\frac{4a}{2-a}\right)^2+16$，

$BD^2=\left(2-\frac{4a}{2-a}\right)^2=\left(\frac{4a}{2-a}\right)^2-\frac{16a}{2-a}+4$.

因为$\angle CAB=\angle ABO$，所以 $AD=BD$，所以 $AD^2=BD^2$，即$\left(\frac{4a}{2-a}\right)^2+4^2=\left(\frac{4a}{2-a}\right)^2-\frac{16a}{2-a}+4$，解得 $a=-6$. 经检验 $a=-6$ 是分式方程的解，则 $a+2=-4$，所以点 $C$ 的坐标为$(-6,-4)$. 综上可知，点 $C$ 的坐标为$(2,4)$或$(-6,-4)$.

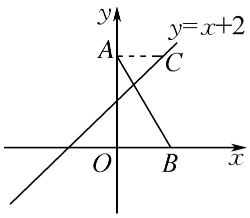


图 1

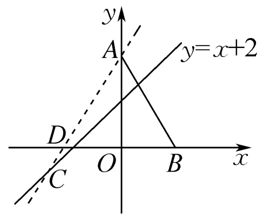


图 2

**10. 解**：(1) ①因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $CD=AB=3$，$BC=AD=2$. 设点 $C(m,2)$. 因为点 $C$ 在直线 $y=x-2$ 上，所以 $2=m-2$，解得 $m=4$，所以点 $C(4,2)$. 所以点 $D$ 的坐标为$(1,2)$.

②设经过点 $D$ 且与 $FC$ 平行的直线的函数解析式为 $y=x+b$. 将点 $D(1,2)$代入，得 $2=1+b$，解得 $b=1$. 所以 $y=x+1$.

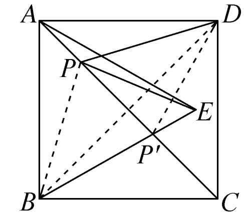
(2) 存在. 令 $y=x-2=0$，解得 $x=2$，所以点 $E(2,0)$. 因为点 $B(4,0)$，所以 $BC=BE=2$. 易得$\triangle EBC$ 为等腰直角三角形，所以 $\angle CEB=\angle ECB=45°$. 又因为 $DC\parallel AB$，所以 $\angle DCE=\angle CEB=45°$，所以$\triangle PDC$ 只能是以点 $P$ 或点 $D$ 为直角顶点的等腰直角三角形. 当$\angle PDC=90°$时，延长 $DA$ 与直线 $y=x-2$ 交于点 $P_1$，因为点 $D(1,2)$，所以点 $P_1$ 的横坐标为 1，把 $x=1$ 代入 $y=x-2$，解得 $y=-1$，所以点 $P_1(1,-1)$. 当$\angle DPC=90°$时，作 $DC$ 的垂直平分线与直线 $y=x-2$ 交于点 $P_2$，易求得点 $P_2$ 的横坐标为 $\frac{1+4}{2}=\frac{5}{2}$，把 $x=\frac{5}{2}$ 代入 $y=x-2$，解得 $y=\frac{1}{2}$，所以点 $P_2\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$. 综上所述，符合条件的点 $P$ 的坐标为$(1,-1)$或$\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$.

(3) 点 $M$ 的坐标为$(-1,0)$或$(5,0)$或$(3,4)$.

提示：当 $y=0$ 时，$x-2=0$，解得 $x=2$，所以 $OE=2$. 若 $DE$ 是平行四边形的对角线，则 $EM=CD=3$，所以 $OM=EM-OE=3-2=1$，此时点 $M$ 的坐标为$(-1,0)$. 若 $CE$ 是平行四边形的对角线，则 $EM=CD=3$，$OM=OE+EM=2+3=5$，此时点 $M$ 的坐标为$(5,0)$. 若 $CD$ 是平行四边形的对角线，则 $DM=EC$. 又因为点 $M$，$C$ 分别可看作由点 $D$，$E$ 先向右平移 2 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度所得，所以此时点 $M$ 的坐标为$(3,4)$.

## 专题强化 4　几何最值与路径

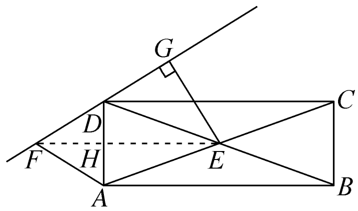
**1.** D　**提示**：设 $BE$ 与 $AC$ 交于点 $P'$，如图，连接 $BD$，$PB$，$DP'$. 因为点 $B$ 与点 $D$ 关于 $AC$ 对称，所以 $PD=PB$，所以 $PD+PE=PB+PE$，所以当点 $B$，$P$，$E$ 三点共线时，$PD+PE$ 取得最小值，此时点 $P$ 与点 $P'$ 重合，所以 $PD+PE$ 的最小值为 $P'B+P'E=BE$. 因为正方形 $ABCD$ 的面积为 9，所以 $AB^2=9$，所以 $AB=3$. 因为$\triangle ABE$ 是等边三角形，所以 $BE=AB=3$. 所以 $PD+PE$ 的最小值为 3.



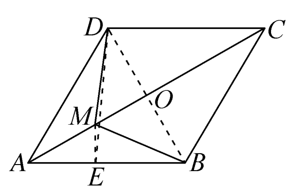

**2.** D　**提示**：连接 $AP$. 因为 $AB^2+AC^2=BC^2$，所以$\triangle ABC$ 是直角三角形，所以$\angle BAC=90°$. 因为 $PE\perp AB$，$PF\perp AC$，所以$\angle PEA=\angle PFA=90°$，所以四边形 $AEPF$ 是矩形，所以 $EF=AP$. 因为 $M$ 是 $EF$ 的中点，所以 $M$ 是 $EF$ 与 $AP$ 的交点，所以 $AM=MP=\frac{1}{2}AP$，所以点 $M$ 在$\triangle ABC$ 的中位线上运动，从而所求点 $M$ 运动的路径长为$\frac{1}{2}BC=2.5$.

**3.** C　**提示**：如图，连接 $EF$ 交 $AD$ 于点 $H$. 因为 $G$ 是直线 $DF$ 上一点，$E$ 为定点，所以当 $EG\perp DF$ 时，线段 $EG$ 的长有最小值. 因为$\triangle ADF$ 为等边三角形，所以 $AF=DF$，所以点 $F$ 在边 $AD$ 的垂直平分线上. 因为四边形 $ABCD$ 为矩形，所以 $DE=AE$，所以点 $E$ 在 $AD$ 的垂直平分线上，所以 $EF$ 垂直平分 $AD$. 因为$\angle DFA=60°$，所以$\angle DFH=30°$. 因为 $AD=2\sqrt{3}$，所以 $DH=\sqrt{3}$. 所以 $FH=\sqrt{3}DH=3$. 因为 $H$ 是 $AD$ 的中点，$E$ 是 $DB$ 的中点，所以 $EH=\frac{1}{2}AB=5$. 所以 $EF=FH+EH=3+5=8$. 因为

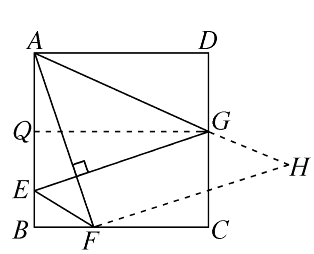
$\angle EGF=90°$,$\angle DFH=30°$,所以 $EG=\frac{1}{2}EF=4$. 所以线段 $EG$ 长的最小值为 4.



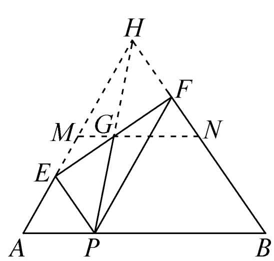

**4.** D　**提示**:如图,过点 $M$ 作 $ME\perp AB$ 于点 $E$,连接 $DE$,连接 $BD$ 交 $AC$ 于点 $O$. 因为四边形 $ABCD$ 为菱形,$\angle ABC=120°$,所以 $\angle DAB=60°$,$AD=AB=6$,所以$\triangle ADB$ 是等边三角形,所以$\angle MAE=30°$,所以 $AM=2ME$. 因为 $MD=MB$,所以 $MA+MB+MD=2ME+2DM=2DE$,所以当点 $M$ 运动到 $DE$ 上,且 $DE\perp AB$ 时,$DE$ 的长取得最小值,此时 $MA+MB+MD$ 有最小值. 因为菱形 $ABCD$ 的边长为 6,所以 $DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$,所以 $2DE=6\sqrt{3}$. 所以 $MA+MB+MD$ 的最小值是 $6\sqrt{3}$.




**5.** C　**提示**:因为正方形 $ABCD$ 的边长为 3,且 $CF=2BF$,所以 $AB=BC=3$,$BF=1$,$CF=2$. 所以 $AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$. 如图,过点 $G$ 作 $GQ\perp AB$ 于点 $Q$,易得四边形 $AQGD$ 为矩形,所以 $DG=AQ$. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形,$AF\perp EG$,所以$\angle BAF+\angle AEG=90°$,$\angle EGQ+\angle AEG=90°$,所以 $\angle BAF=\angle EGQ$. 易证 $\triangle ABF\cong\triangle GQE$(ASA),所以 $AF=EG$,所以 $EG=AF=\sqrt{10}$. 过点 $F$ 作 $FH/\!/EG$,过点 $G$ 作 $GH/\!/EF$,$FH$,$GH$ 交于点 $H$,所以四边形 $EFHG$ 是平行四边形,所以 $GH=EF$,$EG=FH$,所以 $EF+AG=GH+AG$. 因为 $AG+GH\geqslant AH$,所以当 $A$,$G$,$H$ 三点共线时,$AG+GH$ 的值最小. 因为 $EG=AF$,所以 $FH=AF$. 因为 $AF\perp EG$,$EG/\!/FH$,所以 $AF\perp FH$,所以$\triangle AFH$ 是等腰直角三角形,所以 $AH=\sqrt{2}AF=2\sqrt{5}$,所以 $EF+AG$ 的最小值为 $2\sqrt{5}$.




**6.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　**提示**:如图,分别延长 $AE$,$BF$ 交于点 $H$. 因为$\angle A=\angle FPB=60°$,所以 $AH/\!/PF$. 因为$\angle B=\angle EPA=60°$,所以 $BH/\!/PE$,所以四边形 $EPFH$ 为平行四边形,所以 $EF$ 与 $HP$ 互相平分. 因为 $G$ 为 $EF$ 的中点,所以 $G$ 为 $PH$ 的中点,即在点 $P$ 的运动过程中,$G$ 始终为 $PH$ 的中点,所以点 $G$ 的运行轨迹为$\triangle HAB$ 的中位线 $MN$(点 $G$ 不与点 $M$,$N$ 重合),所以 $MN/\!/AB$,$PG<AM$. 因为当 $P$ 在 $AB$ 的中点时,$PH\perp AB$,所以此时 $PG$ 的值最小. 因为$\triangle AEP$ 和$\triangle PFB$ 是等边三角形,所以$\angle A=\angle B=60°$,所以$\triangle AHB$ 是等边三角形,所以 $AH=AB=6$,所以当点 $P$ 在 $AB$ 的中点时,$PH=3\sqrt{3}$,所以 $PG=\frac{1}{2}PH=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,所以 $PG$ 长的最小值是$\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

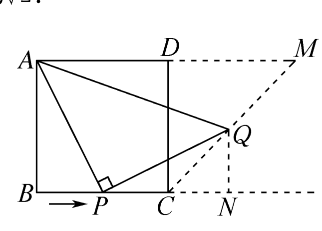



**7.** $\sqrt{2}$　**提示**:如图,延长 $AD$ 到点 $M$,使得 $DM=AD$,连接 $CM$. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形,$AB=1$,所以$\angle B=\angle ADC=90°$,$AD=BC=AB=CD=1$. 过点 $Q$ 作 $QN\perp BC$,交 $BC$ 的延长线于点 $N$. 因为 $PA=PQ$,$\angle APQ=90°$,所以 $\angle APB+\angle QPN=90°$,又因为$\angle QPN+\angle PQN=90°$,所以$\angle APB=\angle PQN$. 在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle PNQ$ 中,

$$\begin{cases}\angle B=\angle PNQ,\\ \angle APB=\angle PQN,\\ AP=PQ,\end{cases}$$

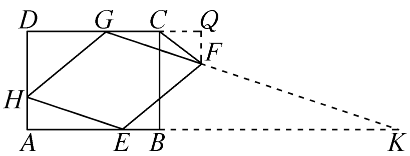
所以$\triangle ABP\cong\triangle PNQ$(AAS),

所以 $PN=AB=BC=1$,$PB=NQ$. 所以 $CN=PN-PC=BC-PC=PB=QN$,所以$\angle QCN=45°$,所以点 $Q$ 在线段 $CM$ 上,且点 $Q$ 的运动轨迹是线段 $CM$. 因为 $\angle CDM=90°$,$DM=AD=1$,所以 $CM=\sqrt{CD^2+DM^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$,所以点 $Q$ 的运动路径长为$\sqrt{2}$.

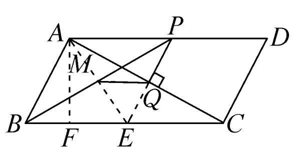



**8.** 3　**提示**:如图,过点 $F$ 作 $FQ\perp DC$,交 $DC$ 的延长线于点 $Q$,延长 $AB$,$GF$ 交于点 $K$. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形,所以 $AB=CD=12$,$BC=AD=8$,$\angle A=90°=\angle FQG$,$AB/\!/CD$,所以 $\angle QGF=$

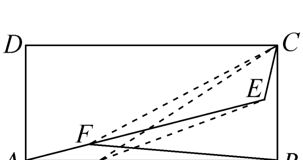
$\angle AKG$. 因为四边形 $HEFG$ 是菱形，所以 $HE=FG$，$HE\parallel FG$，所以 $\angle AEH=\angle AKG$，所以 $\angle AEH=\angle QGF$，所以 $\triangle AHE\cong\triangle QFG$(AAS)，所以 $AH=FQ=3$，所以点 $F$ 到 $CD$ 的距离为 3.




**9.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　**提示**：延长 $PQ$ 交 $BC$ 于点 $E$，连接 $AE$，过点 $A$ 作 $AF\perp BC$ 于点 $F$. 因为 $\angle BAC=90°$，$PQ\perp AC$，所以 $AB\parallel PE$. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AP\parallel BE$，所以四边形 $ABEP$ 是平行四边形. 因为 $M$ 是 $BP$ 的中点，所以 $M$ 是 $AE$ 的中点. 在 $Rt\triangle AQE$ 中，$MQ=\dfrac{1}{2}AE$，所以当 $AE$ 的长最小时，$MQ$ 的长最小，即当点 $E$ 与点 $F$ 重合时，$MQ$ 的长最小，此时 $MQ=\dfrac{1}{2}AF$. 因为 $\angle BAC=90°$，$\angle ACB=30°$，$AD=6$，所以 $AB=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}AD=3$，所以 $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=3\sqrt{3}$，所以 $AF=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，所以 $MQ=\dfrac{1}{2}AF=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.




**10.** $3\sqrt{5}$　**提示**：如图，在 $AB$ 上截取 $AG=AF$，连接 $GE$，$CF$，$CG$. 在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle AEG$ 中，$\begin{cases}AB=AE,\\ \angle BAF=\angle EAG,\\ AF=AG,\end{cases}$ 所以 $\triangle ABF\cong\triangle AEG$(SAS)，所以 $BF=GE$. 所以 $BF+CE=GE+CE\geqslant CG$，当且仅当 $C,E,G$ 三点共线时，$BF+CE$ 有最小值. 因为 $AE=AB=8$，且 $AF=\dfrac{1}{4}AE$，所以 $AF=AG=2$，所以 $BG=AB-AG=6$. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形，$AD=3$，所以 $\angle ABC=90°$，$BC=AD=3$. 在 $Rt\triangle BCG$ 中，$CG=\sqrt{BG^2+CB^2}=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$，即 $BF+CE=GE+CE\geqslant CG=3\sqrt{5}$，所以 $BF+CE$ 的最小值为 $3\sqrt{5}$.




**11.** (1) $\sqrt{13}$

(2) **证明**：如图 1，过点 $P$ 作 $MN\perp AB$，交 $AB$ 的延长线于点 $M$，交 $DC$ 的延长线于点 $N$. 由【了解性质】可知，$BH^2+CP^2=BP^2+CH^2$，所以 $CP^2-BP^2=CH^2-BH^2=(HD^2+DC^2)-(AH^2+AB^2)=HD^2-AH^2$. 又因为 $PD^2-PA^2=(HD^2+PH^2)-(AH^2+PH^2)=HD^2-AH^2$，所以 $CP^2-BP^2=PD^2-PA^2$，所以 $AP^2+CP^2=BP^2+DP^2$.

(3) **解**：①10　**提示**：设 $PB=a$，则 $PD=3a$. 由 (2)，得 $AP^2+CP^2=BP^2+DP^2$，所以 $AP^2+CP^2=a^2+9a^2=10a^2$，所以 $\dfrac{PA^2+PC^2}{PB^2}=10$.

② $\sqrt{51}-1$　**提示**：如图 2，以 $AD$，$BD$ 为边作矩形 $ADBE$，连接 $CE$，$DE$，则 $AB=DE$. 由题意，得 $CD^2+CE^2=CA^2+CB^2$，所以 $1^2+CE^2=4^2+6^2$，解得 $CE=\sqrt{51}$（负值舍去）. 当 $C,D,E$ 三点共线时，$DE$ 的长最小，所以 $DE$ 的最小值即为 $AB$ 的最小值，所以 $AB$ 的最小值为 $CE-CD=\sqrt{51}-1$.

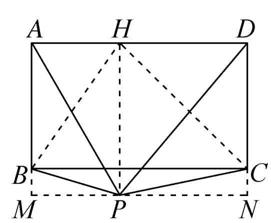



**图 1**

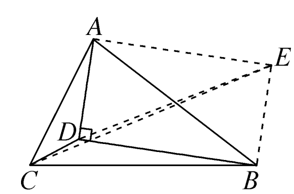



**图 2**

**12.** **解**：(1) 16　**提示**：因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $OB=OC$，$\angle OBE=\angle OCF=45°$，$\angle BOC=90°$. 因为 $\angle EOF=90°$，所以 $\angle EOF=\angle BOC$，所以 $\angle EOB=\angle FOC$. 在 $\triangle EOB$ 和 $\triangle FOC$ 中，$\begin{cases}\angle OBE=\angle OCF,\\ OB=OC,\\ \angle EOB=\angle FOC,\end{cases}$ 所以 $\triangle EOB\cong\triangle FOC$(ASA). 所以 $S_{\triangle EOB}=S_{\triangle FOC}$，所以 $S_{四边形OEBF}=S_{\triangle OBC}=\dfrac{1}{4}\cdot S_{正方形ABCD}=\dfrac{1}{4}\times8\times8=16$.

(2) 如图 1，连接 $BD$，$AC$，取 $AC$ 的中点 $O$，连接 $OB$，$OD$，延长 $BO$ 到点 $H$，在平面内取一点 $M$，连接 $MB$，$MQ$，$MD$，使得 $MB=MQ=MD$，延长 $BM$ 到点 $N$. 因为 $\angle ABC=\angle ADC=90°$，$AO=OC$，所以 $OA=OC=OB=OD$，所以 $\angle ODB=\angle OBD$，$\angle OBC=\angle OCB$，$\angle OAD=\angle ODA$，所以

$\angle DOC=\angle OAD+\angle ODA=2\angle OAD$，$\angle DOC=\angle DOH+\angle COH=2\angle DBH+2\angle CBH=2\angle DBC$，所以 $2\angle DBC=2\angle DAC$，即 $\angle DBC=\angle DAC$. 因为 $DA=DC$，$\angle ADC=90°$，所以 $\angle DAC=\angle DCA=45°$，所以 $\angle DBQ=45°$. 因为 $MB=MQ=MD$，所以 $\angle MBQ=\angle MQB$，$\angle MDB=\angle MBD=\angle MBQ+\angle DBQ$，所以 $\angle DMN=\angle DMQ+\angle QMN=2\angle MBQ+2\angle DBQ=2\angle MBQ+90°$，$\angle QMN=2\angle MBQ$，所以 $\angle DMQ=90°$，所以 $MD^2+MQ^2=DQ^2=100$，所以 $MD=MQ=MB=5\sqrt{2}$，所以根据两点之间线段最短，得 $BQ\leqslant MQ+MB=10\sqrt{2}$，所以 $BQ$ 的最大值为 $10\sqrt{2}$.

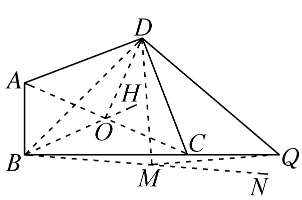



**图 1**

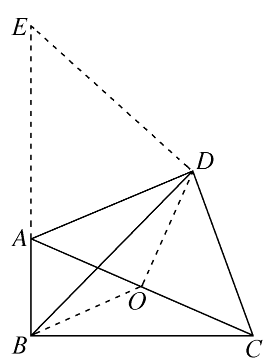



**图 2**

(3) 如图 2，将△$BDC$ 绕点 $D$ 顺时针旋转 $90°$得到△$EDA$. 因为 $\angle ABC+\angle ADC=180°$，所以 $\angle BCD+\angle BAD=\angle EAD+\angle BAD=180°$，所以 $B$，$A$，$E$ 三点共线. 因为 $DE=DB$，$\angle EDB=90°$，所以 $BE=\sqrt{2}BD$，所以 $AB+BC=AB+AE=BE=\sqrt{2}BD$，所以 $AB+BC+BD=(\sqrt{2}+1)\cdot BD$，所以当 $BD$ 的值最大时，$AB+BC+BD$ 的值最大. 取 $AC$ 的中点 $O$，连接 $OB$，$OD$. 因为 $OB=OD=\dfrac{1}{2}AC=500$ m，所以 $BD\leqslant OB+OD$，即 $BD\leqslant 1\,000$ m，所以 $B$，$O$，$D$ 三点共线时，$AB+BC+BD$ 的值最大，最大值为 $(1\,000\sqrt{2}+1\,000)$m.

# 阶段检测篇

## 第十九章检测卷

**1.** C **2.** D **3.** B **4.** B **5.** B **6.** A

**7.** B 提示：化简，得 $4\sqrt{\dfrac{2-m}{6}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{12-6m}$，$5\sqrt{\dfrac{2m-3}{4}}=\dfrac{5}{2}\sqrt{2m-3}$. 根据题意，得 $\sqrt{12-6m}$ 与 $\sqrt{2m-3}$ 化成最简二次根式后被开方数相同. 经检验，四个选项中，仅当 $m=\dfrac{15}{8}$ 时，$\sqrt{12-6m}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sqrt{2m-3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，符合题意.

**8.** C 提示：$a^2-6a-2=a^2-6a+9-9-2=(a-3)^2-11$. 当 $a=3-\sqrt{10}$ 时，原式 $=(3-\sqrt{10}-3)^2-11=10-11=-1$.

**9.** A 提示：因为 $3<\sqrt{10}<4$，所以 $-4<-\sqrt{10}<-3$，所以 $4<8-\sqrt{10}<5$，所以 $a=4$，$b=8-\sqrt{10}-4=4-\sqrt{10}$，所以 $(a+\sqrt{10})b=(4+\sqrt{10})\times(4-\sqrt{10})=6$.

**10.** B 提示：由 $a^2+b^2=4ab$，得 $(a-b)^2=2ab$，$(a+b)^2=6ab$. 因为 $a<b<0$，所以 $a-b=-\sqrt{2ab}$，$a+b=-\sqrt{6ab}$，所以 $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{-\sqrt{6ab}}{-\sqrt{2ab}}=\sqrt{3}$.

**11.** $3\sqrt{6}$ **12.** (1) $\sqrt{2}-1$ (2) 35

**13.** (1) $>$ 提示：因为 $3\sqrt{2}=\sqrt{18}$，$2\sqrt{3}=\sqrt{12}$，$18>12$，所以 $3\sqrt{2}>2\sqrt{3}$.

(2) $>$ 提示：$(\sqrt{8}-\sqrt{7})-(\sqrt{9}-\sqrt{8})=2\sqrt{8}-(\sqrt{7}+\sqrt{9})$. 因为 $(2\sqrt{8})^2=32$，$(\sqrt{7}+\sqrt{9})^2=16+2\sqrt{63}<16+2\sqrt{64}=32$，所以 $\sqrt{7}+\sqrt{9}<2\sqrt{8}$，所以 $\sqrt{8}-\sqrt{7}>\sqrt{9}-\sqrt{8}$.

**14.** $\pm5$ 提示：根据题意，得 $x-8\geqslant0$ 且 $8-x\geqslant0$，解得 $x=8$. 所以 $y=17$，所以 $x+y=8+17=25$. 所以 $x+y$ 的平方根是 $\pm5$.

**15.** 3 提示：由 $\sqrt{27-12a+2a^2}=\sqrt{2(a-3)^2+9}$ 可知，当 $a=3$ 时，代数式 $\sqrt{27-12a+2a^2}$ 的值最小，为 $\sqrt{9}=3$.

**16.** (1) $30\sqrt{2}$ 提示：由题意，得 $p=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{9+10+11}{2}=15$，所以 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{15\times(15-9)\times(15-10)\times(15-11)}=\sqrt{15\times6\times5\times4}=30\sqrt{2}$.

(2) 9 提示：$S=\sqrt{\dfrac{1}{4}\times\left[5^2\times6^2-\left(\dfrac{5^2+6^2-13}{2}\right)^2\right]}=\sqrt{\dfrac{1}{4}\times(900-24^2)}=9$.

**17.** **解**:(1) 原式$=3\sqrt{3}-2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

(2) 原式$=3+4\sqrt{3}+4+3-4=6+4\sqrt{3}$.

**18.** **解**:(1) 原式$=7-4\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}=7-5\sqrt{3}$.

(2) 原式$=(5\sqrt{48}-6\sqrt{27}+4\sqrt{15})\times\frac{1}{\sqrt{3}}=5\sqrt{16}-6\sqrt{9}+4\sqrt{5}=20-18+4\sqrt{5}=2+4\sqrt{5}$.

**19.** **解**:(1) 原式$=\frac{1}{x(x+1)}\cdot\frac{x\sqrt{(x+1)^2}}{4x}=\frac{|x+1|}{4x(x+1)}$.

当$x=\sqrt{2}$时,$x+1>0$,所以$|x+1|=x+1$,所以原式$=\frac{1}{4x}=\frac{1}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$.

(2) 原式$=\left[\frac{(a-1)(a+1)+2}{a+1}\right]\cdot\frac{1}{a^2+1}=\frac{a^2+1}{a+1}\cdot\frac{1}{a^2+1}=\frac{1}{a+1}$.

当$a=\sqrt{2}-1$时,原式$=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**20.** **解**:因为$x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}$,$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=-4$,所以$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=(\sqrt{5})^2-4=1$,所以$x-\frac{1}{x}=\pm1$.

**21.** **解**:由题意,可设布袋的长为$3k$ dm,宽为$2k$ dm,则$3k\cdot 2k=36$,解得$k=\sqrt{6}$(负值已舍),所以布袋的宽为$2\sqrt{6}$ dm,长为$3\sqrt{6}$ dm.由题意,得画板的边长为$\sqrt{16}=4$(dm).因为$2\sqrt{6}=\sqrt{24}>\sqrt{16}=4$,所以画板可以放进布袋里.

**22.** **解**:(1) $8\sqrt{2}$

(2) 由题意知,$AD=8\sqrt{2}-2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$(cm),$AB=8\sqrt{2}-7\sqrt{2}=\sqrt{2}$(cm),所以$AD\cdot AB=6\sqrt{2}\times\sqrt{2}=12(\text{cm}^2)$,即长方形木板$ABCD$的面积为$12\text{ cm}^2$.

(3) 4 **提示**:因为$4\times2<6\sqrt{2}<5\times2$,$1<\sqrt{2}<2$,所以最多能截出的木条数量为$4\times1=4$.

**23.** **解**:(1)因为$c^2=32$,$d^2=28$,所以$c^2>d^2$,所以$c>d$.

(2) $m<n$,理由如下:

因为$m^2=(2\sqrt{5}+\sqrt{6})^2=(2\sqrt{5})^2+2\times2\sqrt{5}\times\sqrt{6}+(\sqrt{6})^2=20+4\sqrt{30}+6=26+4\sqrt{30}$,$n^2=(2\sqrt{3}+\sqrt{14})^2=(2\sqrt{3})^2+2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{14}+(\sqrt{14})^2=12+4\sqrt{42}+14=26+4\sqrt{42}$,且$4\sqrt{42}>4\sqrt{30}$,所以$m^2<n^2$,所以$m<n$.

(3) $3+\sqrt{p-1}$或$3\sqrt{p-1}+1$

**提示**:$\sqrt{p-2\sqrt{p-1}}+\sqrt{4p+8\sqrt{p-1}}=\sqrt{p-1+1-2\sqrt{p-1}}+\sqrt{4(p-1+1+2\sqrt{p-1})}=\sqrt{(\sqrt{p-1}-1)^2}+\sqrt{4(\sqrt{p-1}+1)^2}=\sqrt{(\sqrt{p-1}-1)^2}+\sqrt{(2\sqrt{p-1}+2)^2}=|\sqrt{p-1}-1|+2|\sqrt{p-1}+1|$.当$0\leqslant\sqrt{p-1}\leqslant1$,即$1\leqslant p\leqslant2$时,$\sqrt{p-2\sqrt{p-1}}+\sqrt{4p+8\sqrt{p-1}}=1-\sqrt{p-1}+2+2\sqrt{p-1}=3+\sqrt{p-1}$;当$\sqrt{p-1}>1$,即$p>2$时,$\sqrt{p-2\sqrt{p-1}}+\sqrt{4p+8\sqrt{p-1}}=\sqrt{p-1}-1+2+2\sqrt{p-1}=3\sqrt{p-1}+1$.综上所述,$\sqrt{p-2\sqrt{p-1}}+\sqrt{4p+8\sqrt{p-1}}$的值为$3+\sqrt{p-1}$或$3\sqrt{p-1}+1$.

**24.** **解**:(1) $\sqrt{2}-1$

(2) 原式$=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{2\,025}-\sqrt{2\,024}=\sqrt{2\,025}-1=45-1=44$.

(3) 因为$a=\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}+2$,所以$a-2=\sqrt{5}$,所以$(a-2)^2=5$,即$a^2-4a+4=5$,所以$a^2-4a=1$.所以$2a^2-8a+1=2(a^2-4a)+1=3$.

**25.** **解**:(1) $\pm\sqrt{2}$ **提示**:因为$m^2-2\sqrt{2}m+(\sqrt{2})^2=(m-\sqrt{2})^2$,且$m^2-2\sqrt{2}m+k^2$是完全平方式,所以$k^2=(\sqrt{2})^2=2$,所以$k=\pm\sqrt{2}$.

(2) 因为$\sqrt{x+4\sqrt{5}}=1+y\sqrt{5}$,且$x,y$均为正整数,所以$x+4\sqrt{5}=(1+y\sqrt{5})^2$,所以

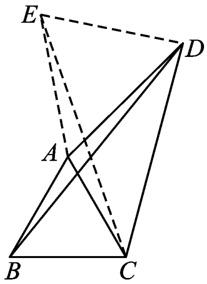
$x+4\sqrt{5}=1+2y\sqrt{5}+5y^2$，所以 $\begin{cases}x=1+5y^2,\\4\sqrt{5}=2y\sqrt{5},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=21,\\y=2,\end{cases}$ 所以 $x^y=21^2=441$.

(3) $-x^2+4\sqrt{3}x+13=-(x^2-4\sqrt{3}x)+13=-(x^2-4\sqrt{3}x+12-12)+13=-(x-2\sqrt{3})^2+25$. 因为 $(x-2\sqrt{3})^2\geqslant 0$，所以 $-(x-2\sqrt{3})^2\leqslant 0$，所以 $-(x-2\sqrt{3})^2+25\leqslant 25$，所以当 $x=2\sqrt{3}$ 时，$\sqrt{-x^2+4\sqrt{3}x+13}$ 有最大值，最大值为 5.

## 第二十章检测卷

**1.** D **2.** C **3.** A **4.** D **5.** C **6.** C **7.** C

**8.** B **提示**：如图，以 $AD$ 为边在四边形 $ABCD$ 外作等边三角形 $ADE$，易证 $\triangle ABD\cong\triangle ACE$. 所以 $CE=BD=5$. 又因为 $\angle ADC=30°$，所以 $\angle EDC=90°$. 又因为 $DE=AD=3$，所以 $CD=\sqrt{CE^2-DE^2}=4$.




**9.** D **提示**：由题意可知，中间小正方形的边长为 $a-b$. 因为每一个直角三角形的面积都是 $\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\times 8=4$，所以 $4\times\frac{1}{2}ab+(a-b)^2=25$，所以 $(a-b)^2=25-16=9$，所以 $a-b=3$.

**10.** D **提示**：由题意，得 $\angle B=30°$，$AP=30$ 海里，$\angle APB=90°$，故 $AB=2AP=60$ 海里，所以 $BP=\sqrt{AB^2-AP^2}=30\sqrt{3}$ 海里.

**11.** $\sqrt{10}$

**12.** 4.55 **提示**：设折断处离地面的高度为 $x$ 尺. 由题意可得，$x^2+3^2=(10-x)^2$，解得 $x=4.55$.

**13.** 130 **提示**：因为 $BD\perp AC$，所以 $\angle COB=\angle AOB=\angle AOD=\angle COD=90°$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle COB$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle AOD$ 中，根据勾股定理，得 $BO^2+CO^2=BC^2$，$OD^2+OA^2=AD^2$，所以 $BO^2+CO^2+OD^2+OA^2=81+49=130$. 因为 $AB^2=BO^2+AO^2$，$CD^2=OC^2+OD^2$，所以 $AB^2+CD^2=130$.

**14.** $\frac{10}{3}$ **提示**：由作图知，$DN$ 是线段 $BC$ 的垂直平分线，所以 $BD=CD$，设 $BD=x$，则 $AD=6-x$，则 $2^2+(6-x)^2=x^2$，解得 $x=\frac{10}{3}$.

**15.** 25 **提示**：①当把长方体按照正面和右面进行展开时，如图 1，所以 $BD=15$，$AD=20$，所以在 $\mathrm{Rt}\triangle ADB$ 中，$AB^2=BD^2+AD^2=625$，所以 $AB=25$.

②当沿长方体的右面和上面进行展开时，如图 2，所以 $BF=25$，$AF=10$，所以在 $\mathrm{Rt}\triangle AFB$ 中，$AB^2=BF^2+AF^2=725$. 因为 $725>625$，所以一只蚂蚁如果要沿着长方体的表面从点 $A$ 爬到点 $B$，需要爬行的最短距离是 25，由长方体的特征可得其他路径必定比①②两种更远，故不作考虑.

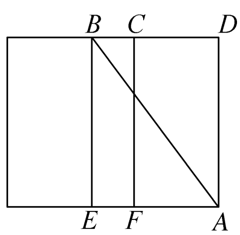


图 1

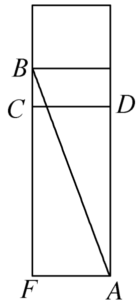


图 2

**16.** 135° $8+4\sqrt{2}$ **提示**：连接 $AC$. 因为 $\angle B=90°$，$AB=BC=4$，所以 $\angle BAC=\angle BCA=45°$，$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$. 在 $\triangle ADC$ 中，$AD=2$，$CD=6$，所以 $AD^2+AC^2=2^2+(4\sqrt{2})^2=36=CD^2$，所以 $\triangle ADC$ 是直角三角形，且 $\angle DAC=90°$，所以 $\angle BAD=\angle BAC+\angle DAC=45°+90°=135°$. 所以四边形 $ABCD$ 的面积 $=\triangle ABC$ 的面积 $+\triangle ADC$ 的面积 $=\frac{1}{2}AB\cdot BC+\frac{1}{2}AD\cdot AC=\frac{1}{2}\times 4\times 4+\frac{1}{2}\times 2\times 4\sqrt{2}=8+4\sqrt{2}$.

**17.** **解**：在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，因为 $\angle C=90°$，$\angle A=30°$，所以 $AB=2BC$. 因为 $AC=3\sqrt{2}$，所以 $BC^2+(3\sqrt{2})^2=(2BC)^2$，解得 $BC=\sqrt{6}$（负值已舍）. 所以 $AB=2\sqrt{6}$. 所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $AB+AC+BC=2\sqrt{6}+3\sqrt{2}+\sqrt{6}=3\sqrt{2}+3\sqrt{6}$，$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}AC\cdot BC=$

$\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\sqrt{6}=3\sqrt{3}$.

**18.** **解**:根据题意,得 $OA=60$ m,在 Rt$\triangle BOA$ 中,$BO^2=AB^2+AO^2=11^2+60^2=3\ 721(\text{m}^2)$,所以 $BO=61$ m. 野兔从点 $A$ 到点 $B$ 用时为$\frac{11}{10}=1.1$(s). 子弹从点 $O$ 飞到点 $B$ 用时为$\frac{61}{610}=0.1$(s). 由于野兔与子弹到达点 $B$ 处的时间不相等,相差较大,故不能打中野兔.

**19.** **解**:分 2 种情况讨论.

①如图 1,当$\triangle ABC$ 是锐角三角形时,根据勾股定理,得 $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}=3$. 因为 $AB=AC$,所以 $AB=3$,所以 $BD=AB-AD=1$,所以 $BC=\sqrt{CD^2+BD^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+1^2}=\sqrt{6}$.

②如图 2,当$\triangle ABC$ 是钝角三角形时,同理可得 $AC=AB=3$,所以 $BD=AB+AD=5$,所以 $BC=\sqrt{CD^2+BD^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+5^2}=\sqrt{30}$.

综上所述,$BC$ 的长为$\sqrt{6}$或$\sqrt{30}$.

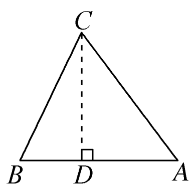


**图 1**

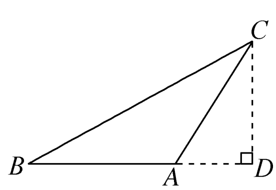
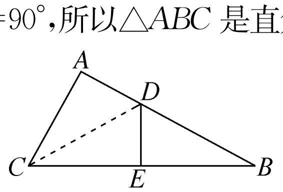


**图 2**

**20.** (1) **证明**:如图,连接 $CD$. 因为 $DE$ 是 $BC$ 的垂直平分线,所以 $CD=DB$. 因为 $BD^2-DA^2=AC^2$,所以 $CD^2-DA^2=AC^2$,所以 $CD^2=AD^2+AC^2$,所以$\triangle ACD$ 是直角三角形,且$\angle A=90°$,所以$\triangle ABC$ 是直角三角形.




(2) **解**:因为 $AD:BD=3:4$,所以可设 $AD=3x$,$BD=4x$,则 $CD=BD=4x$,$AB=AD+DB=7x$. 在 Rt$\triangle ACD$ 中,$AC=\sqrt{CD^2-AD^2}=\sqrt{16x^2-9x^2}=\sqrt{7}x$. 在 Rt$\triangle ABC$ 中,由勾股定理,得 $AC^2+AB^2=BC^2$,即 $(\sqrt{7}x)^2+(7x)^2=(2\sqrt{14})^2$,解得 $x=1$(负值已舍),所以 $AC=\sqrt{7}\times1=\sqrt{7}$.

**21.** **解**:过点 $A$ 作 $AB\perp$直线 $l$ 于点 $B$. 根据题意,得 $AB=30$ m,$AD=50$ m. 在Rt$\triangle ABD$ 中,由勾股定理,得 $BD=\sqrt{AD^2-AB^2}=40$ m. 根据题意,可设 $CD=AC=x$ m,则 $BC=(40-x)$m. 在Rt$\triangle ABC$ 中,由勾股定理,得 $AC^2=BC^2+AB^2$,即 $x^2=(40-x)^2+30^2$,解得 $x=31.25$. 所以 $CD\approx31$ m.

答:商店(点 $C$)与公交站(点 $D$)之间的距离约为 31 m.

**22.** **解**:因为 $AC=4$,$BC=2$,$AB=2\sqrt{5}$,所以 $AC^2+BC^2=AB^2$,所以$\triangle ACB$ 为直角三角形,且$\angle ACB=90°$. 分 3 种情况讨论.

①如图 1,当$\angle ABD=90°$时,过点 $D$ 作 $DE\perp CB$,交 $CB$ 的延长线于点 $E$,易证$\triangle ACB\cong\triangle BED$,所以 $DE=BC=2$,$BE=AC=4$,所以 $CE=BC+BE=6$,所以 $CD=\sqrt{DE^2+CE^2}=2\sqrt{10}$;

②如图 2,当$\angle BAD=90°$时,过点 $D$ 作 $DE\perp CA$,交 $CA$ 的延长线于点 $E$,易证$\triangle ACB\cong\triangle DEA$,所以 $DE=AC=4$,$AE=BC=2$,所以 $CE=AC+AE=6$,所以 $CD=\sqrt{DE^2+CE^2}=2\sqrt{13}$;

③如图 3,当$\angle ADB=90°$时,过点 $D$ 作 $DE\perp CB$,交 $CB$ 的延长线于点 $E$,过点 $D$ 作 $DF\perp AC$ 于点 $F$,易证$\triangle AFD\cong\triangle BED$,所以 $BE=AF$,$DF=DE$,所以 $CD$ 平分$\angle ACB$,又因为$\angle ACB=90°$,所以$\angle ECD=\angle DCA=45°$,所以 $CF=DF=DE=CE=\frac{1}{2}(CE+CF)=\frac{1}{2}(CB+CA)=3$,所以 $CD=\sqrt{DE^2+CE^2}=3\sqrt{2}$.

综上所述,线段 $CD$ 的长为 $2\sqrt{10}$或 $2\sqrt{13}$或 $3\sqrt{2}$.

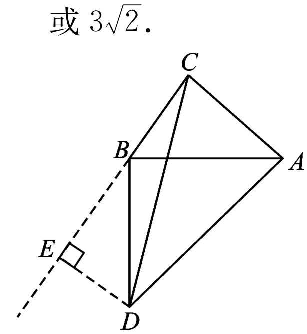


**图 1**

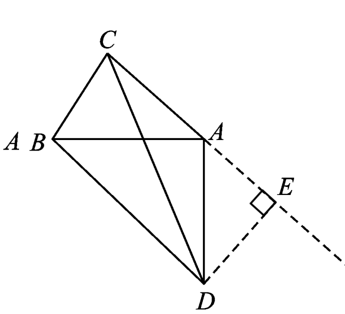


**图 2**

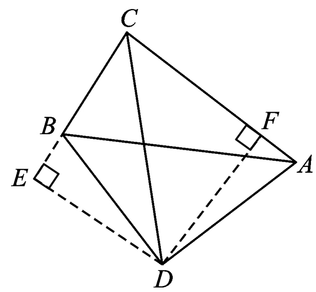
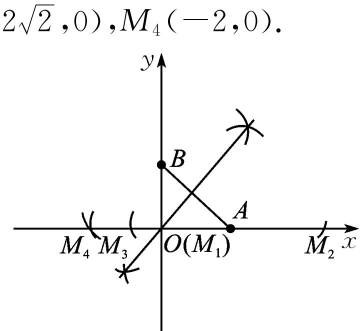



**图 3**

**23.** **证明**:(1) 在 Rt$\triangle ABC$ 中,根据勾股定理,得 $AB^2=BC^2+AC^2$①. 在 Rt$\triangle DBC$ 中,根据勾股定理,得 $BD^2=BC^2+CD^2$②. 因为 $D$ 是 $AC$ 的中点,所以 $AC=2CD$. 由②×4−①,得 $AB^2+3BC^2=4BD^2$.

(2) 在 Rt$\triangle BED$ 和 Rt$\triangle AED$ 中,根据勾股定理,得 $DE^2=BD^2-BE^2=AD^2-AE^2$,所以 $BE^2-AE^2=BD^2-AD^2$. 在 Rt$\triangle BCD$ 中,根据勾股定理,得 $BD^2-CD^2=BC^2$. 又因为 $D$ 是 $AC$ 的中点,所以 $AD=CD$,所以 $BD^2-AD^2=BC^2$,所以 $BE^2-AE^2=BC^2$.

**24.** **解**:如图,分以下几种情况讨论:①当 $MA=MB$ 时,易知点 $M$ 在 $AB$ 的垂直平分线上,此时点 $M_1$ 与点 $O$ 重合,点 $M_1(0,0)$. ②当 $AB=AB$ 时,由勾股定理,易得 $OA=OB=2$,$AB=2\sqrt{2}$. 若点 $M$ 在点 $A$ 右侧,则点 $M_2(2+2\sqrt{2},0)$;若点 $M$ 在点 $A$ 左侧,则点 $M_3(2-2\sqrt{2},0)$. ③当 $BM=AB$ 时,由勾股定理,得 $OM=\sqrt{BM^2-OB^2}=2$,所以点 $M_4(-2,0)$. 综上所述,所有满足条件的点 $M$ 的坐标是 $M_1(0,0)$,$M_2(2+2\sqrt{2},0)$,$M_3(2-2\sqrt{2},0)$,$M_4(-2,0)$.




**25.** **解**:(1) 由题图 2 可知,$S_{四边形ABDC}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot AF+\frac{1}{2}BC\cdot FD=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}c^2$,$S_{梯形AEDC}=\frac{1}{2}(b+a)b$,$S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}(a-b)a$. 因为 $S_{四边形ABDC}=S_{梯形AEDC}+S_{\triangle BED}$,所以 $\frac{1}{2}c^2=\frac{1}{2}(b+a)b+\frac{1}{2}(a-b)a$,所以 $\frac{1}{2}c^2=\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}ab$,所以 $a^2+b^2=c^2$.

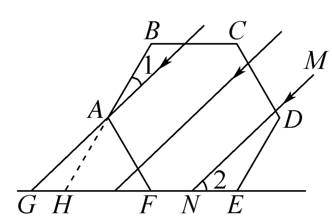
(2) $\frac{7}{5}$ **提示**:由题图,可知 $S_{\triangle ABC}=4\times4-\frac{1}{2}\times3\times4-\frac{1}{2}\times3\times4-\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{7}{2}$,$BC=\sqrt{3^2+4^2}=5$. 所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot h=\frac{5}{2}h=\frac{7}{2}$,解得 $h=\frac{7}{5}$.

(3) 在 Rt$\triangle ABD$ 中,由勾股定理,得 $AD^2=AB^2-BD^2=5^2-x^2=25-x^2$. 由题意,得 $CD=BC-BD=7-x$. 在 Rt$\triangle ACD$ 中,由勾股定理,得 $AD^2=AC^2-CD^2=6^2-(7-x)^2=-13+14x-x^2$. 所以 $25-x^2=-13+14x-x^2$,解得 $x=\frac{19}{7}$.

## 第二十一章检测卷

**1.** D **2.** B **3.** C

**4.** A **提示**:如图,延长 $BA$ 交 $GE$ 于点 $H$,所以 $\angle GAH=\angle1=19°10'45''$. 因为六边形 $ABCDEF$ 是正六边形,所以其每个外角都相等,所以 $\angle AFH=\angle FAH=\frac{360°}{6}=60°$,所以 $\angle AHF=180°-60°-60°=60°$. 因为 $AG\parallel MN$,所以 $\angle2=\angle AGE=\angle AHF-\angle GAH=60°-19°10'45''=40°49'15''$.

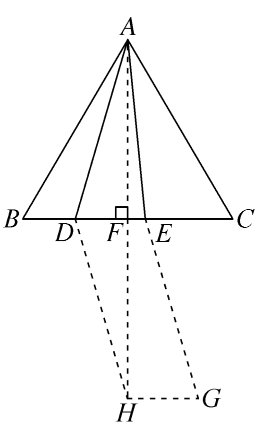



**5.** C **6.** A **7.** C

**8.** C **提示**:因为四边形 $MBND$ 是菱形,所以 $BM=MD$. 设 $AB=x$,$AM=y(x>0,y>0)$,则 $BM=MD=2x-y$. 由矩形的性质,得 $\angle A=90°$. 在 Rt$\triangle BAM$ 中,根据勾股定理,得 $BM^2=AB^2+AM^2$,即 $(2x-y)^2=x^2+y^2$,整理,得 $3x=4y$,所以 $x=\frac{4}{3}y$,所以 $\frac{AM}{MD}=\frac{y}{2\times\frac{4}{3}y-y}=\frac{y}{\frac{5}{3}y}=\frac{3}{5}$.

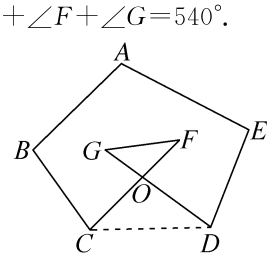
**9.** D　**提示:**因为 $AD$ 平分 $\angle BAC$,即 $\angle EAD=\angle FAD$,$DE\perp AB$,$DF\perp AC$,所以 $DE=DF$,易证 $\triangle AED\cong\triangle AFD$,所以 $AE=AF$,所以 $AD$ 垂直平分 $EF$,故②正确;因为 $\angle BAC=\angle AED=\angle AFD=90^\circ$,所以四边形 $AEDF$ 是矩形,又因为 $DE=DF$,所以四边形 $AEDF$ 是正方形,故③正确;因为 $AE=AF$,$DE=DF$,所以 $AE^2+DF^2=AF^2+DE^2$,故④正确;只有当 $\angle BAC=90^\circ$ 时,才能证得 $OA=OD$,故①错误.

**10.** D　**提示:**如图,过点 $A$ 作 $AF\perp BC$ 并延长至点 $H$,使 $AF=FH$,连接 $DH$,以 $DH$,$DE$ 为边作 $\square DHGE$.在等边三角形 $ABC$ 中,$BC=6$,$AF\perp BC$,所以 $AB=AC=BC=6$,$BF=CF=\frac{1}{2}BC=3$,所以 $AF=\sqrt{AB^2-BF^2}=3\sqrt{3}$.因为 $AF\perp BC$,$AF=FH$,所以 $BC$ 垂直平分 $AH$,$AH=2AF=6\sqrt{3}$,所以 $AD=DH$.因为四边形 $DHGE$ 是平行四边形,所以 $HG=DE=2$,$DH=EG$,所以 $EG=DH=AD$,所以 $\triangle ADE$ 的周长为 $AD+AE+DE=EG+AE+DE\geqslant AG+DE$,当 $A$,$E$,$G$ 三点共线时,$AE+AD$ 的值最小,此时在 $\mathrm{Rt}\triangle AHG$ 中,$AG=\sqrt{AH^2+HG^2}=\sqrt{(6\sqrt{3})^2+2^2}=4\sqrt{7}$,此时 $\triangle ADE$ 的周长为 $AD+AE+DE=AG+DE=4\sqrt{7}+2$.




**11.** 52

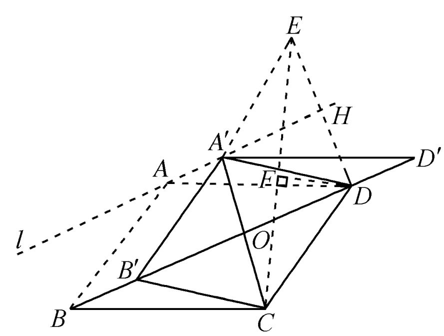
**12.** $540^\circ$　**提示:**如图,连接 $CD$,设 $CF$ 与 $DG$ 相交于点 $O$.在 $\triangle GFO$ 和 $\triangle CDO$ 中,$\angle G+\angle F+\angle GOF=180^\circ$,$\angle OCD+\angle ODC+\angle COD=180^\circ$,又因为 $\angle GOF=\angle COD$,所以 $\angle G+\angle F=\angle OCD+\angle ODC$.所以 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G=\angle A+\angle B+\angle BCD+\angle CDE+\angle E$,即为五边形 $ABCDE$ 的内角和.因为五边形的内角和为 $(5-2)\times180^\circ=540^\circ$,所以 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G=540^\circ$.




**13.** $2\sqrt{10}$

**14.** 6　**提示:**因为四边形 $ABCD$ 是菱形,所以 $OA=OC$,$AC\perp BD$.因为 $S_{菱形ABCD}=96$,所以 $2\times\frac{1}{2}OB\cdot AC=96$,即 $OB\cdot AC=96$,因为 $OB=8$,所以 $AC=12$.因为 $AH\perp BC$,$OA=OC$,所以 $OH=\frac{1}{2}AC=6$.

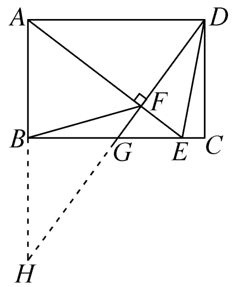
**15.** $\sqrt{3}$　**提示:**根据题意,得四边形 $A'B'CD$ 是平行四边形.所以 $A'D=B'C$,所以 $A'C+B'C=A'C+A'D$.如图,过点 $A$ 作直线 $l/\!/BD$,则点 $A'$ 在直线 $l$ 上,作点 $D$ 关于直线 $l$ 的对称点 $E$,连接 $A'E$,$DE$,$DE$ 交直线 $l$ 于点 $H$.根据轴对称的性质,得 $A'C+A'D=A'C+A'E$.连接 $CE$,当 $E$,$A'$,$C$ 三点共线时,$A'C+A'D$ 的值最小,最小值即为 $CE$ 的长.因为 $\angle A'AD=\angle ADB=30^\circ$,$AD=1$,所以 $\angle ADE=60^\circ$,$DH=EH=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}$,所以 $DE=1$,所以 $DE=CD$.因为 $\angle CDE=\angle EDB'+\angle CDB=90^\circ+30^\circ=120^\circ$,所以 $\angle DEC=\angle DCE=30^\circ$.过点 $D$ 作 $DF\perp CE$ 于点 $F$,则 $DF=\frac{1}{2}DE=\frac{1}{2}$,所以 $CE=2EF=2\sqrt{DE^2-DF^2}=2\times\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$.




**16.** (1) 4　**提示:**因为四边形 $ABCD$ 是矩形,所以 $\angle DCE=90^\circ$,$AD/\!/BC$,$AB=CD=3$,所以 $\angle ADE=\angle DEC$.因为 $DE$ 平分 $\angle FEC$,所以 $\angle DEF=\angle DEC$.又因为 $DC\perp CE$,$DF\perp AE$,所以 $\angle DFE=\angle DCE=90^\circ$.又因为 $DE=DE$,所以 $\triangle DFE\cong\triangle DCE$,所以 $DF=DC=3$.又因为 $\angle ADE=\angle DEC$,所以 $\angle ADE=\angle DEF$,所以 $AD=AE$.在 $\mathrm{Rt}\triangle DFE$ 中,$DE=\sqrt{10}$,所以 $EF=\sqrt{DE^2-DF^2}=\sqrt{(\sqrt{10})^2-3^2}=1$.设 $AF=x$,$AD=AE=AF+EF=x+1$,在 $\mathrm{Rt}\triangle ADF$ 中,$AF^2+DF^2=AD^2$,所以 $x^2+3^2=(x+1)^2$,解得 $x=4$,所以 $AF=4$.

(2) 3　**提示:**如图,延长 $DG$ 与 $BA$ 交于点 $H$.因为四边形 $ABCD$ 是矩形,所以 $AB=CD=3$,$AB/\!/CD$,所以 $\angle CDG=\angle H$,$\angle DCG=\angle HBG$.因为 $G$ 为 $BC$ 的中点,所以 $BG=CG$,所以 $\triangle DCG\cong\triangle HBG(\mathrm{AAS})$,

所以 $BH=DC=3$，所以 $AB=BH=3$. 因为 $DG\perp AE$，所以 $\angle AFH=90^\circ$，所以 $BF=\frac{1}{2}AH=AB=3$.




**17.** **证明**：因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AB/\!/CD$，$AB=CD$，所以 $\angle BAE=\angle DCF$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中，$\begin{cases}\angle ABE=\angle CDF,\\ AB=CD,\\ \angle BAE=\angle DCF,\end{cases}$ 所以 $\triangle ABE\cong\triangle CDF$，所以 $BE=DF$.

**18.** **解**：设 $\angle A$ 的平分线交 $BC$ 于点 $E$，则 $\angle BAE=\angle DAE$. 因为 $AD/\!/BC$，所以 $\angle BEA=\angle DAE$. 所以 $\angle BEA=\angle BAE$，所以 $AB=BE$. 根据题意，得 $BC=3+4=7(\text{cm})$.

①当 $BE=4$ cm 时，$AB=BE=4$ cm，则 $\square ABCD$ 的周长为 $2(AB+BC)=2\times(4+7)=22(\text{cm})$；

②当 $BE=3$ cm 时，$AB=BE=3$ cm，则 $\square ABCD$ 的周长为 $2(AB+BC)=2\times(3+7)=20(\text{cm})$.

综上所述，$\square ABCD$ 的周长为 22 cm 或 20 cm.

**19.** **解**：连接 $AC$，$BD$. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $AC=BD=8$ cm. 因为 $E$，$F$，$G$，$H$ 分别是边 $AB$，$BC$，$CD$，$DA$ 的中点，所以 $HG=EF=\frac{1}{2}AC=4$ cm，$EH=FG=\frac{1}{2}BD=4$ cm. 所以四边形 $EFGH$ 的周长为 $EF+FG+GH+EH=4+4+4+4=16(\text{cm})$.

**20.** **解**：设 $AP$ 与 $EF$ 相交于点 $O$. 因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $BC/\!/AD$，$AB/\!/CD$. 因为 $PE/\!/BC$，$PF/\!/CD$，所以 $PE/\!/AF$，$PF/\!/AE$，所以四边形 $AEFP$ 是平行四边形. 所以 $S_{\triangle POF}=S_{\triangle AOE}$. 又因为菱形 $ABCD$ 对角线长分别为 3，6，所以 $S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}\times3\times6=9$. 所以 $S_{阴影}=S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}S_{菱形ABCD}=\frac{9}{2}$.

**21.** (1) **证明**：因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $AB=AD$，所以 $\angle ABD=\angle ADB$，所以 $\angle ABE=\angle ADF$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADF$ 中，$\begin{cases}AB=AD,\\ \angle ABE=\angle ADF,\\ BE=DF,\end{cases}$ 所以 $\triangle ABE\cong\triangle ADF$.

(2) **解**：四边形 $AECF$ 是菱形. 理由如下：连接 $AC$ 交 $EF$ 于点 $O$. 在正方形 $ABCD$ 中，$OA=OC$，$OB=OD$，$AC\perp BD$，所以 $OB+BE=OD+DF$，即 $OE=OF$. 所以四边形 $AECF$ 是平行四边形. 又因为 $AC\perp EF$，所以四边形 $AECF$ 是菱形.

**22.** (1) **证明**：过点 $E$ 分别作 $EM\perp BC$ 于点 $M$，$EN\perp CD$ 于点 $N$，则 $\angle DNE=\angle FME=90^\circ$. 根据题意，易证四边形 $EMCN$ 为正方形. 所以 $EM=EN$，$\angle MEN=90^\circ$. 因为四边形 $DEFG$ 是矩形，所以 $\angle DEF=90^\circ$. 所以 $\angle DEN+\angle NEF=\angle FEM+\angle NEF=90^\circ$，所以 $\angle DEN=\angle FEM$. 在 $\triangle DEN$ 和 $\triangle FEM$ 中，$\begin{cases}\angle DNE=\angle FME,\\ EN=EM,\\ \angle DEN=\angle FEM,\end{cases}$ 所以 $\triangle DEN\cong\triangle FEM$. 所以 $ED=EF$，所以矩形 $DEFG$ 为正方形.

(2) **解**：$CE+CG=8$，为定值.

因为矩形 $DEFG$ 为正方形，所以 $DE=DG$，$\angle EDG=90^\circ$，所以 $\angle EDC+\angle CDG=90^\circ$. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形，$AB=4\sqrt{2}$，所以 $AC=8$，$AD=DC$，$\angle ADC=90^\circ$，所以 $\angle ADE+\angle EDC=90^\circ$. 所以 $\angle ADE=\angle CDG$. 在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CDG$ 中，$\begin{cases}AD=CD,\\ \angle ADE=\angle CDG,\\ DE=DG,\end{cases}$ 所以 $\triangle ADE\cong\triangle CDG$. 所以 $AE=CG$，所以 $CE+CG=$

$CE+AE=AC=8$.

**23.** (1) **证明**:因为 $AB=AC$,$D$,$E$ 分别为边 $AB$,$AC$ 的中点,所以 $BD=EC$. 因为 $F$,$G$,$H$ 分别为 $BE$,$DE$,$BC$ 的中点,所以 $FG\parallel BD$,$FG=\frac{1}{2}BD$,$FH\parallel EC$,$FH=\frac{1}{2}EC$. 所以 $FG=FH$.

(2) **证明**:由(1),得 $FG\parallel BD$,即 $FG\parallel AB$. 因为$\angle A=90°$,所以 $AB\perp AC$,所以 $FG\perp AC$. 因为 $FH\parallel EC$,即 $FH\parallel AC$,所以 $FG\perp FH$.

(3) **解**:延长 $FG$ 交 $AC$ 于点 $K$. 因为 $FG\parallel BD$,$\angle A=80°$,所以$\angle FKC=\angle A=80°$. 因为 $FH\parallel EC$,所以 $\angle GFH=180°-\angle FKC=100°$.

**24.** **解**:(1) 选择图 1,证明如下:

如图 1,当点 $P$ 在矩形 $ABCD$ 内部时,过点 $P$ 作 $MN\perp AD$ 于点 $M$,交 $BC$ 于点 $N$. 易证四边形 $ABNM$,四边形 $DCNM$ 均为矩形,所以 $AM=BN$,$DM=CN$. 由勾股定理,得 $AP^2=AM^2+PM^2$,$CP^2=CN^2+PN^2$,$BP^2=BN^2+PN^2$,$DP^2=DM^2+PM^2$,所以 $AP^2+CP^2=AM^2+PM^2+CN^2+PN^2$,$BP^2+DP^2=BN^2+PN^2+DM^2+PM^2$,所以 $AP^2+CP^2=BP^2+DP^2$.

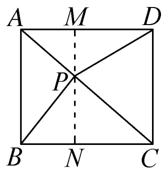


**图 1**

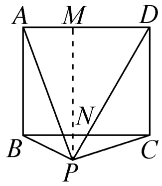


**图 2**

选择图 2,证明如下:

如图 2,当点 $P$ 在矩形 $ABCD$ 外部时,过点 $P$ 作 $PM\perp AD$ 于点 $M$,交 $BC$ 于点 $N$. 易证四边形 $ABNM$,四边形 $DCNM$ 均为矩形,所以 $AM=BN$,$DM=CN$. 由勾股定理,得 $AP^2=AM^2+PM^2$,$CP^2=CN^2+PN^2$,$BP^2=BN^2+PN^2$,$DP^2=DM^2+PM^2$,所以 $AP^2+CP^2=AM^2+PM^2+CN^2+PN^2$,$BP^2+DP^2=BN^2+PN^2+DM^2+PM^2$,所以 $AP^2+CP^2=BP^2+DP^2$.

(2) 如图 3,过点 $A$ 作 $AE\perp AD$,过点 $B$ 作 $BE\perp BD$,$AE$ 与 $BE$ 交于点 $E$,连接 $DE$,$CE$,则四边形 $ADBE$ 为矩形,所以 $AB=DE$. 由(1)可知,$CA^2+CB^2=CD^2+CE^2$,即 $4^2+6^2=2^2+CE^2$,解得 $CE=4\sqrt{3}$. 在$\triangle CDE$ 中,由三角形的三边关系,得 $DE\geqslant CE-CD$,所以当 $C$,$D$,$E$ 三点共线时,$DE$ 的长取最小值,最小值为 $CE-CD=4\sqrt{3}-2$,即 $AB$ 长的最小值为 $4\sqrt{3}-2$.

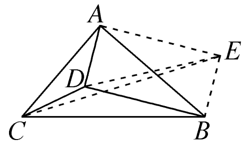


**图 3**

**25.** (1) **解**:因为四边形 $ABCD$ 是等对角四边形,$\angle B\neq\angle D$,所以$\angle A=\angle C=60°$. 因为$\angle D=95°$,所以$\angle B=360°-60°-60°-95°=145°$.

(2) **证明**:在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,因为 $CD$ 为斜边 $AB$ 的中线,所以 $AD=BD=CD$,所以$\angle ACD=\angle A$. 因为$\angle ACB=90°$,所以$\angle DCB+\angle ACD=90°$,所以$\angle DCB+\angle A=90°$. 因为 $DE\perp CD$,所以$\angle CED+\angle DCB=90°$,所以$\angle CED=\angle A$. 因为$\angle ACE=90°$,$\angle ADE>90°$,所以$\angle ACE\neq\angle ADE$,所以四边形 $ACED$ 是等对角四边形.

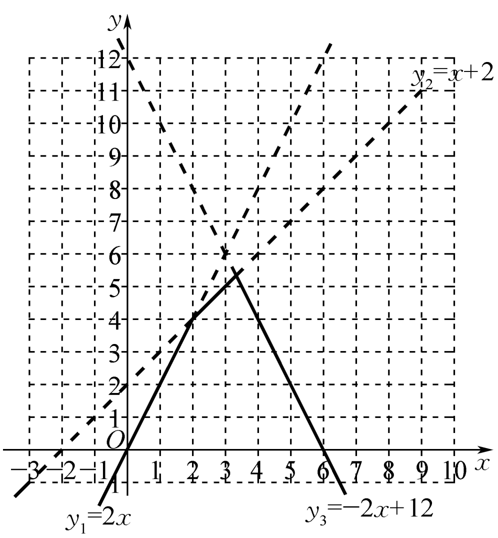
(3) **解**:过点 $D$ 作 $DE\perp AB$ 于点 $E$,$DF\perp BC$ 于点 $F$. 因为$\angle DAB=60°$,$AD=8$,所以$\angle ADE=30°$,所以 $AE=\frac{1}{2}AD=4$,$BE=AB-AE=6$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AED$ 中,根据勾股定理,得 $DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=4\sqrt{3}$. 因为 $DE\perp AB$,$DF\perp BC$,$\angle B=90°$,所以$\angle DFB=\angle DEB=\angle B=90°$,所以四边形 $DEBF$ 是矩形,所以 $DF=BE=6$,$BF=DE=4\sqrt{3}$. 在$\mathrm{Rt}\triangle CFD$ 中,$\angle BCD=60°$,所以$\angle CDF=30°$,所以 $DC=2CF$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle CFD$ 中,根据勾股定理,得 $DC^2-CF^2=DF^2$,即$(2CF)^2-CF^2=DF^2$,所以 $CF=2\sqrt{3}$,所以 $BC=CF+BF=6\sqrt{3}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,根据勾股定理,得 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=4\sqrt{13}$.

# 第二十二、二十三章检测卷

**1.** A　**2.** D　**3.** B　**4.** D　**5.** A　**6.** D

**7.** A　**8.** B　**9.** B

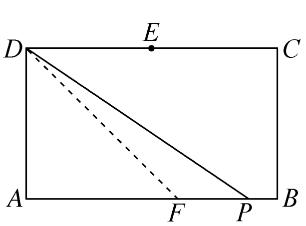
**10.** D　**提示:**由题意,在同一坐标系中画出 $y_1=2x$,$y_2=x+2$,$y_3=-2x+12$ 三个函数图象如下.又联立方程组 $\begin{cases}y=-2x+12,\\y=x+2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\dfrac{10}{3},\\y=\dfrac{16}{3}.\end{cases}$ 所以结合图象可得满足题意的最大值为 $\dfrac{16}{3}$.




**11.** $x\neq2$　**12.** $y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{9}{2}$　**13.** $m>\dfrac{1}{2}$

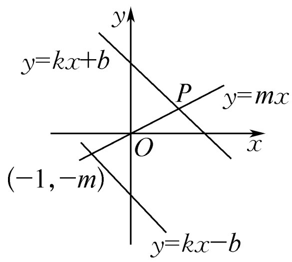
**14.** 2 026

**15.** 7.5　**提示:**由题图可知,当点 $P$ 在 $BC$ 上时,$\triangle PAD$ 的面积不变,所以 $AB=2\times5=10(\text{cm})$,因为 $S=\dfrac{1}{2}AD\cdot AB=30\ \text{cm}^2$,所以 $AD=6\ \text{cm}$,如图,在 $AB$ 上取点 $F$,使 $AF=AD=6\ \text{cm}$,连接 $DF$,此时 $\angle ADF=\angle AFD=45°$,当点 $P$ 在点 $F$ 右边时,$\angle ADP>45°$.因为 $E$ 是矩形 $ABCD$ 的边 $CD$ 的中点,所以 $CE=\dfrac{1}{2}CD=\dfrac{1}{2}AB=5\ \text{cm}$,又因为 $BF=AB-AF=4\ \text{cm}$,所以 $BF+BC+CE=4+6+5=15(\text{cm})$,所以满足 $\angle ADP\geqslant45°$ 时的总时长为 $\dfrac{15}{2}=7.5(\text{s})$.




**16.** (1) $x\leqslant1$

(2) $-1\leqslant x\leqslant0$　**提示:**因为 $y=kx+b$ 的图象经过点 $P(1,m)$,所以 $k+b=m$,当 $x=-1$ 时,$kx-b=-k-b=-(k+b)=-m$,即点 $(-1,-m)$ 在函数 $y=kx-b$ 的图象上,易知点 $(-1,-m)$ 也在 $y=mx$ 的图象上,所以 $y=kx-b$ 与 $y=mx$ 相交于点 $(-1,-m)$.如图,根据图象可得,原不等式的解集为 $-1\leqslant x\leqslant0$.




**17.** **解:**(1) 设这个一次函数的解析式为 $y=kx+b(k\neq0)$.将点(3,5)和点(−4,−9)代入,得 $\begin{cases}3k+b=5,\\-4k+b=-9,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=2,\\b=-1.\end{cases}$ 所以这个一次函数的解析式为 $y=2x-1$.

(2) 将点 $(a,2)$ 代入,得 $2a-1=2$,解得 $a=\dfrac{3}{2}$.

**18.** **解:**(1) 设 $y=kx+b(k\neq0)$,则根据题意,得 $\begin{cases}b=299,\\2\ 000k+b=235,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\dfrac{4}{125},\\b=299.\end{cases}$ 所以 $y=-\dfrac{4}{125}x+299$.

(2) 当 $x=1\ 200$ 时,$y=-\dfrac{4}{125}\times1\ 200+299=260.6(\text{g/m}^3)$.

答:山顶处的空气含氧量约为 260.6 $\text{g/m}^3$.

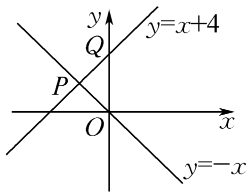
**19.** **解:**(1) 当 $x=0$,$y=m-3$,所以函数图象与 $y$ 轴的交点为 $(0,m-3)$.又因为 $y=(2m+1)x+m-3$ 是一次函数,函数图象与 $y$ 轴的交点在 $y$ 轴的正半轴上,所以 $\begin{cases}2m+1\neq0,\\m-3>0,\end{cases}$ 解得 $m>3$.

(2) 因为函数图象经过第一、三、四象限,所以 $\begin{cases}2m+1>0,\\m-3<0,\end{cases}$ 解得 $-\dfrac{1}{2}<m<3$.

**20.** **解:**(1) 设正比例函数的解析式为 $y=mx(m\neq0)$,一次函数的解析式为 $y=nx+4(n\neq0)$.将点(−2,2)代入,得 $2=-2m$,$2=-2n+4$,解得 $m=-1$,$n=1$.所以正比

例函数的解析式为 $y=-x$，一次函数的解析式为 $y=x+4$.

(2) 两个函数的图象如图所示.




(3) $S_{\triangle POQ}=\dfrac{1}{2}OQ\cdot|x_P|=\dfrac{1}{2}\times4\times2=4$.

**21. 解**：(1) 因为函数 $y=-x+b$ 与 $y=3x+3$ 的图象交于点 $(a,3)$，所以 $3a+3=3$，解得 $a=0$，所以交点的坐标为 $(0,3)$，代入 $y=-x+b$，得 $0+b=3$，解得 $b=3$.

(2) $2<m<3$. **提示**：设直线 $y=-x+b$ 与直线 $x=1$ 交于点 $D$，由(1)知，$b=3$，代入 $y=-x+b$，得 $y=-x+3$. 当 $x=1$ 时，$y=2$，所以点 $D(1,2)$. 如图 1，若 $y=mx$ 与 $y=-x+3$ 交于点 $D$，将点 $D(1,2)$ 代入 $y=mx$，得 $m=2$；如图 2，当直线 $y=mx$ 与直线 $y=3x+3$ 平行时，得 $m=3$. 因为 $x>1$ 时，函数 $y=mx$ 的值小于函数 $y=3x+3$ 的值，且大于函数 $y=-x+3$ 的值，所以 $2<m<3$.

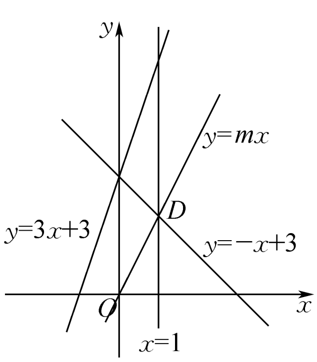



**图 1**

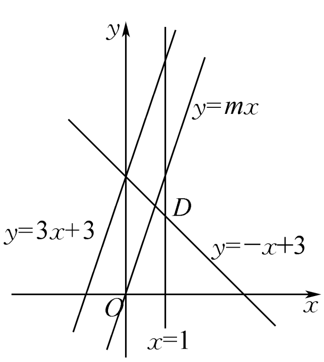



**图 2**

**22. 解**：(1) 当采摘量超过 10 kg 时，$x>10$，根据题意，得 $y_1=40+40\times0.6x=24x+40$；$y_2=40\times10+40\times0.5(x-10)=20x+200$.

(2) 当 $0\leqslant x\leqslant10$ 时，$y_2=40x$，令 $y_1=y_2$，则 $24x+40=40x$，解得 $x=2.5$；当 $x>10$ 时，令 $y_1=y_2$，则 $24x+40=20x+200$，解得 $x=40$.

答：当采摘 2.5 kg 或 40 kg 时，两种方案的价格相同.

(3) 选择甲方案更划算. 理由如下：

当 $x=30$ 时，$y_1=24\times30+40=760$，$y_2=20\times30+200=800$. 因为 $760<800$，所以选择甲方案更划算.

**23. 解**：(1) 设 $y_1=k_1x$，$y_2=k_2x+b$. 将点 $(10,600)$ 代入 $y_1=k_1x$，得 $10k_1=600$，解得 $k_1=60$，所以 $y_1=60x$. 将点 $(0,600)$，$(6,0)$ 代入 $y_2=k_2x+b$，得 $\begin{cases}b=600,\\6k_2+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_2=-100,\\b=600,\end{cases}$ 所以 $y_2=-100x+600$.

(2) ①根据题意，得 $60x=-100x+600$，解得 $x=\dfrac{15}{4}$. 当 $0\leqslant x<\dfrac{15}{4}$ 时，$s=y_2-y_1=-160x+600$.

②令 $y_2=-100x+600=0$，解得 $x=6$. 当 $6\leqslant x\leqslant10$ 时，$s=y_1=60x$.

**24. 解**：(1) $\left(\dfrac{12}{5},0\right)$ $(0,-1)$

(2) 如图 1，设直线 $CD$ 交 $x$ 轴于点 $E$，则易求得点 $E\left(-\dfrac{4}{3},0\right)$. 因为点 $P(t,0)$ 且 $t>\dfrac{12}{5}$，所以 $S_{\triangle CDP}=S_{\triangle EDP}-S_{\triangle ECP}=\dfrac{1}{2}EP\cdot|y_D|-\dfrac{1}{2}EP\cdot|y_C|=\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{4}{3}\right)\times\dfrac{3}{4}$. 因为 $S_{\triangle BDP}=\dfrac{1}{2}BP\cdot|y_D|=\dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{12}{5}\right)\times\dfrac{7}{4}$，且 $S_{\triangle CDP}=S_{\triangle BDP}$，所以 $\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{4}{3}\right)\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{12}{5}\right)\times\dfrac{7}{4}$，解得 $t=\dfrac{26}{5}$.

(3) 点 $M$ 的坐标为 $\left(1,-\dfrac{31}{5}\right)$ 或 $\left(\dfrac{31}{5},-\dfrac{26}{5}\right)$ 或 $\left(\dfrac{21}{5},\dfrac{26}{5}\right)$ **提示**：如图 2，以 $CP$ 为边向右下方和右上方分别作正方形 $CPM_2M_1$ 和正方形 $CPM_3N$，过点 $M_1$ 作 $M_1K\perp y$ 轴于点 $K$，过点 $M_2$ 作 $M_2H\perp x$ 轴于点 $H$，分别过点 $M_3$，$P$ 作 $x$ 轴、$y$ 轴的平行线交于点 $Q$. 易证 $\triangle KCM_1\cong\triangle OPC$，所以 $KM_1=OC=1$，$KC=OP=\dfrac{26}{5}$. 所以 $OK=OC+KC=\dfrac{31}{5}$，所以点 $M_1\left(1,-\dfrac{31}{5}\right)$. 又易证 $\triangle HM_2P\cong\triangle QPM_3\cong\triangle OPC$，所以 $HP=QM_3=OC=1$，$HM_2=QP=OP=\dfrac{26}{5}$. 所以 $OH=OP+HP=\dfrac{31}{5}$，所以点 $M_2\left(\dfrac{31}{5},-\dfrac{26}{5}\right)$，$M_3\left(\dfrac{21}{5},\dfrac{26}{5}\right)$. 综上所述，满足条件的点 $M$ 的坐标为

$\left(1,-\frac{31}{5}\right)$或$\left(\frac{31}{5},-\frac{26}{5}\right)$或$\left(\frac{21}{5},\frac{26}{5}\right)$.

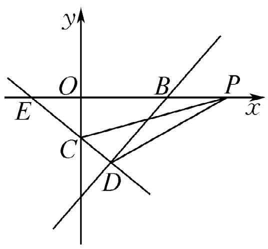


图 1

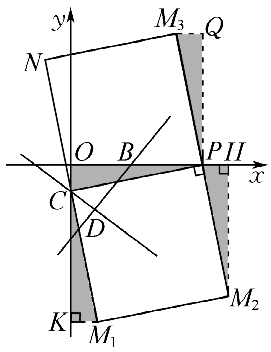


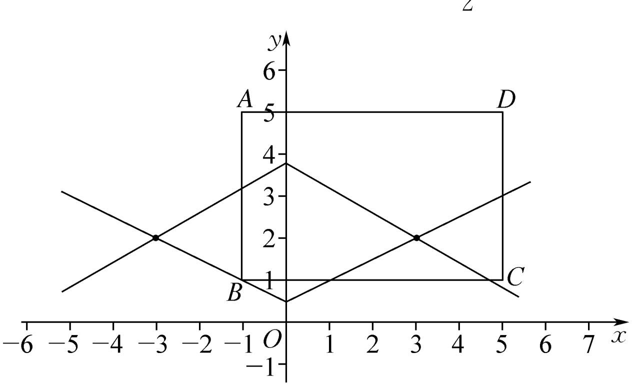
图 2

**25. 解**:(1) $\pm4$

(2) ①经过.

由 $3k+b=2$,得 $b=2-3k$. 所以函数 $y=k|x|+b=k|x|+2-3k$. 当 $x=3$ 时,$y=3k+2-3k=2$;当 $x=-3$ 时,$y=3k+2-3k=2$. 所以函数图象经过定点$(3,2)$和$(-3,2)$.

②$b$ 的取值范围是 $1<b<2$ 或 $2<b<5$ 或 $b<\frac{1}{2}$. **提示**:如图,易知函数 $y=k|x|+b$ 与 $y$ 轴交于点$(0,b)$且关于 $y$ 轴对称. 由图象可知,当点$(0,b)$在矩形 $ABCD$ 内部时,函数图象与矩形 $ABCD$ 恰好有两个交点,此时 $1<b<5$,又因为 $3k+b=2$,$k\neq0$,所以 $b\neq2$. 当点$(0,b)$在矩形 $ABCD$ 下方时,由①知函数 $y=k|x|+b$ 必过定点$(3,2)$,因为点$(3,2)$在矩形 $ABCD$ 内部,所以 $x>0$ 时,函数与矩形必有两个交点. 当函数图象经过点 $B$ 时,有 $1=k+b$,又因为 $3k+b=2$,所以 $k=-\frac{1}{2}$,$b=\frac{1}{2}$,所以当 $b<\frac{1}{2}$ 时,函数图象与矩形恰好有两个公共点. 综上所述,$1<b<2$ 或 $2<b<5$ 或 $b<\frac{1}{2}$.




# 第二十四章检测卷

**1.** A **2.** D

**3.** D **提示**:由箱线图可得,下四分位数是 132,中位数 136,上四分位数 144,最小值 115,最大值 162,所以各个选项中,由图不能确定这组数据的平均数.

**4.** D **5.** B **6.** B **7.** D **8.** C **9.** B

**10.** D **提示**:此时,甲箱内有球 $98-49=49$(颗). 因为乙箱内球号码的中位数为 40,所以小于、大于 40 的球各有$(49-1)\div2=24$(颗),所以甲箱中号码小于 40 的球有 $39-24=15$(颗),大于 40 的有 $49-15=34$(颗),即 $a=15$,$b=34$.

**11.** 3 **12.** 12 **13.** 4

**14.** 9 **提示**:因为共有 6 个数据,排序后 1 总在中间,所以中位数应该是排序后的第 3 个数和第 4 个数的平均数,有$\frac{1}{2}(x+1)=1$,解得 $x=1$,所以平均数为$\frac{1}{6}\times(-3-2+1+3+6+1)=1$,所以方差 $s^2=\frac{1}{6}\times[(-3-1)^2+(-2-1)^2+2\times(1-1)^2+(3-1)^2+(6-1)^2]=9$.

**15.** 变小

**16.** 2 8 **提示**:由方差的计算公式可知,这组数据从小到大排列是 0,2,2,4,所以中位数为$\frac{2+2}{2}=2$,平均数 $\bar{x}=\frac{0+2+2+4}{4}=2$,所以$[(2-2)^2+(0-2)^2+(2-2)^2+(4-2)^2]=8$,即这组数据的离差平方和是 8.

**17. 解**:将原数据从小到大排列为$-1$,0,3,5,8,插入一个数 $x$ 后,数据变为 6 个,中位数为排序后第 3、4 位数的平均数. 设排序后的新数据为 $y_1$,$y_2$,$y_3$,$y_4$,$y_5$,$y_6$,由题意,得$\frac{y_3+y_4}{2}=3$,即 $y_3+y_4=6$. 若 $x>3$,则 $y_1=-1$,$y_2=0$,$y_3=3$,代入 $y_3+y_4=6$,得 $y_4=3$,此时 $y_4$ 为 $x$ 或 5,均大于 3,矛盾,所以 $x\leqslant3$,此时 $y_4=3$,代入 $y_3+y_4=6$,得 $y_3=3$. 因此,插入的数 $x$ 必须为 3.

**18. 解**:(1) 这些车的平均速度是$(40\times2+50\times3+60\times4+70\times5+80\times1)\div15=60$(km/h).

(2) 70 km/h 出现的次数最多,则这些车的车速的众数是 70.

(3) 共有 15 个,最中间的数是第 8 个数,则中位数是 60.

**19. 解**:(1) 93 93

(2) 甲的数学综合素质成绩为$\frac{93\times4+93\times3+89\times1+90\times2}{4+3+1+2}=92$(分),

乙的数学综合素质成绩为 $\frac{94\times4+92\times3+94\times1+86\times2}{4+3+1+2}=91.8$(分).

**20.** 解:(1) 9.5　10

(2) 乙队的平均成绩是 $\frac{1}{10}\times(10\times4+8\times2+7+9\times3)=9$,方差是 $\frac{1}{10}\times[(7-9)^2+(8-9)^2\times2+(9-9)^2\times3+(10-9)^2\times4]=1$.

(3) 乙

**21.** 解:(1) 50　50　81

(2) 众数:捐款金额为 50 元的学生人数最多;中位数:有一半学生的捐款金额在 50 元以上;平均数:人均捐款金额是 81 元.

(3) 根据题意,得 $500\times81=40\ 500$(元).

答:估计该校学生捐款的总金额为 40 500 元.

**22.** 解:(1)甲 10 次测试的平均分为 $\overline{x}_{甲}=\frac{1}{10}\times(98+99+98+98+97+98+99+98+98+97)=98$. 乙 10 次测试的平均分为 $\overline{x}_{乙}=\frac{1}{10}\times(97+100+99+95+98+100+98+96+99+98)=98$.

(2)甲 10 次测试分数的方差 $s_{甲}^2=\frac{1}{10}\times[0^2+1^2+0^2+0^2+(-1)^2+0^2+1^2+0^2+0^2+(-1)^2]=0.4$. 乙 10 次测试分数的方差为 $s_{乙}^2=\frac{1}{10}\times[(-1)^2+2^2+1^2+(-3)^2+0^2+2^2+0^2+(-2)^2+1^2+0^2]=2.4$. 因为 $\overline{x}_{甲}=\overline{x}_{乙}$, $s_{甲}^2<s_{乙}^2$,所以甲的分数波动较小,成绩比较稳定.

**23.** 解:将 4 个数据从小到大排序:15,15,18,24. 把 4 个数据分成两组,共有 3 种情况:

第一种情况:第一组 1 个数据{15},组内离差平方和为 0,第二组 3 个数据{15,18,24},平均数是 $\frac{15+18+24}{3}=19$,组内离差平方和为 $(15-19)^2+(18-19)^2+(24-19)^2=42$,故第一种情况的组内离差平方和为 $0+42=42$;

第二种情况:第一组 2 个数据{15,15},平均数是 $\frac{15+15}{2}=15$,组内离差平方和为 0,第二组 2 个数据{18,24},平均数是 $\frac{18+24}{2}=21$,组内离差平方和为 $(18-21)^2+(24-21)^2=18$,故第二种情况的组内离差平方和为 $0+18=18$;

第三种情况:第一组 3 个数据{15,15,18},平均数是 $\frac{15+15+18}{3}=16$,组内离差平方和为 $(15-16)^2+(15-16)^2+(18-16)^2=6$,第二组 1 个数据{24},组内离差平方和为 0,故第三种情况的组内离差平方和为 $0+6=6$.

因为 $6<18<42$,所以第三种情况的组内离差平方和最小,所以将竞赛成绩分成的两组是{15,15,18},{24}.

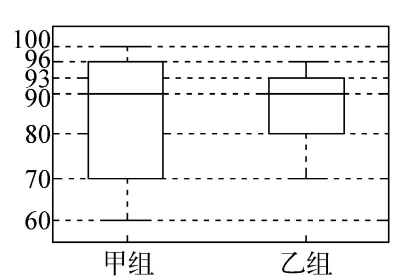
**24.** 解:(1) 6　7.1

(2) 甲

(3) ①乙组同学的平均分、中位数均高于甲组;②乙组同学成绩的方差小,比甲组稳定.

**25.** 解:(1) 将甲组的成绩从小到大排列为 60,70,70,80,89,91,92,96,98,100,所以 $Q_1=70$, $Q_2=\frac{89+91}{2}=90$, $Q_3=96$.

(2) 如图所示.




(3) 根据箱线图和四分位数可知甲组成绩的中位数和乙组相同,但甲组成绩明显比乙组的波动大.

## 期末检测卷

**1.** C　**2.** A　**3.** A　**4.** C　**5.** B　**6.** D

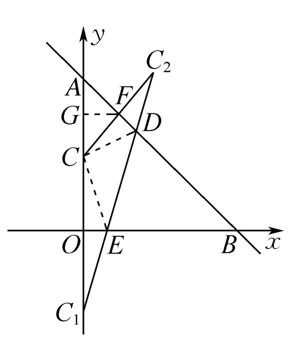
**7.** B　**提示**:中位数是 6,唯一众数是 7,则最大的三个数的和是 $6+7+7=20$,所以两个较小的数一定是

小于 6 的非负整数且不相等，则五个数的和一定大于 20 且不大于 29.

**8.** B　**提示**：观察箱线图可知，二班成绩的箱线图宽度较窄，则二班成绩比一班成绩集中，故选项 A 错误；观察箱线图可知，一班成绩的下四分位数是 80 分，故选项 B 正确；观察箱线图可知，一班没有同学的成绩超过 140 分，故选项 C 错误；观察箱线图可知，一班的平均分低于二班的平均分，故选项 D 错误.

**9.** D　**提示**：降价前西瓜的售价为 $72\div40=1.8$(元/kg)，故选项 A 正确；降价 0.4 元/kg 后西瓜利润为 $1.8-0.4-0.8=0.6$(元/kg)，故选项 B 正确；王爷爷从批发市场购进西瓜总量为 $40+(93-72)\div(1.8-0.4)=55$(kg)，故选项 C 正确；王爷爷这次卖西瓜赚的钱数为 $93-55\times0.8=49$(元)，故选项 D 错误.

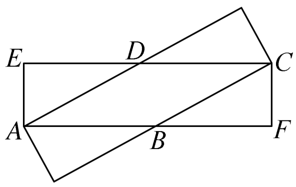
**10.** C　**提示**：因为 $y=-x+4$，所以当 $x=0$ 时，$y=4$，当 $y=0$ 时，$x=4$，所以点 $A(0,4)$，$B(4,0)$，所以 $OA=OB=4$，所以 $\angle OAB=\angle OBA=45^\circ$. 如图，作点 $C$ 关于 $x$ 轴的对称点 $C_1$，关于直线 $y=-x+4$ 的对称点 $C_2$，连接 $C_1C_2$，交 $AB$ 于点 $F$，过点 $F$ 作 $FG\perp AC$ 于点 $G$，则 $\triangle CDE$ 的周长为 $CD+CE+DE=C_2D+C_1E+DE\geqslant C_1C_2$，$CF\perp AB$，所以当点 $D,E$ 在线段 $C_1C_2$ 上时，$\triangle CDE$ 的周长最小. 因为点 $C(0,2)$，$\angle CAF=45^\circ$，点 $A(0,4)$，所以点 $C_1(0,-2)$，$AC=2$，$\triangle AFC$ 为等腰直角三角形，所以 $CG=\frac{1}{2}AC=1$，所以 $OG=OC+CG=3$，所以 $y_F=3$，当 $y=-x+4=3$ 时，$x=1$，所以点 $F(1,3)$. 由对称可知，$F$ 为 $CC_2$ 的中点，所以点 $C_2(2,4)$. 设直线 $C_1C_2$ 的函数解析式为 $y=kx-2$，把点 $C_2(2,4)$代入，得 $4=2k-2$，解得 $k=3$，所以 $y=3x-2$，联立$\begin{cases}y=3x-2,\\y=-x+4,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\frac{3}{2},\\y=\frac{5}{2},\end{cases}$所以点 $D\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$.




**11.** 4　**提示**：$x^2-2x+2=(x^2-2x+1)+1=(x-1)^2+1$，当 $x=\sqrt{3}+1$ 时，$x^2-2x+2=(\sqrt{3}+1-1)^2+1=4$.

**12.** (2,0)　**13.** 15.6 ℃　**14.** $x>1$

**15.** $2\leqslant m\leqslant\frac{17}{4}$　**提示**：当两矩形纸条垂直时，菱形 $ABCD$ 是正方形，此时菱形的边长最小，即 $m=2$；当两纸条按如图所示摆放时，菱形的边长最大，因为矩形的长是 8，宽是 2，所以 $AE=2$，$EC=8$，所以 $AD=CD=m$，$ED=8-m$，因为 $\angle E=90^\circ$，所以 $AD^2=AE^2+ED^2$，所以 $m^2=2^2+(8-m)^2$，解得 $m=\frac{17}{4}$. 所以 $2\leqslant m\leqslant\frac{17}{4}$.




**16.** $6\sqrt{2}$　(6,−2)　**提示**：因为直线 $l:y=x+4$ 与坐标轴交于 $A,B$ 两点，当 $x=0$ 时，$y=4$，即点 $B(0,4)$，当 $y=0$ 时，$x=-4$，即点 $A(-4,0)$，所以 $OA=OB=4$，所以 $\triangle AOB$ 是等腰直角三角形，所以 $AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=4\sqrt{2}$. 如图 1，以 $BC$ 为直角边，$C$ 为直角顶点作等腰直角三角形 $BCE$，连接 $ED$，则 $CB=CE$，$\angle ECB=90^\circ$. 因为 $\triangle ACD$ 是等腰直角三角形，$\angle ACD=90^\circ$，所以 $CA=CD$，所以 $\angle ACD-\angle BCD=\angle BCE-\angle BCD$，即 $\angle ACB=\angle DCE$，所以 $\triangle ACB\cong\triangle DCE$，所以 $DE=AB=4\sqrt{2}$. 因为 $CE=CB=2$，$\angle ECB=90^\circ$，所以 $EB=\sqrt{2}CE=2\sqrt{2}$，易知 $BD\leqslant EB+ED$，当点 $E$ 在 $BD$ 上时取得等号，此时 $BD=ED+EB=4\sqrt{2}+2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$，即线段 $BD$ 长的最大值为 $6\sqrt{2}$. 因为 $\triangle BCE$ 是等腰直角三角形，点 $E$ 在 $BD$ 上，所以 $\angle CED=180^\circ-\angle BEC=135^\circ$，因为 $\triangle ACB\cong\triangle DCE$，所以 $\angle ABC=\angle DEC=135^\circ$，又因为 $\angle CBE=45^\circ$，所以 $\angle ABD=\angle ABC-\angle EBC=90^\circ$. 因为 $\triangle AOB$ 是等腰直角三角形，所以 $\angle ABO=45^\circ$，所以 $\angle DBO=\angle ABD-\angle ABO=45^\circ$. 如图 2，过点 $D$ 作 $DF\perp y$ 轴于点 $F$，则 $\triangle BDF$ 是等腰直角三角形，所以 $BF=DF=\frac{\sqrt{2}}{2}BD=6$，因为点 $B(0,4)$，所以点 $F(0,-2)$，所以点 $D(6,-2)$.

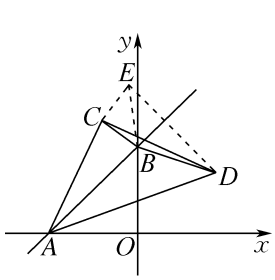


**图 1**

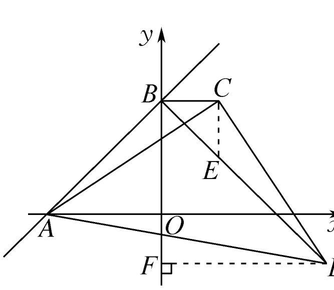


**图 2**

**17.** **解**：(1) 原式$=1+2\sqrt{3}-3-2\sqrt{3}=-2$.

(2) 由条件,得 $a+b=4$,$ab=1$,所以原式$=ab(a+b)=1\times4=4$.

**18.** 解:(1) 四边形 $BCDE$ 是菱形.理由如下:因为$\angle ADB=90^\circ$,$E$ 是边 $AB$ 的中点,所以 $DE=BE=AE$.由作图知 $BC=CD=BE$,所以 $BE=BC=CD=DE$.所以四边形 $BCDE$ 是菱形.

(2) 因为$\angle ADB=90^\circ$,$\angle A=30^\circ$,$AB=10$,所以$\angle DBE=60^\circ$,$BD=\frac{1}{2}AB=5$,所以 $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{10^2-5^2}=5\sqrt{3}$.因为 $E$ 是边 $AB$ 的中点,所以 $S_{\triangle BDE}=S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABD}$.所以 $S_{菱形BCDE}=2S_{\triangle BDE}=S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times5\times5\sqrt{3}=\frac{25\sqrt{3}}{2}$.

**19.** 解:(1) 2 600

(2) 小颖在文具用品店停留了 10 min

(3) $2\ 600+2\times(1\ 800-1\ 400)=3\ 400$(m).

答:小颖本次从学校回家的整个过程中走过的路程是 3 400 m.

(4) $1\ 800\div(50-30)=90$(m/min).

答:小颖从文具用品店回到家步行的速度是 90 m/min.

**20.** (1) **证明**:由折叠的性质,得 $OA=OC$,$AC\perp EF$,$EA=EC$.由矩形的性质,得 $AD/\!/BC$,所以$\angle FAC=\angle ECA$.在$\triangle AOF$和$\triangle COE$中,$\begin{cases}\angle FAO=\angle ECO,\\OA=OC,\\\angle AOF=\angle COE,\end{cases}$ 所以$\triangle AOF\cong\triangle COE$,所以 $OF=OE$.因为 $OA=OC$,所以四边形 $AECF$ 为平行四边形.又因为 $AC\perp EF$,所以四边形 $AECF$ 为菱形.

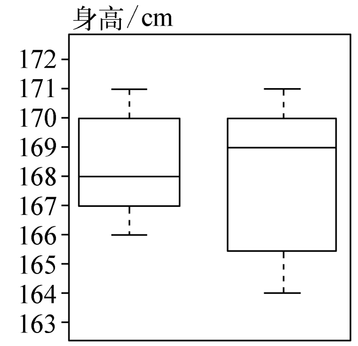
(2) **解**:设菱形 $AECF$ 的边长为 $x$,即 $AE=EC=x$,则 $BE=BC-CE=8-x$.在 Rt$\triangle ABE$ 中,根据勾股定理,得 $BE^2+AB^2=AE^2$,即$(8-x)^2+4^2=x^2$,解得 $x=5$.所以菱形 $AECF$ 的边长为 5.

(3) **解**:在 Rt$\triangle ABC$ 中,$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$,所以 $OA=\frac{1}{2}AC=2\sqrt{5}$.在 Rt$\triangle AOE$ 中,$OE=\sqrt{AE^2-AO^2}=\sqrt{5^2-(2\sqrt{5})^2}=\sqrt{5}$.所以 $EF=2OE=2\sqrt{5}$.

**21.** 解:四分位数如下表.

| 班级 | 最小值、四分位数和最大值 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 最小值 | $Q_1$ | $Q_2$ | $Q_3$ | 最大值 |
| 八年级(1)班 | 166 | 167 | 168 | 170 | 171 |
| 八年级(2)班 | 164 | 165.5 | 169 | 170 | 171 |

箱线图如图所示.




基于四分位数或箱线图,可以发现八年级(1)班身高的中位数与八年级(2)班的相差不大,但八年级(1)班身高的波动明显比八年级(2)班的要小,所以八年级(1)班选取的礼仪队队员的身高比八年级(2)班要整齐.

**22.** 解:(1) $k=\frac{1}{2}$,$b=1$

(2) $m$ 的取值范围是$\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant\frac{3}{2}$. **提示**:由(1)可知,一次函数 $y=kx+b$ 的解析式为 $y=\frac{1}{2}x+1$,当 $x=2$ 时,$y=\frac{1}{2}\times2+1=2$,把点(2,2)代入 $y=mx-1$,得 $2=2m-1$,解得 $m=\frac{3}{2}$.因为当 $x<2$ 时,对于 $x$ 的每一个值,函数 $y=mx-1(m\neq0)$的值都小于一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$的值,所以$\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant\frac{3}{2}$.

**23.** 解:(1) 设 A,B 两种花的单价分别为 $a$ 元/盆和 $b$ 元/盆.根据题意,得 $\begin{cases}a+2b=14,\\2a+b=13,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=4,\\b=5.\end{cases}$

答：A 种花的单价为 4 元/盆，B 种花的单价为 5 元/盆.

(2) ① 由题意，得 $W=4m+5(10\ 000-m)=-m+50\ 000$，即 $W$ 与 $m$ 的函数解析式是 $W=-m+50\ 000(3\ 000\leqslant m\leqslant 5\ 000)$.

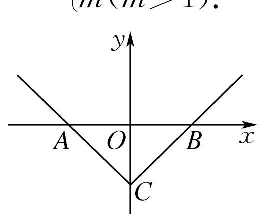
② 因为 $W=-m+50\ 000$，所以 $W$ 随 $m$ 的增大而减小. 又因为 $3\ 000\leqslant m\leqslant 5\ 000$，所以当 $m=5\ 000$ 时，$W$ 取得最小值，此时 $W=45\ 000$，$10\ 000-m=5\ 000$，即当购买 A 种花 5 000 盆，B 种花 5 000 盆时，总花费最少，最少费用为 45 000 元.

**24.** **解**：(1) $(-1,0)$　$(1,0)$

(2) 因为点 $N(3,n)$ 在函数图象上，且 $3>0$，所以 $3-1=n$，即 $n=2$.

(3) 如图，设点 $C(0,-1)$，当 $-1<m\leqslant 0$ 时，点 $P$ 在线段 $AC$ 上，点 $P(m,-m-1)$，此时图象 $G$ 的函数解析式为 $y=-x-1(-1\leqslant x\leqslant m)$，$y$ 随 $x$ 的增大而减小，$P(m,-m-1)$ 是最低点，$A$ 是最高点，所以 $h=0-(-m-1)=m+1$；当 $0<m\leqslant 1$ 时，点 $P$ 在线段 $BC$ 上，此时图象 $G$ 的函数解析式为 $y=\begin{cases}-x-1(-1\leqslant x\leqslant 0),\\ x-1(0<x\leqslant m),\end{cases}$ $C(0,-1)$ 是最低点，$A$ 是最高点，所以 $h=0-(-1)=1$；当 $m>1$ 时，点 $P$ 在射线 $CB$ 上，点 $P(m,m-1)$，此时图象 $G$ 的函数解析式为 $y=\begin{cases}-x-1(-1\leqslant x\leqslant 0),\\ x-1(0<x\leqslant m),\end{cases}$ $C(0,-1)$ 是最低点，$P(m,m-1)$ 是最高点，所以 $h=m-1-(-1)=m$.

综上所述，$h=\begin{cases}m+1(-1<m\leqslant 0),\\ 1(0<m\leqslant 1),\\ m(m>1).\end{cases}$




**25.** **解**：(1) $AP\perp DM$　$DO=OM$　60　**提示**：由折叠的性质，得 $PD=PM$，$AD=AM$，所以 $AP$ 垂直平分 $DM$，所以 $AP\perp DM$，$DO=OM$. 因为 $E$，$F$ 分别为 $AD$，$BC$ 的中点，所以 $DE=\frac{1}{2}AD$，$CF=\frac{1}{2}BC$，所以 $DE=CF$. 又因为 $DE/\!/CF$，所以四边形 $DEFC$ 是平行四边形，又因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $\angle CDE=\angle DAB=90^\circ$，所以四边形 $DEFC$ 是矩形，所以 $FE$ 垂直平分 $AD$，所以 $MD=MA$. 又因为 $MA=DA$，所以 $AD=DM=AM$，所以 $\triangle ADM$ 是等边三角形，所以 $\angle DAM=60^\circ$.

(2) 四边形 $PDQM$ 是菱形. 理由如下：

由折叠的性质，得 $PD=PM$，$QD=QM$，所以 $PQ$ 垂直平分 $DM$，所以 $DO=MO$，$DM\perp PQ$. 因为 $AB/\!/CD$，所以 $\angle PDO=\angle QMO$，$\angle DPO=\angle MQO$. 在 $\triangle DPO$ 和 $\triangle MQO$ 中，$\begin{cases}\angle PDO=\angle QMO,\\ \angle DPO=\angle MQO,\\ DO=MO,\end{cases}$ 所以 $\triangle DPO\cong\triangle MQO$(AAS)，所以 $PO=QO$，所以四边形 $PDQM$ 是平行四边形. 因为 $DM\perp PQ$，所以四边形 $PDQM$ 是菱形.

(3) $DQ$ 长的取值范围是 $16-8\sqrt{3}\leqslant DQ\leqslant 4$.　**提示**：如图 1，当点 $Q$ 与点 $A$ 重合时，$DQ$ 的长最大，此时 $DQ=AD=4$，所以 $DQ$ 长的最大值为 4；如图 2，当点 $P$ 与点 $C$ 重合时，$DQ$ 的长最小，设 $DQ=x$，则 $AQ=4-x$，由折叠的性质，得 $QM=DQ=x$，$PM=CD=8$，因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $BC=AD=4$，$\angle A=\angle B=90^\circ$，在 Rt$\triangle BCM$ 中，由勾股定理，得 $BM=\sqrt{PM^2-BC^2}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$，所以 $AM=AB-MB=8-4\sqrt{3}$，因为 $\angle A=90^\circ$，在 Rt$\triangle AMQ$ 中，由勾股定理，得 $MQ^2=AQ^2+AM^2$，所以 $x^2=(4-x)^2+(8-4\sqrt{3})^2$，解得 $x=16-8\sqrt{3}$，所以 $DQ$ 长的最小值为 $16-8\sqrt{3}$. 所以 $DQ$ 长的取值范围是 $16-8\sqrt{3}\leqslant DQ\leqslant 4$.

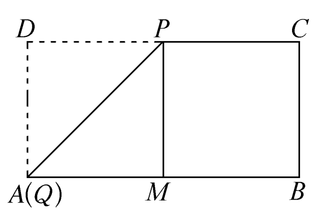



**图 1**

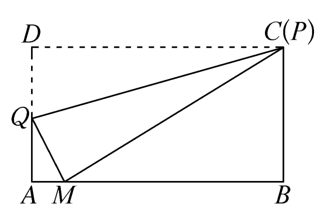



**图 2**