第 6 章　数据的收集、整理与描述

巅峰训练 1　普查与抽样调查　统计图　统计案例：货比三家

1. B　**2.** D　**3.** B　**4.** 36°　**5.** 520

6. 解：(1) A 品牌面巾纸的主要竞争优势是质量，理由：对 A 品牌面巾纸的质量满意的人数最多，而对 A 品牌面巾纸的价格和宣传满意的人数不是最多. 所以 A 品牌面巾纸靠的是质量优势.

(2) 宣传对用户选择品牌有影响. 由图表可知，虽然 A 的质量和价格都比 B 的有优势，但由于 B 品牌面巾纸的宣传做得好，所以销量比 A 品牌大.

(3) 首先要提高面巾纸的质量，其次加大宣传力度，最后注意合理的价格.

7. D

8. 解：(1) ①抽样调查

②根据统计图可以看到，从七年级到高二年级，近视率随年级升高呈整体上升趋势，高二年级到高三年级有所下降.

(2) ①B

②观察条形统计图可以看到，影响视力的主要因素有：不认真做眼保健操，长时间连续用眼，课间只在教室休息，饮食不均衡，睡眠时间不足，所以预防近视要从以下几方面入手：认真做眼保健操，避免长时间连续用眼，用眼一段时间要适当休息，课间到室外活动或者适当远眺，保持饮食均衡，保证充足的睡眠时间.

巅峰训练 2　频数与频率　频数分布表和频数分布直方图　统计案例：初中生的视力情况调查

1. C　**2.** C　**3.** A　**4.** D

5. 250　**提示**：利用小长方形的高之比等于频数之比解答. $50\div\frac{2}{2+3+4+1}=250$(名)，所以此次共抽查了 250 名学生.

6. 6.6　**提示**：该日这餐晚饭将被浪费的米饭有 $2\ 200\times(0.1+0.2)\times10=6\ 600(g)=6.6$ kg.

7. (1) 123　0.404　(2) 0.4

(3) 0.6　(4) 15

8. (1) 20　2

(2) 72

(3) **解**：$1\ 200\times\frac{8+2}{40}=300$(名).

答：估计体重在 59.5 kg 及以上的学生有 300 名.

9. 解：(1) 因为 30 天中有 24 天能满足顾客需求，所以估计 100 天中能满足顾客需求的天数为 $100\times\frac{24}{30}=80$.

(2) ①8

②由数据可知，第一、二组有 6 天，第三、四组有 11 天，第五、六组有 9 天. 设第一、二组的日平均销售量增加 m kg.

根据题意，得 $5(6m+11\times7+9\times3)\geqslant850$，解得 $m\geqslant11$.

答：第一、二组的日平均销售量应至少增加 11 kg.

第 6 章综合练

1. D　**2.** B　**3.** D　**4.** C　**5.** 108

6. 0.3　**7.** C

8. 解：(1) 抽样调查　40　44.1

(2) 脂肪平均供能比为 $36.6\%\times\frac{35}{100}+40.4\%\times\frac{25}{100}+39.2\%\times\frac{40}{100}\approx38.6\%$，碳水化合物平均供能比为 $48.0\%\times\frac{35}{100}+44.1\%\times$

$\frac{25}{100}+47.5\%\times\frac{40}{100}\approx46.8\%$.

(3) 减少脂肪类食物，增加碳水化合物类食物.

第 7 章　认识概率

巅峰训练 3　随机事件　概率

1. A　**2.** B　**3.** B　**4.** D　**5.** B　**6.** A

7. 等于　**8.** $19\leqslant a\leqslant33$(a 为整数)

9. 解:(1) 选甲袋成功的可能性较大. 理由如下：

从甲袋中取出 1 个黑球的可能性为 $\frac{12}{8+5+12}=\frac{12}{25}$，从乙袋中取出 1 个黑球的可能性为 $\frac{16}{27+35+16}=\frac{8}{39}$. 因为 $\frac{12}{25}>\frac{8}{39}$，所以选甲袋成功的可能性较大.

(2) 选乙袋成功的可能性较大. 理由如下：

从甲袋中取出 1 个红球的可能性为 $\frac{8}{8+5+12}=\frac{8}{25}$，从乙袋中取出 1 个红球的可能性为 $\frac{27}{27+35+16}=\frac{9}{26}$. 因为 $\frac{9}{26}>\frac{8}{25}$，所以选乙袋成功的可能性较大.

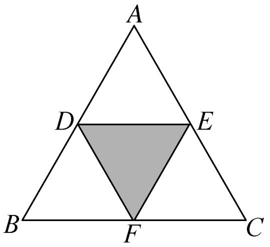
(3) 此说法不正确. 理由如下：

因为从乙袋中取出 10 个红球后，从乙袋中取出 1 个红球的可能性为 $\frac{17}{17+35+16}=\frac{1}{4}$，而 $\frac{8}{25}>\frac{1}{4}$，所以此时若想取出 1 个红球，选甲袋成功的可能性较大.

10. (1) $0<x<\frac{1}{2}$　$0<y<\frac{1}{2}$

(2) **证明:**因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形，所以 $AB=BC=AC$. 因为 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle COB}+S_{\triangle AOC}$，所以 $\frac{1}{2}BC\cdot h=\frac{1}{2}AB\cdot h_1+\frac{1}{2}BC\cdot h_2+\frac{1}{2}AC\cdot h_3$，所以 $h=h_1+h_2+h_3$.

(3) **解:**设 $x=h_1$，$y=h_2$，$z=h_3$. 因为 $0<x<\frac{1}{2}$，$0<y<\frac{1}{2}$，$0<z<\frac{1}{2}$，所以 $0<h_1<\frac{1}{2}$，$0<h_2<\frac{1}{2}$，$0<h_3<\frac{1}{2}$，所以如图所示，作 $\triangle ABC$ 三边的中点 D，E，F，连接 DF，DE，EF，所以 $\triangle DEF$ 内部即为所求范围.



(4) $\frac{1}{4}$　**提示:**因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形，D，E，F 分别是 AB，AC，BC 的中点，所以 $\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{4}$，所以一根绳子，随机分成三段，能构成三角形的概率是 $\frac{1}{4}$.

巅峰训练 4　频率与概率

1. B　**2.** B　**3.** A　**4.** C　**5.** 45　**6.** 8

7. 8

8. 解:(1) 一枚质地均匀的硬币抛起后落地时“正面朝上”的概率为 $\frac{1}{2}$.

(2) 不对. 因为试验次数较少，事件出现的频率与事件发生的概率有较大差距，所以不能据此估计事件发生的概率.

(3) 不科学. 因为试验条件不同，硬币质地均匀，出现正面与反面的机会是均等的，而可乐瓶盖质地不均匀，试验条件不一样.

9. (1) 0.6　(2) 0.6

(3) **解:**盒子里白球的个数为 $40\times0.6=24$，黑球的个数为 $40-24=16$.

10. 解:【试验推算】盒子中球的个数为 $10\div\frac{5}{50}=100$.

【活动思考】(1) 摸到白球的概率大. 理由如下：

因为摸到白球的概率为$\frac{28+2}{50}=\frac{3}{5}$，摸到红球的概率为$\frac{17+3}{50}=\frac{2}{5}$，所以摸到白球的概率大.

(2) 放入 10 个红球，拿走 10 个白球，可以使摸到这两种颜色的球的概率相等(答案不唯一).

第 7 章综合练

1. C **2.** A **3.** D **4.** B **5.** B

6. $3\pi\ \mathrm{m}^2$ **提示**：根据题表格提供的数据，得$\frac{S_{圆O}}{S_{封闭图形ABC}}\approx\frac{1}{3}$，而 $S_{圆O}=\pi\times1^2=\pi(\mathrm{m}^2)$，所以 $S_{封闭图形ABC}\approx 3\pi\ \mathrm{m}^2$.

7. 9 **提示**：设取出 x 个黑球，则放入 x 个黄球. 由题意，得$\frac{5+x}{5+13+22}\geqslant\frac{1}{3}$，解得 $x\geqslant\frac{25}{3}$，所以至少取出 9 个黑球.

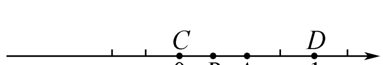
8. $\frac{2}{5}$ **提示**：因为不等式组$\begin{cases}2x+3<4,\\3x-1>-11\end{cases}$的解集是$-\frac{10}{3}<x<\frac{1}{2}$，函数 $y=\frac{1}{2x^2+2x}$的自变量取值范围为 $2x^2+2x\neq0$，解得 $x\neq0$，$x\neq-1$，所以 a 的值可为 -3，-2. 综上所述，所求概率是$\frac{2}{5}$.

9. $4m+n=10$ **提示**：根据题意，得$\frac{6+n}{10+n-m}=0.8$. 整理，得 $4m+n=10$.

10. $\frac{1}{6}$ **11.** $\frac{5}{8}$

12. (1) D C

(2) **解**：标注，如图所示.



13. **解**：选择规则②，猜“不是 3 的倍数”. 理由如下：

规则①共有 10 种等可能出现的结果，其中“是奇数”的结果有 5 种，“是偶数”的结果也有 5 种，因此“是奇数”“是偶数”的可能性都是 50%. 规则②共有 10 种等可能出现的结果，其中“是 3 的倍数”的结果有 3 种，“不是 3 的倍数”的结果有 7 种，因此“是 3 的倍数”的可能性是 30%，“不是 3 的倍数”的可能性是 70%. 规则③共有 10 种等可能出现的结果，其中“是大于 6 的数”的结果有 4 种，“不是大于 6 的数”的结果有 6 种，因此“是大于 6 的数”的可能性是 40%，“不是大于 6 的数”的可能性是 60%. 因此选择规则②猜数，且猜转出的数“不是 3 的倍数”，这样获胜的可能性最大.

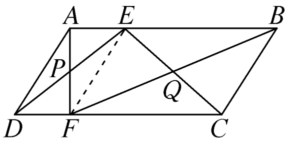
第 8 章　四边形

巅峰训练 5　平行四边形

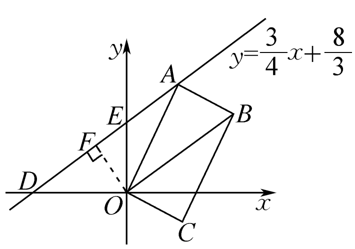
1. C **提示**：设 PQ，AC 相交于点 O，过点 O 作 $OP'\perp BC$ 于点 P'. 因为四边形 $PAQC$ 是平行四边形，所以 $OC=OA$，$PQ=2OP$. 因为 $AC=AB=4\sqrt{2}$，所以 $OC=OA=2\sqrt{2}$. 因为$\angle ACB=45°$，$\angle OP'C=90°$，所以 $OP'=CP'$，所以 $2OP'^2=OP'^2+CP'^2=OC^2=8$，所以 $OP'=2$. 当点 P 与点 P' 重合时，OP 的长最小，此时 PQ 的长最小，最小值为 $2OP'=4$.

2. A **提示**：如图，连接 EF. 因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形，所以 $AB=CD$，$AB/\!/CD$，所以$\angle BEC=\angle FCE$. 因为 Q 是 BF 的中点，所以 $BQ=FQ$. 因为$\angle BEQ=\angle FCQ$，$\angle BQE=\angle FQC$，$BQ=FQ$，所以$\triangle BEQ\cong\triangle FCQ(\mathrm{AAS})$，所以 $EB=CF$. 因为 $EB/\!/CF$，所以四边形 $BCFE$ 是平行四边形，所以 $S_{\triangle BEF}=\frac{1}{2}S_{\square BCFE}$. 因为 $AB-EB=CD-CF$，所以 $AE=FD$. 又因为 $AE/\!/FD$，所以四边形 $ADFE$ 是平行四边形，所以 $S_{\triangle PEF}=S_{\triangle APD}=4\ \mathrm{cm}^2$，$S_{\square ADFE}=4S_{\triangle APD}=16\ \mathrm{cm}^2$，所以 $S_{\square BCFE}=S_{\square ABCD}-S_{\square ADFE}=64-16=48(\mathrm{cm}^2)$，所以 $S_{\triangle BEF}=\frac{1}{2}S_{\square BCFE}=\frac{1}{2}\times48=24(\mathrm{cm}^2)$，所以阴影部分的

面积为 $S_{\triangle BEF}+S_{\triangle PEF}=28\ \text{cm}^2$.



3. B　**提示**:因为点 $A\left(m,\frac{3}{4}m+\frac{8}{3}\right)$,所以点 A 在直线 $y=\frac{3}{4}x+\frac{8}{3}$ 上. 由条件,可知直线 OB 的函数表达式为 $y=\frac{3}{4}x$. 如图,设直线 $y=\frac{3}{4}x+\frac{8}{3}$ 交 x 轴于点 D,交 y 轴于点 E,则直线 OB 平行直线 AE. 因为平行线之间的距离处处相等,所以 $\triangle ABO$ 的面积不会改变. 由条件,可知 $OB=5$,点 $D\left(-\frac{32}{9},0\right)$,$E\left(0,\frac{8}{3}\right)$,所以 $DE=\frac{40}{9}$. 过点 O 作 $OF\perp DE$ 于点 F. 因为 $S_{\triangle DOE}=\frac{1}{2}OD\cdot OE=\frac{1}{2}DE\cdot OF$,所以 $OF=\frac{32}{15}$. 所以 $S_{\square OABC}=2S_{\triangle ABO}=2\times\frac{1}{2}OB\cdot OF=\frac{32}{3}$.



4. B　**提示**:由题意,得 $AF=FD=CD$,所以 $\angle DFC=\angle DCF$,因为 $AD/\!/BC$,所以 $\angle DFC=\angle FCB$,所以 $\angle DCF=\angle FCB$,所以 $\angle DCF=\frac{1}{2}\angle BCD$,故①正确;延长 EF,交 CD 的延长线于点 M,因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $AB/\!/CD$,所以 $\angle A=\angle MDF$,易证 $\triangle AEF\cong\triangle DMF$,所以 $FE=FM$,因为 $CE\perp AB$,所以 $\angle AEC=90^\circ$,所以 $\angle ECD=90^\circ$,因为 $FE=FM$,所以 $EF=CF$,故③正确;设 $\angle FEC=x$,则 $\angle FCE=x$,$\angle EFC=180^\circ-2x$,所以 $\angle DFC=\angle DCF=90^\circ-x$,所以 $\angle DFE=90^\circ-x+180^\circ-2x=270^\circ-3x$,因为 $\angle AEF=90^\circ-x$,所以 $\angle DFE=3\angle AEF$,故②正确;因为 $FE=FM$,所以 $S_{\triangle CEF}=S_{\triangle CFM}$,因为 $MC>CD>BE$,所以 $S_{\triangle BEC}<2S_{\triangle CEF}$,故④错误.

5. $b-2a$ 或 $2a-b$　**提示**:因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形,所以 $AD/\!/BC$,所以 $\angle AEB=\angle CBE$. 因为 BE 平分 $\angle ABC$,所以 $\angle ABE=\angle CBE$,所以 $\angle ABE=\angle AEB$,所以 $AE=AB=a$,同理,$DF=CD=a$. 分情况讨论:①如图 1,当点 E 在点 F 的左侧时,$EF=b-2a$;②如图 2,当点 E 不在点 F 的左侧时,$EF=2a-b$.

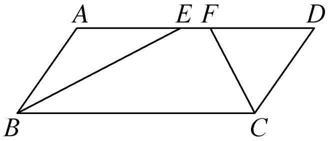


图 1

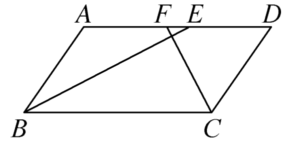
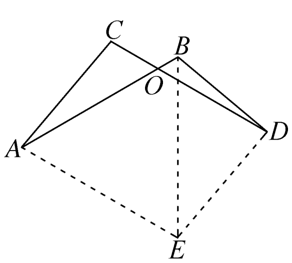


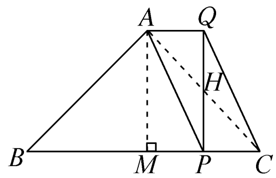
图 2

6. $AB^2=AC^2+BD^2$　**提示**:如图,过点 A 作 $AE/\!/CD$,截取 $AE=CD$,连接 BE,DE. 易证四边形 $ACDE$ 是平行四边形,所以 $DE=AC$,$\angle ACD=\angle AED$. 因为 $\angle AOC=60^\circ$,$AB=CD$,所以 $\angle EAB=60^\circ$,$AE=AB$,所以 $\triangle ABE$ 为等边三角形,所以 $BE=AB$. 因为 $\angle ACD+\angle ABD=210^\circ$,所以 $\angle AED+\angle ABD=210^\circ$,所以 $\angle BDE=360^\circ-(\angle AED+\angle ABD)-\angle EAB=90^\circ$,所以 $BE^2=DE^2+BD^2$,即 $AB^2=AC^2+BD^2$.



7. 平行四边形　$\sqrt{2}+\sqrt{10}$　**提示**:因为 $AQ/\!/PC$,$CQ/\!/AP$,所以四边形 $APCQ$ 是平行四边形. 如图,当 $PQ\perp BC$ 时,PQ 取得最小值. 连接 AC,交 PQ 于点 H. 因为四边形 $APCQ$ 是平行四边形,所以 $AH=HC=\frac{1}{2}AC$,$QH=PH=\frac{1}{2}PQ$. 过点 A 作 $AM\perp BC$,垂足为 M,则 $\triangle ABM$ 是等腰直角三角形,所以 $MB=\sqrt{2}$. 因为 $BC=2\sqrt{2}$,所以 $BM=CM$. 所以 AM 垂直平分 BC,所以 $AC=AB=2$,$\angle ACB=45^\circ$,所以 $HC=1$. 因为 $PQ\perp BC$,所以 $\angle PHC=45^\circ$,所以 $PH=PC=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $PQ=\sqrt{2}$,所以 $QC=\sqrt{PC^2+PQ^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$. 所以四边形 $APCQ$ 的周长为 $2PC+2QC=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}+2\times\frac{\sqrt{10}}{2}=$

$\sqrt{2}+\sqrt{10}$.



8. (1) 12

(2) **证明**:因为 $AB=AC$,所以$\angle PBQ=\angle C$. 因为 $PQ/\!/AC$,所以$\angle PQB=\angle C$. 所以$\angle PBQ=\angle PQB$,所以 $PB=PQ$.

(3) **解**:分两种情况讨论. 当点 M 在点 D 上方时,根据题意,得 $PQ=BP=t$ cm,$AM=4t$ cm,$AD=12$ cm. 所以 $MD=(12-4t)$cm. 因为 $PQ/\!/MD$,所以当 $PQ=MD$ 时,四边形 $PQDM$ 是平行四边形,此时 $t=12-4t$,解得 $t=\frac{12}{5}$. 同理,当点 M 在点 D 下方时,$MD=(4t-12)$cm,此时 $t=4t-12$,解得 $t=4$.

综上所述,当 t 的值为$\frac{12}{5}$或 4 时,以 P,Q,D,M 为顶点的四边形是平行四边形.

9. 解:(1) 方法一:如图 1,PM,PN 即为所求.

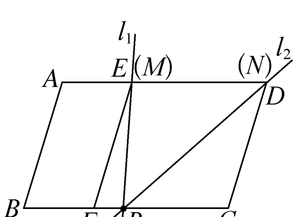


图 1

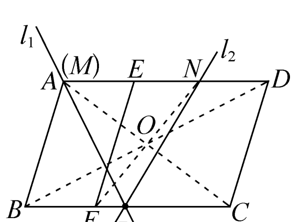


图 2

方法二:如图 2,PM,PN 即为所求.

提示:设 $AD=BC=3a$,边 AD 到边 BC 的距离为 h. 因为 $AE=\frac{1}{3}AD$,$BF=\frac{1}{3}BC$,所以 $AE=BF=a$,则 $ED=AD-AE=2a$. 因为点 M,N 在边 AD 上,点 P 在边 BC 上,所以 $S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}MN\cdot h$,$S_{\square ABCD}=AD\cdot h=3ah$,所以要使得 $S_{\triangle PMN}=\frac{1}{3}S_{\square ABCD}$,只需 $MN=2a$ 即可. 如图 1,当点 M,N 分别与点 E,D 重合时,$MN=ED=2a$,此时 $S_{\triangle PMN}=\frac{1}{3}S_{\square ABCD}$,故 PM,PN 即为所求. 如图 2,连接 AC,BD 相交于点 O,连接 FO 并延长交 AD 于点 N. 因为$\square ABCD$ 是中心对称图形,点 O 为对称中心,所以 $DN=BF=a$,所以 $AN=AD-DN=2a$,当点 M 与点 A 重合时,$MN=AN=2a$,此时 $S_{\triangle PMN}=\frac{1}{3}S_{\square ABCD}$,故 PM,PN 即为所求.

(2) 方法一:如图 3,PM,PN 即为所求.

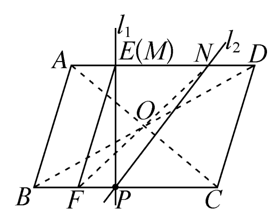


图 3

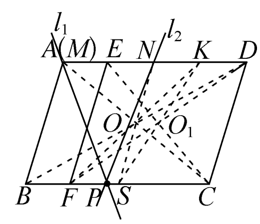


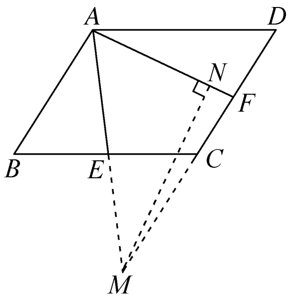
图 4

方法二:如图 4,PM,PN 即为所求.

提示:设 $AD=BC=4a$,边 AD 到边 BC 的距离为 h. 因为 $AE=\frac{1}{4}AD$,$BF=\frac{1}{4}BC$,所以 $AE=BF=a$,则 $CF=ED=AD-AE=3a$. 因为点 M,N 在边 AD 上,点 P 在边 BC 上,所以 $S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}MN\cdot h$,$S_{\square ABCD}=AD\cdot h=4ah$,所以要使得 $S_{\triangle PMN}=\frac{1}{4}S_{\square ABCD}$,只需 $MN=2a$ 即可. 如图 3,连接 AC,BD 相交于点 O,连接 FO 并延长交 AD 于点 N. 因为$\square ABCD$ 是中心对称图形,点 O 为对称中心,所以 $DN=BF=a$,所以 $EN=AD-AE-DN=2a$,当点 M 与点 E 重合时,$MN=EN=2a$,此时 $S_{\triangle PMN}=\frac{1}{4}S_{\square ABCD}$,故 PM,PN 即为所求. 如图 4,连接 AC,BD 相交于点 O,连接 FO 并延长交 AD 于点 K. 因为$\square ABCD$ 是中心对称图形,点 O 为对称中心,所以 $DK=BF=a$,所以 $DE=AD-AE=3a$. 因为 $CF=DE$,$CF/\!/DE$,所以四边形 $EFCD$ 是平行四边形. 连接 FD,EC 相交于点 O_1,则点 O_1 为$\square EFCD$ 的对称中心,连接 KO_1 并延长交 BC 于点 S,则 $FS=DK=a$,连接 SO 并延长交 AD 于点 N,则 $KN=FS=a$,所以 $AN=AD-DK-KN=2a$,当点 M 与点 A 重合时,$MN=AN=2a$,此时 $S_{\triangle PMN}=\frac{1}{4}S_{\square ABCD}$,故 PM,

PN 即为所求.

10. $\frac{4\sqrt{7}}{3}$ **提示:**如图,延长 AE 交 DC 的延长线于点 M,过点 M 作 $MN\perp AF$ 于点 N,易证 $\triangle ABE\cong\triangle MCE$,所以 $AM=2AE=6$,$AB=MC$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AMN$ 中,因为 $\angle EAF=60°$,所以 $AN=\frac{1}{2}AM=3$,$MN=\sqrt{AM^2-AN^2}=3\sqrt{3}$. 所以 $NF=AF-AN=1$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle MNF$ 中,根据勾股定理,可得 $MF=\sqrt{MN^2+NF^2}=2\sqrt{7}$. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $CD=AB$,又因为 F 为 CD 的中点,所以 $CF=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}AB$. 所以 $MF=MC+CF=\frac{3}{2}AB$. 所以 $\frac{3}{2}AB=2\sqrt{7}$,解得 $AB=\frac{4\sqrt{7}}{3}$.



11. (1) 相等　垂直　**提示:**如图 1,延长 BD 交 AE 于点 H. 由题意,得 $BD=AE$,$\angle CBD=\angle CAE$. 因为 $\angle BDC=\angle ADH$,所以 $\angle AHD=\angle BCD=90°$,所以 $BD\perp AE$.

(2) **证明:**根据题意,可得 $AF=AE=BD$,$AF\perp AE$. 因为 $BD\perp AE$,所以 $AF/\!/BD$,所以四边形 $ABDF$ 是平行四边形.

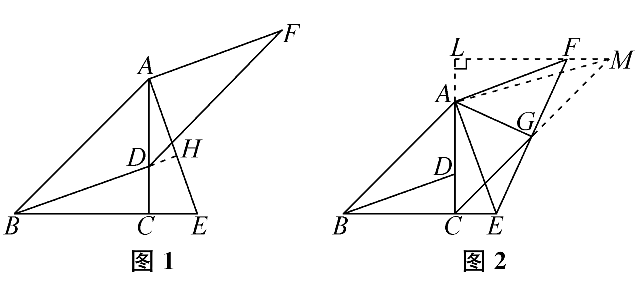


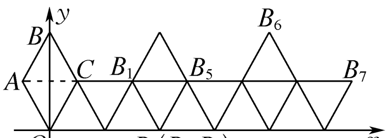
图 1　　**图 2**

(3) **解:**如图 2,过点 F 作 $FL\perp AC$ 于点 L,延长 CG 交 LF 的延长线于点 M,连接 AM. 由题意,得 $AF=EA$,$\angle FAE=90°$,所以 $\angle CAE=\angle LFA=90°-\angle FAL$,所以 $\triangle ACE\cong\triangle FLA(\mathrm{AAS})$,所以 $FL=AC=12$. 因为 G 是 EF 的中点,$CE/\!/LM$,所以 $GE=GF$,$\angle GEC=\angle GFM$,所以 $\triangle GCE\cong\triangle GMF$,所以 $FM=EC=CD=t$,所以 $S_{\triangle ACG}=\frac{1}{2}S_{\triangle ACM}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AC\cdot LM\right)=\frac{1}{4}\times12\times(12+t)=3t+36$.

巅峰训练 6　特殊的平行四边形(1)

1. B　**提示:**延长 GE 交 AD 于点 P,过点 G 作 $GQ\perp AD$ 于点 Q,则 $\angle GQA=90°$. 易证四边形 $ABGQ$ 是矩形,所以 $AQ=BG=1$,$GQ=AB=5$. 因为 $AD/\!/BC$,所以 $\angle CAD=\angle ACB$. 易证 $\triangle AEP\cong\triangle CFH$,所以 $EP=FH$,$AP=CH=4$,所以 $PQ=AP-AQ=3$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle QGP$ 中,$GP=\sqrt{GQ^2+PQ^2}=\sqrt{34}$. 所以 $EG+FH=EG+EP=GP=\sqrt{34}$.

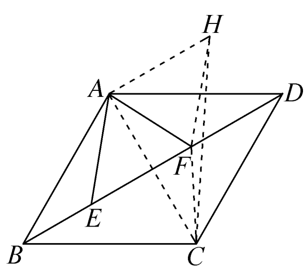
2. C　**提示:**如图,连接 AC. 因为 $\angle ABC=60°$,所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形. 所以 $AC=AB=OA=1$,画出第 5 次、第 6 次、第 7 次翻转后的图形,如图所示. 由图可知,每翻转 6 次,图形向右平移 4. 因为 $2\,024=337\times6+2$,所以点 B_2 向右平移 1 348 得到点 $B_{2\,024}$. 因为点 B_2 的坐标为 $(2,0)$,所以点 $B_{2\,024}$ 的坐标为 $(2+1\,348,0)$,所以点 $B_{2\,024}$ 的坐标为 $(1\,350,0)$.



3. B　**提示:**设 $AB=CD=2a$,$AD=BC=2b$,则根据折叠的性质,得 $OB=AB=2a$,$DG=OG=CG=a$,所以 $BG=3a$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BCG$ 中,根据勾股定理,得 $CG^2+BC^2=BG^2$,即 $a^2+(2b)^2=(3a)^2$,所以 $b^2=2a^2$,所以 $\frac{b}{a}=\sqrt{2}$(负值已舍),所以 $\frac{AD}{AB}$ 的值为 $\sqrt{2}$.

4. D　**提示:**如图,过点 A 作 $AH/\!/BD$,使得 $AH=EF=2$,连接 AC,CF,FH,CH. 易证四边形

$EFHA$ 是平行四边形，所以 $AE=FH$. 因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 BD,AC 互相垂直平分，所以 $AF=CF$，$\angle CAH=90^\circ$，所以 $AE+AF=FH+CF$. 当 H,F,C 三点共线时，$FH+CF$ 的值最小，即 $AE+AF$ 的值最小，最小值为 CH 的长. 根据菱形的性质，得 $AB=BC=3$. 因为 $\angle ABC=60^\circ$，所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形，所以 $AC=3$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle CAH$ 中，根据勾股定理，得 $CH=\sqrt{AC^2+AH^2}=\sqrt{13}$. 所以 $AE+AF$ 的最小值是 $\sqrt{13}$.



5. $\frac{7}{8}$或$\frac{4}{3}$　**提示**：当 $AE=EC'$ 时，设 $BE=x$，则 $EC=4-x$，因为 $\triangle ECF$ 沿 EF 翻折得到 $\triangle EC'F$，所以 $EC'=EC=4-x=AE$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，由勾股定理，得 $AE^2=BE^2+AB^2$，即 $(4-x)^2=x^2+3^2$，解得 $x=\frac{7}{8}$；当 $AE=AC'$ 时，过点 A 作 $AH\perp EC'$ 于点 H，则 $EH=C'H$，因为 $EF\perp AE$，所以 $\angle C'EF+\angle AEC'=90^\circ$，$\angle BEA+\angle FEC=90^\circ$，因为 $\triangle ECF$ 沿 EF 翻折得到 $\triangle EC'F$，所以 $\angle C'EF=\angle FEC$，所以 $\angle BEA=\angle HEA$，易证 $\triangle ABE\cong\triangle AHE$，所以 $BE=HE$，所以 $BE=HE=HC'$，所以 $BE=\frac{1}{2}EC'$，因为 $EC=EC'$，所以 $BE=\frac{1}{2}EC$，所以 $BE=\frac{1}{3}BC=\frac{4}{3}$.

6. 6　$\sqrt{41}$或$\sqrt{30}$或$\sqrt{6}$　**提示**：当 A_1,D 两点重合时，由折叠的性质，可知 $AC=A_1C$. 因为点 A_1 与点 D 重合，所以 $AC=A_1C=CD=6$ cm.

当 A_1,D 两点不重合时，由题意，可知 BC,A_1D 必定为矩形的一组对边. 分3种情况：① 如图1，A_1C 为对角线，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AC=\sqrt{BC^2+AB^2}=\sqrt{41}$ cm；② 如图2，A_1C 为边，且 $A_1C>BC$，设对角线交点为 O，因为 OB 为 $\mathrm{Rt}\triangle CBD$ 斜边上的中线，所以 $OB=OC=OD=\frac{1}{2}CD=3$ cm，过点 B 作 $BE\perp CD$ 于点 E，则 $BE=\sqrt{5}$ cm，在 $\mathrm{Rt}\triangle OBE$ 中，$OE=\sqrt{OB^2-BE^2}=2$ cm，则 $DE=5$ cm，在 $\mathrm{Rt}\triangle BED$ 中，$BD=\sqrt{BE^2+DE^2}=\sqrt{30}$ cm，所以 $AC=BD=\sqrt{30}$ cm；③ 如图3，A_1C 为边，且 $A_1C<BC$，同②可得 $AC=\sqrt{6}$ cm.

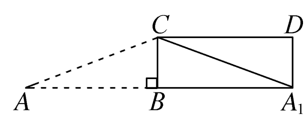


图1

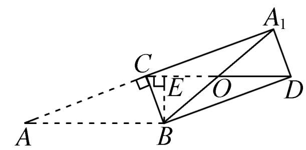


图2

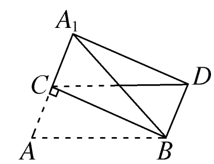


图3

7. 5或20　**提示**：因为四边形 $ABCD$ 是矩形，$AB=12$，$BC=10$，所以 $CD=AB=12$，$AD=BC=10$，$\angle BAD=90^\circ$. 因为点 E,F 分别在边 AB,DC 上，且 $AB=3BE$，$CD=3CF$，所以 $BE=\frac{1}{3}AB=4$，$CF=\frac{1}{3}CD=4$，所以 $AE=DF=12-4=8$，所以 $AE/\!/DF$，所以四边形 $AEFD$ 是平行四边形. 因为 $\angle EAD=90^\circ$，所以四边形 $AEFD$ 是矩形，所以 $EF=AD=10$，$\angle AEF=\angle DFE=90^\circ$. 如图1，点 A' 落在线段 EF 上，由翻折，得 $A'D=AD=10$，$A'P=AP$，所以 $A'F=\sqrt{A'D^2-DF^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$，所以 $A'E=EF-A'F=10-6=4$. 因为 $A'E^2+PE^2=A'P^2$，且 $PE=8-AP$，所以 $4^2+(8-AP)^2=AP^2$，解得 $AP=5$. 如图2，点 A' 落在线段 EF 的延长线上，则点 P 在线段 AE 的延长线上，所以 $PE=AP-8$. 因为 $\angle A'FD=90^\circ$，$A'D=AD=10$，$DF=8$，所以 $A'F=\sqrt{A'D^2-DF^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$，所以 $A'E=EF+A'F=10+6=16$. 因为 $A'E^2+PE^2=A'P^2$，且 $A'P=AP$，所以 $16^2+(AP-8)^2=AP^2$，解得 $AP=20$. 综上所述，AP 的长为5或20.

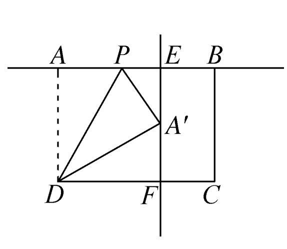


图1

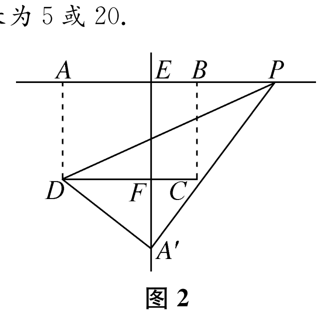


图2

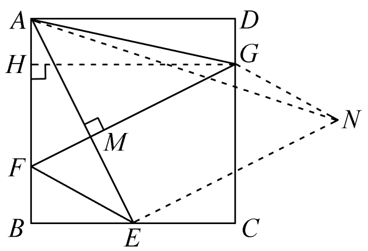
8. $\frac{8}{3}$ **提示**:因为 $CP=CB$,所以 $\angle PBC=\angle CPB$. 因为 $\angle APB=90^\circ$,所以 $\angle PAB+\angle ABP=90^\circ$,又因为 $\angle PBC+\angle ABP=\angle ABC=90^\circ$,所以 $\angle PAB=\angle PBC=\angle CPB$. 又因为 $\angle EAP+\angle PAB=\angle APE+\angle CPB=90^\circ$,所以 $\angle EAP=\angle APE$,所以 $AE=PE$. 设 $AE=x$,则 $DE=AD-AE=6-x$,$CE=CP+PE=CB+AE=6+x$. 在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中,$CD^2+DE^2=CE^2$,即 $8^2+(6-x)^2=(6+x)^2$,解得 $x=\frac{8}{3}$.

9. 解:(1) 过点 M 作 $ME\perp x$ 轴于点 E,则 $\angle MEP=90^\circ$,所以 $\angle MPE+\angle PME=90^\circ$. 因为四边形 $OABC$ 是正方形,所以 $\angle POC=90^\circ$. 因为 $PM\perp CP$,所以 $\angle CPM=90^\circ$,所以 $\angle MPE+\angle CPO=90^\circ$. 所以 $\angle PME=\angle CPO$. 所以 $\triangle MPE\cong\triangle PCO$,所以 $EM=OP=t$,$EP=OC=4$,所以 $OE=t+4$,所以点 M 的坐标为$(t+4,t)$.

(2) 线段 MN 的长度不变. 理由如下:

连接 AM. 因为 $AE=OE-OA=t+4-4=t=EM$,$\angle MEP=90^\circ$,所以 $\triangle MEA$ 为等腰直角三角形. 所以 $\angle MAE=45^\circ=\angle BOA$,所以 $AM /\!/ OB$. 所以四边形 $OAMN$ 是平行四边形,所以 $MN=OA=4$.

10. $\sqrt{10}$ **提示**:如图,以 FE,FG 为邻边作 $\square FGNE$,则 $EF=GN$,$FG=EN$,$\angle AEN=\angle AMG=90^\circ$,连接 AN,过点 G 作 $GH\perp AB$ 于点 H,易证 $\triangle ABE\cong\triangle GHF$(AAS),所以 $GF=AE$. 在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中,由勾股定理,得 $AE=\sqrt{5}$,所以 $GF=AE=EN=\sqrt{5}$,所以 $\triangle AEN$ 是等腰直角三角形,所以 $AN=\sqrt{2}AE=\sqrt{10}$. 因为 $EF+AG=GN+AG\geqslant AN$,所以当 A,G,N 三点共线时,$GN+AG$ 的值最小,即 $EF+AG$ 的值最小,此时最小值是 AN 的长,为 $\sqrt{10}$.



11. 解:(1) 如图 1 所示,点 P 即为所求.

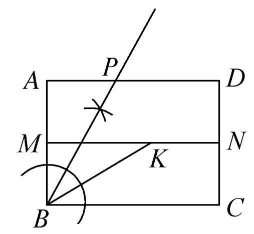


图 1

(2) 连接 AK. 由题意,知直线 MN 是矩形 $ABCD$ 的对称轴,所以 $AK=BK$,$KM\perp AB$. 由折叠的性质,得 $BK=AB=4\sqrt{3}$. 所以 $AK=BK=AB$,所以 $\triangle ABK$ 为等边三角形,所以 $\angle BKM=30^\circ$. 在 $\text{Rt}\triangle BMK$ 中,由勾股定理,得 $MK=\sqrt{BK^2-BM^2}=6$.

(3) $\sqrt{3}$ **提示**:连接 AF,取 BK 的中点 H,连接 EH. 因为 $BF=BE$,$BA=BK$,$\angle FBE=\angle ABK=60^\circ$,所以 $\angle FBA=\angle EBK$,所以 $\triangle FBA\cong\triangle EBK$. 因为 MF,HE 分别是 AB,BK 上的中线,所以 $MF=HE$. 根据"垂线段最短",可知当 $HE\perp MN$ 时,HE 的值最小. 因为 H 是 BK 的中点,所以 $HK=\frac{1}{2}BK=2\sqrt{3}$. 当 $HE\perp MN$ 时,由(2),得 $\angle BKM=30^\circ$,所以 $HE=\frac{1}{2}HK=\sqrt{3}$. 所以 HE 的最小值为 $\sqrt{3}$,即 MF 的最小值为 $\sqrt{3}$.(此题也可由 $\triangle FBA\cong\triangle EBK$,得 $\angle BAF=\angle BKE=30^\circ$,可知点 F 在与直线 BA 所夹锐角为 30° 的直线上运动,进而解之)

(4) KE 的长为 4 或 6 或 8 或 12. **提示**:分情况讨论:①如图 2,当 $\angle TBQ=90^\circ$ 时,点 T 与点 A 重合,此时 $\angle MBE=\angle EBK=\frac{1}{2}\angle ABK=30^\circ$,易得 $KE=ET=EB=4$;②如图 3,当 $\angle TQB=90^\circ$ 时,因为 $BQ=KE$,$BQ /\!/ KE$,所以四边形 $BQEK$ 为平行四边形. 所以 $QE=BK$,$QE /\!/ BK$,所以 $\angle QEB=\angle EBK$. 由折叠的性质,得 $BK=BT$,$\angle EBK=\angle EBT$. 所以 $QE=BK=BT$,$\angle QEB=\angle EBT$. 设 EQ,BT 相交于点 O,则 $EO=BO$,所以 $QE-EO=BT-BO$,即 $QO=TO$,所以 $\angle TQO=\angle QTO$,又因为 $\angle TOQ=\angle EOB$,所以 $\angle TQE=\angle QTB=$

$\angle QEB=\angle EBT$，所以 $TQ//BE$，所以$\angle EBC=90^\circ$，点 E 与点 M 重合，此时 $KE=6$；③如图 4，当$\angle QTB=90^\circ$时，同②可证 $TQ//BE$，所以$\angle EBT=\angle EBK=90^\circ$，即 T,B,K 三点共线，易得$\angle EBM=90^\circ-\angle MBK=30^\circ$，所以 $EM=2$，所以 $KE=8$；④如图 5，当$\angle QBT=90^\circ$时，易得$\angle EBK=\angle EBT=\frac{1}{2}\times(60^\circ+180^\circ)=120^\circ$，所以$\angle EBM=\angle MBK=60^\circ$，所以 $EM=MK=6$，所以 $KE=12$.

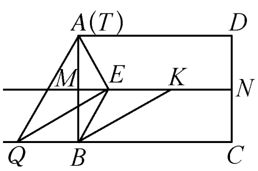


图 2

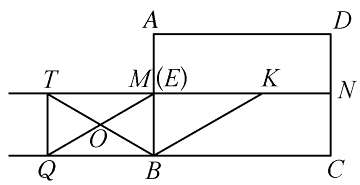


图 3

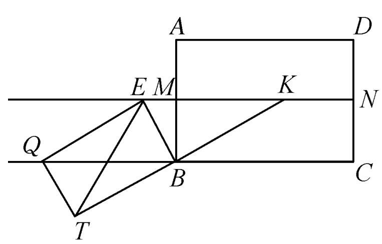


图 4

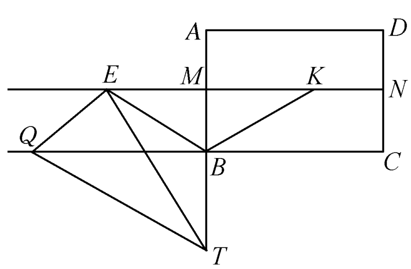
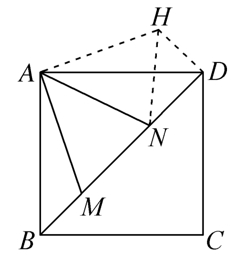


图 5

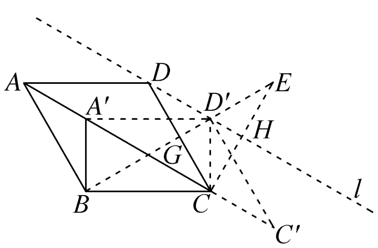
巅峰训练 7　特殊的平行四边形（2）

1. C　**提示**：结合函数图象，得当 $x=0$ 时，$PO=AO=4$. 当点 P 运动到点 B 时，$PO=BO=2$. 根据菱形的性质，得$\angle AOB=\angle BOC=90^\circ$，所以 $BC=AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=2\sqrt{5}$. 当点 P 运动到 BC 的中点时，PO 的长为$\frac{1}{2}BC=\sqrt{5}$.

2. A　**提示**：如图，将$\triangle ABM$ 绕点 A 逆时针旋转 90°得到$\triangle ADH$. 所以$\angle MAH=90^\circ$，又因为$\angle MAN=45^\circ$，所以$\angle HAN=\angle MAN=45^\circ$. 连接 NH，易证$\triangle AMN\cong\triangle AHN$（SAS），所以 $MN=HN$. 因为$\angle NDH=\angle ADH+\angle ADN=\angle ABM+\angle ADN=90^\circ$，在 $\mathrm{Rt}\triangle HDN$ 中，$HN=\sqrt{DH^2+DN^2}=5$，所以 $MN=5$.

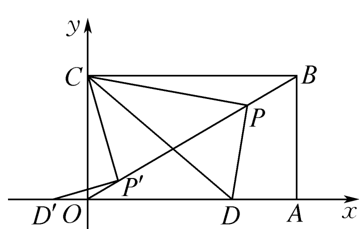


3. D　**提示**：如图，连接 $D'C$. 因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $AD=CB$，$AD//CB$，所以$\angle ADC=\angle ABC=120^\circ$. 根据题意，可得 $A'D'=CB$，$A'D'//CB$，所以四边形 $A'BCD'$是平行四边形，所以 $A'B=D'C$，所以 $A'B+D'B$ 的最小值即为 $D'C+D'B$ 的最小值. 因为点 D'在过点 D 且平行于 AC 的定直线 l 上，所以作点 C 关于直线 l 的对称点 E，连接 BE 交直线 l 于点 D'，连接 CE 交直线 l 于点 H. 设 BE，CD 相交于点 G，则 BE 的长即为 $A'B+D'B$ 的最小值. 易得 $CE\perp l$，$\angle D'DC=\angle ACD=30^\circ$，所以 $CH=EH=\frac{1}{2}CD=1$，所以 $CE=2$，所以 $CE=CB$. 易得$\angle ECB=\angle DCH+\angle DCB=120^\circ$，所以$\angle E=\angle CBE=30^\circ$，所以$\angle BGC=90^\circ$，所以 $CG=\frac{1}{2}BC=1$，所以 $BG=\sqrt{BC^2-CG^2}=\sqrt{3}$，所以 $BE=2BG=2\sqrt{3}$.



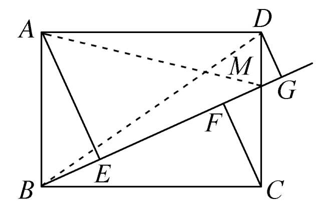
4. C　**提示**：因为四边形 $OABC$ 是矩形，点 $B(2\sqrt{3},2)$，所以 $OC=AB=2$，$OA=BC=2\sqrt{3}$，故①正确. 因为 D 为 OA 的中点，所以 $OD=\frac{1}{2}OA=\sqrt{3}$. 因为 $PD\perp PC$，所以$\angle CPD=90^\circ$，所以 $PC^2+PD^2=CD^2=OC^2+OD^2=7$，故②正确. 由勾股定理，得 $OB=\sqrt{OA^2+AB^2}=4$. 易得$\angle AOB=30^\circ$. 当点 D 在 x 轴的正半轴上，且 $OD=PD$ 时，$\angle DOP=\angle DPO=30^\circ$，所以$\angle ODP=120^\circ$. 此时易证 $\mathrm{Rt}\triangle OCD\cong\mathrm{Rt}\triangle PCD$，所以$\angle OCD=\angle PCD=\frac{1}{2}\angle OCP=\frac{1}{2}(360^\circ-\angle COD-$

$\angle CPD-\angle ODP)=30°$，所以 $OD=\frac{1}{2}CD$. 由勾股定理，得 $OC=\frac{\sqrt{3}}{2}CD$. 所以 $OD=\frac{OC}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以点 $D\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},0\right)$. 当点 D 在 x 轴的正半轴上，且 $OP=OD$ 时，$\angle ODP=\angle OPD=75°$，则 $\angle OCP=105°>90°$，不合题意，故舍去. 当点 D 在 x 轴的正半轴上，且 $OP=PD$ 时，$\angle PDO=\angle POD=30°$，则 $\angle OCP=150°>90°$，不合题意，故舍去. 当点 D 在 x 轴的负半轴上，且 $OP=OD$ 时（如图中 $\triangle OD'P'$ 所示），$\angle D'OP'=150°$，$\angle OD'P'=\angle OP'D'=15°$. 易得 $\angle BCP'=CP'B=75°$，所以 $BP'=BC=2\sqrt{3}$. 所以 $OD'=OP'=OB-BP'=4-2\sqrt{3}$，所以点 $D'(2\sqrt{3}-4,0)$. 综上所述，当 $\triangle ODP$ 为等腰三角形时，点 D 的坐标为 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},0\right)$ 或 $(2\sqrt{3}-4,0)$，故③错误.



5. $\sqrt{3}$　**提示**：延长 GP 交 DC 于点 H. 因为 P 是线段 DF 的中点，所以 $FP=DP$. 根据题意，得 $DC/\!/GF$，所以 $\angle GFP=\angle HDP$. 所以 $\triangle GFP\cong\triangle HDP$，所以 $GP=HP$，$GF=HD$. 因为四边形 $ABCD$ 和四边形 $BEFG$ 均为菱形，所以 $CD=CB$，$BG=GF=HD$. 所以 $BC-BG=CD-HD$，即 $CG=CH$，所以 $\triangle CHG$ 是等腰三角形，所以 $PC\perp PG$. 又因为 $\angle ABC=60°$，所以 $\angle BCD=120°$，所以 $\angle PGC=30°$，所以 $PC=\frac{1}{2}CG$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle CPG$ 中，由勾股定理，得 $PG=\sqrt{CG^2-PC^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}CG$. 所以 $\frac{PG}{PC}=\sqrt{3}$.

6. $\frac{24}{5}$　**提示**：如图，连接 AM，BD. 因为 $\triangle ADM$ 和 $\triangle BDM$ 的边 DM 上的高 $AD=BC=4$，所以 $S_{\triangle ADM}=S_{\triangle BDM}=\frac{1}{2}BM\cdot DG$. 因为 $S_{\triangle ABM}+S_{\triangle BCM}+S_{\triangle ADM}=S_{矩形ABCD}$，所以 $\frac{1}{2}BM\cdot AE+\frac{1}{2}BM\cdot CF+\frac{1}{2}BM\cdot DG=\frac{1}{2}BM(AE+CF+DG)=12$，所以 $\frac{1}{2}BM\cdot m=12$，即 $m=\frac{24}{BM}$，由勾股定理，得 $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=5$. 因为 M 是边 CD 上任意一点，所以 $4\leqslant BM\leqslant 5$，所以当 $BM=5$ 时，m 取得最小值，最小值为 $\frac{24}{5}$.

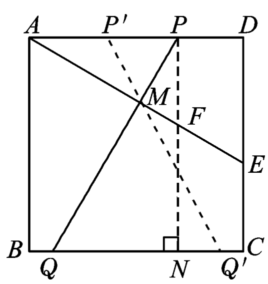


7. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　**提示**：过点 F 作 $FG\perp AC$ 于点 G. 易证 $\triangle BCE\cong\triangle GCF$，所以 $BE=GF$，$BC=GC$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=4$，所以 $AC=2AB$. 易得 $\angle ACB=30°$，所以 $\angle DAC=\angle ACB=30°$. 因为 $FG\perp AC$，所以 $AF=2GF$，所以 $AE+AF=AE+2BE=AB+BE$. 设 $BE=x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AFG$ 中，$AF=2GF=2BE=2x$，所以 $AG=\sqrt{AF^2-FG^2}=\sqrt{3}x$，所以 $AC=AG+GC=\sqrt{3}x+2\sqrt{3}=4$，解得 $x=\frac{4\sqrt{3}}{3}-2$. 所以 $AE+AF=AB+BE=2+\frac{4\sqrt{3}}{3}-2=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

8. 3　**提示**：设 MN，AC 相交于点 L. 由折叠，得 $GM=CM$，$GN=CN$，$\angle CLM=\angle GLM=\frac{1}{2}\times180°=90°$，所以 $\angle CLN=\angle CLM=90°$. 因为四边形 $ABCD$ 是边长为 1 的菱形，$\angle B=120°$，所以 $AB=CB=CD=AD=1$，$AB/\!/CD$，$AD/\!/CB$，所以 $\angle BCA=\angle BAC=\angle DCA$，$\angle BAD=\angle BCD=180°-\angle B=60°$. 在 $\triangle CLN$ 和 $\triangle CLM$ 中，$\begin{cases}\angle CLN=\angle CLM,\\ CL=CL,\\ \angle NCL=\angle MCL,\end{cases}$ 所以 $\triangle CLN\cong\triangle CLM$（ASA），所以 $CN=CM$，所以 $GM=CM=GN=CN$，所以四边形 $CMGN$ 是菱形. 因为 $CN=CM$，$\angle NCM=60°$，所以 $\triangle CMN$ 是等边三角形. 同理可得四边形 $AEGF$ 是菱形，$\triangle AEF$ 是等边三角形，所以 $GM/\!/CN/\!/ED$，$GE/\!/AF/\!/MD$，所以四边形 $DMGE$ 是平行四边形，所以 $DM=GE=AE$. 因为 $EF=AF$，$MN=CN$，所以

$DM+DE=AE+DE=AD=1$，$EF+BF=AF+BF=AB=1$，$BN+MN=BN+CN=CB=1$，所以 $DM+DE+EF+BF+BN+MN=1+1+1=3$，所以六边形 $DEFBNM$ 的周长为 3.

9. 1或2　**提示**：如图，过点 P 作 $PN\perp BC$ 于点 N，交 AE 于点 F. 因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $AD=DC=PN$. 在 Rt$\triangle ADE$ 中，$\angle DAE=30^\circ$，$AD=3$ cm，设 $DE=x$ cm，则 $AE=2x$ cm，根据勾股定理，得 $AE^2-DE^2=AD^2$，即 $(2x)^2-x^2=3^2$，解得 $x=\sqrt{3}$（负值已舍），所以 $AE=2\sqrt{3}$ cm. 因为 M 为 AE 的中点，所以 $AM=\frac{1}{2}AE=\sqrt{3}$ cm. 易证$\triangle PNQ\cong\triangle ADE$，所以 $\angle NPQ=\angle DAE=30^\circ$. 因为 $PN\parallel DC$，所以$\angle PFA=\angle DEA=60^\circ$. 所以 $\angle PMF=90^\circ$，即 $PM\perp AF$. 在 Rt$\triangle AMP$ 中，$\angle MAP=30^\circ$，$AM=\sqrt{3}$ cm，易得 $AP=2$ cm. 由对称性，可得 $AP'=DP=AD-AP=3-2=1$(cm). 综上所述，$AP=1$ cm 或 $AP=2$ cm.



10. **解**：(1) 如图 1，点 F 即为所求.

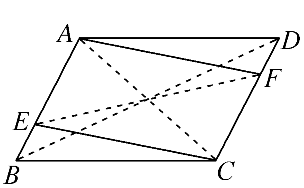


图 1

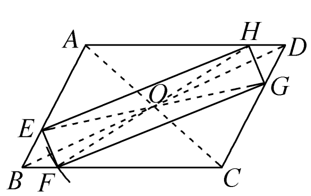
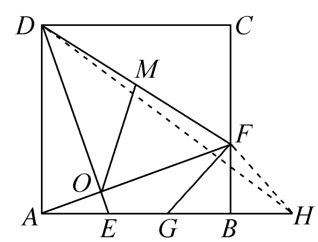


图 2

(2) 如图 2，连接 AC，BD 交于点 O，连接 EO 并延长交 CD 于点 G，以点 O 为圆心，OG 的长为半径作弧交 BC 于点 F，延长 FO 交 AD 于点 H，连接 EF，FG，GH，HE，四边形 $EFGH$ 即为所求.

理由：易证$\triangle AOE\cong\triangle COG$，所以 $OE=OG$. 易证$\triangle AOH\cong\triangle COF$，所以 $OH=OF$. 因为 $OG=OF$，所以 $OE=OG=OF=OH$，所以四边形 $EFGH$ 为矩形.

11. B　**提示**：易证$\triangle ADE\cong\triangle BAF$(SAS)，所以$\angle ADE=\angle BAF$，则$\angle DOF=90^\circ$. 因为 M 是 DF 的中点，所以 $OM=\frac{1}{2}DF$. 如图，在 AB 的延长线上截取 $BH=BG$，连接 DH，FH. 易证 $\triangle FBG\cong\triangle FBH$ (SAS)，所以 $FH=FG$，所以 $OM+\frac{1}{2}FG=\frac{1}{2}DF+\frac{1}{2}HF=\frac{1}{2}(DF+HF)$，易知当 D，F，H 三点共线时，$DF+HF$ 取得最小值，即此时 $OM+\frac{1}{2}FG$ 取得最小值，最小值为 DH 长的一半. 因为 $AB=AD=6$，$AG=2GB$，所以 $BG+2BG=AB$，求得 $BG=2$. 易得 $AH=8$. 在 Rt$\triangle ADH$ 中，由勾股定理，得 $DH=\sqrt{AD^2+AH^2}=10$，所以 $OM+\frac{1}{2}FG$ 的最小值为 5.



12. **解**：(1) R，S

(2) 如图 1，过点 A 作 $AH\perp x$ 轴于点 H. 因为点 A，B 的“相关菱形”为正方形，所以 $\triangle ABH$ 为等腰直角三角形. 因为点 $A(1,4)$，所以 $BH=AH=4$. 所以 $b=-3$ 或 $b=5$. 所以点 B 的坐标为$(-3,0)$或$(5,0)$. 设直线 AB 的函数表达式为 $y=kx+b(k\neq0)$. 根据题意，得 $\begin{cases}k+b=4,\\-3k+b=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k+b=4,\\5k+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1,\\b=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=-1,\\b=5.\end{cases}$ 所以直线 AB 的函数表达式为 $y=x+3$ 或 $y=-x+5$.

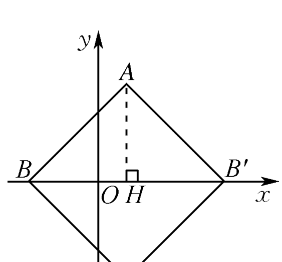


图 1

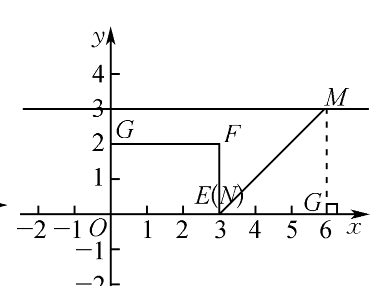


图 2

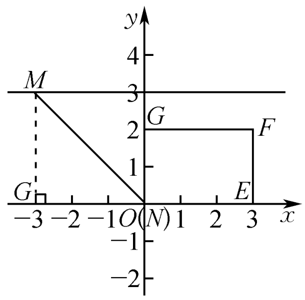
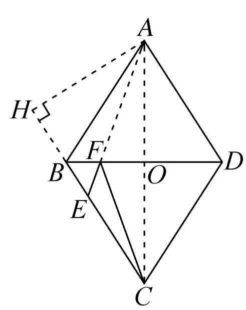


图 3

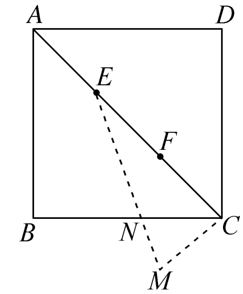
(3) $-3\leqslant m\leqslant 6$. **提示**：如图 2，当点 N 与点 E 重合时，过点 M 作 $MG\perp x$ 轴于点 G. 因为点 M,N 的“相关菱形”为正方形，所以 $\triangle NMG$ 为等腰直角三角形，所以 $EG=MG=3$，所以点 $M(6,3)$. 如图 3，当点 N 与点 O 重合时，同理求得点 $M(-3,3)$. 综上所述，m 的取值范围是 $-3\leqslant m\leqslant 6$.

巅峰训练 8　特殊的平行四边形(3)

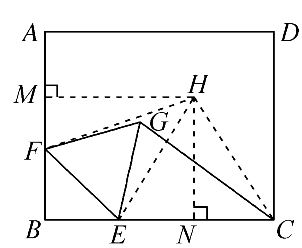
1. B　**提示**：设 $BE=a$，则 $CE=4a$，$BC=AB=5a$. 由点 $(0,6)$ 可知，当 $x=0$，即点 F 与点 B 重合时，$EF+CF=BE+BC=6a=6$，解得 $a=1$，即 $BE=1$，$CE=4$，$BC=5$. 由点 $(6,0)$ 可知 $BD=6$. 如图，连接 AC，则 $AC\perp BD$，垂足为 O，$BO=OD=3$，所以 $OC=\sqrt{5^2-3^2}=4$，所以 $AC=8$. 连接 AF，则 $AF=CF$，所以 $y=EF+CF=EF+AF\geqslant AE$. 当点 A,F,E 在同一直线上时，y 取得最小值，为题图象最低点的纵坐标. 过点 A 作 $AH\perp BC$，垂足为 H，则 $\frac{1}{2}AH\cdot BC=\frac{1}{2}AC\cdot BO$，所以 $AH=\frac{24}{5}$，所以 $HB=\sqrt{5^2-\left(\frac{24}{5}\right)^2}=\frac{7}{5}$. 所以 $HE=\frac{7}{5}+1=\frac{12}{5}$，所以 $AE=\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2+\left(\frac{24}{5}\right)^2}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$，即图象最低点纵坐标为 $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.



2. D　**提示**：如图，作点 F 关于 BC 的对称点 M，连接 EM 交 BC 于点 N，连接 CM. 因为点 E,F 将对角线 AC 三等分，且 $AC=12$，所以 $EC=8$，$FC=4$. 因为点 M 与点 F 关于 BC 对称，所以 $CM=CF=4$，$\angle BCM=\angle ACB=45^\circ$，所以 $\angle ACM=90^\circ$，所以 $EM=\sqrt{EC^2+CM^2}=4\sqrt{5}$. 所以线段 BC 上存在点 N 到点 E 和点 F 距离之和的最小值为 $4\sqrt{5}$. 因为 $4\sqrt{5}<9$，所以线段 BC 上点 N 的左右两侧各有一个点 P 使得 $PE+PF=9$，同理，在线段 AB,AD,CD 上均存在两个点 P 使 $PE+PF=9$. 即共有 8 个点 P 满足 $PE+PF=9$.

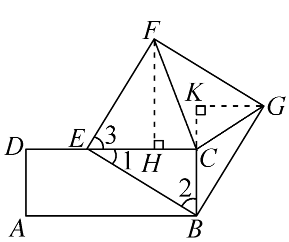


3. C　**提示**：如图，以 EC 为边作等边三角形 ECH，过点 H 作 $HN\perp BC$ 于点 N，$HM\perp AB$ 于点 M，连接 FH. 易证四边形 $MHNB$ 是矩形，$EN=NC=\frac{1}{2}EC=2$，所以 $HM=BN=4$. 易证 $\triangle FEH\cong\triangle GEC$ (SAS)，可得 $FH=GC$. 当点 F 与点 M 重合时，FH 的长取得最小值，即 CG 的长取得最小值，最小值为 HM 的长，为 4.



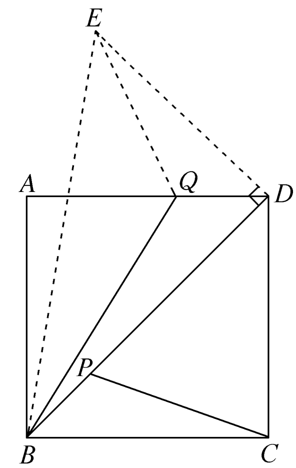
4. $\frac{19}{8}$　**提示**：如图，过点 F 作 $FH\perp CD$ 于点 H，过点 G 作 $GK\perp BC$，交 BC 的延长线于点 K. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $CD=AB=10$，$BC=AD=4$，$\angle BCD=90^\circ$. 因为 $DE=2t$，所以 $CE=CD-DE=10-2t$. 因为四边形 $BEFG$ 是正方形，所以 $BE=EF=BG$，$\angle BEF=\angle GBE=90^\circ$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BCE$ 中，由勾股定理，得 $BE^2=CE^2+BC^2=(10-2t)^2+4^2$，所以 $S_{正方形BEFG}=(10-2t)^2+16$，$S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}BC\cdot CE=2(10-2t)$. 因为

$\angle BCE=\angle EHF=90°$，所以$\angle 1+\angle 2=90°$，又因为$\angle 1+\angle 3=\angle BEF=90°$，所以$\angle 2=\angle 3$. 在$\triangle BCE$和$\triangle EHF$中，$\begin{cases}\angle BCE=\angle EHF=90°,\\ \angle 2=\angle 3,\\ BE=EF,\end{cases}$所以$\triangle BCE\cong\triangle EHF$(AAS)，所以$FH=EC=10-2t$，所以$S_{\triangle EFC}=\frac{1}{2}EC\cdot FH=\frac{1}{2}(10-2t)^2$，同理可证$\triangle BCE\cong\triangle GKB$(AAS)，所以$GK=BC=4$，所以$S_{\triangle BCG}=\frac{1}{2}BC\cdot GK=8$. 因为$S_{正方形BEFG}=S_{\triangle EFC}+S_{\triangle BCG}+S_{\triangle BCE}+S_{\triangle CFG}$，$S_{\triangle CFG}=2t^2$，所以$(10-2t)^2+16=\frac{1}{2}(10-2t)^2+8+2(10-2t)+2t^2$，整理，得$16t=38$，解得$t=\frac{19}{8}$.



5. $\sqrt{2}$　**提示：**连接AC交BD于点O. 因为四边形$ABCD$是菱形，所以$AB=BC=1$. 因为$\angle ABC=60°$，所以$\triangle ABC$是等边三角形，所以$AC=AB=1$. 过点C向左侧作$CG/\!/BD$，且$CG=AD=1$，连接AG,EG. 所以$\angle GCA=\angle AOD=90°$. 易证$\angle GCE=\angle GCA-\angle ACB=30°=\angle ADF$，所以$\triangle ADF\cong\triangle GCE$，所以$AF=GE$. 所以$AE+AF=AE+GE\geqslant AG$. 在$\mathrm{Rt}\triangle ACG$中，由勾股定理，得$AG=\sqrt{2}$. 所以$AE+AF$的最小值为$\sqrt{2}$.

6. $4\sqrt{3}$　**提示：**如图，过点D作$DE\perp BD$，且使$DE=BC$，连接EQ,EB. 依题意得$DQ=BP$. 因为四边形$ABCD$为正方形，$DE\perp BD$，所以$\angle QDE=\angle PBC=45°$，易证$\triangle QDE\cong\triangle PBC$(SAS)，所以$EQ=CP$，所以$CP+BQ=EQ+BQ$. 易知$EQ+BQ\geqslant BE$，当点$B,Q,E$在同一条直线上时，$EQ+BQ$的值最小，最小值为线段$BE$的长，所以$CP+BQ$的最小值为线段$BE$的长. 在$\mathrm{Rt}\triangle ABD$中，由勾股定理，得$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=4\sqrt{2}$. 在$\mathrm{Rt}\triangle BDE$中，由勾股定理，得$BE=\sqrt{BD^2+DE^2}=4\sqrt{3}$，所以$CP+BQ$的最小值为$4\sqrt{3}$.



7. $2\sqrt{2}-2$　$\sqrt{2}$　**提示：**因为$DE=AF$，$\angle CDE=\angle DAF$，$CD=DA$，所以$\triangle CDE\cong\triangle DAF$，所以$\angle CED=\angle DFA$. 因为$CE$平分$\angle ACD$，所以$\angle DCE=22.5°$，所以$\angle CED=67.5°$，所以$\angle DFA=67.5°$. 在$\triangle AHF$中，$\angle HAF=45°$，所以$\angle AHF=67.5°$. 所以$\angle DFA=\angle AHF$，所以$AH=AF$. 因为$AB/\!/CD$，所以$\angle CDH=\angle DFA$. 因为$\angle DHC=\angle AHF$，所以$\angle CDH=\angle DHC$，所以$CD=CH$. 因为$AB=2$，所以$AC=2\sqrt{2}$. 所以$AH=2\sqrt{2}-2$. 所以$DE=AF=AH=2\sqrt{2}-2$. 连接$PD$，过点$D$作$DQ'\perp AC$于点$Q'$. 因为$\angle EDG+\angle DEG=\angle DCE+\angle DEG=90°$，所以$DH\perp CE$. 因为$\triangle CDH$为等腰三角形，所以点$D$与点$H$关于$CE$对称，所以$PD=PH$，所以$PH+PQ=PD+PQ$. 当$D,P,Q$三点共线，且$DQ\perp AC$时，$PH+PQ$的值最小，最小值为$DQ'$的长. 在$\mathrm{Rt}\triangle CDQ'$中，$\angle DCQ'=45°$，$CD=2$，所以$DQ'=\sqrt{2}$. 所以$PH+PQ$的最小值为$\sqrt{2}$.

8. 解：(1) 78

(2) $\triangle MNK$为等腰三角形. 理由如下：

因为$AM/\!/DN$，所以$\angle KNM=\angle 1$. 又因为$\angle 1=\angle KMN$，所以$\angle KNM=\angle KMN$，所以$\triangle MNK$为等腰三角形.

(3) $45°$

(4) 分两种情况：①如图1，将矩形纸片对折，使点B'与点D重合，此时点K也与点D重合. 设$MD=MB=x$，则$AM=10-x$. 由勾股定理，得$2^2+(10-x)^2=x^2$，解得$x=5.2$.

易得 $ND=MD=5.2$，所以 $S_{\triangle MNK}=S_{\triangle MND}=\frac{1}{2}\times2\times5.2=5.2$. ②如图 2，将矩形纸片沿对角线 AC 对折，此时折痕即为 AC，点 M 与点 A 重合，点 N 与点 C 重合. 易得 $CK=AK$. 设 $MK=AK=CK=y$，则 $DK=10-y$，同理可得 $MK=NK=5.2$. 因为 $MD=2$，所以 $S_{\triangle MNK}=\frac{1}{2}\times2\times5.2=5.2$. 综上所述，$\triangle MNK$ 的面积最大值为 5.2.

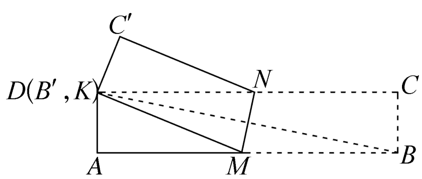


图 1

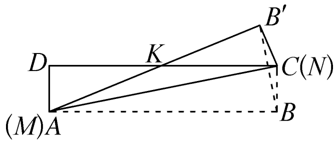


图 2

9.（1）**证明**：①因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $AB=BC$，$\angle ABD=\angle CBD=45°$. 由旋转的性质，得 $A'B=AB$，$BP'=BP$，$\angle A'BP'=\angle ABP=45°$. 所以 $BC=A'B$，$\angle A'BP=\angle CBP'$. 在 $\triangle BPA'$ 和 $\triangle BP'C$ 中，

$$\begin{cases}BA'=BC,\\ \angle A'BP=\angle CBP',\\ BP=BP',\end{cases}$$ 所以 $\triangle BPA'\cong\triangle BP'C$.

②连接 AA'. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $AB=BC=AD$，$\angle BAD=\angle ABC=90°$. 由旋转的性质，得 $A'B=AB$，$\angle A'BA=60°$，所以 $\triangle A'BA$ 是等边三角形，$\angle A'BC=30°$，所以 $AA'=BA'$，$\angle A'AB=60°$，所以 $\angle A'AP=30°=\angle A'BC$. 易证 $\triangle A'AP\cong\triangle A'BC$，所以 $A'P=A'C$. 由（1）①知，$\triangle BPA'\cong\triangle BP'C$，所以 $A'P=CP'$. 所以 $A'C=CP'$，所以 $\triangle A'P'C$ 是等腰三角形.

（2）**解**：①如图 1，点 P 即为所求.

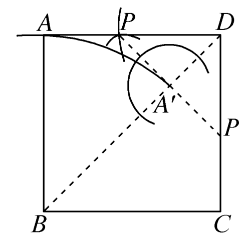


图 1

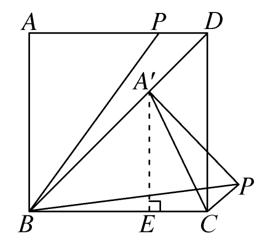


图 2

②由旋转的性质，得 $A'B=AB=\sqrt{2}$，$A'P'=AP$，$\angle BA'P'=\angle A=90°$. 如图 2，过点 A' 作 $A'E\perp BC$ 于点 E，则 $\triangle A'BE$ 是等腰直角三角形，所以 $A'E=BE=1$，所以 $CE=\sqrt{2}-1$，所以 $A'C^2=A'E^2+CE^2=4-2\sqrt{2}$. 因为 $A'B=BC$，所以 $\angle BA'C=\angle A'CB=67.5°$，所以 $\angle CA'P'=22.5°<90°$.

分以下两种情况：

（Ⅰ）如图 3，当 $\angle A'P'C=90°$ 时，过点 C 作 $\angle A'CF=\angle CA'P'=22.5°$，交 $A'P'$ 于点 F，则 $CF=A'F$，$\angle CFP'=45°$，所以 $\triangle CFP'$ 是等腰直角三角形，$CP'=FP'$. 设 $CP'=FP'=x(x>0)$，则 $A'F=CF=\sqrt{2}x$，所以 $A'P'=(\sqrt{2}+1)x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle A'P'C$ 中，$CP'^2+A'P'^2=A'C^2$，即 $x^2+[(\sqrt{2}+1)x]^2=4-2\sqrt{2}$. 整理，得 $x^2=(\sqrt{2}-1)^2$，解得 $x=\sqrt{2}-1$ 或 $x=-\sqrt{2}+1<0$（舍去）. 所以 $A'P'=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$. 所以 $AP=A'P'=1$.

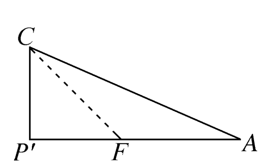


图 3

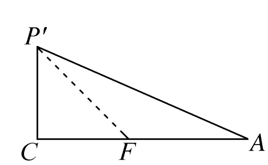


图 4

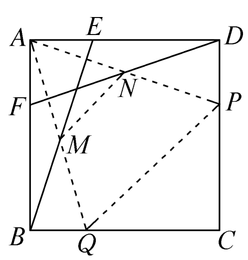
（Ⅱ）如图 4，当 $\angle A'CP'=90°$ 时，过点 P' 作 $\angle A'P'F=\angle CA'P'=22.5°$，交 $A'C$ 于点 F. 同理可得 $A'F=P'F$，$CF=CP'$. 设 $CF=CP'=y(y>0)$，则 $A'F=P'F=\sqrt{2}y$. 因为 $(A'F+CF)^2=A'C^2$，所以 $(\sqrt{2}y+y)^2=4-$

$2\sqrt{2}$.整理,得 $y^2=20-14\sqrt{2}$,所以 $A'P'^2=P'C^2+A'C^2=y^2+4-2\sqrt{2}=(4-2\sqrt{2})^2$,解得 $A'P'=4-2\sqrt{2}$ 或 $A'P'=2\sqrt{2}-4<0$(舍去).所以 $AP=A'P'=4-2\sqrt{2}$.

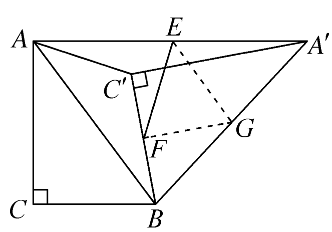
综上所述,当$\triangle A'P'C$ 是直角三角形时,AP 的长为 1 或 $4-2\sqrt{2}$.

巅峰训练 9　三角形的中位线

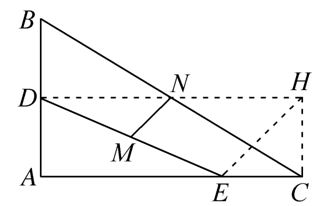
1. B　**提示:**如图,连接 AM 并延长交 BC 于点 Q,连接 AN 并延长交 CD 于点 P.因为 M 是 BE 的中点,所以 $EM=BM$.因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以 $AD//BC$,所以$\angle AEB=\angle QBM$.在$\triangle AME$ 和$\triangle QMB$ 中,$\begin{cases}\angle AEM=\angle QBM,\\ EM=BM,\\ \angle AME=\angle QMB,\end{cases}$ 所以$\triangle AME\cong\triangle QMB$(ASA),所以 $QB=AE=2$,$AM=QM$,同理 $PD=AF=2$,$AN=PN$,所以 MN 是$\triangle APQ$ 的中位线,所以 $MN=\frac{1}{2}PQ$.因为正方形 $ABCD$ 的边长为 6,所以 $CQ=CP=4$,所以 $PQ=\sqrt{2}CP=4\sqrt{2}$,所以 $MN=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.



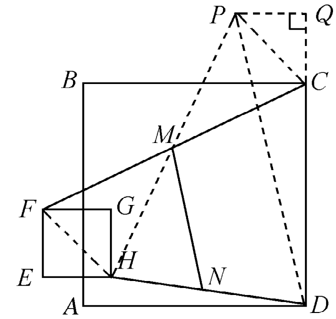
2. D　**提示:**如图,取 $A'B$ 的中点 G,连接 EG,FG,由勾股定理和旋转的性质,可知 $A'C'=AC=4$,$BC'=BC=3$,$A'B=AB=5$.因为点 E,F,G 分别是 AA',BC',$A'B$ 的中点,所以 $EG=\frac{1}{2}AB=\frac{5}{2}$,$FG=\frac{1}{2}A'C'=2$.所以 $EG-FG\leqslant EF\leqslant EG+FG$,即$\frac{1}{2}\leqslant EF\leqslant\frac{9}{2}$.



3. A　**提示:**如图,过点 C 作 $CH//AB$,则$\angle ECH=90°$,连接 DN 并延长交 CH 于点 H,连接 EH.易证$\triangle DNB\cong\triangle HNC$(ASA),所以 $CH=BD=4$,$DN=HN$.在 Rt$\triangle CEH$ 中,由勾股定理,得 $EH=\sqrt{CH^2+CE^2}=5$.因为 $DM=ME$,$DN=HN$,所以 $MN=\frac{1}{2}EH=\frac{5}{2}$.



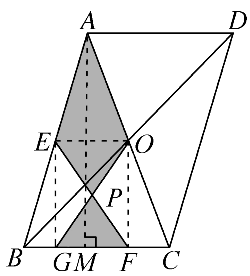
4. C　**提示:**如图,连接 HM 并延长至点 P,使 $MP=MH$,过点 P 作 $PQ\perp CD$,交 DC 的延长线于点 Q,连接 PC,FH,PD.因为 M 为 CF 的中点,所以 $MF=MC$.易证$\triangle FHM\cong\triangle CPM$,所以 $FH=CP$,$\angle HFM=\angle PCM$.因为 $EF=EH=2$,所以 $CP=FH=2\sqrt{2}$.易知 $FG//BC$,所以$\angle GFM=\angle BCM$,所以$\angle PCB=\angle HFG=45°$,所以$\angle PCQ=45°$,所以 $PQ=QC=2$.所以 $DQ=8$,所以 $PD=\sqrt{PQ^2+DQ^2}=2\sqrt{17}$.因为 M 为 PH 的中点,N 为 DH 的中点,所以 $MN=\frac{1}{2}PD=\sqrt{17}$.



5. $\frac{15}{2}$　**提示:**作点 A 关于 x 轴的对称点 $E(8,-6)$,连接 CE,OE,则 B 是 AE 的中点.又因为 D 是 AC 的中点,所以 BD 是$\triangle AEC$ 的中位线,所以 $BD=\frac{1}{2}CE$,所以当 CE 的长最大时,BD 的长最大.当点 C 在 EO 的延长线上时,CE 的长有最大值.因为 $OB=8$,$BE=6$,所以 $OE=\sqrt{BE^2+OB^2}=10$,所以 CE 的最大值为 $10+5=15$,所以 BD 的最大值为$\frac{1}{2}\times 15=\frac{15}{2}$.

6. $2-\sqrt{3}$ 或 $\dfrac{6+\sqrt{3}}{11}$ **提示**:因为 $\angle ABC=90°$, $\angle ACB=30°$, $AB=2$ cm,所以 $AC=2AB=4$ cm,所以 $BC=2\sqrt{3}$ cm. 因为 E, F 分别是 AB, AC 的中点,所以 $EF=\frac{1}{2}BC=\sqrt{3}$ cm, $EF\parallel BC$, $BF=CF=\frac{1}{2}AC=2$ cm,所以 $\angle PFQ=\angle FBC=\angle ACB=30°$. 根据题意,得 $EP=t$ cm, $BQ=2t$ cm,所以 $PF=(\sqrt{3}-t)$ cm, $FQ=(2-2t)$ cm. 分 3 种情况讨论:当 $PF=FQ$ 时, $\sqrt{3}-t=2-2t$,解得 $t=2-\sqrt{3}$. 当 $PQ=FQ$ 时,过点 Q 作 $QD\perp EF$ 于点 D,所以 $PF=2DF$. 因为 $\angle PFQ=30°$,所以 $QD=\frac{1}{2}FQ=(1-t)$ cm,所以 $DF=\frac{\sqrt{3}}{2}FQ=\sqrt{3}(1-t)$ cm,所以 $PF=2DF=2\sqrt{3}(1-t)$ cm,所以 $2\sqrt{3}(1-t)=\sqrt{3}-t$,解得 $t=\frac{6+\sqrt{3}}{11}$. 当 $PF=PQ$ 时, $\angle PFQ=\angle PQF=30°$,所以 $\angle FPQ=120°$,在点 P, Q 的运动过程中, $\angle FPQ<90°$ $\left(\text{只有当点 } Q \text{ 的运动速度不大于} \frac{2\sqrt{3}}{3}\text{ cm/s 时,才可能为直角或钝角}\right)$,所以此种情况不成立.

7. 84 **提示**:如图,连接 EO, EG, OF,过点 A 作 $AM\perp BC$ 于点 M,设 OG 与 EF 相交于点 P. 易知 EO 是 $\triangle ABC$ 的中位线,所以 $EO\parallel BC$, $EO=\frac{1}{2}BC=7$. 因为 $GF=7$,所以 $EO=GF$. 所以四边形 $EOFG$ 是平行四边形,所以 $S_{\triangle EOP}+S_{\triangle FGP}=\frac{1}{2}S_{\square EOFG}=S_{\triangle EOG}$. 因为 $EO\parallel BG$,所以 $S_{\triangle EOG}=S_{\triangle EOB}$. 所以 $S_{阴影部分}=S_{\triangle ABO}$. 因为 $AM\perp BC$, $AC=AB=25$, $BC=14$,所以 $BM=CM=\frac{1}{2}BC=7$,所以 $AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=24$,所以 $S_{\triangle ABC}=168$. 因为 O 是 AC 的中点,所以 $S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=84$. 所以阴影部分的面积为 84.



8. 6 **提示**:由题意,得 $BD=B'D=\frac{1}{2}BB'$, $AD\perp BC$, $AM=DM$, $\angle MAN=\angle MDN$, $AN=DN$,所以 $\angle NDC=\angle C$,所以 $CN=DN=AN$. 因为 $AM=DM$,所以 MN 是 $\triangle ADC$ 的中位线. 同理, MP 是 $\triangle ADB'$ 的中位线. 所以 $MN=\frac{1}{2}DC$, $MP=\frac{1}{2}DB'$. 因为 $BC=12$,所以 $MP+MN=\frac{1}{2}DB'+\frac{1}{2}DC=\frac{1}{2}(DB'+DB'+B'C)=\frac{1}{2}BC=6$.

9. (1) D

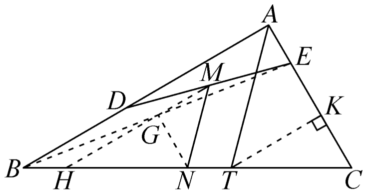
(2) ① **证明**:因为 $AB=AC$,所以 $\angle ABC=\angle ACB$. 因为 $\angle BCD=90°$, E 为 BD 的中点,所以 $EC=EB$,所以 $\angle EBC=\angle ECB$,所以 $\angle ABC-\angle EBC=\angle ACB-\angle ECB$,即 $\angle ABD=\angle ACE$.

② **证明**:因为 E, F 分别是 BD, AD 的中点,所以 EF 是 $\triangle ABD$ 的中位线,所以 $EF\parallel AB$, $EF=\frac{1}{2}AB$. 因为 $\angle BCD=90°$, E 为 BD 的中点,所以 $EC=\frac{1}{2}BD$. 由"垂等四边形"的定义,得 $AB=AC=BD$,所以 $EF=EC$,所以四边形 $CEFG$ 为菱形. 因为 $EF\parallel AB$,所以 $\angle FED=\angle ABD$. 由(2)①,得 $\angle ABD=\angle ACE$,所以 $\angle FED=\angle ACE$. 由"垂等四边形"的定义,得 $AC\perp BD$,所以 $\angle ACE+\angle CED=90°$,所以 $\angle FEC=\angle FED+\angle CED=90°$,所以四边形 $CEFG$ 为正方形.

(3) **证明**:由题意,可得 $S_{\triangle EBD}=S_{\triangle CBD}$,所以点 E 到 BD 距离等于点 C 到 BD 距离,所以 $EC\parallel BF$. 因为 $BF=CE$,所以四边形 $ECFB$ 为平行四边形,所以 $FC\parallel BE$. 又因为 $BE\perp DE$,所以 $FC\perp DG$,所以 $FC=BE=AB=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}ED=DG$,则四边形 $CDFG$ 是"垂等

四边形”.

10. $\sqrt{3}-1$　**提示**:如图,连接 BE,取 BE 的中点 G,连接 GM,GN,延长 MG 交 BC 于点 H,过点 T 作 $KT\perp AC$ 于点 K.因为 M,N,G 分别为 DE,BC,BE 的中点,所以 $MG /\!/ BD$,$MG=\frac{1}{2}BD$,$GN /\!/ CE$,$GN=\frac{1}{2}CE$,所以 $\angle MHN=\angle ABC=30°$.因为 $\angle BAC=90°$,$BD=CE$,所以 $MG\perp GN$,$MG=GN$,所以 $\triangle GMN$ 为等腰直角三角形,所以 $\angle GNM=45°$.因为 $\angle HNG=90°-\angle MHN=60°$,所以 $\angle MNC=75°$.因为 $AT /\!/ MN$,所以 $\angle ATC=75°$.因为 $\angle C=180°-\angle BAC-\angle ABC=60°$,$KT\perp AC$,所以 $\angle KTC=30°$,所以 $\angle ATK=45°$,所以 $\triangle ATK$ 为等腰直角三角形.设 $KC=x$,则 $TK=AK=\sqrt{3}x$.因为 $AC=CK+AK$,所以 $x+\sqrt{3}x=1+\sqrt{3}$,解得 $x=1$,所以 $TC=2$.因为 $BC=2AC=2+2\sqrt{3}$,所以 $NC=1+\sqrt{3}$,所以 $NT=NC-TC=\sqrt{3}-1$.



11. (1) **解**:如图 1,连接 DC,过点 D 作 $DG\perp AC$ 交 AC 于点 G.因为 D 为 AB 的中点,所以 $CD=AD$.又因为 $DG\perp AC$,所以 G 为 AC 的中点,所以 DG 为 $\triangle ACB$ 的中位线,所以 $DG=\frac{1}{2}BC=1$.因为 $AE=\frac{1}{4}AC$,$AC=4$,所以 $AE=1$,所以 $GE=1$.在 $\mathrm{Rt}\triangle DGE$ 中,$DE=\sqrt{DG^2+GE^2}=\sqrt{2}$.

(2) **证明**:如图 2,连接 BE,取 BE 的中点 M,连接 MD,MF.因为 F 为 EC 的中点,D 为 AB 的中点,所以 $MF /\!/ BC$ 且 $MF=\frac{1}{2}BC$,$MD /\!/ AE$ 且 $MD=\frac{1}{2}AE$,又因为 $AE=BC$,所以 $MF=MD$,所以 $\angle MDF=\angle MFD$.又因为 $MD /\!/ AE$,所以 $\angle AFD=\angle MDF$,所以 $\angle AFD=\frac{1}{2}\angle AFM$.因为 $MF /\!/ BC$,所以 $\angle AFM=\angle C$,所以 $\angle AFD=\frac{1}{2}\angle C$.

(3) **解**:$AC=2AE+BC$.证明如下:

如图 3,在 EC 上截取 $EM=AE$,连接 BM,过点 C 作 $CH\perp BM$ 于点 H.因为 $AE=EM$,$AD=DB$,所以 $DE /\!/ BM$,所以 $\angle AED=\angle AMB=\angle MHC+\angle MCH=90°+\angle MCH$.因为 $2\angle AED-\angle ACB=180°$,所以 $\angle AED=90°+\frac{1}{2}\angle ACB$,所以 $\angle MCH=\frac{1}{2}\angle ACB$,所以 $\angle ACB=2\angle MCH$.易证 $\triangle CHM\cong\triangle CHB$,所以 $BC=MC$,所以 $AC=2AE+BC$.

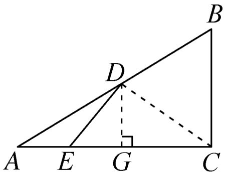


图 1

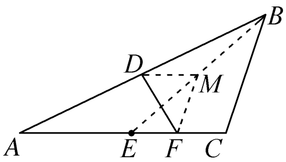


图 2

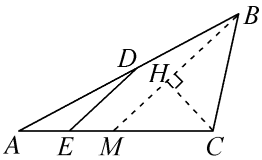
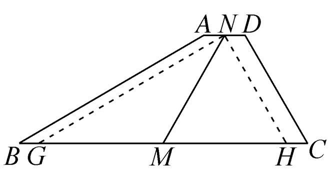


图 3

巅峰训练 10　梯形

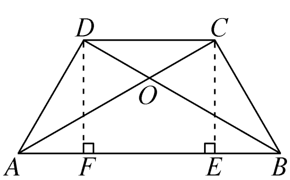
1. B

2. A　**提示**:如图,过点 N 作 $NG /\!/ AB$ 交 BC 于点 G,$NH /\!/ CD$ 交 BC 于点 H,易得 $\triangle GNH$ 是直角三角形,所以 $MN=\frac{1}{2}GH=\frac{1}{2}(BC-AD)$,所以 $AD=1$.



3. A　**提示**:如图,过点 C 作 $CE\perp AB$ 于点 E,过点 D 作 $DF\perp AB$ 于点 F.易得 $AD=BC$,$\angle DAB=\angle CBA$,四边形 $CDFE$ 是矩形,所以 $EF=CD$.在

$\triangle ABD$ 和 $\triangle BAC$ 中，$\begin{cases}AB=BA,\\ \angle DAB=\angle CBA,\\ AD=BC,\end{cases}$ 所以 $\triangle ABD\cong\triangle BAC(\text{SAS})$，所以 $\angle BAC=\angle ABD=30^\circ$，$\angle BDA=\angle ACB$. 因为 $AC\perp BC$，所以 $\angle ACB=90^\circ=\angle BDA$，所以 $BC=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times24=12(\text{cm})$，$\angle ABC=90^\circ-\angle BAC=60^\circ$，所以 $\angle CBD=\angle ABC-\angle ABD=30^\circ$，$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=12\sqrt{3}$ cm，所以 $OB=2OC$. 因为 $OB^2=OC^2+BC^2$，所以 $4OC^2=OC^2+144$，所以 $OC=4\sqrt{3}(\text{cm})$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}\times12\sqrt{3}\times12=72\sqrt{3}(\text{cm}^2)$，$S_{\triangle AOD}=S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}OC\cdot BC=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times12=24\sqrt{3}(\text{cm}^2)$. 因为 $\angle CEB=\angle DFA=90^\circ$，$\angle BAD=\angle ABC=60^\circ$，所以 $\angle ADF=\angle BCE=90^\circ-60^\circ=30^\circ$，所以 $AF=BE=\frac{1}{2}BC=6$ cm，所以 $CD=EF=AB-AF-BE=12$ cm，$CE=\sqrt{BC^2-BE^2}=6\sqrt{3}$ cm，$S_{梯形ABCD}=\frac{1}{2}(AB+CD)\cdot CE=\frac{1}{2}(24+12)\times6\sqrt{3}=108\sqrt{3}(\text{cm}^2)$，所以 $S_{\triangle COD}=S_{梯形ABCD}-S_{\triangle ABC}-S_{\triangle AOD}=12\sqrt{3}(\text{cm}^2)$.



4. B　**提示**：由题意可知，$AD\parallel BC$，$QD=t$，$BP=3t$. 分两种情况：①如图 1，点 P 在线段 BC 上，当 $QD=CP$ 时，四边形 $CDQP$ 是平行四边形，由题意，得 $CP=BC-BP=21-3t$，所以 $t=21-3t$，解得 $t=\frac{21}{4}$；②如图 2，点 P 在 BC 的延长线上，当 $QD=CP$ 时，四边形 $CQDP$ 是平行四边形，由题意，得 $CP=BP-BC=3t-21$，所以 $t=3t-21$，解得 $t=\frac{21}{2}$. 综上所述，当 t 的值为 $\frac{21}{4}$ 或 $\frac{21}{2}$ 时，以 P,C,D,Q 为顶点的四边形是平行四边形.

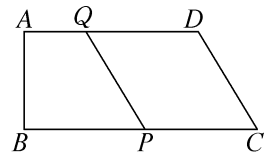


图 1

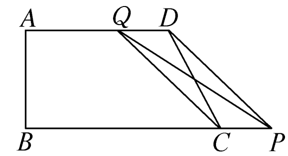
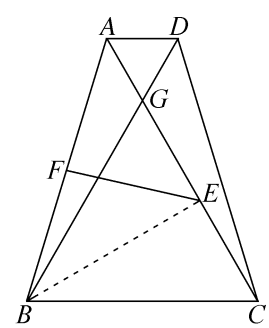


图 2

5. 8　**提示**：设 $OA=a$ m，$OC=b$ m. 由题意，得 $a+b=20$. 因为主舞台和观众区的面积和为 116 m^2，所以 $\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2=116$，所以 $a^2+b^2=232$. 因为 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，所以 $400=232+2ab$，所以 $ab=84$. 因为 $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=400-336=64$，$a>b>0$，所以 $a-b=8$，即表演区护栏 AO 比 DO 长 8 m.

6. 5　**提示**：如图，连接 BE. 因为 $AB=DC$，所以 $AC=BD$. 易证 $\triangle ABC\cong\triangle DCB$，所以 $\angle GCB=\angle GBC$. 又因为 $\angle BGC=\angle AGD=60^\circ$，所以 $\triangle BCG$ 为等边三角形. 因为 BE 为 $\triangle BCG$ 的中线，所以 $BE\perp AC$，所以 $EF=\frac{1}{2}AB=5$ cm.



7. 1.5 或 2　**提示**：由题意可得，当 $\triangle BEC$ 是直角三角形时，有以下两种情况：

①如图 1，当 $\angle BCE=90^\circ$ 时，过点 B 作 $BG\perp DC$，交 DC 的延长线于点 G. 所以 $\angle D=\angle A=\angle G=90^\circ$，所以四边形 $ABGD$ 为矩形，所以 $BG=AD=4$，$DG=AB=5$. 因为 BE 平分 $\angle ABC$，所以 $\angle CBE=\angle ABE$，所以 $\triangle CBE\cong\triangle ABE(\text{AAS})$，所以 $BC=AB=5$. 设 $DE=x$，则 $AE=AD-DE=4-x$，$CE=AE=4-x$. 在 $\text{Rt}\triangle BCG$ 中，由勾股定理，得 $CG=3$，所以 $CD=DG-CG=2$. 在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中，由勾股定理，得 $DE^2+CD^2=CE^2$，即 $x^2+2^2=(4-x)^2$，解得 $x=1.5$，所以 $DE=1.5$.

②如图 2，当 $\angle BEC=90^\circ$ 时，过点 E 作 $EH\perp BC$ 于点 H. 因为 BE 平分 $\angle ABC$，所以 $\angle HBE=\angle ABE$，所以 $\triangle HBE\cong\triangle ABE(\text{AAS})$，所以 $EH=EA$，$\angle HEB=$

$\angle AEB$. 因为$\angle BEC=90^\circ$，所以$\angle CEH+\angle HEB=90^\circ$，$\angle CED+\angle AEB=90^\circ$，所以$\angle CEH=\angle CED$. 因为$AB/\!/CD$，$\angle A=90^\circ$，所以$\angle D=\angle A=90^\circ$，所以$\angle CHE=\angle D=90^\circ$，所以$\triangle CEH\cong\triangle CED$(AAS)，所以$EH=DE$，所以$DE=EA=\frac{1}{2}AD=2$.

综上所述，DE的长为1.5或2.

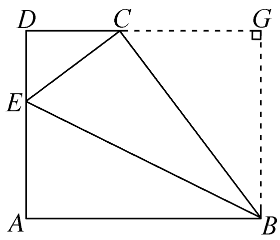


图 1

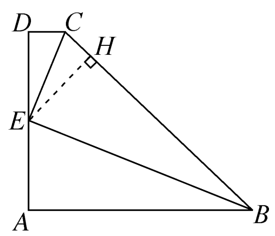


图 2

8. $(-3,2)$或$(-4,-3)$　**提示**:因为A是函数$y=2x+3$图象上的"不动点"，所以$x=2x+3$，解得$x=-3$，所以点$A(-3,-3)$. 因为点$B(-1,-1)$，$C(-1,0)$，所以$BC=1$，$BC\perp x$轴. 如图1，当$AD/\!/BC$时，过点B作$BE\perp AD$于点E，AD交x轴于点F. 因为四边形$ABCD$是等腰梯形，所以$AB=DC$，所以$AD\perp x$轴，所以$\angle CFD=\angle BEA=90^\circ$，$AE=-1-(-3)=2$. 又因为$\angle BCF=90^\circ$，所以四边形$BCFE$是矩形，所以$BE=CF$，所以$\mathrm{Rt}\triangle ABE\cong\mathrm{Rt}\triangle DCF$(HL)，所以$DF=AE=2$，所以点$D(-3,2)$. 如图2，当$AB/\!/CD$时，易得$\angle DAB=\angle ABC=135^\circ$，所以$AD/\!/x$轴. 因为点$B(-1,-1)$，$C(-1,0)$，所以$BC=1$. 因为四边形$ABCD$是等腰梯形，所以$AD=BC=1$. 因为点$A(-3,-3)$，所以点$D(-4,-3)$. 综上所述，点$D$的坐标为$(-3,2)$或$(-4,-3)$.

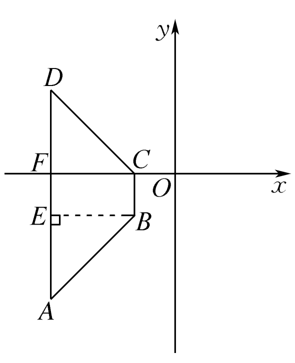


图 1

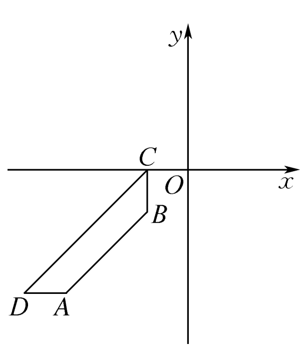
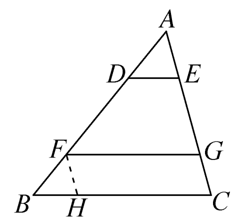


图 2

9. (1) **解**:因为$AB/\!/CE$，$AC/\!/BE$，所以四边形$ABEC$是平行四边形，所以$BE=AC$，$CE=AB$. 因为$CD=AB$，所以$CD=CE$. 因为$AB/\!/CE$，所以$\angle DCE=\angle AOC=60^\circ$，所以$\triangle DCE$是等边三角形，所以$DE=CD$. 因为$BE+BD>DE$，所以$AC+BD>CD$.

(2) $BC=FG+DE$　**提示**:如图，过点F作$FH/\!/AC$交BC于点H. 因为$FG/\!/BC$，$FH/\!/AC$，所以四边形$FGCH$是平行四边形，所以$FG=CH$. 因为$DE/\!/BC$，$AC/\!/FH$，所以$\angle ADE=\angle B$，$\angle A=\angle BFH$. 又因为$BF=DA$，所以$\triangle ADE\cong\triangle FBH$(ASA)，所以$DE=BH$. 因为$BC=CH+BH$，所以$BC=FG+DE$.



10. 解:(1) 如图1，过点E作$EG\perp BC$于点G. 因为E为AB的中点，所以$BE=\frac{1}{2}AB=2$. 因为$\angle B=60^\circ$，所以$\angle BEG=30^\circ$. 所以$BG=\frac{1}{2}BE=1$，$EG=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，即点$E$到$BC$的距离为$\sqrt{3}$.

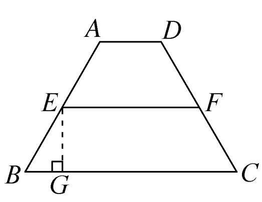


图 1

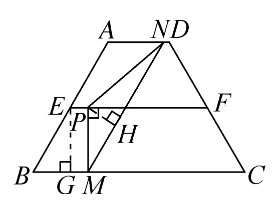


图 2

(2) ① 当点N在线段AD上运动时，$\triangle PMN$的形状不发生改变. 如图2，过点E作$EG\perp BC$于点G，过点P作$PH\perp MN$于点H. 因为$PM\perp EF$，$EG\perp BC$，$EF/\!/BC$，所以$\angle PMB=\angle EGM=\angle MPE=90^\circ$，所以四边形$EPMG$为矩形，所以$EP=GM$，$PM=EG=\sqrt{3}$，同理可得$MN=AB=4$. 因为$MN/\!/AB$，所以$\angle NMC=\angle B=60^\circ$. 又因为$\angle PMC=\angle PMB=90^\circ$，所以$\angle PMH=\angle PMC-\angle NMC=$

30°. 所以 $PH=\frac{1}{2}PM=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $MH=\frac{3}{2}$，所以 $NH=MN-MH=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$. 在 Rt△$PNH$ 中，$PN=\sqrt{NH^2+PH^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{7}$，所以△$PMN$ 的周长 $=PM+PN+MN=\sqrt{3}+\sqrt{7}+4$.

②当点 N 在线段 DC 上运动时，存在点 P，使△PMN 为等腰三角形. 如图 3，当 $PM=PN$ 时，过点 P 作 $PR\perp MN$ 于点 R，则 $MR=NR$. 由①，可得 $PM=\sqrt{3}$，$\angle PMR=30^\circ$，$\angle NMC=60^\circ$，$MR=\frac{3}{2}$，所以 $MN=2MR=3$. 因为 $\angle CNM=180^\circ-\angle C-\angle NMC=60^\circ=\angle C=\angle NMC$，所以△$MNC$ 是等边三角形，所以 $MC=MN=3$. 此时，$x=EP=GM=BC-BG-MC=6-1-3=2$. 如图 4，当 $MP=MN$ 时，因为 $EG=\sqrt{3}$，所以 $MP=MN=\sqrt{3}$. 因为 $MC=MN=MP=\sqrt{3}$，所以 $x=EP=GM=BC-BG-MC=6-1-\sqrt{3}=5-\sqrt{3}$. 如图 5，当 $NP=NM$ 时，因为 $\angle NPM=\angle PMN=30^\circ$，所以 $\angle PNM=120^\circ$. 又因为 $\angle MNC=60^\circ$，所以 $\angle PNM+\angle MNC=180^\circ$. 因此点 P 与点 F 重合. 易得 $MC=BG=1$. 此时，$x=EP=GM=BC-BG-MC=6-1-1=4$. 综上所述，当 x 的值为 2 或 4 或 $(5-\sqrt{3})$ 时，△PMN 为等腰三角形.

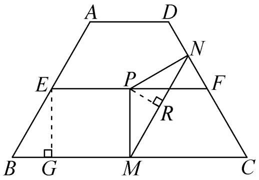


图 3

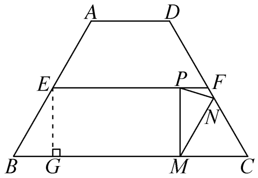


图 4

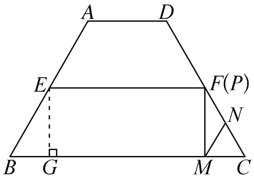


图 5

第 8 章综合练(1)

1. A　**提示**：过点 G 作 $GM\perp EF$ 于点 M. 由题意，得 $S_⑤=S_{四边形ABCD}-\frac{1}{2}(S_①+S_②+S_③+S_④)=4\ cm^2$，所以 $S_{菱形EFGH}=14+4=18(cm^2)$. 设菱形的边长为 x cm. 因为 $\angle F=30^\circ$，所以菱形的高为 $GM=\frac{1}{2}GF=\frac{1}{2}x$ cm. 根据菱形的面积公式，得 $x\cdot\frac{x}{2}=18$，解得 $x=6$ (负值已舍)，所以菱形的边长为 6 cm. 所以①②③④四个平行四边形周长的总和为 $2(AE+AH+HD+DG+GC+CF+FB+BE)=2(EH+HG+GF+EF)=48$ cm.

2. B　**提示**：由折叠的性质，可得 $FC=FH$，$\angle HFE=\angle CFE$. 因为 $AD\parallel BC$，所以 $\angle HEF=\angle CFE=\angle HFE$，所以△$HFE$ 为等腰三角形，所以 $HE=HF=FC$，所以四边形 $CFHE$ 是平行四边形. 又因为 $FC=FH$，所以四边形 $CFHE$ 是菱形，故①正确. 因为 HC 为菱形的对角线，所以 $\angle BCH=\angle ECH$. 因为 $\angle BCD=90^\circ$，所以只有当 $\angle DCE=30^\circ$ 时，CE 平分 $\angle DCH$，故②错误. 如图 1，BF 的长为最小. 设 $BF=x$，则 $AF=FC=8-x$. 在 Rt△ABF 中，$AB^2+BF^2=AF^2$，即 $4^2+x^2=(8-x)^2$，解得 $x=3$. 如图 2，BF 的长为最大，$CF=FH=DH=CD=4$，所以 $BF=4$. 所以线段 BF 长的取值范围为 $3\leqslant BF\leqslant 4$，故③正确. 当点 H 与点 A 重合时，如图 1，$BF=3$，所以 $AE=CF=8-3=5$. 过点 F 作 $FM\perp AD$ 于点 M，则 $ME=5-3=2$，$MF=AB=4$. 由勾股定理，得 $EF=\sqrt{MF^2+ME^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，故④错误.

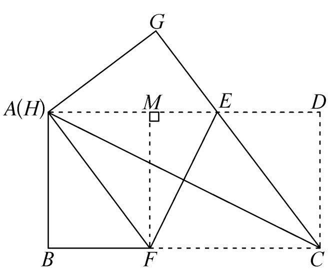


图 1

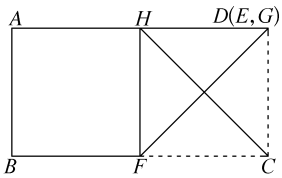
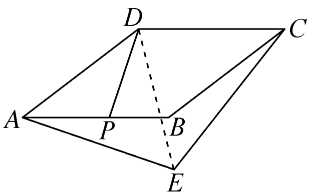


图 2

3. D　**提示**:如图,连接DE.因为$\angle ADC=\angle B=\alpha$,$AD=CD=ED$,所以$\angle DAE=\angle DEA$,$\angle DCE=\angle DEC$.因为$\angle ADE+\angle CDE+\angle DAE+\angle DEA+\angle DEC+\angle DCE=360°$,所以$\alpha+2(\angle DEA+\angle DEC)=360°$,即$\alpha+2\angle AEC=360°$,所以$\angle AEC=180°-\frac{1}{2}\alpha$.



4. C　**提示**:因为$\angle EAB+\angle BAP=\angle PAD+\angle BAP=90°$,所以$\angle EAB=\angle PAD$,又因为$AE=AP$,$AB=AD$,所以$\triangle APD\cong\triangle AEB$(SAS),故①正确;因为$AE=AP$,$\angle EAP=90°$,所以$\angle AEP=\angle APE=45°$,所以$\angle APD=135°$,因为$\triangle APD\cong\triangle AEB$,所以$\angle AEB=\angle APD=135°$,故②正确;易得$PE=6$,$\angle BEP=135°-45°=90°$,在$Rt\triangle BPE$中,$BE=\sqrt{PB^2-PE^2}=8$,故③错误;因为$\triangle APD\cong\triangle AEB$,所以$S_{\triangle APD}+S_{\triangle APB}=S_{\triangle AEB}+S_{\triangle APB}=S_{四边形AEBP}=S_{\triangle AEP}+S_{\triangle EPB}=\frac{1}{2}AE\cdot AP+\frac{1}{2}PE\cdot BE=33$,故④正确;连接$BD$,因为$\triangle APD\cong\triangle AEB$,所以$PD=EB=8$,所以$S_{\triangle BDP}=\frac{1}{2}PD\cdot BE=32$,所以$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle APD}+S_{\triangle APB}+S_{\triangle BPD}=65$,所以$S_{正方形ABCD}=2S_{\triangle ABD}=130$,所以$CD^2=130$,所以$CD=\sqrt{130}$,故⑤错误.

5. 1　**提示**:延长MO交CG于点H.因为$OM\perp EF$,且矩形$EFCG$是由矩形$ABCD$旋转所得,所以$OH\perp CG$,所以$MH=FC=BC=4$.因为$AB=5$,所以$OC=OM=\frac{1}{2}AB=\frac{5}{2}$,所以$OH=MH-OM=\frac{3}{2}$,所以$CH=\sqrt{OC^2-OH^2}=2$.因为$OC=ON$,$OH\perp CG$,所以$HN=CH=2$.又因为$CG=CD=5$,所以$NG=1$.

6. $2\leqslant x\leqslant 6$　**提示**:设$AG=y$,则$BG=6-y$.如图1,当折痕过点C时,AG的长最大,根据折叠的性质和勾股定理,得$CD^2+ED^2=EC^2$,所以$ED=8$,此时$x=2$.在$Rt\triangle AEG$中,$AG^2+AE^2=EG^2$,即$y^2+2^2=(6-y)^2$,解得$y=\frac{8}{3}$.如图2,当折痕过点A时,AG的长最小,最小值为0,即此时$y=0$.所以y的取值范围为$0\leqslant y\leqslant\frac{8}{3}$.如题图,在$Rt\triangle AEG$中,$x^2+y^2=(6-y)^2$,所以$x=\sqrt{36-12y}\left(0\leqslant y\leqslant\frac{8}{3}\right)$,当$y=0$时,$x$的值最大,最大值为6;当$y=\frac{8}{3}$时,$x$的值最小,最小值为2.故$2\leqslant x\leqslant 6$.

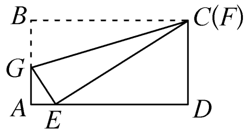


图1

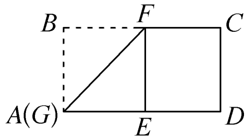


图2

7. 4.5　**提示**:取CD的中点M,连接GM,FM.因为$AG=CG$,$AE=EB$,所以EG是$\triangle ABC$的中位线,所以$EG=\frac{1}{2}BC=3$.同理可得$FM=\frac{1}{2}BC=3$,$EF=GM=\frac{1}{2}AD=3$.所以四边形$EFMG$是菱形.当$EF\perp EG$时,四边形$EFMG$是正方形,此时四边形$EFMG$的面积最大,最大值为$3\times3=9$.所以$\triangle EGF$的面积的最大值为$\frac{1}{2}S_{正方形EFMG}=4.5$.

8. **解**:(1) ②

(2) 如图1,过点D作$DE/\!/BC$,交AB于点E,所以$\angle AED=\angle B$.由题意,得$\angle A+\angle B=90°$,所以$\angle A+\angle AED=90°$,所以$\angle ADE=90°$.因为$AB/\!/CD$,所以四边形$CDEB$是平行四边形,所以$DE=BC$,$BE=CD=2$,所以$AE=AB-BE=7-2=5$,所以$DE=\sqrt{AE^2-AD^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$,所以$BC=4$.

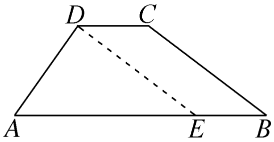


图1

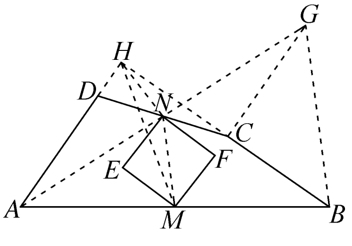


图2

(3) ①如图 2,作射线 AN,并截取 $GN=AN$,连接 BG,CG,MN,延长 AD,BC 交于点 H.因为 N 是 CD 的中点,所以 $DN=CN$.因为$\angle AND=\angle GNC$,所以$\triangle ADN\cong\triangle GCN$(SAS),所以 $GC=AD=a$,$\angle DAN=\angle CGN$,所以 $AD\parallel CG$,所以$\angle HCG=\angle AHC$.因为 M 是 AB 的中点,所以 $MN=\frac{1}{2}BG$.由题意,得$\angle HAB+\angle B=90^\circ$,所以$\angle AHC=90^\circ$,所以$\angle BCG=\angle HCG=90^\circ$,所以 $BG=\sqrt{CG^2+BC^2}=\sqrt{a^2+b^2}$,所以 $MN=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$,所以 $S_{正方形EMFN}=\frac{1}{2}MN^2=\frac{a^2+b^2}{8}$.

②$\sqrt{a^2+(b+c)^2}<AB\leqslant\sqrt{a^2+b^2}+c$

提示:如图 2,连接 HN,HM.由①知,$\angle AHC=90^\circ$,$MN=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.因为 N 是 CD 的中点,M 是 AB 的中点,所以 $HN=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}c$,$HM=\frac{1}{2}AB$,所以 $HM\leqslant MN+HN$,所以 $HM\leqslant\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}+\frac{1}{2}c$,所以 $AB\leqslant\sqrt{a^2+b^2}+c$.设 $HD=x$,$HC=y$,在 Rt$\triangle HDC$ 与 Rt$\triangle HAB$ 中,$x^2+y^2=c^2$,$(x+a)^2+(y+b)^2=AB^2$,所以 $AB^2=x^2+y^2+a^2+b^2+2ax+2by=a^2+b^2+c^2+2(ax+by)$,因为 $a\geqslant b$,所以 $ax+by\geqslant bx+by=b(x+y)>bc$,所以 $AB^2>a^2+b^2+c^2+2bc=a^2+(b+c)^2$,所以 $AB>\sqrt{a^2+(b+c)^2}$.综上所述,$\sqrt{a^2+(b+c)^2}<AB\leqslant\sqrt{a^2+b^2}+c$.

9. (1) **解**:因为 $BE\perp l$,$l\parallel k$,所以$\angle AEB=\angle BFC=90^\circ$,所以$\angle FBC+\angle BCF=90^\circ$.因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以$\angle ABC=90^\circ$,所以$\angle ABE+\angle FBC=90^\circ$.所以$\angle ABE=\angle BCF$.在$\triangle ABE$ 和$\triangle BCF$ 中,$\begin{cases}\angle ABE=\angle BCF,\\ \angle AEB=\angle BFC,\\ AB=BC,\end{cases}$所以$\triangle ABE\cong\triangle BCF$,所以 $AE=BF=d_3=1$.因为 $BE=d_1+d_2=3$,所以 $AB=\sqrt{BE^2+AE^2}=\sqrt{10}$.所以正方形 $ABCD$ 的边长是 $\sqrt{10}$.

(2) **证明**:连接 AC.因为四边形 $ABCD$ 是菱形,所以 $AD=DC$.又因为$\angle ADC=60^\circ$,所以$\triangle ADC$ 是等边三角形,所以 $AD=AC$,$\angle CAD=60^\circ$.因为$\triangle AEF$ 是等边三角形,所以 $AF=AE$,$\angle EAF=60^\circ$.所以$\angle EAC+\angle CAF=\angle CAF+\angle FAD$,所以$\angle EAC=\angle FAD$.在$\triangle AEC$ 和$\triangle AFD$ 中,$\begin{cases}AE=AF,\\ \angle EAC=\angle FAD,\\ AC=AD,\end{cases}$所以$\triangle AEC\cong\triangle AFD$,所以 $EC=DF$.

(3) **解**:当 $BC\parallel DE$ 时,$\frac{2\sqrt{3}}{3}<HG<\frac{4\sqrt{3}}{3}$;当 BC 与 DE 相交时,$0\leqslant HG<\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

提示:如图 1,过点 C 作 $CT\perp AG$ 于点 T,过点 M 作 $MK\perp AG$ 于点 K.因为 $AB\perp k$,$l\parallel k$,所以 $AB=d_1+d_2+d_3=4$,$\angle BAG=90^\circ$.因为$\triangle ABC$ 是等边三角形,所以$\angle BAC=60^\circ$,$AB=AC$,所以$\angle GAC=30^\circ$.在 Rt$\triangle ACG$ 中,$\angle ACG=90^\circ$,$\angle GAC=30^\circ$,$AC=AB=4$,所以由勾股定理,易得 $CG=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.在 Rt$\triangle TCG$ 中,因为$\angle TCG=30^\circ$,所以 $TG=\frac{1}{2}CG=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.在 Rt$\triangle KMG$ 中,$KM=AB=4$,同理可得 $KG=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.当点 D 在线段 CM 上时,因为$\triangle ABC$ 是等边三角形,所以$\angle ABC=\angle ACB=60^\circ$.因为 $AB\perp BM$,$\angle ACD=90^\circ$,所以$\angle MBC=\angle MCB=30^\circ$,所以$\angle BMC=120^\circ$,$MB=MC$.易证 Rt$\triangle ABE\cong$Rt$\triangle ACD$,所以 $BE=CD$.所以 $ME=MD$,所以$\angle MED=\angle MDE=30^\circ$.所以$\angle MBC=\angle MED$,所以 $ED\parallel BC$.观察图形可知,当$\frac{2\sqrt{3}}{3}<HG<\frac{4\sqrt{3}}{3}$时,$BC\parallel DE$.当点 D 运动到点 M 时,因为 $AD=AE$,所以点 E 也运动到点 M,即点 D,E 重

合，此时不合题意，舍去.

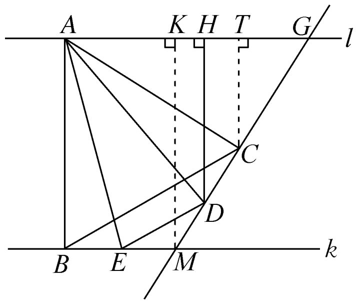


图 1

如图 2，当点 D 在线段 CG 上时，BC 与 DE 相交，此时 $0 \leqslant HG < \frac{2\sqrt{3}}{3}$. 当点 D 运动到点 G 时，点 E 运动到点 M，此时 $HG=0$.

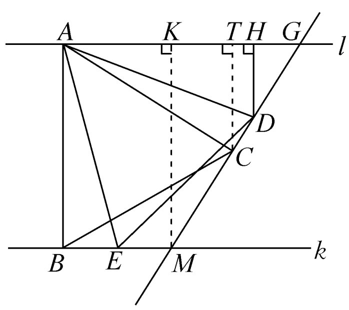
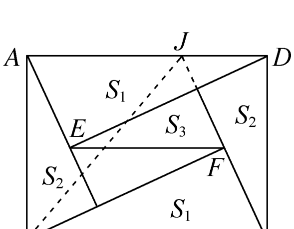


图 2

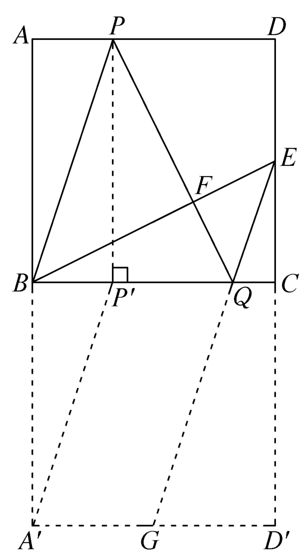
第 8 章综合练(2)

1. C　**提示**：连接 CF，CG，AE，AC. 易证 $\triangle ADE \cong \triangle CDG$，所以 $AE=CG$，所以 $d_1+d_2+d_3=DE+CF+CG=EF+CF+AE \geqslant AC$. 当点 E，F 都在线段 AC 上时取等号. 因为 $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=2\sqrt{2}$，所以 $d_1+d_2+d_3$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

2. A　**提示**：如图，延长 CF 交 AD 于点 J，连接 BJ. 由题意，得 $\triangle ADE \cong \triangle CBF$，所以 $AE=CF$. 易证四边形 $AEFJ$ 是平行四边形，所以 $AE=FJ$，所以 $CF=FJ$，所以 $S_{\triangle BCF}=S_{\triangle BFJ}=\frac{1}{2}S_{\triangle BCJ}=\frac{1}{4}S_{矩形ABCD}$，所以 $S_{矩形ABCD}=4S_{\triangle BCF}=4S_1$.

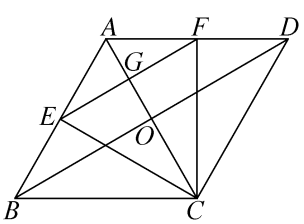


3. D　**提示**：如图，过点 P 作 $PP' \perp BC$ 于点 P'，将正方形 $ABCD$ 沿 BC 向下翻折得到正方形 $BCD'A'$，连接 $A'P'$，将线段 $A'P'$ 平移至 GQ 位置. 易证 $BP=A'P'=GQ$. 因为 $PQ \perp BE$，所以 $\angle P'PQ=\angle CBE$. 易证 $\triangle PP'Q \cong \triangle BCE$，所以 $P'Q=CE=3$. 因为 $BP+QE=GQ+QE \geqslant GE$，所以当 E，Q，G 三点共线时(如图所示)，$BP+QE$ 的值最小，最小值为 GE 的长. 易证四边形 $P'QGA'$ 为平行四边形，所以 $A'G=P'Q=3$，所以 $GD'=3$. 因为 $ED'=EC+CD'=9$，所以 $GE=\sqrt{GD'^2+ED'^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$，所以 $BP+QE$ 的最小值为 $3\sqrt{10}$.

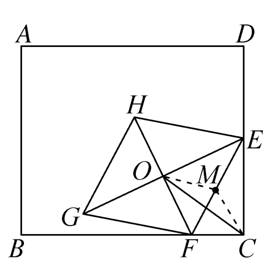


4. A　**提示**：因为四边形 $ABCD$ 是菱形，$AC=2$，所以 $AB=BC$，$OA=\frac{1}{2}AC=1$，$AC \perp BD$，$BD=2OB$，因为 $\angle ABC=60°$，所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形，所以 $AB=BC=AC=2$，$\angle BAC=\angle ACB=60°$，所以 $\angle DAC=\angle BAC=60°$，在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中，由勾股定理，得 $OB=\sqrt{AB^2-OA^2}=\sqrt{3}$，所以 $BD=2\sqrt{3}$，$S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}AC \cdot BD=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$，故①正确；由题意，得 $BE=AF$，又因为 $\angle CBE=\angle CAF=60°$，$CB=CA$，所以 $\triangle CBE \cong \triangle CAF$(SAS)，所以 $CE=CF$，$\angle ACF=\angle BCE$，所以 $\angle ECF=\angle ACE+\angle ACF=\angle ACE+\angle BCE=\angle ACB=60°$，所以 $\triangle ECF$ 是等边三角形，故②正确；所以 $EF=CE$，所以当 $CE \perp AB$ 时，CE 的长取最小值，即 EF 的长取最小值，此时 $S_{菱形ABCD}=AB \cdot CE=2CE=2\sqrt{3}$，即 $CE=\sqrt{3}$，所以 EF 长的最小值为

$\sqrt{3}$,故③正确;因为 $BE=AF$,$AD=AB$,所以 $AB-BE=AD-AF$,即 $AE=DF$,由菱形的对称性,可得点 G 先从点 A 运动到最远(离点 A)为止,再从最远位置运动回点 A,且当点 G 运动到最远位置时,点 E,F 位置如图所示,此时 E 为 AB 的中点,F 为 AD 的中点,所以 EF 为 $\triangle ABD$ 的中位线,所以 $EF/\!/BD$,$EF=\frac{1}{2}BD=\sqrt{3}$,所以 $EF\perp AC$,$EG=\frac{1}{2}EF=\frac{\sqrt{3}}{2}$,易知 $CE=\sqrt{3}$,所以 $CG=\sqrt{CE^2-EG^2}=\frac{3}{2}$,所以 $AG=AC-CG=\frac{1}{2}$,所以点 G 离点 A 的最远距离为 $\frac{1}{2}$,所以整个过程中点 G 走过的路径长为 $\frac{1}{2}\times 2=1$,故④正确.



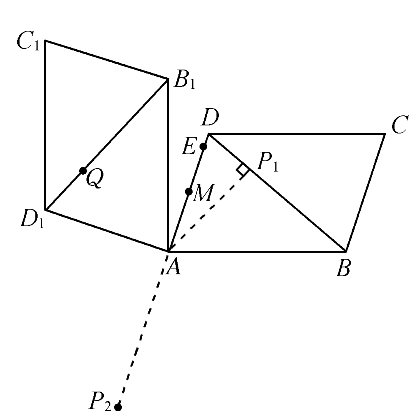
5. $\sqrt{2}$　**提示:**如图,取 EF 的中点 M,连接 OM,CM.因为四边形 $EFGH$ 是菱形,所以 $EF=GF$,$OE=OG$.又因为 M 是 EF 的中点,所以 $OM=\frac{1}{2}EF$,$CM=\frac{1}{2}EF$,所以 $EF=OM+CM$.当 O,M,C 三点共线时,$OM+CM$ 取最小值,最小值为 OC 的长,所以 EF 长的最小值为 $\sqrt{2}$.



6. $2\sqrt{6}$　**提示:**连接 BD,AF.因为四边形 $ABCD$ 是矩形,$AC=6$,所以 $BD=6$,$\angle ADC=\angle ECF=90^\circ$,$CD=AB$.因为 E,F 分别为矩形 $ABCD$ 的边 CD,BC 的中点,所以 $EF=\frac{1}{2}BD=3$.设 $DE=CE=a$,$CF=BF=b$,则 $AB=CD=2a$,$AD=BC=2b$.因为 $AE\perp EF$,所以在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$,$\mathrm{Rt}\triangle CEF$,$\mathrm{Rt}\triangle AEF$,$\mathrm{Rt}\triangle ABF$ 中,由勾股定理,可得 $a^2+4b^2+9=4a^2+b^2$①,$a^2+b^2=9$②,所以由①②可得 $a^2=6$,解得 $a=\sqrt{6}$(负值已舍).所以 $AB=2\sqrt{6}$.

7. 11　**提示:**以 B 为原点,BC 所在直线为 x 轴,AB 所在直线为 y 轴,建立平面直角坐标系,设 $AE=a$ $(0\leqslant a\leqslant 12)$,过点 F 作 $FG\perp AD$ 于点 G.易知 $\triangle BAE\cong\triangle EGF$,所以 $GF=AE=a$,$EG=BA=6$,所以点 $F(a+6,6-a)$,所以点 F 在线段 $y=-x+12(6\leqslant x\leqslant 18)$ 上.当 $x=6$ 时,点 $F_1(6,6)$,当 $x=18$ 时,点 $F_2(18,-6)$,过点 D 作 $DH\perp F_1F_2$ 于点 H,因为点 $D(12,6)$,易得 $DF_1=6$,$\triangle DHF_1$ 为等腰直角三角形,所以 $DH=3\sqrt{2}$.因为 $DF_2=DB=6\sqrt{5}$,当点 F 在点 F_1 与点 H 之间时,$3\sqrt{2}\leqslant DF\leqslant 6$,$DF$ 为整数有 5,6;当点 F 在点 F_2 与点 H 之间时,$3\sqrt{2}\leqslant DF\leqslant 6\sqrt{5}$,$DF$ 为整数有 5,6,7,8,9,10,11,12,13,所以满足条件的点 F 的位置共有 11 个.

8. $18-5\sqrt{2}$　**提示:**如图,过点 A 作 $AP_1\perp BD$ 于点 P_1.因为 $\angle ABD=45^\circ$,$AB=10$,所以 $AP_1=P_1B=5\sqrt{2}$.因为 M 为 AD 的中点,所以 $AM=\frac{1}{2}AD=4$.当 AP_1 与射线 AD 重合时(点 P_1 与点 E 重合),ME 的长就是 MQ 长的最小值,为 $AP_1-AM=5\sqrt{2}-4$;当点 P 与点 B 重合,且 AP 旋转到与 DA 的延长线重合时,如图中 AP_2,MP_2 的长就是 MQ 长的最大值,为 $AB+AM=14$.所以 MQ 长的最大值与最小值之差为 $14-(5\sqrt{2}-4)=18-5\sqrt{2}$.



9. 解:(1) $\frac{3}{2}$

(2) 当 $t=1$ 时,PQ 垂直平分线段 AC,此

时四边形 $AQCP$ 为菱形.理由如下:

若 PQ 垂直平分线段 AC,则 $CP=PA=8-3t$,$AQ=CQ=6-t$.在 $\mathrm{Rt}\triangle OPC$ 中,根据勾股定理,得 $OC^2+OP^2=CP^2$,即 $16+9t^2=(8-3t)^2$,解得 $t=1$.此时 $CP=PA=5$,$AQ=CQ=5$.故当 $t=1$ 时,PQ 垂直平分线段 AC,此时四边形 $AQCP$ 为菱形.

(3) ①当点 P 在线段 OA 上时,$BQ=t$,$AP=8-3t$,因为 $BQ/\!/AP$,所以当 $BQ=AP$ 时,四边形 $ABQP$ 为平行四边形,所以 $t=8-3t$,解得 $t=2$;②当点 P 在线段 OA 的延长线上时,$BQ=t$,$AP=3t-8$,同理,当 $BQ=AP$ 时,四边形 $APBQ$ 为平行四边形,所以 $t=3t-8$,解得 $t=4$.

综上所述,当 $t=2$ 或 $t=4$ 时,以 A,B,P,Q 为顶点的四边形为平行四边形.

10. (1) **解**:四边形 $ABCD$ 是"垂美四边形".理由如下:

连接 BD,AC.因为 $AB=AD$,$CB=CD$,所以点 A,C 在线段 BD 的垂直平分线上,所以直线 AC 是线段 BD 的垂直平分线,所以 $AC\perp BD$,所以四边形 $ABCD$ 是"垂美四边形".

(2) **证明**:因为 $AC\perp BD$,所以 $\angle AED=\angle AEB=\angle BEC=\angle CED=90°$.根据勾股定理,得 $AB^2+CD^2=AE^2+BE^2+CE^2+DE^2$,$AD^2+BC^2=AE^2+DE^2+BE^2+CE^2$,所以 $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$.

(3) **解**:连接 CG,BE.设 CE 交 BG,AB 于点 N,M.因为 $\angle CAG=\angle BAE=90°$,所以 $\angle CAG+\angle BAC=\angle BAE+\angle BAC$,即 $\angle GAB=\angle CAE$.易证 $\triangle GAB\cong\triangle CAE$,所以 $\angle ABG=\angle AEC$.因为 $\angle AEC+\angle AME=90°$,$\angle AME=\angle BMN$.所以 $\angle ABG+\angle BMN=90°$,所以 $\angle BNE=90°$,即 $CE\perp BG$,所以四边形 $CGEB$ 是"垂美四边形".由(2),得 $CG^2+BE^2=CB^2+GE^2$.因为 $AC=4$,$AB=5$,所以 $CB=3$,$CG^2=32$,$BE^2=50$.所以 $GE^2=CG^2+BE^2-CB^2=73$,所以 $GE=\sqrt{73}$.

第 9 章　因式分解

巅峰训练 11　因式分解的概念　提公因式法

1. B　**2.** B　**3.** D

4. C　**提示**:$(2k+1)^2-(k+1)^2+k=4k^2+4k+1-(k^2+2k+1)+k=4k^2+4k+1-k^2-2k-1+k=3k^2+3k=3k(k+1)$.因为 k 和 $k+1$ 中必有一个为偶数,所以一定能被 6 整除.

5. C　**提示**:因为 $x^2+x=1$,所以 $x^4+2x^3-x^2-2x+2\,026=x^2(x^2+x)+x^3-x^2-2x+2\,026=x^2+x^3-x^2-2x+2\,026=x(x^2+x)-x^2-2x+2\,026=-x^2-x+2\,026=-(x^2+x)+2\,026=2\,025$.

6. $(a+1)^{2\,026}$　**提示**:原式$=(a+1)[1+a+a(a+1)+a(a+1)^2+\cdots+a(a+1)^{2\,024}]=(a+1)^2[1+a+a(a+1)+a(a+1)^2+\cdots+a(a+1)^{2\,023}]=(a+1)^3\cdot[1+a+a(a+1)+a(a+1)^2+\cdots+a(a+1)^{2\,022}]=\cdots=(a+1)^{2\,026}$.

7. 15　**提示**:分解因式 x^2+ax+b,甲看错了 b,但 a 是正确的,他分解结果为 $(x+2)(x+4)=x^2+6x+8$,所以 $a=6$,同理可得 $b=9$,所以 $a+b=15$.

8. 6　5　**提示**:因为 $a+b=3$,$ab=2$,所以 $a^2b+ab^2=ab(a+b)=6$,$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=9-4=5$.

9. **解**:(1) 原式$=3x(a-b)+6y(a-b)=3(a-b)(x+2y)$.

(2) 原式$=(1-3a)(1-3a-3)=(1-3a)(-3a-2)=-(1-3a)(3a+2)$.

(3) 原式$=(m+1)[(m+1)-(m-1)]=(m+1)(m+1-m+1)=2(m+1)$.

(4) 原式$=(b-a)^2+(b-a)=(b-a)\cdot$

$(b-a+1)$.

10. 解:(1) $ab-ac+b^2-bc=(ab-ac)+(b^2-bc)=a(b-c)+b(b-c)=(a+b)\cdot(b-c)$.

(2) 因为 $a^3+ab^2-a^2b-b^3=c^2(a-b)$,所以$(a^3-a^2b)+(ab^2-b^3)=c^2(a-b)$,所以 $a^2(a-b)+b^2(a-b)-c^2(a-b)=0$,所以 $(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$,所以 $a-b=0$ 或 $a^2+b^2-c^2=0$,所以 $a=b$ 或$a^2+b^2=c^2$,所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形.

11. 解:$3^{2\,027}-2\times3^{2\,026}+8\times3^{2\,025}=3^{2\,025}\times(3^2-2\times3+8\times1)=3^{2\,025}\times11=3\times11\times3^{2\,024}=33\times3^{2\,024}$. 因为 $33\times3^{2\,024}$ 能被 33 整除,所以 $3^{2\,027}-2\times3^{2\,026}+8\times3^{2\,025}$ 能被 33 整除.

12. 解:(1) 因为多项式 x^2+kx-6 有一个因式为 $x-3$,所以当 $x=3$ 时,$x^2+kx-6=0$,所以 $3^2+3k-6=0$,所以 $k=-1$.

(2) 因为 $x+2$,$x-1$ 是多项式 $2x^3+ax^2+5x-b$ 的两个因式,所以当 $x=-2$ 或 $x=1$ 时,$2x^3+ax^2+5x-b=0$,即 $2\times(-2)^3+a\times(-2)^2+5\times(-2)-b=0$①,$2\times1^3+a\times1^2+5\times1-b=0$②. 由①,得 $4a-b=26$③,由②,得 $a-b=-7$④,③$-$④,得 $3a=33$,所以 $a=11$,将 $a=11$ 代入④,得 $b=18$. 所以 $a=11$,$b=18$.

13. 解:(1) 1 717 是 2 阶 4 位循环数,7 171 是 2 阶 4 位循环数. 证明如下:

设原数为 $\overline{abab}$,则新数为 $\overline{baba}$,即原数是 $1\,000a+100b+10a+b$,新数是 $1\,000b+100a+10b+a$. 两数相减,得 $1\,000b+100a+10b+a-(1\,000a+100b+10a+b)=909b-909a=909(b-a)=9\times101(b-a)$. 因为 a,b 为整数,所以 $b-a$ 也为整数,所以新数和原数的差能够被 9 整除.

(2) 该 2 阶 4 位循环数为 $\overline{abab}(a\neq b)$,即 $\frac{1\,010a+101b}{9}=112a+11b+\frac{2(a+b)}{9}$. 要使得 $1\,010a+101b$ 能被 9 整除,则需$(a+b)$能被 9 整除. 因为 $0<a\leqslant9$,$0\leqslant b\leqslant9$,所以 $0<a+b\leqslant18$,所以 $a+b=9$ 或 $a+b=18$(舍去),所以 a,b 应满足的关系是$a+b=9$.

巅峰训练 12　公式法

1. D

2. C　**提示**:因为 $a=m+2\,024$,$b=m+2\,025$,$c=m+2\,026$,所以 $a-b=-1$,$b-c=-1$,$a-c=-2$,$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac)=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]=\frac{1}{2}\times[(-1)^2+(-2)^2+(-1)^2]=3$.

3. B　**提示**:因为$(4m+5)^2-81=(4m+5)^2-9^2=(4m+5+9)(4m+5-9)=(4m+14)(4m-4)=2(2m+7)\times4(m-1)=8(2m+7)(m-1)$,所以该多项式能被 8 整除.

4. C　**提示**:因为 $a^2+b^2+c^2+50=6a+8b+10c$,即 $a^2+b^2+c^2+50-6a-8b-10c=0$,所以$(a-3)^2+(b-4)^2+(c-5)^2-9-16-25+50=0$,即$(a-3)^2+(b-4)^2+(c-5)^2=0$,所以 $a=3$,$b=4$,$c=5$,所以$\triangle ABC$ 的周长为 $3+4+5=12$.

5. -80　**提示**:$(x+25)(x+5)=(x+15+10)\cdot(x+15-10)=(x+15)^2-100=-80$.

6. 2 025　**提示**:原式$=x^2-4xy+4y^2+y^2-2y+1+2\,025=(x-2y)^2+(y-1)^2+2\,025$. 因为$(x-2y)^2\geqslant0$,$(y-1)^2\geqslant0$,所以当 $x=2$,$y=1$ 时,原式有最小值,最小值为 2 025.

7. -2　**提示**:因为 $a^2=b+2$,$b^2=a+2$,所以 $a^2-b^2=b-a$,即$(a-b)(a+b+1)=0$. 因为 $a\neq b$,所以 $a+b=-1$. 所以 $a^3-2ab+b^3=a\cdot a^2-2ab+b\cdot b^2=a(b+2)-2ab+b(a+2)=ab+2a-2ab+ab+

$2b=2(a+b)=2\times(-1)=-2$.

8. 解:(1) 原式$=(a-b)x^2-(a-b)y^2=(a-b)(x^2-y^2)=(a-b)(x+y)(x-y)$.

(2) 原式$=4(x^2-16)=4(x+4)(x-4)$.

(3) 原式$=(x^2+4)^2-(4x)^2=(x^2+4+4x)(x^2+4-4x)=(x+2)^2(x-2)^2$.

(4) 原式$=(a^2+b^2)^2-(2ab)^2=(a^2+b^2+2ab)(a^2+b^2-2ab)=(a+b)^2(a-b)^2$.

9. 解:(1) $x^2+4x+3=x^2+4x+4-1=(x+2)^2-1=(x+2+1)(x+2-1)=(x+3)(x+1)$.

(2) 设 $x-y=a$,则原式$=a^2-10a+25=(a-5)^2=(x-y-5)^2$.

(3) 设 $m^2-2m=a$,则$(m^2-2m)(m^2-2m-3)-4=a(a-3)-4=a^2-3a-4=a^2-3a+\frac{9}{4}-\frac{25}{4}=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=\left(a-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\right)\cdot\left(a-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\right)=(a+1)(a-4)=(m^2-2m+1)(m^2-2m-4)=(m-1)^2(m^2-2m-4)$.

10. 解:(1) 因为$(x-2)(x^2+mx+n)=x^3+(m-2)x^2+(n-2m)x-2n=x^3-5x^2+x+10$,所以 $m-2=-5$,$n-2m=1$,所以 $m=-3$,$n=-5$.

(2) ①把 $x=-1$ 代入 x^3+5x^2+8x+4,得其值为 0,则该多项式可分解为$(x+1)\cdot(x^2+ax+b)$的形式,易求得 $a=4$,$b=4$,所以 $x^3+5x^2+8x+4=(x+1)(x^2+4x+4)=(x+1)(x+2)^2$.

②把 $x=2$ 代入 x^3-4x^2+6x-4,得其值为 0,则该多项式可分解为$(x-2)(x^2+ax+b)$的形式,易求得 $a=-2$,$b=2$,所以 $x^3-4x^2+6x-4=(x-2)(x^2-2x+2)$.

11. 解:(1) $x^2-16=(x+4)(x-4)>0$,原不等式可转化为$\begin{cases}x+4>0,\\x-4>0\end{cases}$或$\begin{cases}x+4<0,\\x-4<0.\end{cases}$解得 $x>4$ 或 $x<-4$,即一元二次不等式 $x^2-16>0$ 的解集为 $x>4$ 或 $x<-4$.

(2) 原不等式可转化为$\begin{cases}x-1>0,\\x-3<0\end{cases}$或$\begin{cases}x-1<0,\\x-3>0.\end{cases}$解得 $1<x<3$,即不等式$\frac{x-1}{x-3}<0$的解集为 $1<x<3$.

(3) $2x^2-3x=x(2x-3)<0$,原不等式可转化为$\begin{cases}x>0,\\2x-3<0\end{cases}$或$\begin{cases}x<0,\\2x-3>0.\end{cases}$解得 $0<x<\frac{3}{2}$,即一元二次不等式 $2x^2-3x<0$ 的解集为 $0<x<\frac{3}{2}$.

第 9 章综合练

1. D

2. C　**提示**:因为 $6^8-1=(6^4+1)\times(6^2+1)\times(6^2-1)$,且 6^8-1 能被 30 到 40 之间的两个整数整除,所以这两个整数是 $6^2+1=37$,$6^2-1=35$.

3. A　**提示**:$(n^2+2n)(n+1)=n(n+1)(n+2)$.因为 n,$n+1$,$n+2$ 为 3 个连续正整数,所以这 3 个正整数中,必有 1 个数是 2 的倍数,必有 1 个数是 3 的倍数,所以 $n(n+1)(n+2)$必是 6 的倍数.

4. $-3a^2$$\left(或 -2a 或 6a 或 -\frac{3}{4}\right)$　**提示**:因为①$4a^2-2a+1-3a^2=a^2-2a+1=(a-1)^2$;②$4a^2-2a+1-2a=4a^2-4a+1=(2a-1)^2$;③$4a^2-2a+1+6a=4a^2+4a+1=(2a+1)^2$;④$4a^2-2a+1-\frac{3}{4}=4a^2-2a+\frac{1}{4}=\left(2a-\frac{1}{2}\right)^2$.所以加上的单项式可以为 $-3a^2$ 或 $-2a$ 或 $6a$ 或 $-\frac{3}{4}$.

5. 10　**提示**:因为$(9^2-1)(11^2-1)=8\times10\times$

$12k$,所以$(9+1)(9-1)(11+1)(11-1)=8\times10\times12k$,所以 $80\times120=8\times10\times12k$,所以 $k=10$.

6. 36　**提示**:因为 $M=x^2+4xy+5y^2-12y+k=(x+2y)^2+(y-6)^2+k-36$,所以当 $k=36$ 时,M 是"完美数".

7. 108　**提示**:由题意,得 $y=12-x$,所以 $3x^2+y^2=3x^2+(12-x)^2=4x^2-24x+144=(2x-6)^2+108\geqslant108$,所以 $3x^2+y^2$ 的最小值为 108.

8. 解:(1) 原式$=x(x^2+2xy+y^2)=x(x+y)^2$.

(2) 原式$=[9(a+b)]^2-[6(a-b)]^2=[9(a+b)+6(a-b)][9(a+b)-6(a-b)]=(9a+9b+6a-6b)(9a+9b-6a+6b)=(15a+3b)(3a+15b)=9(5a+b)(a+5b)$.

9. 解:(1) 原式$=(x-10)(x+6)$.

(2) 12　**提示**:因为$-60=-(1\times60)=-(2\times30)=-(3\times20)=-(4\times15)=-(5\times12)=-(6\times10)$,所以 $p=\pm59$ 或±28 或±17 或±11 或±7 或±4,则整数 p 的值有 12 个.

10. 解:(1) $a^2-6a+5=a^2-6a+9-9+5=(a-3)^2-4=(a-3+2)(a-3-2)=(a-1)(a-5)$.

(2) 因为 $ab=\frac{3}{4}$,$a+2b=3$,所以 $a^2-2ab+4b^2=a^2+4ab+4b^2-6ab=(a+2b)^2-6ab=3^2-6\times\frac{3}{4}=\frac{9}{2}$.

(3) 设 $4x^2+12x+m=(x+2)(4x+n)$,则 $4x^2+12x+m=4x^2+(n+8)x+2n$.所以 $n+8=12$,$m=2n$,解得 $n=4$,$m=8$.

11. 解:(1) -1

(2) 因为 $a^2+b^2-4a-6b+13=(a-2)^2+(b-3)^2=0$,所以 $a=2$,$b=3$.因为 a,b,c 是$\triangle ABC$ 的三边,所以 $1<c<5$.因为 a,b,c 是三个互不相等的正整数,所以 $c=4$.

(3) $A>B$.理由如下:因为 $A-B=3a^2+3a-4-2a^2-4a+6=a^2-a+2=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$,而$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant0$,所以 $A-B=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\geqslant\frac{7}{4}$,所以 $A-B>0$,即 $A>B$.

(4) 8　**提示**:由 $a-b=10$,得 $a=b+10$.代入,得 $b(b+10)+c^2-16c+89=0$.整理,得$(b+5)^2+(c-8)^2=0$,所以 $b=-5$,$c=8$,$a=5$.所以 $a+b+c=5-5+8=8$.

第 10 章　分式

巅峰训练 13　分式的概念　分式的基本性质

1. B　**提示**:$\frac{2a-2}{a^2-1}=\frac{2(a-1)}{(a+1)(a-1)}=\frac{2}{a+1}$.根据分式要有意义的条件,可知$(a+1)(a-1)\neq0$,解得 $a\neq1$ 且 $a\neq-1$,所以 a 的最小值为 2.因为分式的值随着 a 的值的增大而减小,所以当 a 取最小整数 2 时,原式有最大值,最大值是$\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}$,且原分式无最小值.

2. C　**提示**:原式$=\frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{2}{x+1}$.当 $x+1$ 的值为±1,±2 时,$\frac{2}{x+1}$的值为整数,所以 x 的值可取-2,0,-3,1.又因为 $x^2-1\neq0$,所以 $x\neq\pm1$.所以 x 的值可取-2,0,-3,共 3 个.

3. D　**提示**:因为 $a+\frac{1}{a}=\sqrt{10}$,所以$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=10$,即 $a^2+2+\left(\frac{1}{a}\right)^2=10$,所以 $a^2-2+\left(\frac{1}{a}\right)^2=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=6$,所以 $a-\frac{1}{a}=\pm\sqrt{6}$.

4. A　**提示**:因为 $m^2+n^2=4mn$,所以$(m+n)^2=6mn$,$(m-n)^2=2mn$.因为 $m>n>0$,所以 $m+n=\sqrt{6mn}$,$m-n=\sqrt{2mn}$,所以$\frac{m^2-n^2}{mn}=\frac{\sqrt{6mn}\cdot\sqrt{2mn}}{mn}=\frac{2\sqrt{3}mn}{mn}=2\sqrt{3}$.

5. D　**提示：**因为 $a_1=x$，所以 $a_2=\frac{1}{1-x}$，$a_3=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{x-1}{x}$，$a_4=\frac{1}{1-\frac{x-1}{x}}=x$，…，由此可见，这列式子从 a_1 开始按 x，$\frac{1}{1-x}$，$\frac{x-1}{x}$ 循环，所以 $1-x\neq0$ 且 $x\neq0$，所以 $x\neq1$ 且 $x\neq0$.

6. $\frac{25}{12}$　**提示：**$\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}=\frac{25}{12}$.

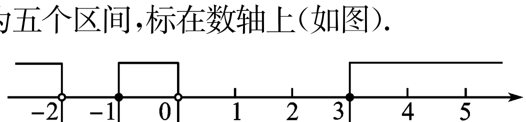
7. 2　**提示：**因为 $x^2-4x-5=0$，所以 $x^2=4x+5$，代入分式的分母中，则 $\frac{6x}{x^2-x-5}=\frac{6x}{4x+5-x-5}=\frac{6x}{3x}=2$.

8. $\frac{2}{17}$　**提示：**因为 $x+\frac{1}{x}=4$，所以 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=16$，所以 $x^2+\frac{1}{x^2}=14$. 因为 $x\neq0$，所以 $\frac{2x^2}{x^4+3x^2+1}=\frac{2}{x^2+3+\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{14+3}=\frac{2}{17}$.

9. -1 或 8　**提示：**设 $\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=\frac{a+b}{c}=k$，则 $b+c=ak$，$c+a=bk$，$a+b=ck$. 三式相加，得 $2(a+b+c)=k(a+b+c)$. 若 $a+b+c=0$，则 $a+b=-c$，$b+c=-a$，$c+a=-b$，此时 $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=-1$；若 $a+b+c\neq0$，则 $k=2$，即 $a+b=2c$，$b+c=2a$，$c+a=2b$，此时 $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=8$.

10. 4　**提示：**因为 $a+b+c=abc$，所以 $a(1-b^2)(1-c^2)+b(1-c^2)(1-a^2)+c(1-a^2)(1-b^2)=a(1-b^2-c^2+b^2c^2)+b(1-c^2-a^2+a^2c^2)+c(1-a^2-b^2+a^2b^2)=(a+b+c)-ab(a+b)-bc(b+c)-ac(c+a)+abc(ab+ac+bc)=abc-ab(abc-c)-bc(abc-a)-ac(abc-b)+abc(ab+ac+bc)=abc-abc(ab-1+bc-1+ac-1)+abc(ab+ac+bc)=abc+3abc=4abc$. 所以原式 $=\frac{4abc}{abc}=4$.

11. 解：以 -2，-1，0，3 为分界点把全体实数分为五个区间，标在数轴上(如图).



当 $x=-1$ 或 $x=3$ 时，分子为 0，分母不等于 0，此时分式的值为零.

当 $x<-2$ 或 $-1<x<0$ 或 $x>3$ 时，分式的值为正数(因为负因数的个数为偶数).

当 $-2<x<-1$ 或 $0<x<3$ 时，分式的值为负数(因为负因数的个数为奇数).

12. 解：因为 $a^2+4a+1=0$，所以 $a+\frac{1}{a}=-4$，所以 $a^2+2+\left(\frac{1}{a}\right)^2=16$，即 $a^2+\frac{1}{a^2}=14$. 因为 $\frac{a^4+ma^2+1}{2a^3+ma^2+2a}=3$，所以 $\frac{a^2+m+\frac{1}{a^2}}{2\left(a+\frac{1}{a}\right)+m}=3$，即 $\frac{m+14}{m-8}=3$，解得 $m=19$. 经检验，$m=19$ 符合题意. 所以 m 的值为 19.

13. 解：(1) 原式 $=\frac{2x-2+3}{x-1}=2+\frac{3}{x-1}$.

(2) 原式 $=2+\frac{3}{x-1}$. 当 $x-1=\pm1$ 或 $x-1=\pm3$ 时，分式的值为整数，所以 x 的整数值为 2，0，4，-2.

(3) 原式 $=\frac{2x^2-2+3}{x+1}=\frac{2(x+1)(x-1)+3}{x+1}=2(x-1)+\frac{3}{x+1}$. 当 $x+1=\pm1$ 或 $x+1=\pm3$ 时，原式的值为整数，所以 x 的整数值为 0，-2，2，-4.

(4) 解方程组 $\begin{cases}x+my=11,\\x+3m=2y\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=6-3m+\frac{10}{m+2},\\y=3+\frac{5}{m+2}.\end{cases}$ 因为关于 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases}x+my=11,\\x+3m=2y\end{cases}$ 有正整数解，所以 $m+2=\pm1$ 或 $m+2=\pm5$，解得 $m=-3$ 或 $m=$

-1 或 $m=-7$ 或 $m=3$. 当 $m=-3$ 时, $x=5$, $y=-2$, 不合题意, 故舍去; 当 $m=-1$ 时, $x=19$, $y=8$, 符合题意; 当 $m=-7$ 时, $x=25$, $y=2$, 符合题意; 当 $m=3$ 时, $x=-1$, $y=4$, 不合题意, 故舍去. 综上所述, 整数 m 的值为 -1 或 -7.

14. 解: (1) 因为 $\frac{x}{x^2-x+1}=\frac{1}{4}$, 所以 $\frac{x^2-x+1}{x}=4$, 所以 $x-1+\frac{1}{x}=4$, 所以 $x+\frac{1}{x}=5$.

(2) 令 $\frac{1}{5}a=\frac{1}{2}b=\frac{1}{3}c=k(k\neq0)$, 则 $a=5k$, $b=2k$, $c=3k$. 所以 $\frac{3b+4c}{2a}=\frac{6k+12k}{10k}=\frac{18}{10}=\frac{9}{5}$.

(3) **解法 1** 令 $\frac{yz}{bz+cy}=\frac{zx}{cx+az}=\frac{xy}{ay+bx}=\frac{1}{k}(k\neq0)$, 所以 $\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=k$ ①, $\frac{c}{z}+\frac{a}{x}=k$ ②, $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=k$ ③. ①+②+③, 得 $2\left(\frac{b}{y}+\frac{c}{z}+\frac{a}{x}\right)=3k$, 所以 $\frac{b}{y}+\frac{c}{z}+\frac{a}{x}=\frac{3}{2}k$ ④. ④−①, 得 $\frac{a}{x}=\frac{1}{2}k$; ④−②, 得 $\frac{b}{y}=\frac{1}{2}k$; ④−③, 得 $\frac{c}{z}=\frac{1}{2}k$. 所以 $x=\frac{2a}{k}$, $y=\frac{2b}{k}$, $z=\frac{2c}{k}$, 代入 $\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{1}{k}$ 中, 得 $\frac{\frac{4}{k^2}(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2}=\frac{1}{k}$, 所以 $\frac{4}{k^2}=\frac{1}{k}$, 解得 $k=4$. 所以 $x=\frac{a}{2}$, $y=\frac{b}{2}$, $z=\frac{c}{2}$, 所以 $xyz=\frac{abc}{8}=\frac{7}{8}$.

解法 2 因为 $\frac{yz}{bz+cy}=\frac{zx}{cx+az}=\frac{xy}{ay+bx}$, 所以 $\frac{bz+cy}{yz}=\frac{cx+az}{zx}=\frac{ay+bx}{xy}$, 所以 $\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{c}{z}+\frac{a}{x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$, 所以 $\frac{b}{y}=\frac{a}{x}$, $\frac{c}{z}=\frac{b}{y}$, 所以 $x=\frac{ay}{b}$, $z=\frac{cy}{b}$. 将其代入 $\frac{zx}{cx+az}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$, 得 $\frac{\frac{cy}{b}\cdot\frac{ay}{b}}{\frac{acy}{b}+\frac{acy}{b}}=\frac{\frac{a^2y^2}{b^2}+y^2+\frac{c^2y^2}{b^2}}{a^2+b^2+c^2}$, 即 $\frac{y}{2b}=\frac{y^2}{b^2}$, 所以 $y=\frac{b}{2}$, 所以 $x=\frac{ab}{2b}=\frac{a}{2}$, $z=\frac{cb}{2b}=\frac{c}{2}$, 所以 $xyz=\frac{abc}{8}=\frac{7}{8}$.

巅峰训练 14　分式的加减　分式的乘除

1. C　**2.** A

3. B　**提示:** 因为 $M=\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}$, $N=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}$, 所以 $M-N=\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}-\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\right)=\frac{a-1}{a+1}+\frac{b-1}{b+1}=\frac{(a-1)(b+1)+(b-1)(a+1)}{(a+1)(b+1)}=\frac{2ab-2}{(a+1)(b+1)}$. 当 $ab=1$ 时, $M-N=0$, 所以 $M=N$, 故①正确; 当 $ab>1$ 时, $2ab>2$, 所以 $2ab-2>0$, 当 $a<0$, $b<0$ 时, $(a+1)(b+1)>0$ 或 $(a+1)(b+1)<0$, 所以 $M-N>0$ 或 $M-N<0$, 所以 $M>N$ 或 $M<N$, 故②错误; 当 $ab<1$ 时, a 和 b 可能同号, 也可能异号, 所以 $(a+1)(b+1)>0$ 或 $(a+1)(b+1)<0$, 而 $2ab-2<0$, 所以 $M>N$ 或 $M<N$, 故③错误; 当 $a+b=0$ 时, $M\cdot N=\left(\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}\right)\cdot\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\right)=\frac{a}{(a+1)^2}+\frac{a+b}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)^2}=\frac{a}{(a+1)^2}+\frac{b}{(b+1)^2}=\frac{a(b+1)^2+b(a+1)^2}{(a+1)^2(b+1)^2}=\frac{4ab}{(a+1)^2(b+1)^2}$, 因为 $a\neq-1$, $b\neq-1$, 所以 $(a+1)^2\cdot(b+1)^2>0$, 因为 $a+b=0$, 所以 $ab\leqslant0$, $M\cdot N\leqslant0$, 故④正确.

4. $\frac{2}{5}$　**提示:** 因为 $\frac{y}{x}-\frac{x}{y}=2$, 所以 $\frac{y^2-x^2}{xy}=2$, 所以 $(y+x)(y-x)=2xy$. 因为 $x+y=2$, 所以 $y-x=xy$, 原式 $=\frac{-(y-x)+3xy}{2xy+3(y-x)}=\frac{-xy+3xy}{2xy+3xy}=$

$\frac{2xy}{5xy}=\frac{2}{5}$.

5. $-\frac{17}{3}$或$-\frac{1}{3}$　**提示**:因为$\left|\frac{4a^2}{a^2-b^2}-\frac{a}{a+b}\right|=\left|\frac{4a^2}{(a+b)(a-b)}-\frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)}\right|=\left|\frac{3a^2+ab}{(a+b)(a-b)}\right|=3$,所以$\frac{3a^2+ab}{(a+b)(a-b)}=3$或$\frac{3a^2+ab}{(a+b)(a-b)}=-3$,所以$3a^2+ab=3(a^2-b^2)$或$3a^2+ab=-3(a^2-b^2)$.因为$a,b$均为不等于0的实数,所以$a=-3b$①,$ab=3b^2-6a^2$②.把①代入$\frac{2a^2-b^2}{ab}$,得$\frac{2(-3b)^2-b^2}{-3b^2}=\frac{17b^2}{-3b^2}=-\frac{17}{3}$;把②代入$\frac{2a^2-b^2}{ab}$,得$\frac{2a^2-b^2}{3b^2-6a^2}=\frac{2a^2-b^2}{-3(2a^2-b^2)}=-\frac{1}{3}$.综上所述,分式$\frac{2a^2-b^2}{ab}$的值为$-\frac{17}{3}$或$-\frac{1}{3}$.

6. -1　**提示**:由题意,得$m^2+2m=2$,$n=m-2$,所以原式$=\frac{1}{m+1}+\frac{2}{m-2}=\frac{m-2+2m+2}{(m+1)(m-2)}=\frac{3m}{m^2-m-2}=\frac{3m}{m^2+2m-3m-2}=\frac{3m}{-3m}=-1$.

7. $\frac{2\ 025}{2\ 026}$　**提示**:由题意,得$x^2-1=0$,$|xy|-2=0$,且$x+1\neq0$,$y+2\neq0$,所以$x=1$,$y=2$.所以原式$=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{2\ 025\times2\ 026}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2\ 025}-\frac{1}{2\ 026}=1-\frac{1}{2\ 026}=\frac{2\ 025}{2\ 026}$.

8. (1) 1　1

(2) 1　**证明**:$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x+1}+\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1}=\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}=1$.

(3) **解**:原式$=\left[f(2\ 026)+f\left(\frac{1}{2\ 026}\right)\right]+\left[f(2\ 025)+f\left(\frac{1}{2\ 025}\right)\right]+\cdots+\left[f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)\right]+f(1)=2\ 025+\frac{1}{2}=2\ 025\frac{1}{2}$.

9. 解:(1) 2　1.5

(2) 甲两次买菜的均价为$(3+2)\div2=2.5$(元/kg),乙两次买菜的均价为$(3+3)\div(1+1.5)=2.4$(元/kg).

答:甲两次买菜的均价为2.5元/kg,乙两次买菜的均价为2.4元/kg.

(3) $\bar{x}_{甲}\geqslant\bar{x}_{乙}$.理由如下:

因为$\bar{x}_{甲}=\frac{ma+mb}{2m}=\frac{a+b}{2}$,$\bar{x}_{乙}=\frac{2n}{\frac{n}{a}+\frac{n}{b}}=\frac{2ab}{a+b}$,所以$\bar{x}_{甲}-\bar{x}_{乙}=\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}\geqslant0$,所以$\bar{x}_{甲}\geqslant\bar{x}_{乙}$.

(4) $t_1<t_2$.理由如下:

因为$t_1=\frac{2s}{v}$,$t_2=\frac{s}{v+p}+\frac{s}{v-p}=\frac{2sv}{v^2-p^2}$,所以$t_1-t_2=\frac{2s}{v}-\frac{2sv}{v^2-p^2}=\frac{-2sp^2}{v(v^2-p^2)}$.因为$s>0$,$0<p<v$,所以$v^2-p^2>0$,$-2sp^2<0$,所以$t_1-t_2<0$,所以$t_1<t_2$.

10. C　**提示**:因为$\frac{z}{x+y}+\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}=12$,所以$1+\frac{z}{x+y}+1+\frac{x}{y+z}+1+\frac{y}{z+x}=15$,即$\frac{x+y+z}{x+y}+\frac{x+y+z}{y+z}+\frac{x+y+z}{z+x}=15$,所以$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}=\frac{15}{x+y+z}$.因为$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}=\frac{3}{4}$,所以$\frac{15}{x+y+z}=\frac{3}{4}$,所以$x+y+z=20$.

11. (1) ②③

(2) **证明**:因为a,b互为倒数,所以$ab=1$,$b=\frac{1}{a}$,所以$\left|\frac{3a^2}{a^2+b}-\frac{a-2b^2}{a+b^2}\right|=\left|\frac{3a^2}{a^2+\frac{1}{a}}-\frac{a-\frac{2}{a^2}}{a+\frac{1}{a^2}}\right|=\left|\frac{3a^3}{a^3+1}-\frac{a^3-2}{a^3+1}\right|=\left|\frac{3a^3-a^3+2}{a^3+1}\right|=2$,所以分式$\frac{3a^2}{a^2+b}$与$\frac{a-2b^2}{a+b^2}$属于“友好分式组”.

(3) 解：因为 $\left|\dfrac{3a^2}{a^2-4b^2}-\dfrac{a}{a+2b}\right|=\left|\dfrac{3a^2}{(a+2b)(a-2b)}-\dfrac{a(a-2b)}{(a+2b)(a-2b)}\right|=\left|\dfrac{3a^2-a^2+2ab}{(a+2b)(a-2b)}\right|=\left|\dfrac{2a^2+2ab}{a^2-4b^2}\right|$，$\dfrac{3a^2}{a^2-4b^2}$与$\dfrac{a}{a+2b}$属于“友好分式组”，所以$\left|\dfrac{2a^2+2ab}{a^2-4b^2}\right|=2$，所以 $2a^2+2ab=2(a^2-4b^2)$ 或 $2a^2+2ab=-2(a^2-4b^2)$，所以 $a=-4b$ 或 $ab=4b^2-2a^2$. 所以 $\dfrac{a^2-2b^2}{ab}=\dfrac{16b^2-2b^2}{-4b^2}=-\dfrac{7}{2}$ 或 $\dfrac{a^2-2b^2}{ab}=\dfrac{a^2-2b^2}{4b^2-2a^2}=-\dfrac{1}{2}$. 所以分式$\dfrac{a^2-2b^2}{ab}$的值为$-\dfrac{7}{2}$或$-\dfrac{1}{2}$.

巅峰训练 15　分式方程

1. B　**2.** C　**3.** D　**4.** D

5. B　**提示**：设 $y^2+2=a$，则关于 y 的方程可化为$\dfrac{3}{a}-\dfrac{2}{a-2}=0$. 因为方程$\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x-2}=0$ 的解为 $x=6$，所以 $a=6$. 所以 $y^2+2=6$，所以 $y=2$ 或 $y=-2$.

6. A　**提示**：分式方程去分母，得$(x+k)(x-1)-k(x+1)=x^2-1$，解得 $x=1-2k$. 根据题意，得 $1-2k<0$ 且 $1-2k\neq1$，$1-2k\neq-1$，所以 $k>\dfrac{1}{2}$ 且 $k\neq1$.

7. B　**提示**：解不等式组$\begin{cases}x-\dfrac{1}{4}(4a-2)\leqslant\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{3x-1}{2}<x+2,\end{cases}$得$\begin{cases}x\leqslant a,\\ x<5.\end{cases}$因为原不等式组的解集是 $x\leqslant a$，所以 $a<5$. 因为关于 y 的分式方程$\dfrac{2y-a}{y-1}-\dfrac{y-4}{1-y}=1$ 有非负整数解，所以 $y=\dfrac{3+a}{2}\geqslant0$，且$\dfrac{3+a}{2}$是整数，$a$ 为整数，所以 a 的值为 $-3,3,-1,1$. 经检验，当 $a=-1$ 时，原分式方程有增根，故舍去. 所以所有符合条件的整数 a 的值的和为 1.

8. 6 或$-\dfrac{3}{2}$　**提示**：解$\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{ax}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{2}{x-1}$，得 $x=\dfrac{5}{a-1}$. 因为分式方程有增根，所以$(x-1)\cdot(x+2)=0$，解得 $x_1=1$，$x_2=-2$. 当 $x=1$ 时，$a=6$；当 $x=-2$ 时，$a=-\dfrac{3}{2}$.

9. 20　**提示**：设甲、乙两港相距 s km，水流速度为 x km/h. 根据题意，得$\begin{cases}\dfrac{s}{8-x}:\dfrac{s}{8+x}=2:1,\\ \dfrac{s}{8-2x}+\dfrac{s}{8+2x}=9.\end{cases}$解得 $s=20$，$x=\dfrac{8}{3}$. 经检验，$s=20$，$x=\dfrac{8}{3}$是方程的解. 所以甲、乙两港相距 20 km.

10. **解**：(1) 去分母，得$(x+1)^2-(x^2-1)=4$. 解得 $x=1$. 经检验，$x=1$ 是原方程的增根，所以原方程无解.

(2) 去分母，得$(x-2)^2+4=x^2-4$. 解得 $x=3$. 经检验，$x=3$ 是原方程的解.

11. **解**：去分母，得 $2(x+2)+mx=x-1$. 去括号，得 $2x+4+mx=x-1$. 移项、合并同类项，得$(m+1)x=-5$. 因为原分式方程无解，所以 $m+1=0$ 或 $x=1$ 或 $x=-2$. 当 $m+1=0$ 时，解得 $m=-1$；当 $x=1$ 时，$m+1=-5$，解得 $m=-6$；当 $x=-2$ 时，$-2(m+1)=-5$，解得 $m=1.5$. 综上所述，m 的值是 -1 或 -6 或 1.5.

12. **解**：(1) 设乙队单独完成这项工程需要 x 天.

由题意，得 $20\cdot\dfrac{1}{x}+36\left(\dfrac{1}{120}+\dfrac{1}{x}\right)=1$. 解得 $x=80$. 经检验，$x=80$ 是原分式方程的解.

答：乙队单独完成这项工程需要 80 天.

(2) 由甲、乙两队全程合作完成更省钱. 理由如下：

由乙队单独完成所需费用为 $2.5\times80=200$(万元)；甲队单独完成工期超过 90 天，不

符合要求. 设甲、乙两队合作完成这项工程需 y 天. 由题意,得 $\left(\frac{1}{120}+\frac{1}{80}\right)y=1$,解得 $y=48$,所需费用为 $(1.5+2.5)\times 48=192$(万元).

因为 $192<200$,所以由甲、乙两队全程合作完成更省钱.

13. 解:(1) -2　-3

(2) 由题意,得 $mn=-5$,$m+n=-2$,所以 $\frac{n}{m}+\frac{m}{n}=\frac{m^2+n^2}{mn}=\frac{(m+n)^2-2mn}{mn}=-\frac{14}{5}$.

(3) 原方程整理,得 $x-2-\frac{2k^2+3k}{x-2}=-k-3$,所以 $x-2+\frac{k(-2k-3)}{x-2}=k+(-2k-3)$,所以 $x_1-2=k$,$x_2-2=-2k-3$,所以 $\frac{x_1-2}{x_2+1}=\frac{k}{-2k}=-\frac{1}{2}$.

14. $x=n+3$ 或 $x=n+4$　**提示:** 由①,得 $x+\frac{1\times 2}{x}=1+2$,解得 $x=1$ 或 $x=2$. 由②,得 $x+\frac{2\times 3}{x}=2+3$,解得 $x=2$ 或 $x=3$. 由③,得 $x+\frac{3\times 4}{x}=3+4$,解得 $x=3$ 或 $x=4$. 故由 $x+\frac{n^2+n}{x-3}=2n+4$,得 $(x-3)+\frac{n(n+1)}{x-3}=n+(n+1)$,解得 $x-3=n$ 或 $x-3=n+1$,所以 $x=n+3$ 或 $x=n+4$.

第 10 章综合练(1)

1. B

2. B　**提示:** 因为 $\frac{a}{b}+\frac{a}{c}=\frac{b+c}{b+c-a}$,所以 $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{b+c}{b+c-a}$,所以 $a\cdot\frac{b+c}{bc}=\frac{b+c}{b+c-a}$,所以 $\frac{a}{bc}=\frac{1}{b+c-a}$,所以 $ab+ac-a^2-bc=0$,所以 $(ab-a^2)+(ac-bc)=0$,所以 $(b-a)(a-c)=0$. 所以 $a=b$ 或 $a=c$. 因为 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的三边长,所以 $\triangle ABC$ 是腰长为 a 的等腰三角形.

3. C　**提示:** 因为 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{7}{m+n}$,所以 $\frac{m+n}{mn}=\frac{7}{m+n}$,所以 $(m+n)^2=7mn$,所以 $m^2+2mn+n^2=7mn$,所以 $m^2+n^2=5mn$. 所以 $\frac{n}{m}+\frac{m}{n}=\frac{n^2+m^2}{mn}=\frac{5mn}{mn}=5$.

4. C　**提示:** 因为 $abc=6$,所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{bc+ac+ab}{6}$. 因为 $bc+ac+ab=\frac{1}{2}[(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)]$,$a+b+c=0$,所以 $bc+ac+ab=-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$. 因为 a,b,c 均不为 0,所以 $a^2+b^2+c^2>0$,所以 $bc+ac+ab<0$,所以 $\frac{bc+ac+ab}{6}<0$,即 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 的值是负数.

5. 1　**6.** $\frac{1}{4}$

7. 1　**提示:** 因为 $abc=1$,所以原式 $=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{1+ab+a}+\frac{c}{ac+c+abc}=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{1+ab+a}+\frac{1}{a+1+ab}=\frac{a+ab+1}{ab+a+1}=1$.

8. $\frac{7}{3}$　**提示:** 设乙单独做 x 天完成,则乙每天完成总工作量的 $\frac{1}{x}$,则甲每天完成总工作量的 $\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{x}\right)$. 根据题意,得 $13\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{x}\right)+3\cdot\frac{1}{x}=1$,解得 $x=\frac{100}{3}$. 经检验,$x=\frac{100}{3}$ 是所列方程的解. 所以 $\frac{1}{10}-\frac{1}{x}=\frac{7}{100}$. 所以 $\frac{\frac{7}{100}}{\frac{3}{100}}=\frac{7}{3}$,即甲的工作效率是乙的 $\frac{7}{3}$ 倍.

9. 3　**提示:** 因为 $\frac{xy}{x+y}=\frac{1}{a^3-b^3}$,所以 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a^3-b^3$①. 同理可得 $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=a^3$②,$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=a^3+b^3$③. 由①+②+③,得 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2}a^3$. 又因为 $\frac{xyz}{xy+yz+zx}=\frac{2}{81}$,即 $\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{81}{2}$,所以 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+$

$\frac{1}{z}=\frac{81}{2}$. 所以$\frac{3}{2}a^3=\frac{81}{2}$,解得 $a=3$.

10. 解:因为 $\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}=\frac{A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)}=\frac{(A+B+C)x^2+(A+2B-C)x-2A}{x(x-1)(x+2)}=\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}$,所以$\begin{cases}A+B+C=0,\\A+2B-C=2,\\-2A=3.\end{cases}$解得$\begin{cases}A=-\frac{3}{2},\\B=\frac{5}{3},\\C=-\frac{1}{6}.\end{cases}$ 所以 A,B,C 的值分别为$-\frac{3}{2},\frac{5}{3},-\frac{1}{6}$.

11. 解:原式$=\left[\frac{x-1}{x(x+1)}-\frac{x-3}{(x+1)(x-1)}\right]\div\frac{2x^2+x+1-x^2+x}{x(x-1)}=\frac{(x-1)^2-(x-3)x}{x(x+1)(x-1)}\cdot\frac{x(x-1)}{x^2+2x+1}=\frac{1}{(x+1)^2}$. 因为分式分母不为 0,所以 $x\neq 0, x\neq\pm 1$. 所以令 $x=2$,则原式$=\frac{1}{(2+1)^2}=\frac{1}{9}$(答案不唯一).

12. (1) $\frac{a-c}{(a-b)(a-c)(b-c)}$

$\frac{a-b}{(a-b)(a-c)(b-c)}$

$\frac{(b-c)-(a-c)+a-b}{(a-b)(a-c)(b-c)}$

(2) **解**:当 $r=2$ 时,$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=1$. 证明如下:

$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{a^2b-a^2c+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{a^2b-a^2c+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b}{(a^2-ac-ba+bc)(b-c)}=\frac{a^2b-a^2c+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b}{a^2b-a^2c-abc+ac^2-b^2a+abc+b^2c-bc^2}=1$.

(3) 6 072 **提示**:当 $r=3$ 时,$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}=a+b+c$. 令 $a=2\ 025$, $b=2\ 024$, $c=2\ 023$,则 $\frac{2\ 025^3}{(2\ 025-2\ 024)(2\ 025-2\ 023)}+\frac{2\ 024^3}{(2\ 024-2\ 023)(2\ 024-2\ 025)}+\frac{2\ 023^3}{(2\ 023-2\ 025)(2\ 023-2\ 024)}=\frac{2\ 025^3}{2}-2\ 024^3+\frac{2\ 023^3}{2}=2\ 025+2\ 024+2\ 023=6\ 072$.

13. (1) $a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4$

(2) **解**:因为 $a-\frac{1}{a}=2$,所以 $a^3-\frac{1}{a^3}=\left(a-\frac{1}{a}\right)\cdot\left(a^2+1+\frac{1}{a^2}\right)=\left(a-\frac{1}{a}\right)\left[\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+3\right]=2\times(4+3)=14$.

(3) 82 **提示**:因为 $a-\frac{1}{a}=2$,所以 $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+2=6$,所以 $a^4+\frac{1}{a^4}=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2-2=34$. 所以 $a^5-\frac{1}{a^5}=\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(a^4+a^3\cdot\frac{1}{a}+a^2\cdot\frac{1}{a^2}+a\cdot\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}\right)=\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(a^4+\frac{1}{a^4}+a^2+\frac{1}{a^2}+1\right)=82$.

14. 解:(1) A

(2) 由题意,得$\frac{-n}{x}+1=-\frac{1}{3}+n$,解得 $x=\frac{n}{\frac{4}{3}-n}=\frac{3n}{4-3n}$,所以 $\frac{3n}{4-3n}=\frac{1}{-n+\left(-\frac{1}{3}+n\right)}=-3$,解得 $n=2$.

(3) 由题意,得$\frac{2m+k}{x}+1=-k$,解得$x=-\frac{2m+k}{k+1}$,所以$-\frac{2m+k}{k+1}=\frac{1}{2m+k+(-k)}=\frac{1}{2m}$. 当$m\neq-\frac{1}{2}$时,解得$k=-\frac{4m^2+1}{2m+1}$. 代入$kx-2m+1=\frac{-4m}{2m+1}x$并化简,得$(2m-1)^2x=(1-2m)(1+2m)$. 因为$m\neq\frac{1}{2}$,解得$x=-\frac{2m+1}{2m-1}=-1-\frac{2}{2m-1}$. 因为关于$x$的方程$kx-2m+1=\frac{-4m}{2m+1}x$有整数解,且$m$为整数,所以$2m-1=\pm1$或$\pm2$,即$2m-1=1$或$2m-1=-1$或$2m-1=2$或$2m-1=-2$,解得$m=1$或$m=0$或$m=\frac{3}{2}$(舍去)或$m=-\frac{1}{2}$(舍去). 因为$m\neq0$,所以$m=1$.

第 10 章综合练(2)

1. D **2.** C **3.** C

4. A 提示:解不等式组$\begin{cases}\frac{x}{3}-2\leqslant\frac{1}{4}(x-7),\\6x-2a>5(1-x),\end{cases}$得$\frac{2a+5}{11}<x\leqslant3$. 因为原不等式组有且仅有三个整数解,所以$0\leqslant\frac{2a+5}{11}<1$,解得$-\frac{5}{2}\leqslant a<3$. 因为关于$y$的分式方程$\frac{1-2y}{y-1}-\frac{a}{1-y}=-3$的解为正数,所以$y=2-a>0$,即$a<2$. 经检验,当$y=2-a=1$,即$a=1$时,原分式方程有增根. 所以$a$的取值范围是$-\frac{5}{2}\leqslant a<2$且$a\neq1$. 所以所有满足条件的整数$a$的值之和是$(-2)+(-1)+0=-3$.

5. 3

6. $x=-3$ 提示:整理,得$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+8}+\frac{1}{x+8}-\frac{1}{x+11}\right)=\frac{1}{3(x-1)}-\frac{1}{24}$,所以$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+11}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{8}$,即$\frac{1}{x+11}=\frac{1}{8}$,解得$x=-3$. 经检验,$x=-3$是原分式方程的解.

7. 3 提示:设该河水流的速度为x km/h,游泳者在静水中的速度为a km/h,则游泳者自桥A逆流游了$\frac{1}{3}(a-x)$km,他再返回追到水壶用了$\frac{2+\frac{1}{3}(a-x)}{a+x}$ h,这个时间比水壶在遗失后漂流时间$\frac{2}{x}$ h少$\frac{1}{3}$ h. 由此可列出方程$\frac{2+\frac{1}{3}(a-x)}{a+x}=\frac{2}{x}-\frac{1}{3}$,解得$x=3$. 经检验,$x=3$是原方程的解.

8. 7 提示:因为$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{10}{9}$,所以$\frac{9}{a+b}+\frac{9}{b+c}+\frac{9}{c+a}=10$. 因为$a+b+c=9$,所以$a=9-(b+c)$,$b=9-(a+c)$,$c=9-(a+b)$. 所以$\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}=\frac{9-(a+b)}{a+b}+\frac{9-(b+c)}{b+c}+\frac{9-(a+c)}{c+a}=\frac{9}{a+b}-1+\frac{9}{b+c}-1+\frac{9}{c+a}-1=7$.

9. **解**:原式$=\left[\frac{2x(x+1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{x(x-1)}{(x-1)^2}\right]\cdot\frac{x+1}{x}=\frac{x}{x-1}\cdot\frac{x+1}{x}=\frac{x+1}{x-1}$.

(1) 当$x=1+\sqrt{2}$时,原式$=\frac{1+\sqrt{2}+1}{1+\sqrt{2}-1}=1+\sqrt{2}$.

(2) 不能. 理由如下:

若原代数式的值等于-1,则$\frac{x+1}{x-1}=-1$. 去分母,得$x+1=-x+1$,解得$x=0$. 因为分式的分母不为0,所以原代数式中,$x\neq\pm1$,$x\neq0$. 所以原代数式的值不可能等于-1.

10. **解**:(1) 方程两边同乘$(x-3)$,得$3x+5(x-3)=-m$. 因为原方程有增根,所以

$x-3=0$,解得 $x=3$. 当 $x=3$ 时,$m=-9$,故 m 的值为-9.

(2) 方程两边同乘$(x-3)$,得 $3x+5(x-3)=-m$. 因为原方程的根为 $x=-1$,所以 $m=23$,故 m 的值为 23.

(3) 解方程,得 $x=\frac{15-m}{8}$. 因为方程的三个根中两个根的和等于第三个根,所以$\frac{15-m_1}{8}+\frac{15-m_2}{8}=\frac{15-m_3}{8}$. 整理,得 $m_3=m_1+m_2-15$,故三个 m 的值只需满足 $m_1\neq-9$,$m_2\neq-9$,$m_3\neq-9$,且 $m_3=m_1+m_2-15$ 即可. 例如:$m_1=12$,$m_2=6$,$m_3=3$(答案不唯一).

11. (1) $<$

(2) $\frac{n+a}{m+a}$　$\frac{n}{m}<\frac{n+a}{m+a}$

证明:两式相减,得 $\frac{n+a}{m+a}-\frac{n}{m}=\frac{mn+ma-mn-an}{m(m+a)}=\frac{(m-n)a}{m(m+a)}$. 因为 $m>n>0$,$a>0$,所以$\frac{(m-n)a}{m(m+a)}>0$,所以$\frac{n+a}{m+a}>\frac{n}{m}$.

(3) **证明**:由题意,可得 $x>0$,$y>0$,$z>0$,$\frac{x+x}{x+y+z}>\frac{x}{y+z}$,$\frac{y+y}{x+y+z}>\frac{y}{x+z}$,$\frac{z+z}{x+y+z}>\frac{z}{x+y}$. 所以$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}<\frac{2x}{x+y+z}+\frac{2y}{x+y+z}+\frac{2z}{x+y+z}=\frac{2(x+y+z)}{x+y+z}=2$. 因为$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}>\frac{x}{x+y+z}+\frac{y}{x+y+z}+\frac{z}{x+y+z}=\frac{x+y+z}{x+y+z}=1$,所以 $1<\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}<2$.

12. 解:(1) 由$\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{2}$,知 $x\neq0$,所以$\frac{x^2+1}{x}=2$,即 $x+\frac{1}{x}=2$. 所以$\frac{x^4+1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=2^2-2=2$,所以$\frac{x^2}{x^4+1}$的值为 2 的倒数,即$\frac{1}{2}$.

(2) 由 $\frac{x}{x^2-x+1}=\frac{1}{7}$,知 $x\neq0$,所以 $\frac{x^2-x+1}{x}=7$,所以 $x-1+\frac{1}{x}=7$,即 $x+\frac{1}{x}=8$. 所以$\frac{x^4-x^2+1}{x^2}=x^2-1+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3=8^2-3=61$,所以$\frac{x^2}{x^4-x^2+1}$的值为 61 的倒数,即$\frac{1}{61}$.

(3) 由 $\frac{xy}{x+y}=2$,知 $x\neq0$,$y\neq0$,所以 $\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{2}$,即$\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$①. 由 $\frac{yz}{y+z}=\frac{4}{3}$,知 $y\neq0$,$z\neq0$,所以$\frac{y+z}{yz}=\frac{3}{4}$,即$\frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{3}{4}$②. 由$\frac{zx}{z+x}=\frac{4}{3}$,知 $z\neq0$,$x\neq0$,所以$\frac{z+x}{zx}=\frac{3}{4}$,即$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{3}{4}$③. ①+②+③,得 $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$. 所以 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$,所以 $\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$,所以 $\frac{xyz}{xy+yz+zx}$的值为 1 的倒数,即 1.

第 11 章　二次根式

巅峰训练 16　二次根式的概念

1. D　**2.** A

3. A　**提示**:$a=2\,024\times2\,026-2\,024\times2\,025=2\,024\times(2\,026-2\,025)=2\,024$. 因为 $b^2=2\,027^2-4\times$

$2\ 026=(2\ 026+1)^2-4\times2\ 026=2\ 026^2-2\times2\ 026+1=(2\ 026-1)^2=2\ 025^2$，所以 $b=2\ 025$. 因为 $\sqrt{2\ 025^2+25}>\sqrt{2\ 025^2}$，所以 $c>b>a$.

4. B　**提示**：由新运算定义，得 $<x-1>=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|=2$，解得 $x=3$ 或 $x=-1$，所以①错误；因为 $\sqrt{(x-5)^2}+\sqrt{2^2}+\sqrt{(x+3)^2}=|x-5|+2+|x+3|>8$，所以②错误；易得 a,b,c 的“新运算操作”结果为 $|a+b|+|a+c|+|b+c|$，当 $a+b\geqslant0$，$a+c\geqslant0$，$b+c\geqslant0$ 时，原式 $=a+b+a+c+b+c=2a+2b+2c$，当 $a+b\geqslant0$，$a+c\geqslant0$，$b+c\leqslant0$ 时，原式 $=a+b+a+c-b-c=2a$，当 $a+b\geqslant0$，$a+c\leqslant0$，$b+c\geqslant0$ 时，原式 $=a+b-a-c+b+c=2b$，当 $a+b\geqslant0$，$a+c\leqslant0$，$b+c\leqslant0$ 时，原式 $=a+b-a-c-b-c=-2c$，当 $a+b\leqslant0$，$a+c\geqslant0$，$b+c\geqslant0$ 时，原式 $=-a-b+a+c+b+c=2c$，当 $a+b\leqslant0$，$a+c\geqslant0$，$b+c\leqslant0$ 时，原式 $=-a-b+a+c-b-c=-2b$，当 $a+b\leqslant0$，$a+c\leqslant0$，$b+c\geqslant0$ 时，原式 $=-a-b-a-c+b+c=-2a$，当 $a+b\leqslant0$，$a+c\leqslant0$，$b+c\leqslant0$ 时，原式 $=-a-b-a-c-b-c=-2a-2b-2c$，所以③正确.

5. $2x+6$　**提示**：由题意，可得 $2x+5\geqslant0$ 且 $2-x\geqslant0$，所以 $-\frac{5}{2}\leqslant x\leqslant2$，所以 $x-3<0$. 所以原式 $=2x+5-(2-x)+3-x=2x+5-2+x+3-x=2x+6$.

6. (1) 3　(2) 6　(3) 10　(4) 15

(5) 21　(6) $\frac{n(n+1)}{2}$

7. -1 或 0　**提示**：因为 $\sqrt{(m+1)^2}=m+1$，所以 $m+1\geqslant0$，解得 $m\geqslant-1$. 所以 $-1\leqslant m<\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 所以整数 $m=-1$ 或 $m=0$.

8. 2　**提示**：因为 $x^2+y^2=1$，所以 $-1\leqslant x\leqslant1$，$-1\leqslant y\leqslant1$. 因为 $\sqrt{xy-2x+y-2}=\sqrt{(x+1)(y-2)}$，其中 $y-2<0$，所以 $x+1\leqslant0$，即 $x\leqslant-1$. 因为 $-1\leqslant x\leqslant1$，所以 $x=-1$，所以 $y=0$. 所以原式 $=\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x+1)(y-2)}=2+0=2$.

9. 8　**提示**：因为 $y=\sqrt{\frac{200}{n}}=\sqrt{\frac{100\times2}{n}}$，且 n 为正整数，y 是大于 1 的整数，所以 y 的最小值是 2，此时 $n=50$. 当 $n=2$ 时，y 取得最大值，最大值是 10，所以 y 的最大值与 y 的最小值的差为 $10-2=8$.

10. 4　**提示**：因为 $m-2\geqslant0$，所以 $m\geqslant2$，所以 $4-2m\leqslant0$. 原式可化为 $(n-2)^2+\sqrt{(m-2)n^2}=0$. 因为 $(n-2)^2\geqslant0$，$\sqrt{(m-2)n^2}\geqslant0$，所以 $\begin{cases}n-2=0,\\(m-2)n^2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}n=2,\\m=2.\end{cases}$ 所以 $m+n=4$.

11. $m\geqslant9$　**提示**：根据题意，得 $x^2-6x+m\geqslant0$，即 $(x-3)^2-9+m\geqslant0$. 因为 $(x-3)^2\geqslant0$，所以 $-9+m\geqslant0$，所以 $m\geqslant9$.

12. **解**：因为原等式可变形为 $\sqrt{a^2-3a+1}+(b-1)^2=0$，所以 $\begin{cases}a^2-3a+1=0,\\b=1.\end{cases}$ 由 $a^2-3a+1=0$，得 $a+\frac{1}{a}=3$. 两边平方，得 $a^2+\frac{1}{a^2}=7$. 所以原式 $=7-1=6$.

13. **解**：因为 a,b,c 为 $\triangle ABC$ 的三边长，所以 $b+c>a$，$a+b>c$，$a+c>b$，所以原式 $=|a-b-c|+|c-a-b|+|b-a-c|=b+c-a+a+b-c+a+c-b=a+b+c$.

14. **解**：由题意可得，$x-2\ 026\geqslant0$，则 $x\geqslant2\ 026$，那么 $2\ 025-x<0$. 原方程可化为 $x-2\ 025+\sqrt{x-2\ 026}=x$，则 $\sqrt{x-2\ 026}=2\ 025$，两边平方，得 $x-2\ 026=2\ 025^2$，所以 $x-2\ 025^2=2\ 026$.

15. (1) 4

(2) n

(3) **证明**：设 $m<n$. 因为 m,n 是连续的正整数，所以 $n=m+1$. 因为 $q=mn$，所以 $q-m=mn-m=m(m+1)-m=m(m+1-1)=m^2$，所以任意两个连续正整数的乘积与较小数的差也为某个正数的平方.

(4) 奇数　**提示**：因为 m,n 是两个连续正整数，

且 $m<n$，所以 $n=m+1$，$q=mn=m(m+1)=m^2+m$，所以 $p=\sqrt{q+n}+\sqrt{q-m}=\sqrt{m^2+m+m+1}+\sqrt{m^2+m-m}=\sqrt{(m+1)^2}+\sqrt{m^2}$. 因为 m 是正整数，所以 $m>0$，$m+1>0$，所以 $p=\sqrt{(m+1)^2}+\sqrt{m^2}=m+1+m=2m+1$，所以 p 一定是奇数.

16. 解：(1) 由题意，得 $\begin{cases}a-2\geqslant 0,\\2-a\geqslant 0,\end{cases}$ 所以 $a=2$，所以 $b=1$，所以 $a+b=2+1=3$.

(2) 原式 $=\left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{2\ 025}-\frac{1}{2\ 026}\right)=1\times 2\ 025+1-\frac{1}{2\ 026}=2\ 025\frac{2\ 025}{2\ 026}$.

巅峰训练 17　二次根式的乘除　二次根式的加减(1)

1. D

2. B　提示：$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{\frac{2\ 024}{2\ 025}}}{\sqrt{\frac{2\ 025}{2\ 026}}}=\frac{\sqrt{2\ 024\times 2\ 026}}{2\ 025}=\frac{\sqrt{\left(2\ 025-1\right)\times\left(2\ 025+1\right)}}{2\ 025}=\frac{\sqrt{2\ 025^2-1}}{2\ 025}<1$.

3. A

4. D　提示：原式 $=\left(\sqrt{3}-2\right)^{2\ 025}\cdot\left(\sqrt{3}+2\right)^{2\ 025}\cdot\left(\sqrt{3}+2\right)=(3-4)^{2\ 025}\cdot(\sqrt{3}+2)=-\sqrt{3}-2$.

5. A　提示：因为 $(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)=x^2+1-x^2=1$，$(\sqrt{y^2+1}+y)(\sqrt{y^2+1}-y)=y^2+1-y^2=1$，$(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{y^2+1}+y)=1$，所以 $\begin{cases}\sqrt{x^2+1}-x=\sqrt{y^2+1}+y①,\\\sqrt{y^2+1}-y=\sqrt{x^2+1}+x②.\end{cases}$ ①＋②，得 $-x-y=x+y$，所以 $2(x+y)=0$，所以 $x+y=0$.

6. A　提示：因为 $\sqrt{275}=5\sqrt{11}$，设 $\sqrt{x}=a\sqrt{11}$，$\sqrt{y}=b\sqrt{11}$，所以 $a+b=5$. 因为 a，b 是正整数，所以 $a=1$，$b=4$ 或 $a=2$，$b=3$ 或 $a=3$，$b=2$ 或 $a=4$，$b=1$. 因为 $x=11a^2$，$y=11b^2$，所以 $x+y=11(a^2+b^2)=11\times 13=143$ 或 $x+y=11(a^2+b^2)=11\times 17=187$.

7. 2　提示：因为 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，所以原式 $=x^2(x^2+2x+1)+1=x^2(x+1)^2+1=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\times\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+1\right)^2+1=\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}\times\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}+1=\frac{[(\sqrt{5}-1)\times(\sqrt{5}+1)]^2}{16}+1=\frac{4^2}{16}+1=2$.

8. -9　提示：由 $m=1+\sqrt{2}$，得 $(m-1)^2=2$，即 $m^2-2m=1$，故 $7m^2-14m=7$. 同理可得 $3n^2-6n=3$. 代入已知等式，得 $(7+a)\times(3-7)=8$，解得 $a=-9$.

9. $2\sqrt{a}$　提示：原式 $=a+2\sqrt{a}-a=2\sqrt{a}$.

10. 4　提示：因为 a 是 $\sqrt{3}$ 的小数部分，所以 $a=\sqrt{3}-1$，所以 $a^2+2a+2=(a+1)^2+1=4$.

11. $2\sqrt{6}$　提示：易知 $\triangle BCN$ 与 $\triangle ADM$ 全等，$\triangle AEM$ 与 $\triangle CFN$ 全等，所以两组三角形的面积分别相等. 又因为 ▱$DFNM$ 与 ▱$BEMN$ 的面积也相等，所以题图中阴影部分的面积是矩形面积的一半. 因为矩形面积为 $2\sqrt{3}\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{6}$，所以阴影部分的面积为 $2\sqrt{6}$.

12. $<$　提示：因为 $\sqrt{2\ 026}-\sqrt{2\ 025}=\frac{1}{\sqrt{2\ 026}+\sqrt{2\ 025}}$，$\sqrt{2\ 024}-\sqrt{2\ 023}=\frac{1}{\sqrt{2\ 024}+\sqrt{2\ 023}}$，且 $\frac{1}{\sqrt{2\ 026}+\sqrt{2\ 025}}<\frac{1}{\sqrt{2\ 024}+\sqrt{2\ 023}}$，所以 $\sqrt{2\ 026}-\sqrt{2\ 025}<\sqrt{2\ 024}-\sqrt{2\ 023}$.

13. 解：(1) 原式 $=-\frac{2}{b}\cdot\frac{2}{3}\times 3\cdot\sqrt{ab^5\cdot a^2b\cdot\frac{a}{b}}=-\frac{4}{b}\sqrt{a^4b^5}=-\frac{4}{b}\times a^2b^2\cdot\sqrt{b}=-4a^2b\sqrt{b}$.

(2) 原式 $=-6\times\frac{\sqrt{2(a-b)}}{c}\div\frac{4\sqrt{a-b}}{5c\sqrt{2b}}\times\frac{\sqrt{b}}{5\sqrt{c}}=-\frac{6\sqrt{2}\times\sqrt{a-b}}{c}\times\frac{5\sqrt{2}\cdot c\cdot\sqrt{b}}{4\sqrt{a-b}}\times\frac{\sqrt{b}}{5\sqrt{c}}=$

$-\frac{3b\sqrt{c}}{c}$.

(3) 原式$=\frac{n}{m}\cdot\left(-\frac{1}{m}\right)\cdot\sqrt{\frac{n}{3m^3}\cdot\frac{n^3}{m^3}\cdot\frac{2m^3}{n}}=-\frac{n}{m^2}\sqrt{\frac{2n^3}{3m^3}}=-\frac{n}{m^2}\cdot\frac{|n|}{3m^2}\cdot\sqrt{6mn}=\pm\frac{n^2\sqrt{6mn}}{3m^4}$.

14. 解:(1) 原式$=[(\sqrt{5}+\sqrt{6})^2-(\sqrt{7})^2]\cdot[(\sqrt{7})^2-(\sqrt{6}-\sqrt{5})^2]=(5+6+2\sqrt{30}-7)\cdot(7-6+2\sqrt{30}-5)=(4+2\sqrt{30})\cdot(-4+2\sqrt{30})=120-16=104$.

(2) 设原式$=x$,

则 $\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{3\times5}+\sqrt{5\times7}+\sqrt{3\times7}+\sqrt{5\times5}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{7})}=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$,

从而 $x=\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$.

(3) 因为 $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$,所以原式$=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}\right)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$.

15. 解:(1) 把 $g=10\ \mathrm{m/s^2}$,$h=15\ \mathrm{m}$ 代入 $v=\sqrt{2gh}$,得 $v=\sqrt{2\times10\times15}=\sqrt{300}=10\sqrt{3}$(m/s),所以该物品落地时的速度为 $10\sqrt{3}$ m/s.

(2) 不正确. 理由如下:

因为小明家所住楼层的高度是小亮家的 2 倍,所以小明家所住楼层的高度 $h_1=2\times15=30$(m),将 h_1 的值代入公式,得从小明家坠落的物品落地时速度 $v_1=\sqrt{2\times10\times30}=10\sqrt{6}$(m/s). 因为 $\frac{10\sqrt{6}}{10\sqrt{3}}=\sqrt{2}\neq2$,即从小明家坠落的物品落地时的速度是从小亮家坠落的物品速度的$\sqrt{2}$倍,而不是 2 倍,因此,小明的说法不正确.

16. 解:(1) ①$\sqrt{2}+1$ ②$2\sqrt{2}-\sqrt{3}$

(2) 在 Rt$\triangle ABC$ 中,由勾股定理,得 $AC^2+BC^2=AB^2$,即 $(\sqrt{3})^2+BC^2=(4-\sqrt{3})^2$,所以 $BC=\sqrt{16-8\sqrt{3}}=2\sqrt{3}-2$.

巅峰训练 18 二次根式的乘除 二次根式的加减(2)

1. C

2. B 提示:因为当 $n=\sqrt{2}$ 时,$n(n+1)=\sqrt{2}\times(\sqrt{2}+1)=2+\sqrt{2}$,且 $2+\sqrt{2}<15$,所以将 $n=2+\sqrt{2}$ 再次输入,得 $n(n+1)=(2+\sqrt{2})(2+\sqrt{2}+1)=8+5\sqrt{2}>8+7=15$,所以输出结果是 $8+5\sqrt{2}$.

3. C

4. D 提示:$(\sqrt{17}+4)^{2\,025}\cdot(\sqrt{17}-4)^{2\,026}=(\sqrt{17}+4)^{2\,025}\cdot(\sqrt{17}-4)^{2\,025}\cdot(\sqrt{17}-4)=[(\sqrt{17}+4)\cdot(\sqrt{17}-4)]^{2\,025}\cdot(\sqrt{17}-4)=1\cdot(\sqrt{17}-4)=\sqrt{17}-4$.

5. B 提示:因为 $3>2$,所以 $3※2=\sqrt{3}-\sqrt{2}$. 因为 $8<12$,所以 $8※12=\sqrt{8}+\sqrt{12}=2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. 所以 $(3※2)\times(8※12)=(\sqrt{3}-\sqrt{2})\times2(\sqrt{2}+\sqrt{3})=2$.

6. C 提示:原式$=(7+4\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^2+(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})+\sqrt{3}=(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})+4-3+\sqrt{3}=49-48+1+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$.

7. 0

8. $-2\sqrt{3}$ 提示:因为 $ab=3>0$,所以 a,b 同

号. 因为 $a+b=-6<0$，所以 $a<0$，$b<0$. 所以原式 $=-(-a)\sqrt{\frac{b}{a}}-(-b)\sqrt{\frac{a}{b}}=-\sqrt{(-a)^2\frac{b}{a}}-\sqrt{(-b)^2\frac{a}{b}}=-\sqrt{ab}-\sqrt{ab}=-2\sqrt{3}$.

9. 2　**提示**：因为 $x=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2=2n+1-2\sqrt{n(n+1)}$，$y=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2=2n+1+2\sqrt{n(n+1)}$，所以 $x+y=4n+2$，$xy=1$. 将 $xy=1$ 代入 $21x^2-33xy+21y^2=2\ 025$，得 $21x^2-33+21y^2=2\ 025$. 化简，得 $x^2+y^2=98$. 因为 $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=98+2=100$，所以 $x+y=10$. 所以 $4n+2=10$，解得 $n=2$.

10. -2　**提示**：因为 $\left(\sqrt{x-1}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)^2=x-1-2+\frac{1}{x-1}=x+\frac{1}{x-1}-3$，$x+\frac{1}{x-1}=7$，所以 $\left(\sqrt{x-1}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)^2=4$. 因为 $1<x<2$，所以 $\sqrt{x-1}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}<0$，所以 $\sqrt{x-1}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}=-2$.

11. 解：原式 $=2+2\sqrt{6}+3-2\sqrt{6}=5$.

12. 解：原式 $=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}-1)^2=3-(2-2\sqrt{2}+1)=3-2+2\sqrt{2}-1=2\sqrt{2}$.

13. 解：原式 $=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}=2-\sqrt{3}+\sqrt{2}+1+\sqrt{3}-\sqrt{2}=3$.

14. 解：原式 $=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{(2\sqrt{a}+\sqrt{b})(2\sqrt{a}-\sqrt{b})}{2\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}+2\sqrt{a}-\sqrt{b}=3\sqrt{a}$. 因为 $a^2+a^2b^2-4ab+b^2+1=0$，所以 $(a-b)^2+(ab-1)^2=0$，所以 $a-b=0$，$ab-1=0$. 由题中分式隐含的条件可知，a，b 都是正数，所以 $a=b=1$. 所以原式 $=3$.

15. 解：(1) 设 $x=\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}$. 两边平方，得 $x^2=(\sqrt{4+\sqrt{7}})^2+(\sqrt{4-\sqrt{7}})^2-2\sqrt{(4+\sqrt{7})(4-\sqrt{7})}$，即 $x^2=4+\sqrt{7}+4-\sqrt{7}-6$，所以 $x^2=2$，所以 $x=\pm\sqrt{2}$. 因为 $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}>0$，所以 $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}=\sqrt{2}$.

(2) 同 (1) 可得 $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{2}$，$\sqrt{6+3\sqrt{3}}-\sqrt{6-3\sqrt{3}}=\sqrt{6}$. 由条件，得 $a=\sqrt{2}-1$，$b=\sqrt{6}-2$，所以原式 $=\frac{2}{\sqrt{6}-2}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\sqrt{2}=\frac{2(\sqrt{6}+2)}{6-4}-(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}=\sqrt{6}+1$.

16. 解：(1) 1　2

(2) 因为 $x>4$，所以 $x-4>0$，所以 $\frac{1}{x-4}+(x-4)\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{x-4}\cdot(x-4)}=2$，所以 $y=\frac{1}{x-4}+x=\frac{1}{x-4}+(x-4)+4\geqslant 6$，当且仅当 $\frac{1}{x-4}=x-4$ 时，等号成立，所以 $x-4=\pm 1$，解得 $x=5$ 或 $x=3$. 经检验 $x=5$，$x=3$ 是分式方程的解. 因为 $x>4$，所以 $x=5$. 所以当 $x=5$ 时，函数 $y=\frac{1}{x-4}+x(x>4)$ 的值最小，最小值是 6.

(3) 设每间隔离区与墙平行的边长为 m m，所用钢丝网长度为 w m，则与墙垂直的边长为 $\frac{24}{m}$ m.

由题意，得 $w=6m+9\times\frac{24}{m}=\frac{216}{m}+6m$.

所以 $\frac{216}{m}+6m\geqslant 2\sqrt{\frac{216}{m}\times 6m}=72$，当且仅当 $\frac{216}{m}=6m$ 时，等号成立，即 $6m^2=216$，解得 $m=6$ 或 $m=-6$（不合题意，舍去），所以 $m=6$，此时 $\frac{24}{m}=4$，$w=72$.

答：当每间隔离区的长、宽分别为 6 m、

4 m 时，所用钢丝网长度最短，最短长度是 72 m.

第 11 章综合练(1)

1. A　**2.** D　**3.** C

4. B　**提示**：原式 $=x\sqrt{x}+2x\sqrt{x}-4x\sqrt{x}=-x\sqrt{x}$. 又因为 $x\geqslant 0$，所以 $-x\sqrt{x}\leqslant 0$.

5. A　**提示**：因为 $a+b=-4$，$ab=1$，所以 $a<0$，$b<0$，所以 $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{\sqrt{ab}}{-b}+\frac{\sqrt{ab}}{-a}=\frac{a\sqrt{ab}+b\sqrt{ab}}{-ab}=\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{-ab}=\frac{-4}{-1}=4$.

6. B　**提示**：根据题意，可知 $x-1\geqslant 0$ 且 $x-2\neq 0$，解得 $x\geqslant 1$ 且 $x\neq 2$，故①正确；由 $N^2-M^2=1$，得 $\frac{x^2-5x+7}{(x-2)^2}-\frac{x-1}{(x-2)^2}=1$，解得 $x=2$，经检验，$x=2$ 是增根，所以原方程无解，故②不正确；根据题意，得 $N^2+M^2=\frac{x^2-5x+7}{(x-2)^2}+\frac{x-1}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+6}{(x-2)^2}=1+\frac{2}{(x-2)^2}$，因为 M^2+N^2 是一个整数，所以 $(x-2)^2=1$ 或 $(x-2)^2=2$，解得 $x=3$ 或 $x=1$ 或 $x=2+\sqrt{2}$ 或 $x=2-\sqrt{2}$，因为 x 为无理数，且 $x-1\geqslant 0$，所以 $x=2+\sqrt{2}$，故③不正确.

7. $<$　**提示**：因为 $(\sqrt{11})^2=11$，$(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2=8+2\sqrt{15}$，所以 $11-(8+2\sqrt{15})=3-2\sqrt{15}<0$，所以 $\sqrt{11}<\sqrt{5}+\sqrt{3}$.

8. $m<k<n$

9. $2a$　**提示**：因为 $-1<a<0$，所以 $-\frac{1}{a}>1$，$\frac{1}{a}<-1$，所以 $a+\frac{1}{a}<-1$，$a-\frac{1}{a}>0$. 所以原式 $=\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}-\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}=a-\frac{1}{a}-\left[-\left(a+\frac{1}{a}\right)\right]=2a$.

10. 3　**提示**：因为 $1\leqslant a\leqslant 2$，所以 $0\leqslant a-1\leqslant 1$，所以 $m=\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}=\sqrt{a-1+2\sqrt{a-1}+1}+\sqrt{a-1-2\sqrt{a-1}+1}=\sqrt{a-1}+1+1-\sqrt{a-1}=2$，所以 $\sqrt{m^3+1}=\sqrt{2^3+1}=3$.

11. 解：(1) 原式 $=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

(2) 原式 $=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{5\sqrt{2}}{4}$.

(3) 原式 $=\left(2\sqrt{6}-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\div\sqrt{3}=\frac{11\sqrt{2}}{6}$.

(4) 原式 $=3-6\sqrt{2}+6-(4-5)=10-6\sqrt{2}$.

12. 解：由 $3\sqrt{x}+4\sqrt{y}=16$，得 $\sqrt{x}=\frac{16-4\sqrt{y}}{3}$，所以 $16-4\sqrt{y}\geqslant 0$，解得 $\sqrt{y}\leqslant 4$. 又因为 $\sqrt{y}\geqslant 0$，所以 $0\leqslant\sqrt{y}\leqslant 4$. 因为 $m=4\sqrt{x}-3\sqrt{y}=4\times\frac{16-4\sqrt{y}}{3}-3\sqrt{y}=\frac{64-25\sqrt{y}}{3}$，所以当 $\sqrt{y}=0$ 时，$m_{\text{最大值}}=\frac{64}{3}$，当 $\sqrt{y}=4$ 时，$m_{\text{最小值}}=-12$. 所以 m 的取值范围是 $-12\leqslant m\leqslant\frac{64}{3}$.

13. 解：(1) 因为 $\sqrt{m-3}+\sqrt{2-n}=0$，所以 $m-3=0$，$2-n=0$，解得 $m=3$，$n=2$. 所以 $\frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

(2) 所拼成的平行四边形的示意图，如下图所示.

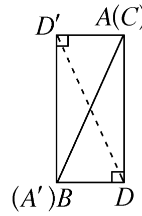


图 1

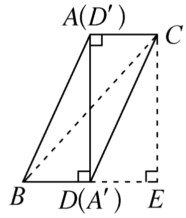


图 2

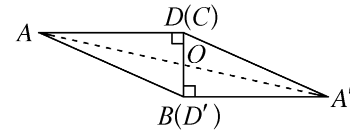


图 3

如图 1，$AB=m=3$，拼成的平行四边形为

矩形，对角线的长均为 3.

如图 2，$BD=\frac{n}{2}=1$，$BE=n=2$. 对角线 $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{m^2-\frac{n}{4}^2}=2\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{BE^2+CE^2}=\sqrt{BE^2+AD^2}=2\sqrt{3}$.

如图 3，$OD=\frac{1}{2}BD=\frac{n}{4}=\frac{1}{2}$. 对角线 $BD=\frac{n}{2}=1$，$AA'=2OA=2\sqrt{AD^2+OD^2}=\sqrt{33}$.

14. 解：(1) 因为 $\sqrt{13}-\sqrt{15}=\frac{(\sqrt{13}-\sqrt{15})(\sqrt{13}+\sqrt{15})}{\sqrt{13}+\sqrt{15}}=-\frac{2}{\sqrt{13}+\sqrt{15}}$，$\sqrt{11}-\sqrt{13}=\frac{(\sqrt{11}-\sqrt{13})(\sqrt{11}+\sqrt{13})}{\sqrt{11}+\sqrt{13}}=-\frac{2}{\sqrt{11}+\sqrt{13}}$，$\sqrt{13}+\sqrt{15}>\sqrt{11}+\sqrt{13}$，所以 $\sqrt{13}-\sqrt{15}>\sqrt{11}-\sqrt{13}$.

(2) 0　大　1　**提示**：由题意，得 $1+x\geqslant0$，$x\geqslant0$，所以 $x\geqslant0$，所以 $y=\sqrt{1+x}-\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$. 当 $x=0$ 时，分母 $\sqrt{1+x}+\sqrt{x}$ 的最小值是 1，所以当 $x=0$ 时，y 有最大值，最大值为 1.

(3) 由题意，得 $1-x\geqslant0$，$1+x\geqslant0$，$x\geqslant0$，所以 $0\leqslant x\leqslant1$. 由(2)可知，$y=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}-\sqrt{x}=\sqrt{1-x}+\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$，当 $x=0$ 时，分母 $\sqrt{1+x}+\sqrt{x}$ 的最小值是 1，所以 $y=\sqrt{1-x}+\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$ 的最大值是 2；当 $x=1$ 时，分母 $\sqrt{1+x}+\sqrt{x}$ 的最大值是 $\sqrt{2}+1$，所以 $y=\sqrt{1-x}+\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$ 的最小值是 $\sqrt{2}-1$，所以 $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}-\sqrt{x}$ 的最大值为 2，最小值为 $\sqrt{2}-1$.

15. 解：(1) $\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$

$=\frac{2(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})}$

$=\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$.

(2) $4-\sqrt{15}>\sqrt{17}-4$. 理由如下：

$4-\sqrt{15}=\frac{(4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})}{4+\sqrt{15}}=\frac{1}{4+\sqrt{15}}$，$\sqrt{17}-4=\frac{(\sqrt{17}-4)(\sqrt{17}+4)}{\sqrt{17}+4}=\frac{1}{\sqrt{17}+4}$. 因为 $4+\sqrt{15}<4+\sqrt{17}$，所以 $\frac{1}{4+\sqrt{15}}>\frac{1}{4+\sqrt{17}}$，即 $4-\sqrt{15}>\sqrt{17}-4$.

(3) 因为 $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-7}=5$，$(\sqrt{x-2}+\sqrt{x-7})(\sqrt{x-2}-\sqrt{x-7})=5$. 所以 $\begin{cases}\sqrt{x-2}+\sqrt{x-7}=5,\\\sqrt{x-2}-\sqrt{x-7}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\sqrt{x-2}=3,\\\sqrt{x-7}=2.\end{cases}$ 所以 $x-2=9$，$x-7=4$，所以 $x=11$. 检验：$x=11$ 时，$x-2>0$，$x-7>0$，符合题意. 所以原方程的解为 $x=11$.

第 11 章综合练(2)

1. C

2. A　**提示**：由题意知 $P=\sqrt{\left(\frac{4\ 049}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{4\ 049}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4\ 049}{2}-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{2\ 025\times2\ 024}$，$Q=\sqrt{2\ 025^2-2\times2\ 025+1}=\sqrt{(2\ 025-1)^2}=\sqrt{2\ 024^2}$. 因为 $2\ 025\times2\ 024>2\ 024^2$，所以 $P>Q$.

3. A　**提示**：由三角形三边关系，可知 $2<k<4$，所以 $1<9-2k<5$，$1<2k-3<5$，所以原式 $=|9-2k|-\sqrt{(2k-3)^2}=9-2k-2k+3=12-4k$.

4. A　**5.** C

6. C　**提示**：因为 $\sqrt{300}=10\sqrt{3}$，且 x，y 均为正整数，所以 $\sqrt{x}$，$\sqrt{y}$ 化为最简根式后应与 $\sqrt{3}$ 为同类二次根式，所以有以下三种情况：$\sqrt{x}+3\sqrt{y}=\sqrt{3}+9\sqrt{3}=$

$4\sqrt{3}+6\sqrt{3}=7\sqrt{3}+3\sqrt{3}=10\sqrt{3}$. 所以 $\begin{cases}x_1=3,\\ y_1=27,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=48,\\ y_2=12,\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=147,\\ y_3=3.\end{cases}$ 所以共有三组正整数解.

7. D **提示:**因为 $a+b=2\sqrt{a}+4\sqrt{b}-5$,所以 $(a-2\sqrt{a}+1)+(b-4\sqrt{b}+4)=0$,所以 $(\sqrt{a}-1)^2+(\sqrt{b}-2)^2=0$. 因为 $(\sqrt{a}-1)^2\geqslant 0$,$(\sqrt{b}-2)^2\geqslant 0$,所以 $\sqrt{a}=1$,$\sqrt{b}=2$,所以 $a=1$,$b=4$,所以 $a+2b=9$.

8. $a\leqslant\dfrac{1}{2}$

9. $-\sqrt{2}$ **提示:**因为 $a+\dfrac{1}{a}=4$,所以 $\left(\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^2=a-2+\dfrac{1}{a}=2$,所以 $\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\pm\sqrt{2}$. 因为 $0<a<1$,所以 $\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}<0$. 所以 $\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}=-\sqrt{2}$.

10. 25 或 16 **提示:**因为 $\sqrt{a^2-6a+9}+|b-4|=\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}$,$\begin{cases}x-3\geqslant 0,\\ 3-x\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $x=3$,所以 $\sqrt{a^2-6a+9}+|b-4|=0$,所以 $a^2-6a+9=0$,$b-4=0$,解得 $a=3$,$b=4$. ①若 a,b 为直角边,则该直角三角形的斜边长的平方为 $3^2+4^2=25$. ②若 4 为斜边,则该直角三角形的斜边长的平方为 16.

11. 19 **提示:**根据 $\sqrt{2\,000}=20\sqrt{5}$,$\sqrt{1\,999}<20\sqrt{5}$,所以在 $\sqrt{1}$,$\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$,…,$\sqrt{1\,999}$ 这 1 999 个式子中,与 $\sqrt{2\,000}$ 可以合并的有 $\sqrt{5}$,$2\sqrt{5}$,$3\sqrt{5}$,$4\sqrt{5}$,…,$19\sqrt{5}$,共 19 个.

12. 2 **提示:**因为 $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$,所以 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$,$a+b-2\sqrt{ab}=8-2\sqrt{15}$. 因为 $\sqrt{ab}=\sqrt{15}$,所以 $a+b=8$,所以 $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=8^2-4\times(\sqrt{15})^2=4$. 因为 $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{5}-\sqrt{3}>0$,所以 $a>b$,所以 $a-b>0$. 所以 $a-b=2$.

13. 0 **提示:**因为 $\sqrt{(a-2)b^2}\geqslant 0$,$b^2\geqslant 0$,所以 $a-2\geqslant 0$,所以 $a\geqslant 2$,所以 $|2a-3|\geqslant 1$. 因为 $|b+2|\geqslant 0$,$\sqrt{(a-2)b^2}\geqslant 0$,$|2a-3|+|b+2|+\sqrt{(a-2)b^2}=1$,所以 $|2a-3|=1$,$|b+2|=0$,$\sqrt{(a-2)b^2}=0$. 所以 $a=2$,$b=-2$. 所以 $a+b=0$.

14. $5-2\sqrt{6}$ 或 $-5-2\sqrt{6}$ **提示:**由 $a+2\sqrt{6}$ 是整数可知,a 是含有 $-2\sqrt{6}$ 的代数式. 设 $a=m-2\sqrt{6}$,所以 $\dfrac{1}{a}-2\sqrt{6}=\dfrac{1}{m-2\sqrt{6}}-2\sqrt{6}=\dfrac{m+2\sqrt{6}}{m^2-(2\sqrt{6})^2}-2\sqrt{6}$. 因为 $\dfrac{1}{a}-2\sqrt{6}$ 是整数,所以 $m^2-(2\sqrt{6})^2=1$,解得 $m=5$ 或 $m=-5$,所以 a 的值为 $5-2\sqrt{6}$ 或 $-5-2\sqrt{6}$.

15. 123 **提示:**因为 $m=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$,$n=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$,所以 $m+n=1$,$mn=-1$. 所以 $m^2+n^2=(m+n)^2-2mn=3$,$m^4+n^4=(m^2+n^2)^2-2(mn)^2=7$,$m^8+n^8=(m^4+m^4)^2-2(mn)^4=47$,$m^3+n^3=(m+n)^3-3mn(m+n)=4$,所以 $m^6+n^6=(m^3+n^3)^2-2(mn)^3=18$. 因为 $(m^8+n^8)(m^2+n^2)=m^{10}+n^{10}+m^8n^2+m^2n^8=m^{10}+n^{10}+(mn)^2(m^6+n^6)$,所以 $m^{10}+n^{10}=(m^8+n^8)(m^2+n^2)-(mn)^2(m^6+n^6)=47\times 3-1\times 18=123$.

16. 解:(1) 根据已知算式可知,$x<0$,$y<0$,所以原式 $=\dfrac{1}{3}\times(-4)\times 6\sqrt{\left(-\dfrac{x^2}{y}\right)\cdot\left(-\dfrac{y^2}{x}\right)\cdot x^3y}=-8\sqrt{x^4y^2}=-8x^2\cdot(-y)=8x^2y$.

(2) 原式 $=\sqrt{6}-3-2\sqrt{6}+\sqrt{6}-3=-6$.

17. 解:(1) $\sqrt{1-\dfrac{11}{36}}=\sqrt{\dfrac{25}{36}}=\dfrac{5}{6}$

(2) $\sqrt{1-\dfrac{2n+1}{(n+1)^2}}=\dfrac{n}{n+1}$ 证明如下:因为 $(n+1)^2=n^2+2n+1$,所以 $\sqrt{1-\dfrac{2n+1}{(n+1)^2}}=\sqrt{\dfrac{(n+1)^2-(2n+1)}{(n+1)^2}}=\sqrt{\dfrac{n^2}{(n+1)^2}}$. 因为 n 是正整数,所以 $\sqrt{1-\dfrac{2n+1}{(n+1)^2}}=\dfrac{n}{n+1}$.

(3) 由题意,得

$$\sqrt{\left(1-\frac{3}{4}\right)\left(1-\frac{5}{9}\right)\left(1-\frac{7}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{89}{2\,025}\right)}=\sqrt{1-\frac{3}{4}}\times\sqrt{1-\frac{5}{9}}\times\sqrt{1-\frac{7}{16}}\times\cdots\times\sqrt{1-\frac{89}{2\,025}}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{44}{45}=\frac{1}{45}.$$

18. (1) ①如图 1，$\angle POQ=45^\circ$.

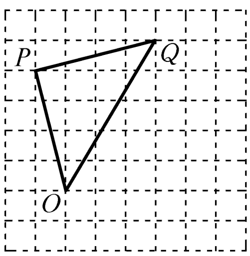


图 1

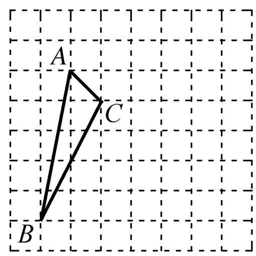


图 2

②如图 2，构造 $AB=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$，$AC=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$. 因为 $AB-AC<BC$，所以$\sqrt{26}-\sqrt{2}<2\sqrt{5}$.

(2) 如图 3，设边 EF 上的高为 h，由勾股定理，得 $EF=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$. 因为$\triangle DEF$ 的面积$=3\times4-\frac{1}{2}\times2\times2-\frac{1}{2}\times1\times4-\frac{1}{2}\times2\times3=\frac{1}{2}EF\cdot h$，所以$\frac{\sqrt{17}}{2}h=5$，所以 $h=\frac{10\sqrt{17}}{17}$，即边 EF 上的高的长是$\frac{10\sqrt{17}}{17}$.

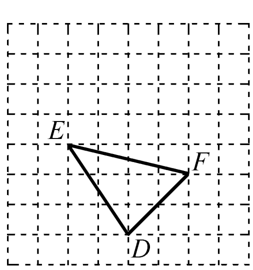


图 3

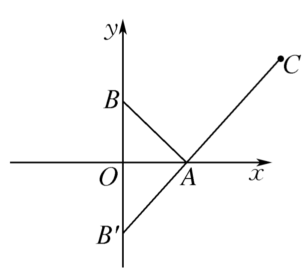


图 4

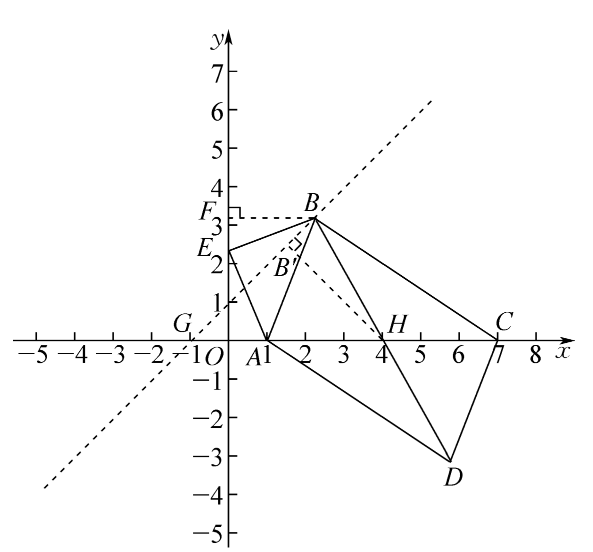
(3) 6　**提示**：因为点(a,b)是一次函数 $y=-2x+3\sqrt{2}$图象上一点，所以$-2a+3\sqrt{2}=b$，所以 $b=3\sqrt{2}-2a$，所以 $\sqrt{4a^2+2}+\sqrt{b^2+8}=\sqrt{4a^2+2}+\sqrt{(3\sqrt{2}-2a)^2+8}=\sqrt{(2a-0)^2+(0-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(2a-3\sqrt{2})^2+(0-2\sqrt{2})^2}$，所以$\sqrt{4a^2+2}$看作是点 $A(2a,0)$到点 $B(0,\sqrt{2})$的距离，$\sqrt{(2a-3\sqrt{2})^2+8}$看作是点 $A(2a,0)$到点 $C(3\sqrt{2},2\sqrt{2})$的距离，所以$\sqrt{4a^2+2}+\sqrt{b^2+8}=AB+AC$，即$\sqrt{4a^2+2}+\sqrt{b^2+8}$的最小值就是 $AB+AC$ 的最小值. 如图 4，作点 B 关于 x 轴的对称点 $B'(0,-\sqrt{2})$，连接 $B'C$ 交 x 轴于点 A，此时 $AB+AC$ 的值最小，为 $B'C$ 的长，所以 $B'C=\sqrt{(3\sqrt{2}-0)^2+(2\sqrt{2}+\sqrt{2})^2}=6$，所以$\sqrt{4a^2+2}+\sqrt{b^2+8}$的最小值是 6.

期末综合练(1)

1. D　**2.** B　**3.** C

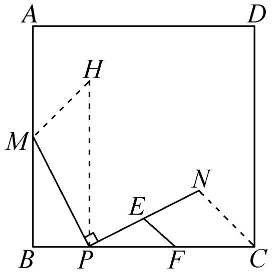
4. $\frac{1}{5}$　**提示**：设第三个因式为 $2x+c$，则$(2x+c)(x-1)(x+2)=(2x+c)(x^2+x-2)=2x^3+2x^2-4x+cx^2+cx-2c=2x^3+(2+c)x^2+(-4+c)x-2c$，所以$-2c=-6$，$-4+c=b$，$2+c=a$，所以 $c=3$，$b=-1$，$a=5$，所以 $a^b=5^{-1}=\frac{1}{5}$.

5. $5\sqrt{2}$　**提示**：如图，过点 B 作 $BF\perp y$ 轴于点 F，设 BD 与 AC 的交点为 H，设点 $E(0,m)$，则 $EO=m$. 易证$\triangle EBF\cong\triangle AEO$，所以 $BF=EO=m$，$EF=AO=1$，所以点 $B(m,m+1)$，所以点 B 在直线 $y=x+1$ 上运动. 易知直线 $y=x+1$ 与 x 轴所夹锐角为 45°. 设直线 $y=x+1$ 与 x 轴的交点为 G，则点 $G(-1,0)$. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $BH=HD=\frac{1}{2}BD$，$AH=HC$，所以点 $H(4,0)$. 当 BH 长取得最小值时，BD 长取得最小值. 由垂线段最短，可得当 $BH\perp$直线 $y=x+1$ 时，BH 长取得最小值，最小值为 $B'H$ 的长，所以$\angle B'GH=\angle B'HG=45^\circ$，所以 $B'G=B'H$，所以 $GH=\sqrt{2}B'H=4-(-1)=5$，所以 $B'H=\frac{5\sqrt{2}}{2}$. 所以 BD 长的最小值为 $5\sqrt{2}$.



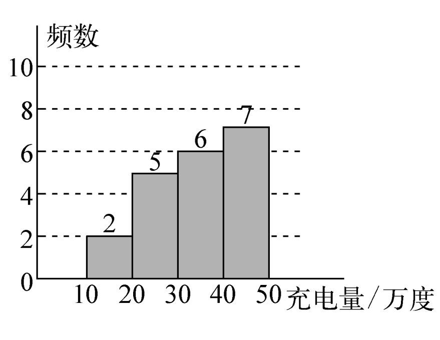
6. $\frac{81}{16}$ **提示**:连接 BE,FH. 由题意,得 $AB=4$ cm,$DE=EF=BF=DB=3$ cm,$GH=HI$. 因为 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABE}+S_{\triangle BCE}$,所以$\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot DE+\frac{1}{2}BC\cdot EF$,即 $4BC=12+3BC$,所以 $BC=12$ cm,所以 $FC=BC-BF=9$. 因为 $S_{\triangle EFC}=S_{\triangle EFH}+S_{\triangle FHC}$,所以 $\frac{1}{2}EF\cdot FC=\frac{1}{2}EF\cdot GH+\frac{1}{2}FC\cdot HI$,即 $27=3GH+9HI$,所以 $GH=HI=\frac{9}{4}$ cm,所以题图中阴影部分的面积为$\frac{81}{16}$ cm^2.

7. $\frac{1}{2}$ **提示**:如图,过点 P 作 $PH\perp BC$ 于点 P,且 $PH=PC$,连接 MH,CN. 易证$\triangle MPH\cong\triangle NPC$,所以 $MH=NC$. 因为 E,F 分别为 PN,PC 的中点,所以 $EF=\frac{1}{2}NC$,所以当 NC 的长取得最小值时,EF 的长取得最小值,即 MH 的长取得最小值时,EF 的长取得最小值. 当 $MH\perp AB$ 时,MH 的长取得最小值,此时,四边形 $BPHM$ 是矩形,所以 $MH=BP=1$,所以 MH 长的最小值为 1. 所以 EF 长的最小值为$\frac{1}{2}$.



8. 解:(1) 5　0.35　20

(2) 补全直方图如下:



(3) 108°

(4) 因为 $500\times0.35=175$(个),所以估计第一季度充电量在 $40\leqslant x\leqslant50$ 万度的充电桩数量为 175 个.

9. (1) **证明**:如图 1,过点 B 作 $BG/\!/EF$ 交 CD 于点 G,交 AM 于点 H. 因为四边形 $ABCD$ 为正方形,所以$\angle ABC=\angle C=90°$,$AB/\!/CD$,$AB=BC$,所以$\angle ABG+\angle CBG=\angle ABC=90°$. 由条件可知,四边形 $BGFE$ 是平行四边形,所以 $BG=EF$. 因为 $EF\perp AM$,$BG/\!/EF$,所以$\angle AHB=\angle ANE=90°$,所以$\angle ABG+\angle BAM=90°$,所以$\angle BAM=\angle CBG$,所以$\triangle ABM\cong\triangle BCG$(ASA),所以 $AM=BG$,所以 $AM=EF$.

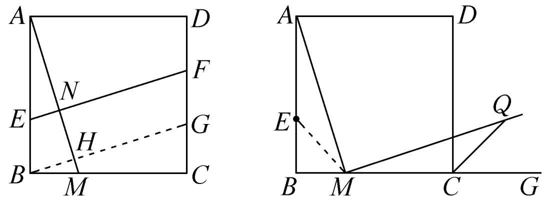


图 1　　图 2

(2) **证明**:如图 2,在边 BA 上截取 BE,使 $BE=BM$,连接 ME. 由条件可知,$\angle ABC=\angle C=90°$,$AB=BC$,所以$\angle AMB+\angle BAM=90°$. 因为 $BE=BM$,所以$\angle BEM=\angle BME=45°$,$AB-BE=BC-BM$,即 $AE=MC$,所以$\angle AEM=180°-\angle BEM=135°$. 因为 CQ 是正方形 $ABCD$ 的外角$\angle DCG$ 的平分线,所以$\angle DCQ=45°$,所以$\angle MCQ=135°$,所以$\angle AEM=\angle MCQ$. 由条件可知,$\angle AMQ=90°$,所以$\angle AMB+\angle CMQ=90°$,所以$\angle EAM=\angle CMQ$,所以$\triangle AEM\cong\triangle MCQ$(ASA),所以 $AM=MQ$.

(3) **解**:如图 3,过点 F 作 $FG\perp AB$,垂足为 G,连接 GD,易证四边形 $ADFG$ 为矩形,所以 $AF=GD$. 因为 $AM\perp EF$,$FG\perp AB$,所以

$\angle BAM+\angle AEN=90^\circ=\angle GFE+\angle AEN$，所以$\angle BAM=\angle GFE$. 在$\triangle FGE$和$\triangle ABM$中，$\begin{cases}\angle FGE=\angle ABM,\\ \angle GFE=BAM,\\ GF=AB,\end{cases}$ 所以$\triangle FGE\cong\triangle ABM$(AAS)，所以$GE=BM=1$. 将线段$ME$向上平移1，得到$QG$，作点$Q$关于$AB$的对称点$Q'$，连接$GQ'$. 因为$ME+AF=GQ+GD=GQ'+GD$，所以当点$D,G,Q'$三点共线时(如图所示)，$ME+AF$的值最小，最小值为$Q'D$的长. 因为$Q'D=\sqrt{(1+4)^2+3^2}=\sqrt{34}$，所以$ME+AF$的最小值为$\sqrt{34}$.

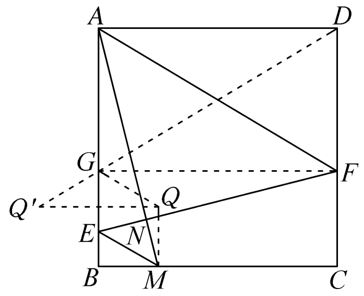


图 3

10. 解：(1) 2

(2) 在$Rt\triangle ABC$中，根据勾股定理，得$AC=5$. 根据旋转的性质，得$BE=AB$. 过点B作$BM\perp AC$于点M，所以$AE=2AM$. 根据等面积法，得$BM=\frac{AB\cdot BC}{AC}=\frac{12}{5}$. 在$Rt\triangle ABM$中，根据勾股定理，得$AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{9}{5}$. 所以$AE=\frac{18}{5}$，所以$S_{\triangle BCE}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}AB\cdot BC-\frac{1}{2}AE\cdot BM=\frac{1}{2}\times3\times4-\frac{1}{2}\times\frac{18}{5}\times\frac{12}{5}=\frac{42}{25}$.

(3) $AE\perp CG$. 理由如下：

设AE,BC交于点P，AE,CG交于点Q. 由旋转的性质，得$\angle ABE=\angle CBG$，$AB=BE$，$BC=BG$，所以$\angle BAE=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ABE)$，$\angle BCG=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle CBG)$，所以$\angle BAE=\angle BCG$. 因为$\angle APB=\angle CPE$，所以$\angle CQP=\angle ABC=90^\circ$，所以$AE\perp CG$.

连接AC,EG. 由旋转的性质，得$BE=AB=3$，$BG=BC=4$，$EG=AC=5$. 在$Rt\triangle AQC$中，由勾股定理，得$AQ^2+CQ^2=AC^2=25$. 在$Rt\triangle GQE$中，由勾股定理，得$GQ^2+EQ^2=EG^2=25$. 在$Rt\triangle CQE$中，由勾股定理，得$CE^2=CQ^2+EQ^2$. 在$Rt\triangle AQG$中，由勾股定理，得$AG^2=AQ^2+GQ^2$，所以$CE^2+AG^2=CQ^2+EQ^2+AQ^2+GQ^2=AC^2+EG^2=50$.

(4) $S_{\triangle BCE}+S_{\triangle ABG}$的最大值为12.

提示：延长AB至点E'，使$BE'=BE$，连接GE'，过点G作$GH\perp AB$交AB的延长线于点H. 因为$\angle EBG=\angle CBE'=90^\circ$，所以$\angle CBE=\angle GBE'$. 由旋转的性质，得$BC=BG$，所以$\triangle BCE\cong\triangle BGE'$，所以$S_{\triangle BCE}=S_{\triangle BGE'}$. 又因为$AE'=AB+BE'=6$，所以$S_{\triangle BCE}+S_{\triangle ABG}=S_{\triangle AE'G}=\frac{1}{2}AE'\cdot GH=3GH$. 要使$S_{\triangle BCE}+S_{\triangle ABG}$的值最大，则需$GH$的长最大. 在$Rt\triangle BHG$中，$BG>GH$，所以当$BG\perp AB$且与$BC$反向共线时，$GH$取得最大值，此时$GH=BG=4$. 所以$S_{\triangle BCE}+S_{\triangle ABG}$的最大值为$3\times4=12$.

期末综合练(2)

1. C　提示：$\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{20}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$，所以①错误；$\frac{1}{5-\sqrt{5}}=\frac{5+\sqrt{5}}{(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}=\frac{5+\sqrt{5}}{25-5}=\frac{5+\sqrt{5}}{20}$，所以②正确；因为$\frac{b}{\sqrt{4}-\sqrt{3}}-\frac{c}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}=\frac{b(\sqrt{4}+\sqrt{3})}{(\sqrt{4}-\sqrt{3})(\sqrt{4}+\sqrt{3})}-\frac{c(\sqrt{4}-\sqrt{3})}{(\sqrt{4}+\sqrt{3})(\sqrt{4}-\sqrt{3})}=(2+\sqrt{3})b-(2-\sqrt{3})c=\sqrt{3}(b+c)+(2b-2c)$，所以$b+c=4$，$2b-2c=4$，所以$b-3c=0$，即$b=3c$，所以③错误；因为$(\sqrt{43-m}-\sqrt{11-m})\cdot$

$(\sqrt{43-m}+\sqrt{11-m})=43-m-(11-m)=32$，而 $\sqrt{43-m}-\sqrt{11-m}=4$，所以 $4(\sqrt{43-m}+\sqrt{11-m})=32$，所以 $\sqrt{43-m}+\sqrt{11-m}=8$，所以④正确.

2. D　**提示**：因为 $PQ/\!/AB$，$AP/\!/BQ$，所以四边形 $ABQP$ 是平行四边形，所以 $AP=BQ$，所以点 Q 走完 BC 一次就可以得到一次平行. 因为点 P 的速度是 1 cm/s，所以两点运动的时间为 12 s，所以点 Q 运动的路程为 48 cm，所以点 Q 在边 BC 上运动的次数为 $48\div12=4$，所以线段 PQ 有 4 次平行于 AB.

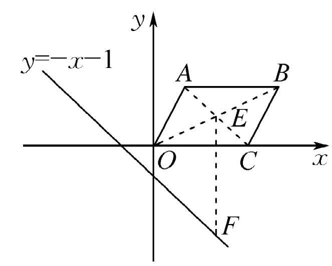
3. D　**提示**：去分母，得 $2x+a=x-1$，解得 $x=-1-a$. 因为关于 x 的方程 $\frac{2x+a}{x-1}=1$ 的解是正数，所以 $-1-a>0$，解得 $a<-1$. 又因为 $x-1\neq0$，即 $-1-a-1\neq0$，所以 $a\neq-2$. 所以 a 的取值范围是 $a<-1$ 且 $a\neq-2$.

4. B　**提示**：作点 D 关于 BC 的对称点 D'，连接 PD'，ED'. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $AD=BC=8$，$CD=AB=4$，所以 $DE=AD-AE=6$，$DD'=2CD=8$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle EDD'$ 中，由勾股定理，得 $ED'=10$. 由对称性，可知 $PD'=PD$，所以 $PF+PD=PF+PD'$. 因为 $EF=EA=2$，所以 EF 是定值，所以当点 E，F，P，D' 共线时，$PF+PD'$ 的值最小，最小值为 $ED'-EF=10-2=8$. 所以 $PF+PD$ 的最小值为 8.

5. $\frac{1}{18}$　**提示**：由 $\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{4}$，知 $x\neq0$，所以 $\frac{x^2-1}{x}=4$，即 $x-\frac{1}{x}=4$. 所以 $\frac{x^4+1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=18$. 所以 $\frac{x^2}{x^4+1}$ 的值为 18 的倒数，即 $\frac{1}{18}$.

6. 179　**提示**：因为 $a^5=b^4$，$c^3=d^2$，所以可设 $a=m^4$，$b=m^5$，$c=x^2$，$d=x^3$（m，x 为正整数）. 因为 $a-c=65$，所以 $m^4-x^2=65$，即 $(m^2+x)(m^2-x)=65$，所以 $\begin{cases}m^2+x=65,\\m^2-x=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m^2+x=13,\\m^2-x=5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m^2=33,\\x=32\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m^2=9,\\x=4,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}m=\sqrt{33},\\x=32\end{cases}$（舍去）或 $\begin{cases}m=3,\\x=4,\end{cases}$ 所以 $b-d=m^5-x^3=243-64=179$.

7. 4　**提示**：如图，连接 AC，BO，交于点 E，过点 E 作 $EF/\!/y$ 轴，交直线 $y=-x-1$ 于点 F. 由条件可得，点 $E(2,1)$，$F(2,-3)$. 当直线 $y=-x-1$ 向上移动经过点 E 时，该直线可将▱$ABCO$ 的面积平分. 因为 $EF=4$，所以直线 $y=-x-1$ 向上平移 4 个单位长度后经过点 $E(2,1)$，所以移动的时间为 4 s.



8. (1) $\frac{1}{8}$　135°

(2) ①3

②**解**：$800\times\frac{3}{8}=300$（次），所以转动转盘 800 次，估计转到“看电影”的次数为 300.

9. **解**：(1) 设乙工程队每天能完成绿化的面积是 x m^2，则甲工程队每天能完成绿化的面积是 $2x$ m^2. 根据题意，得 $\frac{400}{x}-\frac{400}{2x}=4$，解得 $x=50$. 经检验，$x=50$ 是原方程的解，则甲工程队每天能完成绿化的面积是 $50\times2=100$(m^2).

答：甲、乙两工程队每天能完成绿化的面积分别是 100 m^2、50 m^2.

(2) 根据题意，得 $100x+50y=1\,800$. 整理，得 $y=36-2x$，所以 y 关于 x 的函数表达式为 $y=-2x+36(0\leqslant x\leqslant18)$.

(3) 设甲工程队施工 x 天，乙工程队施工 y 天. 因为甲、乙两队施工的总天数不超过 26，所以 $x+y\leqslant26$. 由(2)知，$y=-2x+36$，所以 $x+36-2x\leqslant26$，解得 $x\geqslant10$. 设施工总费用为 w 万元. 根据题意，得 $w=0.6x+0.25y=0.6x+0.25\times(36-2x)=0.1x+9$. 因为 $k=0.1>0$，所以 w 随 x 的增大而增大，所以当

$x=10$ 时，w 最小，最小值为 $0.1\times10+9=10$，此时 $y=36-20=16$.

答：安排甲队施工 10 天，乙队施工 16 天时，施工总费用最低，最低费用为 10 万元.

10. 解：(1) D

(2) ①四边形 $AFHB$ 是“等补四边形”，理由如下：

如图 1，连接 CF. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $AB=CB$，$\angle ABD=\angle CBD=45°$. 又因为 $BF=BF$，所以 $\triangle ABF\cong\triangle CBF$(SAS)，所以 $AF=CF$，$\angle BAF=\angle BCF$. 因为 $HF\perp AE$，所以 $\angle AFH=\angle ABH=90°$，所以 $\angle BAF+\angle BHF=180°$. 因为 $\angle BHF+\angle FHC=180°$，所以 $\angle FHC=\angle BAF$，所以 $\angle FHC=\angle FCH$，所以 $FH=FC$，所以 $FH=AF$. 所以四边形 $AFHB$ 是“等补四边形”.

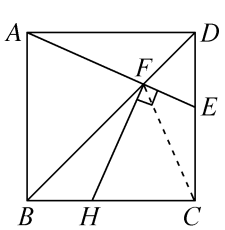


图 1

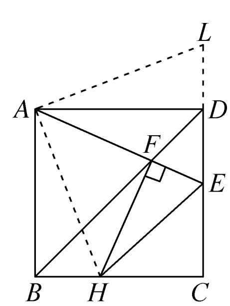


图 2

②如图 2，连接 AH. 由(2)①知，$\triangle AFH$ 为等腰直角三角形，则 $\angle HAF=45°$. 将 $\triangle ABH$ 绕点 A 逆时针旋转 $90°$，得到 $\triangle ADL$，点 H 的对应点是 L，则 $AL=AH$，$LD=BH$，$\angle LAE=\angle LAD+\angle DAE=\angle DAE+\angle BAH=90°-\angle HAF=45°=\angle HAE$. 易证 $\triangle ALE\cong\triangle AHE$(SAS)，所以 $HE=LE=LD+DE=BH+DE$，所以 $\triangle CHE$ 的周长为 $HE+CH+CE=BH+DE+CH+CE=BC+CD=4+4=8$.

③当 $FH=CH$ 时，连接 CF，由(2)①知，$FH=AF$，所以 $CH=FH=AF=CF$，所以 $\triangle FCH$ 为等边三角形. 由(2)①知，$\triangle ABF\cong\triangle CBF$，所以 $\angle FAB=\angle FCB=60°$，所以 $\angle DAE=30°$. 设 $DE=x$，则 $AE=2x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中，由勾股定理，得 $(2x)^2-x^2=4^2$，解得 $x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$(负值已舍). 所以 $DE=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，所以 $CE=CD-DE=4-\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

当 $CE=FE$ 时，因为 $HE=HE$，所以 $\mathrm{Rt}\triangle EHF\cong\triangle\mathrm{Rt}\triangle EHC$(HL)，所以 $FH=CH$，故该情况同 $FH=CH$ 的情况.

当 $CH=CE$ 时，由(2)②知，$\triangle CEH$ 的周长为 8. 设 $CH=CE=x$，则 $HE=\sqrt{2}x$. 所以 $x+x+\sqrt{2}x=8$，解得 $x=8-4\sqrt{2}$.

当 $EF=HF$ 时，由(2)①知，$HF=AF$，则 $AF=EF$，而当 F 是 BD 的中点时，才存在 $AF=EF$，此时点 E 与点 C 重合，不符合题意，故该种情况不存在.

综上所述，CE 的长为 $4-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 或 $8-4\sqrt{2}$.

期末综合练(3)

1. C

2. B **提示**：连接任意两点可得 $\frac{6\times5}{2}=15$(条)线段，其中 6 条线段的长度为 $\sqrt{3}$，所以所求概率为 $\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$.

3. C **提示**：原方程化为整式方程，得 $2-x-m=2(x-2)$，解得 $x=2-\frac{m}{3}$，所以 $2-\frac{m}{3}>0$，解得 $m<6$. 因为当 $x=2$ 时原方程无解，所以 $2-\frac{m}{3}\neq2$，解得 $m\neq0$. 所以 $m<6$ 且 $m\neq0$.

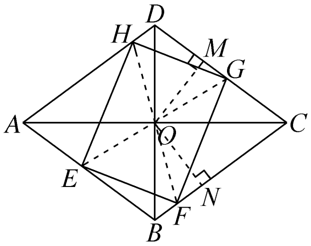
4. C **提示**：由折叠的性质，得 $BE=EF$，只有当 $AE=BE$ 时，$AE=EF$ 才成立，故选项 A 错误；由题意，得 $AB=AD$，$\angle BAD=150°$，$AF=AB=AD$，所以

$\angle AFB=\dfrac{180^\circ-\angle BAF}{2}$，$\angle AFD=\dfrac{180^\circ-\angle FAD}{2}$，所以 $\angle BFD=\angle AFB+\angle AFD=180^\circ-\dfrac{1}{2}(\angle BAF+\angle FAD)=180^\circ-\dfrac{1}{2}\angle BAD=105^\circ$，故选项 B 错误；由条件，可知 AE，EF 分别平分 $\angle BAF$，$\angle AFB$，根据三角形三条内角平分线交于一点，得 BE 平分 $\angle ABF$，所以 $\angle ABF=2\angle ABC=60^\circ$，由折叠的性质，得 $FA=AB$，所以 $\triangle ABF$ 是等边三角形，所以 $\angle BAF=60^\circ$，所以 $\angle DAF=\angle BAD-\angle BAF=90^\circ$，因为 $AD=AB=AF=2$，所以 $\triangle DAF$ 是等腰直角三角形，所以 $FD=\sqrt{AD^2+AF^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，故选项 C 正确.

5. $\sqrt{14}$　**提示**：因为 $x=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$，所以 $\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\sqrt{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{y}{\sqrt{xy}}+\dfrac{x}{\sqrt{xy}}=\dfrac{x+y}{\sqrt{xy}}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}+\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{\dfrac{1}{2}}}=\sqrt{14}$.

6. $7\sqrt{2}$　**提示**：过点 O 作 $OG\perp CE$ 于点 G，过点 A 作 $AH\perp OG$ 于点 H，交 BC 于点 F，则易知 $AF\perp BC$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，由勾股定理，得 $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=10$. 易证四边形 $CFHG$ 为矩形，且 $CG=\dfrac{1}{2}CE=\dfrac{1}{2}BC=5$，所以 $HF=CG=OG=5$. 因为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot AF=\dfrac{1}{2}AC\cdot AB$，所以 $AF=4.8$. 所以 $AH=AF+HF=9.8$，$HG=CF=\sqrt{AC^2-AF^2}=3.6$，所以 $OH=OG-HG=1.4$，则 $AO=\sqrt{AH^2+OH^2}=7\sqrt{2}$.

7. $\dfrac{32}{15}$　**提示**：根据题意，易得 $BC=\sqrt{OB^2+OC^2}=5$ cm. 易知 $AE=CG=t$ cm，$AH=CF=2t$ cm. 易证 $\triangle AEH\cong\triangle CGF$，所以 $HE=FG$. 同理可证 $GH=EF$. 所以四边形 $EFGH$ 是平行四边形. 如图，连接 EO，GO，HO，FO. 易证 $\triangle OAE\cong\triangle OCG$，所以 $\angle AOE=\angle COG$，所以 $\angle COG+\angle COE=\angle AOE+\angle COE=180^\circ$，所以点 E，O，G 在同一条直线上. 同理，点 H，O，F 在同一条直线上. 过点 O 作 $OM\perp DC$ 于点 M，$ON\perp BC$ 于点 N. 因为四边形 $EFGH$ 是矩形，所以 $EG=HF$，所以 $OG=OF$. 因为 $S_{\triangle BOC}=\dfrac{1}{2}OB\cdot OC=\dfrac{1}{2}BC\cdot ON$，所以 $ON=\dfrac{12}{5}$，所以 $BN=\sqrt{OB^2-ON^2}=\dfrac{9}{5}$. 所以 $CN=\dfrac{16}{5}$. 同理可得 $OM=\dfrac{12}{5}=ON$，$CM=\dfrac{16}{5}=CN$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ONF$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle OMG$ 中，$\begin{cases}ON=OM,\\OF=OG,\end{cases}$ 所以 $\mathrm{Rt}\triangle ONF\cong\mathrm{Rt}\triangle OMG$，所以 $MG=NF$，即 $\dfrac{16}{5}-t=2t-\dfrac{16}{5}$，解得 $t=\dfrac{32}{15}$.



8. $\dfrac{6}{5}\leqslant DE\leqslant 2$　**提示**：过点 C 作 $CH\perp AB$ 于点 H，连接 CM. 根据勾股定理，得 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=5$. 根据等面积法，得 $\dfrac{1}{2}AC\cdot BC=\dfrac{1}{2}AB\cdot CH$，所以 $CH=\dfrac{12}{5}$. 因为 D，E 分别为 CN，MN 的中点，所以 DE 是 $\triangle MNC$ 的中位线，所以 $DE=\dfrac{1}{2}CM$. 当 $CM\perp AB$，即点 M 与点 H 重合时，CM 长取得最小值，最小值为 $\dfrac{12}{5}$；当点 M 与点 B 重合时，CM 长取得最大值，最大值为 4. 所以 DE 长度的取值范围是 $\dfrac{6}{5}\leqslant DE\leqslant 2$.

9. 解：(1) $x=\pm\sqrt{39}$　**提示**：因为 $(\sqrt{x^2+42}+\sqrt{x^2+10})(\sqrt{x^2+42}-\sqrt{x^2+10})=(\sqrt{x^2+42})^2-(\sqrt{x^2+10})^2=(x^2+42)-(x^2+10)=32$. 又因为 $\sqrt{x^2+42}+\sqrt{x^2+10}=16$，所以 $\sqrt{x^2+42}-\sqrt{x^2+10}=2$，联立解得 $\begin{cases}\sqrt{x^2+42}=9,\\\sqrt{x^2+10}=7.\end{cases}$ 将 $\sqrt{x^2+42}=9$ 两边平方可解得 $x=\pm\sqrt{39}$. 经检验，$x=\pm\sqrt{39}$ 都是原方程的解，

所以原方程的解是 $x=\pm\sqrt{39}$.

(2) 因为$(\sqrt{4x^2+6x-5}+\sqrt{4x^2-2x-5})\cdot(\sqrt{4x^2+6x-5}-\sqrt{4x^2-2x-5})=(\sqrt{4x^2+6x-5})^2-(\sqrt{4x^2-2x-5})^2=(4x^2+6x-5)-(4x^2-2x-5)=8x$. 又因为$\sqrt{4x^2+6x-5}+\sqrt{4x^2-2x-5}=4x$,所以$\sqrt{4x^2+6x-5}-\sqrt{4x^2-2x-5}=2$,所以$\begin{cases}\sqrt{4x^2+6x-5}=2x+1,\\\sqrt{4x^2-2x-5}=2x-1.\end{cases}$因为$(\sqrt{4x^2+6x-5})^2=(2x+1)^2$,所以 $4x^2+6x-5=4x^2+4x+1$,解得 $x=3$. 经检验,$x=3$ 是原方程的解,所以方程$\sqrt{4x^2+6x-5}+\sqrt{4x^2-2x-5}=4x$ 的解是 $x=3$.

10. 解:(1) B　A

(2) 实践组摸到黄球的频率为$(500-372)\div500=0.256$.

(3) 实践组摸到黄球的频率小于创新组摸到黄球的频率(答案不唯一).

11. 解:(1) 1

(2) $EC\perp BG$. 理由如下:

如图 1,因为四边形 $ABCD$ 和四边形 $OEFG$ 均为正方形,所以 $OB=OC$,$OE=OG$,$\angle BOC=\angle EOG=90^\circ$. 所以$\angle BOC-\angle COG=\angle EOG-\angle COG$. 所以$\angle BOG=\angle COE$,所以$\triangle BOG\cong\triangle COE$,所以$\angle OGB=\angle OEC$. 因为$\angle EON+\angle OEC+\angle1=180^\circ$,$\angle GHE+\angle OGB+\angle2=180^\circ$,$\angle1=\angle2$,所以$\angle GHE=\angle EON=90^\circ$,所以 $EC\perp BG$.

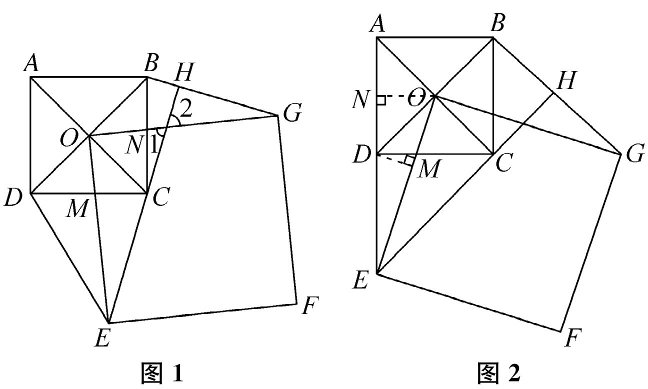


图 1　　图 2

(3) 如图 2,当四边形 $DECB$ 是平行四边形时,易得 $OD=\sqrt2$,$DE=BC=2$. 过点 D 作 $DM\perp OE$ 于点 M,过点 O 作 $ON\perp AD$ 于点 N,则 $ON=DN=\dfrac12AD=1$. 在 Rt$\triangle ONE$ 中,由勾股定理,得 $OE=\sqrt{ON^2+EN^2}=\sqrt{1^2+(1+2)^2}=\sqrt{10}$. 由等面积法,得 $S_{\triangle OED}=\dfrac12OE\cdot DM=\dfrac12DE\cdot ON$,即$\dfrac12\times\sqrt{10}DM=\dfrac12\times2\times1$,所以 $DM=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$,即点 D 到 OE 的距离为$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

如图 3,当四边形 $BDCE$ 是平行四边形时,$BD\parallel CE$,$CE=BD=2\sqrt2$. 在 Rt$\triangle OCE$ 中,由勾股定理,得 $OE=\sqrt{OC^2+CE^2}=\sqrt{(\sqrt2)^2+(2\sqrt2)^2}=\sqrt{10}$. 过点 D 作 $DQ\perp EO$ 交 EO 的延长线于点 Q. 由平行线间的距离处处相等可知,$\triangle ODE$ 和$\triangle ODC$ 均以 OD 为底时,高相等,所以 $S_{\triangle ODE}=S_{\triangle ODC}=\dfrac14S_{正方形ABCD}=1$,所以$\dfrac12OE\cdot DQ=\dfrac12\times\sqrt{10}\cdot DQ=1$,所以 $DQ=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$,即点 D 到 OE 的距离为$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

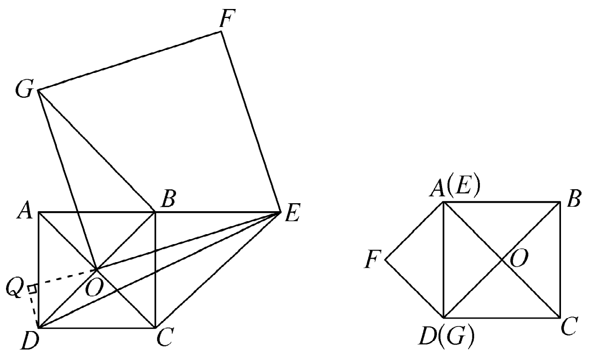


图 3　　图 4

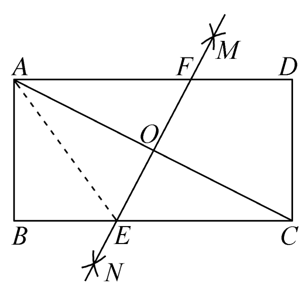
如图 4,当四边形 $BEDC$ 是平行四边形时,点 A 与点 E 重合,点 D 与点 G 重合,点 D 到 OE 的距离即为 OD 的长,易得 $OD=$

$\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

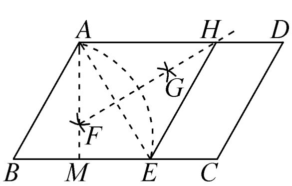
综上所述，点 D 到 OE 的距离为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$ 或 $\sqrt{2}$.

巅峰专题1　几何作图综合

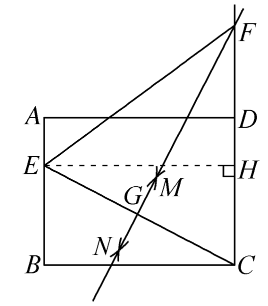
1. C　**提示**：如图，连接 AE. 根据作图过程，可知 MN 是 AC 的垂直平分线，所以 $AE=CE$，易证 $\triangle AFO\cong\triangle CEO$(ASA)，所以 $AF=CE$，所以 $AE=CE=AF=5$，所以 $BC=BE+CE=3+5=8$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，根据勾股定理，得 $AB=\sqrt{AE^2-BE^2}=4$，所以矩形的周长为 $2(AB+BC)=2\times(4+8)=24$.



2. D　**提示**：如图，连接 AE，由作图步骤①可知，$BE=AB=4$，所以 $EC=BC-BE=2$，$\triangle ABE$ 是等边三角形. 由作图步骤②③可知，FG 是 AE 的垂直平分线，所以 $AH=EH$，因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AD\parallel BC$，$AB=CD$，$AB\parallel CD$，所以 $\angle HAE=\angle AEB=60^\circ$，所以 $\triangle AHE$ 是等边三角形，所以 $AH=HE=AE=AB=BE$，所以四边形 $ABEH$ 是菱形，所以 $EH=AB=CD$，$EH\parallel AB\parallel CD$，所以四边形 $ECDH$ 是平行四边形. 过点 A 作 $AM\perp BC$ 于点 M，在等边三角形 ABE 中，$AM=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\frac{\sqrt{3}}{2}\times4=2\sqrt{3}$，所以 $S_{四边形ECDH}=2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.



3. D　**提示**：由作图，可知 FG 垂直平分线段 EC，所以 $FC=FE$，故①正确；所以 $\angle FEC=\angle FCE$，因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $AB\parallel CD$，$\angle ABC=\angle BCD=90^\circ$，$\angle BEC=\angle FCE$，所以 $\angle FEC=\angle BEC$，所以 EC 平分 $\angle BEF$，故②正确；如图，过点 E 作 $EH\perp CD$ 于点 H，所以 $EC=\sqrt{BE^2+BC^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，设 $CF=x$，则 $EF=x$，$FH=x-2$，$EH=4$，由勾股定理，可得 $EF^2=EH^2+FH^2$，即 $x^2=4^2+(x-2)^2$，解得 $x=5$，所以 $CF=5$，故③正确；因为 $FG=\sqrt{CF^2-CG^2}=\sqrt{CF^2-\left(\frac{EC}{2}\right)^2}=2\sqrt{5}$，所以 $FG=CE$，故④正确.



4. 123°　**提示**：由作图痕迹，可知所作为 $\angle ABD$ 的平分线. 设 $\angle ABD$ 的平分线与 AD 的交点为 E，则 $\angle DBE=\frac{1}{2}\angle ABD$. 结合矩形的性质，可得 $\angle A=\angle ABC=90^\circ$，$\angle CBD=\angle ADB=24^\circ$，所以 $\angle ABD=66^\circ$，则 $\angle DBE=33^\circ$，所以 $\angle1=180^\circ-\angle ADB-\angle DBE=123^\circ$.

5. $\sqrt{2}$　**提示**：根据题意，得 $\angle C=30^\circ$，$AB\parallel CD$，$BC=AD=\sqrt{3}+1$. 由作图痕迹，可知 $\angle CBH=\angle ABH$. 过点 B 作 $BP\perp CD$ 于点 P. 易得 $BP=\frac{1}{2}BC=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$，$CP=\frac{\sqrt{3}}{2}BC=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$. 因为 $AB\parallel CD$，所以 $\angle CHB=\angle ABH=\angle CBH$，所以 $CH=BC$，所以 $HP=CH-CP=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，所以 $BH=\sqrt{BP^2+HP^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$.

6. 4.8　**提示**：由已知可得，$AF=AB$，AE 平分 $\angle FAB$，所以 $\angle FAE=\angle BAE=\angle BEA$，所以 $BA=BE$，所以 $AF=BE$. 又因为 $AF\parallel BE$，$AF=AB$，所以四边形 $ABEF$ 是菱形，所以 $BO=3$，所以 $AO=\sqrt{AB^2-BO^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，所以 $AE=8$. 因为 $AH\perp$

BC,所以$\frac{AE \cdot BF}{2}=BE \cdot AH$,即$\frac{8\times 6}{2}=5 \cdot AH$,解得$AH=4.8$.

7. 解:(1) 如图 1,四边形 $ABCD$ 即为所求.

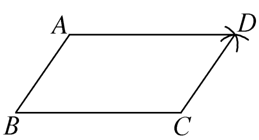


图 1

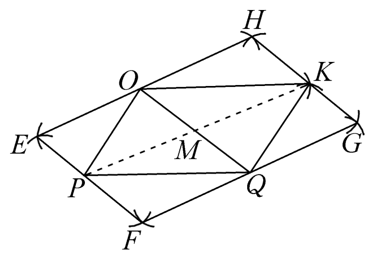


图 2

(2) 如图 2,四边形 $EFGH$ 即为所求.

8. 解:(1) 如图 1,四边形 $EFGH$ 即为所求.

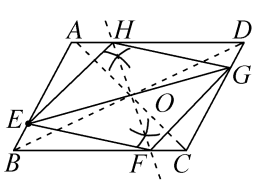


图 1

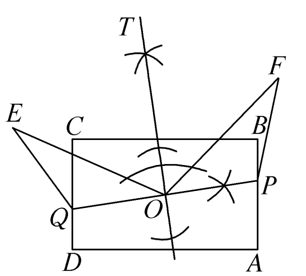


图 2

(2) 如图 2,点 P,Q 即为所求.

9. (1) **证明**:因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以 $AB=AD$,$\angle BAD=\angle ABF=\angle ADE=90°$. 因为 $AF=AE$,所以 $Rt\triangle ABF \cong Rt\triangle ADE$(HL),所以$\angle BAF=\angle DAE$. 因为$\angle BAF+\angle DAF=90°$,所以$\angle DAE+\angle DAF=90°$,即$\angle EAF=90°$.

(2) **解**:如图 1,过点 P 作射线 $PC\perp OB$ 于点C. 以线段 PC 为边分别向两侧作正方形 $PCDE$ 和正方形$PCFG$. 分别延长 DE,FG,交 OA 于点 Q,Q'. 连接 PQ,PQ',以点 P 为圆心,PQ,PQ'为半径作弧,交 OB 于点 N,N'. 由(1),可得$\angle QPN=\angle Q'PN'=90°$. 分别以 PQ,PN;PQ',PN'为一组邻边作正方形 $PQMN$,$PQ'M'N'$,则正方形 $PQMN$,$PQ'M'N'$即为所求.

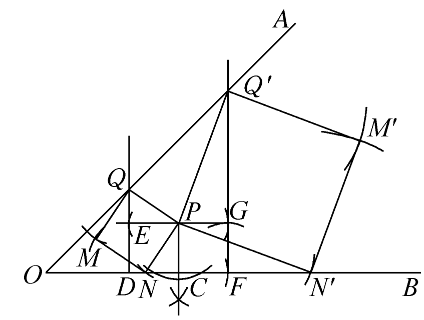


图 1

(3) **解**:所作正方形的边长为$\sqrt{2}$或$\sqrt{10}$.

提示:当正方形在点 P 左侧时,如图 2,过点 P 作$GH\perp OB$,交 OB 于点H,交 OA 于点G,过点 Q 作$QF\perp GH$于点F. 易得$\triangle PHN\cong\triangle QFP$,所以 $QF=PH=1$. 因为 $OP=\sqrt{10}$,所以 $OH=\sqrt{OP^2-PH^2}=3$. 因为$\angle AOB=45°$,所以$\angle OGH=45°=\angle GQF$,所以 $GF=QF=1$,$GH=OH=3$,所以 $FP=GH-GF-PH=1$. 在 $Rt\triangle QFP$ 中,$PQ=\sqrt{QF^2+PF^2}=\sqrt{2}$.

当正方形在点 P 右侧时,如图 3,过点 P 作 $KL\perp OB$,交 OB 于点L,交 OA 于点F,过点 Q 作$QK\perp KL$于点K,过点 Q 作$QE\perp OB$于点E. 同理可得 $KQ=PL=1$,$OL=3$. 因为$\angle AOB=45°$,所以 $KF=KQ=1$,$QE=OE=OL+LE=OL+KQ=4$,所以 $KL=QE=4$,所以 $PK=KL-PL=3$. 在 $Rt\triangle PKQ$ 中,$PQ=\sqrt{PK^2+KQ^2}=\sqrt{10}$.

综上所述,正方形的边长为$\sqrt{2}$或$\sqrt{10}$.

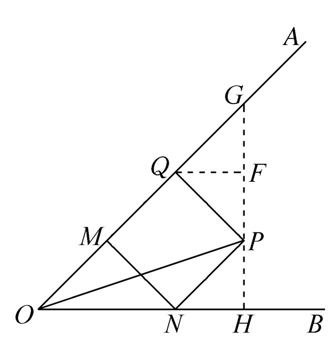


图 2

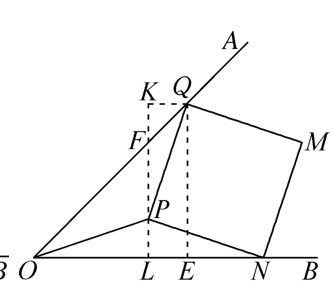


图 3

10. 解:(1) $\sqrt{61}-5$

(2) 如图 1,折痕 AQ 即为所求. 设 AD 的

垂直平分线交 AD 于点 F，交 BC 于点 G，连接 EQ. 因为 EG 垂直平分 AD，$AD=BC=6$，所以 $AF=DF=\frac{1}{2}AD=3$，$\angle AFG=\angle DFG=90°$. 因为 $\angle BAD=\angle B=\angle ADC=\angle BCD=90°$，所以四边形 $ABGF$，$CDFG$ 都是矩形，所以 $AF=DF=BG=CG=3$，$FG=AB=5$. 因为 $AE=AB=5$，所以 $EF=\sqrt{AE^2-AF^2}=4$，所以 $EG=EF+FG=9$. 由翻折，得 $\triangle ABQ\cong\triangle AEQ$(SAS)，所以 $EQ=BQ$. 设 $CQ=x$，则 $BQ=EQ=6+x$，$GQ=3+x$，所以 $GQ^2+EG^2=EQ^2$，即 $(3+x)^2+81=(6+x)^2$，解得 $x=9$，所以 $BQ=BC+CQ=15$.

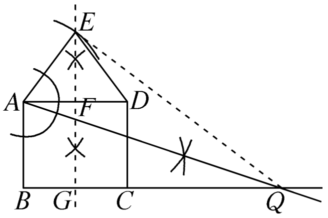


图 1

(3) 如图 2，延长 AB，DC 至点 M，N，使得 $AM=DN=BC$，连接 MN，则四边形 $AMND$ 是正方形，$BM=CN=1$，$MN=BC=6$. 延长 AQ 交 MN 于点 H，连接 GH，MQ. 由翻折，得 $AD=AG$，$DP=PG$. 因为 $AD=AM$，所以 $AM=AG$. 因为 $\angle MAH=\angle GAH$，$AH=AH$，所以 $\triangle AMH\cong\triangle AGH$(SAS)，所以 $\angle AGH=\angle AMH=90°$，所以 P，G，H 三点共线. 当 $DP=\frac{1}{3}CD=\frac{5}{3}$ 时，$CP=\frac{10}{3}$，所以 $PN=CP+CN=\frac{13}{3}$，设 $MH=GH=m$，则 $HN=6-m$，$PH=PG+GH=DP+GH=\frac{5}{3}+m$，所以 $PH^2=HN^2+PN^2$，即 $\left(m+\frac{5}{3}\right)^2=(6-m)^2+\left(\frac{13}{3}\right)^2$，解得 $m=\frac{78}{23}$，所以 $MH=\frac{78}{23}$，因为 $S_{\triangle AMH}=S_{\triangle AMQ}+S_{\triangle MQH}$，所以 $\frac{1}{2}AM\cdot MH=\frac{1}{2}AM\cdot BQ+\frac{1}{2}MH\cdot BM$，即 $\frac{1}{2}\times6\times\frac{78}{23}=\frac{1}{2}\times6BQ+\frac{1}{2}\times\frac{78}{23}\times1$，所以 $BQ=\frac{65}{23}$；当 $DP=\frac{2}{3}CD$ 时，如图 3，$DP=\frac{2}{3}CD=\frac{10}{3}$，$CP=\frac{5}{3}$，所以 $PN=CP+CN=\frac{8}{3}$，设 $MH=GH=n$，则 $HN=6-n$，$PH=PG+GH=PD+GH=\frac{10}{3}+n$，所以 $PH^2=HN^2+PN^2$，即 $\left(n+\frac{10}{3}\right)^2=(6-n)^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2$，解得 $n=\frac{12}{7}$，所以 $MH=\frac{12}{7}$，因为 $S_{\triangle AMH}=S_{\triangle AMQ}+S_{\triangle MQH}$，所以 $\frac{1}{2}AM\cdot MH=\frac{1}{2}AM\cdot BQ+\frac{1}{2}MH\cdot BM$，即 $\frac{1}{2}\times6\times\frac{12}{7}=\frac{1}{2}\times6BQ+\frac{1}{2}\times\frac{12}{7}\times1$，解得 $BQ=\frac{10}{7}$. 综上所述，BQ 的长为 $\frac{65}{23}$ 或 $\frac{10}{7}$.

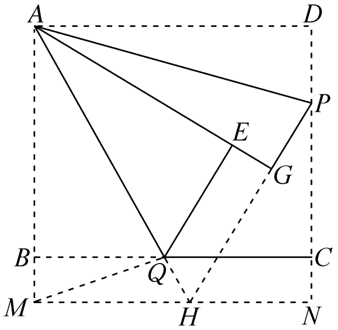


图 2

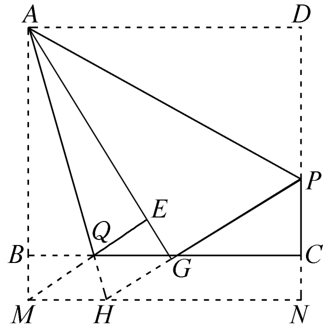


图 3

11. 解:(1) $EF=GH$

(2) 如图1,$EF'=EF$,但EF'和GH不垂直.

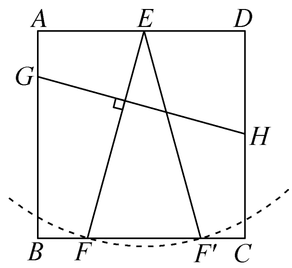


图1

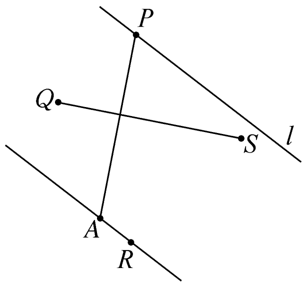


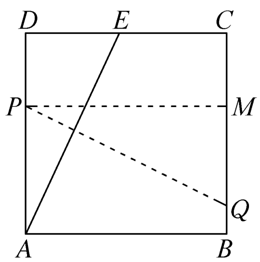
图2

(3) ①$\sqrt{5}$

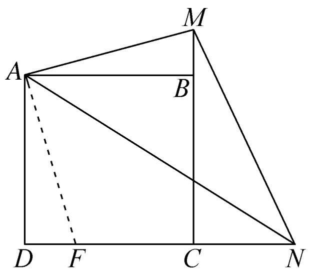
②如图2,连接QS,作$PA\perp QS$且$PA=QS$,作直线AR,过点P作直线$l/\!/AR$,则直线l即为所求.

巅峰专题2　特殊的平行四边形中的常见模型

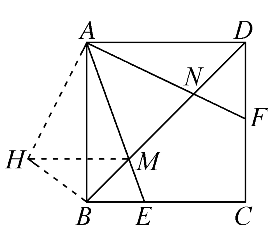
1. A　**提示**:如图,过点P作$PM\perp BC$于点M.由折叠,得$PQ\perp AE$,所以$\angle DAE+\angle APQ=90°$.又因为$\angle DAE+\angle AED=90°$,所以$\angle AED=\angle APQ$.因为$AD/\!/BC$,所以$\angle APQ=\angle PQM$,所以$\angle PQM=\angle AED$,又因为$\angle D=\angle PMQ$,$PM=AD$,所以$\triangle PQM\cong\triangle AED$(AAS),所以$PQ=AE=\sqrt{5^2+12^2}=13$.



2. C　**提示**:如图,在DC上取一点F,使得$DF=BM$,连接AF.易证$\triangle ABM\cong\triangle ADF$(SAS),所以$AM=AF$,$\angle BAM=\angle DAF$.因为$\angle FAM=\angle FAB+\angle BAM=\angle FAB+\angle DAF=90°$,$\angle MAN=45°$,所以$\angle FAN=\angle MAN=45°$.易证$\triangle MAN\cong\triangle FAN$(SAS),所以$MN=FN$.设$MN=FN=x$,则$DN=DF+FN=1+x$,$CM=BM+BC=4$,$CN=DN-DC=x-2$.在Rt$\triangle MCN$中,由勾股定理,得$CM^2+CN^2=MN^2$,所以$4^2+(x-2)^2=x^2$,解得$x=5$,所以$MN=5$.



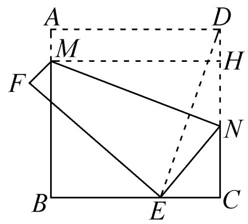
3. B　**提示**:如图,过点A作$AH\perp AF$,并截取$AH=AN$,连接BH,MH.因为$\angle HAB=90°-\angle BAF=\angle NAD$,所以$\triangle HAB\cong\triangle NAD$(SAS),所以$BH=DN=4$,$\angle ABH=\angle ADN=45°$,所以$\angle HBM=\angle ABH+\angle ABM=90°$,$HM=\sqrt{BH^2+BM^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$.易证$\triangle AHM\cong\triangle ANM$(SAS),所以$NM=HM=5$,所以$BD=12$.在Rt$\triangle ABD$中,由勾股定理,得$AB^2+AD^2=BD^2$,所以$2AB^2=12^2$,所以$AB^2=72$,所以正方形$ABCD$的面积为72.



4. $135°-\alpha$　**提示**:取AF的中点H,连接GH,则$BG=AH=FH$.易证Rt$\triangle GHF\cong$Rt$\triangle ADE$(HL),所以$FH=ED$,所以$BG=ED$,所以$CG=CE$,所以$\angle CEG=\angle CGE=45°$.因为$AB/\!/CD$,所以$\angle AED=\angle BAE=\alpha$,所以$\angle AEG=180°-\angle AED-\angle CEG=180°-\alpha-45°=135°-\alpha$.

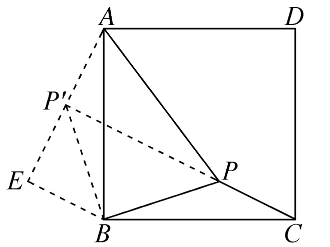
5. 3　**提示**:如图,过点M作$MH\perp CD$于点H.连接DE.根据题意,可知MN垂直平分DE.易证$\angle EDC=\angle NMH$,$MH=AD=CD$,$\angle MHN=\angle C=90°$,所以$\triangle MHN\cong\triangle DCE$(ASA),所以$DE=MN=4\sqrt{5}$.在Rt$\triangle DEC$中,$CE=\sqrt{DE^2-DC^2}=\sqrt{(4\sqrt{5})^2-8^2}=4$.设$DN=EN=x$,则$CN=8-x$.在Rt$\triangle ENC$中,$EN^2=CN^2+CE^2$,所以$x^2=(8-x)^2+4^2$,解得$x=5$,

所以 $CN=8-x=3$.



6. (1) 150　150　$\sqrt{7}$

(2) **解**:如图,将$\triangle BPC$绕点 B 逆时针旋转 90°,得$\triangle BP'A$,则$\triangle BPC\cong\triangle BP'A$,所以 $AP'=PC=1$,$BP'=PB=\sqrt{2}$. 连接 PP'. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BP'P$ 中,因为 $PB=BP'=\sqrt{2}$,$\angle PBP'=90^\circ$,所以 $PP'=2$,$\angle BP'P=45^\circ$. 在$\triangle AP'P$ 中,$AP'=1$,$PP'=2$,$PA=\sqrt{5}$,因为 $1^2+2^2=(\sqrt{5})^2$,即 $AP'^2+PP'^2=PA^2$,所以$\triangle AP'P$ 是直角三角形,即$\angle AP'P=90^\circ$,所以$\angle AP'B=135^\circ$,所以$\angle BPC=\angle AP'B=135^\circ$. 过点 B 作 $BE\perp AP'$,交 AP'的延长线于点 E,则$\triangle BEP'$是等腰直角三角形. 又因为 $BP'=\sqrt{2}$,所以 $EP'=BE=1$,所以 $AE=2$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中,因为 $BE=1$,$AE=2$,所以由勾股定理,得 $AB=\sqrt{5}$. 综上所述,$\angle BPC=135^\circ$,正方形 $ABCD$ 的边长为$\sqrt{5}$.



7. 解:(1) $=$

(2) 相等. 证明如下:

如图 1,过点 A 作 $AN/\!/GE$,交 BF 于点 H,交 BC 于点 N,所以$\angle NHB=\angle EMB=90^\circ$,所以$\angle FBC+\angle ANB=90^\circ$. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以 $AD/\!/BC$,$AB=BC$,$\angle ABN=\angle C=90^\circ$. 因为 $AN/\!/GE$,所以四边形 $ANEG$ 是平行四边形,所以 $AN=GE$. 因为$\angle C=90^\circ$,所以$\angle FBC+\angle BFC=90^\circ$,所以$\angle ANB=\angle BFC$,所以$\triangle ABN\cong\triangle BCF$(AAS),所以 $AN=BF$. 因为 $AN=GE$,所以 $GE=BF$.

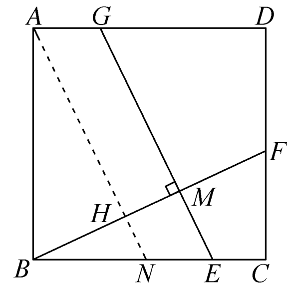


图 1

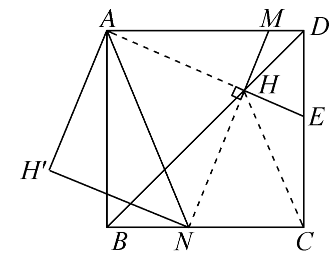


图 2

(3) ①是. 理由如下:

如图 2,连接 CH. 由(2),可知 $AE=MN$. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以$\angle ABD=\angle CBD=45^\circ$,$AB=CB$. 因为 $BH=BH$,所以$\triangle ABH\cong\triangle CBH$(SAS),所以$\angle BAH=\angle BCH$,$AH=CH$. 由折叠可知,$AH=AH'$,$NH=NH'$. 因为$\angle ABN+\angle AHN=180^\circ$,所以$\angle BAH+\angle BNH=180^\circ$. 因为$\angle BNH+\angle HNC=180^\circ$,所以$\angle BAH=\angle HNC$,所以$\angle HNC=\angle NCH$,所以 $NH=CH$,所以 $NH=CH=AH=AH'=NH'$,所以四边形 $AHNH'$是菱形. 因为$\angle AHN=90^\circ$,所以菱形 $AHNH'$是正方形.

②$2\sqrt{17}$　**提示**:如图 3,过点 H' 作 $H'Q\perp BC$ 交 CB 的延长线于点 Q,过点 H 作 $HF\perp BC$ 于点 F,所以$\angle H'QN=\angle NFH=90^\circ$. 由①,知四边形 $AHNH'$是正方形,所以 $H'N=NH$,$\angle H'NH=90^\circ$,$AH'=\frac{\sqrt{2}}{2}AN$,所以$\angle H'NQ+\angle HNF=\angle HNF+\angle NHF=90^\circ$,所以$\angle H'NQ=\angle NHF$,所以$\triangle H'QN\cong\triangle NFH$(AAS),所以 $H'Q=NF$,$QN=FH$. 因为$\angle HBF=45^\circ$,$\angle HFB=90^\circ$,所以$\triangle BHF$ 是等腰直角三角形,所以 $HF=BF=NF+BN$. 因为 $QN=QB+BN$,所以 $NF=QB=$

QH'，所以$\angle H'BQ=\angle ABH'=45°$，所以$\angle H'BD=90°$. 作点$P$关于$BH'$的对称点$P'$，则$PH'=P'H'$，过点$P'$作$PK\perp AB$交$AB$延长线于点$K$，则$\triangle P'BK$是等腰直角三角形，所以$PH'+\frac{\sqrt{2}}{2}AN=PH'+AH'=P'H'+AH'\geqslant AP'$，即当$A, H', P'$三点共线时，$PH'+\frac{\sqrt{2}}{2}AN$的值最小，最小值为$AP'$的长. 因为$AB=6$，所以$BD=6\sqrt{2}$. 因为$BD=3BP$，所以$BP=BP'=2\sqrt{2}$，所以$P'K=BK=2$，所以$AK=8$，所以$AP'=\sqrt{2^2+8^2}=2\sqrt{17}$，即$PH'+\frac{\sqrt{2}}{2}AN$的最小值为$2\sqrt{17}$.

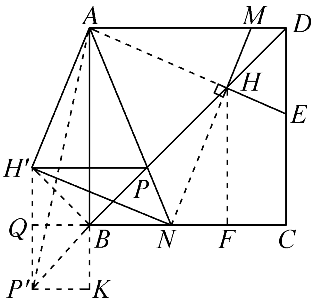


图 3

8. (1) ①5

②$a^2+b^2=c^2$

(2) $a^2+ab+b^2=c^2$ **提示**：如图 1，将$\triangle ADB$绕点A逆时针旋转$60°$，得到$\triangle AFC$，所以$CF=BD=a$. 易证$\angle ECF=120°$，$\triangle ADE\cong\triangle AFE$，所以$EF=DE=c$. 过点$F$作$FG\perp BC$，交$BC$的延长线于点$G$，所以$\angle FCG=180°-\angle ECF=60°$，所以$CG=\frac{1}{2}CF=\frac{1}{2}a$，$FG=\frac{\sqrt{3}}{2}CF=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. 因为$FG^2+EG^2=EF^2$，所以$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(b+\frac{1}{2}a\right)^2=c^2$，所以$a^2+ab+b^2=c^2$.

(3) ①$\sqrt{13}$ **提示**：如图 2，将$\triangle ADB$绕点A逆时针旋转$120°$，得到$\triangle AFC$，连接EF，易证$\angle ECF=60°$，$\triangle ADE\cong\triangle AFE$，$DE=EF$，$CF=BD=3$. 过点$F$作$FW\perp BC$于点$W$，可得$CW=\frac{1}{2}CF=\frac{3}{2}$，$FW=\frac{\sqrt{3}}{2}CF=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，所以$EW=CE-CW=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$，所以$DE=EF=\sqrt{FW^2+EW^2}=\sqrt{13}$.

②$a^2-ab+b^2=c^2$ **提示**：由①，得$FW^2+EW^2=DE^2$，即$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(b-\frac{a}{2}\right)^2=c^2$，所以$a^2-ab+b^2=c^2$.

(4) 如图 3，过点G作$GH\perp CE$于点H，$GQ\perp CF$于点Q，过点F作$FW\perp CE$于点W. 易得CG平分$\angle ECF$，所以$GH=GQ$. 因为$S_{\triangle CEG}+S_{\triangle CFG}=S_{\triangle CEF}$，所以$\frac{1}{2}CE\cdot GH+\frac{1}{2}CF\cdot GQ=\frac{1}{2}CE\cdot FW$，所以$4GH+3GH=4\times\frac{3\sqrt{3}}{2}$，所以$GH=\frac{6\sqrt{3}}{7}$，又因为$\angle ACB=30°$，所以$CG=2GH=\frac{12\sqrt{3}}{7}$.

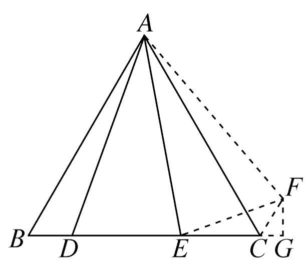


图 1

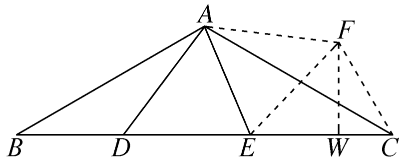


图 2

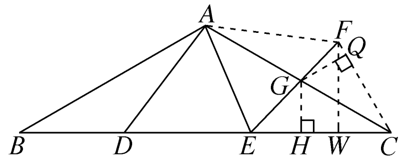


图 3

巅峰专题 3　因式分解在分式与根式中的应用

1. D　**2.** C

3. C　**提示**:因为$\sqrt{x}(\sqrt{x}+2\sqrt{y})=\sqrt{y}(6\sqrt{x}+5\sqrt{y})$,所以$x-4\sqrt{xy}-5y=0$,所以$(\sqrt{x}-5\sqrt{y})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y})=0$.因为$x>0,y>0$,所以$\sqrt{x}+\sqrt{y}\neq 0$,所以$\sqrt{x}-5\sqrt{y}=0$,即$x=25y$,所以原式$=\frac{25y+\sqrt{25y^2}-y}{50y+\sqrt{25y^2}+3y}=\frac{25y+5y-y}{50y+5y+3y}=\frac{29y}{58y}=\frac{1}{2}$.

4. $-\frac{7}{10}$　**提示**:因为$a+b+c=2$,所以$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=4$.因为$a^2+b^2+c^2=16$,所以$ab+bc+ac=-6$.因为$a+b+c=2$,所以$c=2-a-b$,所以$3c+3=9-3a-3b$,所以$ab+3c+3=ab+9-3a-3b=(ab-3a)-(3b-9)=a(b-3)-3(b-3)=(a-3)(b-3)$.同理可得$bc+3a+3=(b-3)(c-3)$,$ca+3b+3=(c-3)(a-3)$,所以$\frac{1}{ab+3c+3}+\frac{1}{bc+3a+3}+\frac{1}{ca+3b+3}=\frac{1}{(a-3)(b-3)}+\frac{1}{(b-3)(c-3)}+\frac{1}{(c-3)(a-3)}=\frac{c-3+a-3+b-3}{(a-3)(b-3)(c-3)}=\frac{c+a+b-9}{(ab-3a-3b+9)(c-3)}=\frac{2-9}{abc-3ab-3ac+9a-3bc+9b+9c-27}=\frac{-7}{abc-3(ab+ac+bc)+9(a+b+c)-27}=\frac{-7}{1+18+18-27}=-\frac{7}{10}$.

5. 4　**提示**:因为$\sqrt{12-x}-\sqrt{4-x}=2$,令$\sqrt{12-x}=a$,$\sqrt{4-x}=b$,所以$12-x=a^2$,$4-x=b^2$,所以$a^2-b^2=8$,所以$(a+b)(a-b)=8$,所以$a+b=4$,即$\sqrt{12-x}+\sqrt{4-x}=4$.

6. $-\frac{1}{401}$　**提示**:因为$m+4\sqrt{mn}-2\sqrt{m}-4\sqrt{n}+4n=3$,所以$(\sqrt{m}+2\sqrt{n})^2-2(\sqrt{m}+2\sqrt{n})-3=0$,所以$(\sqrt{m}+2\sqrt{n}-3)\cdot(\sqrt{m}+2\sqrt{n}+1)=0$,$\sqrt{m}+2\sqrt{n}=3$或$\sqrt{m}+2\sqrt{n}=-1$,而$\sqrt{m}+2\sqrt{n}\geqslant 0$,所以$\sqrt{m}+2\sqrt{n}=3$,所以$\frac{\sqrt{m}+2\sqrt{n}-8}{\sqrt{m}+2\sqrt{n}+2\,002}=\frac{3-8}{3+2\,002}=-\frac{1}{401}$.

7. $2\sqrt{6}+2\sqrt{2}$　**提示**:因为$AD=CD=4$,所以$\angle CAD=\angle C=15°$,所以$\angle ADB=\angle C+\angle CAD=30°$.在$Rt\triangle ABD$中,因为$\angle B=90°$,所以$AB=\frac{1}{2}AD=2$,$BD=\sqrt{3}AB=2\sqrt{3}$,所以$BC=CD+BD=4+2\sqrt{3}$,所以$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{2^2+(4+2\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+16+16\sqrt{3}+12}=\sqrt{32+16\sqrt{3}}=\sqrt{(2\sqrt{6}+2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{6}+2\sqrt{2}$.

8. $a>b$　$c>d$　**提示**:因为$2a-2b=2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$,$x,y,z$是三个互不相等的非零实数,所以$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2>0$,所以$a>b$.因为$2c-2d=\frac{2}{x^2}+\frac{2}{y^2}+\frac{2}{z^2}-\frac{2}{xy}-\frac{2}{yz}-\frac{2}{zx}=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2+\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x}\right)^2$,$x,y,z$是三个互不相等的非零实数,所以$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2+\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x}\right)^2>0$,所以$c>d$.

9. 解:(1) 因为$a+b=-1$,$ab=3$,所以$\frac{3}{a}+\frac{3}{b}=\frac{3(a+b)}{ab}=\frac{3\times(-1)}{3}=-1$.

(2) 因为$ab=1$,所以$\frac{1}{1-a^2}-\frac{1}{b^2-1}=\frac{ab}{ab-a^2}-\frac{ab}{b^2-ab}=\frac{ab}{a(b-a)}-\frac{ab}{b(b-a)}=\frac{b}{b-a}-\frac{a}{b-a}=1$.

10. (1) ①$\sqrt{5}+\sqrt{6}$　②$\sqrt{7}-\sqrt{6}$

提示:①$\sqrt{11+2\sqrt{30}}=\sqrt{5+2\sqrt{30}+6}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2\sqrt{5}\times\sqrt{6}+(\sqrt{6})^2}=\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{6})^2}=\sqrt{5}+\sqrt{6}$.

②$\sqrt{13-2\sqrt{42}}=\sqrt{7-2\times\sqrt{7}\times\sqrt{6}+6}=\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{6})^2}=\sqrt{7}-\sqrt{6}$.

(2) **解**:因为$(m+\sqrt{5}n)^2=m^2+5n^2+2\sqrt{5}mn=a+6\sqrt{5}$,所以$\begin{cases}m^2+5n^2=a,\\mn=3.\end{cases}$因为$m$,

n,a 均为正整数. 所以$\begin{cases}m=1,\\n=3\end{cases}$或$\begin{cases}m=3,\\n=1,\end{cases}$所以 $a=1+45=46$ 或 $a=9+5=14$. 所以 $a=46$ 或 $a=14$.

11. (1) ①不等式的基本性质 1 ②平方差公式.

(2) **证明**:因为 $a+b>c$,所以$(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2>c$,所以$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>c+2\sqrt{ab}$. 因为 $2\sqrt{ab}>0$,所以$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>c$,所以$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2>0$,所以$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})>0$. 因为$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}>0$,所以$\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}>0$. 所以$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}$.

12. (1) $>$ $>$ $=$

(2) 由(1),可得 $m+n\geqslant 2\sqrt{mn}$. 理由如下:因为 $m\geqslant 0,n\geqslant 0$,所以 $m=(\sqrt{m})^2,n=(\sqrt{n})^2$,所以 $m+n-2\sqrt{mn}=(\sqrt{m})^2+(\sqrt{n})^2-2\sqrt{mn}=(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2\geqslant 0$,所以 $m+n\geqslant 2\sqrt{mn}$.

(3) 40 m **提示**:设长方形花圃的与墙平行的边长为 $x(x>0)$m,垂直于墙的边为 $y(y>0)$m,由题意,得篱笆长为$(x+2y)$m,$xy=200$. 由(2),可得 $x+2y\geqslant 2\sqrt{x\cdot 2y}$. 因为 $2\sqrt{x\cdot 2y}=2\sqrt{400}=40$,所以 $x+2y\geqslant 40$,所以所用的篱笆至少需要 40 m.

13. 解:(1) 因为 $M-N=\frac{3x+2}{x+2}-\frac{x-2}{x+2}=\frac{3x+2-x+2}{x+2}=\frac{2x+4}{x+2}=\frac{2(x+2)}{x+2}=2$,所以 M,N 是"兄弟分式",所以 M 对 N 的"信度值" $k=2$.

(2) 由题意,可分两种情况:①若$\frac{2x^2}{x^2-4y^2}-\frac{x}{x+2y}=3$,则$\frac{2x^2}{(x+2y)(x-2y)}-\frac{x(x-2y)}{(x+2y)(x-2y)}=3$,所以 $2x^2-x(x-2y)=3(x+2y)(x-2y)$,所以 $2x^2-x^2+2xy=3x^2-12y^2$,移项、合并同类项,得 $x^2-xy-6y^2=0$,所以$(x+2y)(x-3y)=0$. 因为 $x+2y\neq 0$,所以 $x-3y=0$,所以 $x=3y$,所以 $\frac{2x-y}{x+2y}=\frac{2\times 3y-y}{3y+2y}=\frac{5y}{5y}=1$.

②若$\frac{x}{x+2y}-\frac{2x^2}{x^2-4y^2}=3$,则$\frac{x}{x+2y}-\frac{2x^2}{(x+2y)(x-2y)}=3$,所以 $x(x-2y)-2x^2=3(x^2-4y^2)$,所以 $x^2-2xy-2x^2=3x^2-12y^2$,移项、合并同类项,得 $2x^2+xy-6y^2=0$,所以$(x+2y)(2x-3y)=0$. 因为 $x+2y\neq 0$,所以 $2x-3y=0$,所以 $x=\frac{3}{2}y$,所以

$$\frac{2x-y}{x+2y}=\frac{2\times\frac{3}{2}y-y}{\frac{3}{2}y+2y}=\frac{2y}{\frac{7}{2}y}=\frac{4}{7}.$$

综上所述,$\frac{2x-y}{x+2y}$的值为 1 或$\frac{4}{7}$.

(3) ①由题意,得$\frac{P}{x^2-4}-\frac{2x}{x-2}=-2$,所以$\frac{P}{x^2-4}-\frac{2x(x+2)}{x^2-4}=-2$,所以 $P-2x(x+2)=-2(x^2-4)$. 去括号,得 $P-2x^2-4x=-2x^2+8$,移项、合并同类项,得 $P=4x+8$.

②由①,得 $P=4x+8$,所以 $M=\frac{4x+8}{x^2-4}=\frac{4(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{4}{x-2}$. 因为 M 的值为正整数,x 为正整数,所以 $x-2=1$ 或 $x-2=2$ 或 $x-2=4$,所以 $x=3$ 或 $x=4$ 或 $x=6$.

期末压轴 1

2025 年南京市玄武区期末压轴题

1. D **提示**:连接 AC,BD. 因为线段 AB,BC,

CD，DA 的中点分别为 M，N，P，Q，所以 $PQ /\!/ AC$，$PQ=\frac{1}{2}AC$，$MN /\!/ AC$，$MN=\frac{1}{2}AC$，$PN /\!/ BD$，$PN=\frac{1}{2}BD$，$QM /\!/ BD$，$QM=\frac{1}{2}BD$.

①当 $AC /\!/ BD$ 时，如图 1，因为 $PQ /\!/ AC$，所以 $PQ /\!/ BD$. 因为 $PN /\!/ BD$，$QM /\!/ BD$，所以 M，N，P，Q 四点共线，即四边形 $MNPQ$ 不存在. ②当 AC 与 BD 不平行时，如图 2、图 3，分两种情况，点 B，D 位于 AC 异侧或点 B，D 位于 AC 同侧. 易知 $PQ /\!/ MN$，$PQ=MN$，$QM /\!/ PN$，$QM=PN$. 所以中点四边形 $MNPQ$ 是平行四边形，且其位置随着点 D 位置的变化而变化，故存在无数个中点四边形 $MNPQ$ 是平行四边形. ③如图 4，当 $AC=BD$ 且 AC 与 BD 不平行时，$PQ=QM$，所以平行四边形 $MNPQ$ 是菱形，且同样存在无数个中点四边形 $MNPQ$ 是菱形. ④如图 5，当 $AC\perp BD$（点 B，D 不重合）时，因为 $PQ /\!/ MN /\!/ AC$，$QM /\!/ PN /\!/ BD$，$AC\perp BD$，所以 $PQ\perp PN$，所以平行四边形 $MNPQ$ 是矩形，且同样存在无数个中点四边形 $MNPQ$ 是矩形. ⑤如图 6，当 $AC\perp BD$，且 $AC=BD$ 时，$PQ\perp PN$，且 $PQ=PN$，所以平行四边形 $MNPQ$ 是正方形. 当点 B，D 位于 AC 异侧或点 B，D 位于 AC 同侧时，均存在一个中点四边形 $MNPQ$ 是正方形. 故存在两个中点四边形 $MNPQ$ 是正方形. 综上所述，正确的有①②③④.

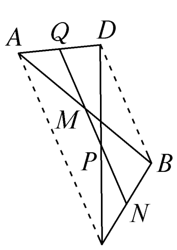


图 1

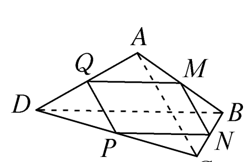


图 2

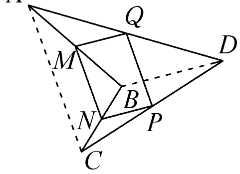


图 3

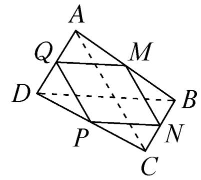


图 4

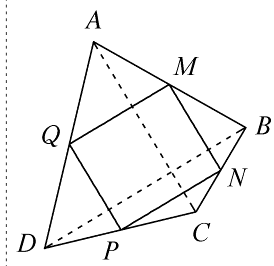


图 5

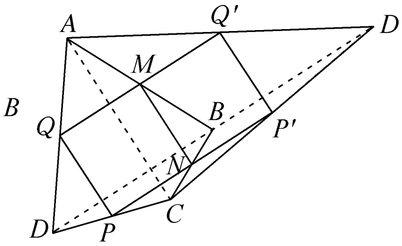
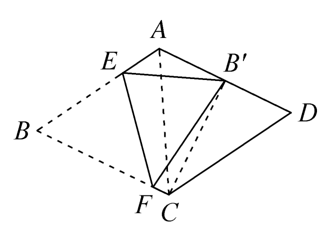


图 6

2. $\frac{1}{4}$　**提示**：如图，连接 AC，CB'. 因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $AB=BC=CD=AD=2$ cm，$\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BAD=60°$，所以 $\triangle ADC$ 是等边三角形. 又因为 B' 是边 AD 的中点，所以 $CB'\perp AD$，且 $AB'=DB'=1$ cm，所以 $CB'=\sqrt{CD^2-DB'^2}=\sqrt{3}$(cm). 因为 $AD /\!/ BC$，所以 $CB'\perp BC$. 设 $BF=x$ cm，则 $CF=(2-x)$cm. 由翻折的性质，得 $B'F=BF=x$ cm. 在 $\mathrm{Rt}\triangle CB'F$ 中，由勾股定理，得 $B'F^2=CF^2+CB'^2$，即 $x^2=(2-x)^2+(\sqrt{3})^2$，解得 $x=\frac{7}{4}$. 所以 $CF=2-x=2-\frac{7}{4}=\frac{1}{4}$(cm).



3.（1）①**证明**：因为 AM 是边 BC 上的高，所以 $\angle AMB=\angle AMC=90°$. 由翻折的性质，得 $AE=AM=AD$，$\angle BAD=\angle BAM$，$\angle CAE=\angle CAM$，$\angle E=\angle AMC=90°$，$\angle D=\angle AMB=90°$. 因为 $\angle BAC=45°$，所以 $\angle DAE=\angle BAD+\angle BAM+\angle CAM+\angle CAE=90°$，所以四边形 $ADFE$ 是矩形，又因为 $AE=AD$，所以四边形 $ADFE$ 是正方形.

②12　**提示**：由①可知，$DF=EF=AD=AM=6$. 由翻折的性质，得 $BM=BD$，$CM=CE$，所以 $\triangle BCF$ 的周长为 $BC+BF+CF=BM+CM+BF+CF=BD+BF+CE+CF=DF+EF=12$.

（2）**解**：①**解法 1**　如图 1，延长 CD 至点 B'，使 $DB'=PB$，连接 AB'，AP，作 $\angle PAB'$ 的平分线 AQ 交 CD 于点 Q，作直线 PQ，则直线 PQ 就是所求作的直线 l. 理由：因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $AB=AD$，$\angle B=\angle ADC=\angle C=90^{\circ}=\angle ADB'$，所以 $\triangle PCQ$ 是直角三角形. 又因为 $PB=B'D$，所以 $\triangle ABP\cong\triangle ADB'$（SAS），所以 $AB'=AP$. 因为 $\angle PAQ=\angle B'AQ$，$AQ=AQ$，所以 $\triangle PAQ\cong\triangle B'AQ$（SAS），所以 $PQ=B'Q$，所以 $\triangle PCQ$ 的周长为 $CQ+CP+PQ=CQ+CP+B'Q=CQ+CP+DQ+DB'=CQ+DQ+CP+PB=CD+BC$，即 $\mathrm{Rt}\triangle PCQ$ 的周长等于正方形 $ABCD$ 周长的一半.

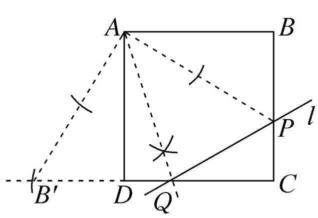


图 1

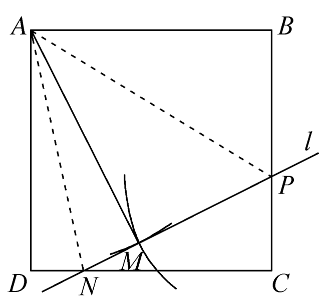


图 2

解法 2　如图 2，以点 A 为圆心，AB 长为半径作弧，再以点 P 为圆心，PB 长为半径作弧，两弧交于点 M，作直线 PM，则直线 PM 就是所求作的直线 l. 理由：设直线 PM 交边 CD 于点 N. 因为 $AB=AM$，$PB=PM$，$AP=AP$，所以 $\triangle ABP\cong\triangle AMP$（SSS），所以 $\angle AMP=\angle B=90^{\circ}$，所以 $\angle AMN=180^{\circ}-\angle AMP=90^{\circ}=\angle D$. 因为 $AD=AB=AM$，$AN=AN$，所以 $\mathrm{Rt}\triangle ADN\cong\mathrm{Rt}\triangle AMN$（HL），所以 $MN=DN$. 所以 $\triangle PCN$ 的周长为 $CN+CP+PN=CN+CP+PM+MN=CN+CP+PB+DN=CD+BC$，即 $\mathrm{Rt}\triangle PCN$ 的周长等于正方形 $ABCD$ 周长的一半.

②如图 3，连接 AP，作线段 AP 的垂直平分线交 AP 于点 O；以点 O 为圆心，AP 长为直径作 $\odot O$；以点 A 为圆心，AB 长为半径作弧，交 $\odot O$ 于点 G；作直线 PG，则直线 PG 就是所求作的直线 l. 理由：设直线 PG 交边 BC 于点 E，交边 CD 于点 F，连接 AE，AF. 因为 AP 为 $\odot O$ 的直径，连接 OG，则 $OA=OP=OG$，所以 $\angle OAG=\angle OGA$，$\angle OPG=\angle OGP$. 由 $\triangle APG$ 的内角和，得 $\angle OAG+\angle OPG+(\angle OGA+\angle OGP)=180^{\circ}$，所以 $\angle AGP=90^{\circ}=\angle B$. 因为 $AB=AG$，$AE=AE$，所以 $\mathrm{Rt}\triangle ABE\cong\mathrm{Rt}\triangle AGE$（HL），所以 $BE=GE$. 同理可证 $\mathrm{Rt}\triangle ADF\cong\mathrm{Rt}\triangle AGF$（HL），所以 $DF=GF$. 所以 $\triangle CEF$ 的周长为 $CE+CF+EF=CE+CF+GE+GF=CE+CF+BE+DF=CD+BC$，即 $\mathrm{Rt}\triangle CEF$ 的周长等于正方形 $ABCD$ 周长的一半.

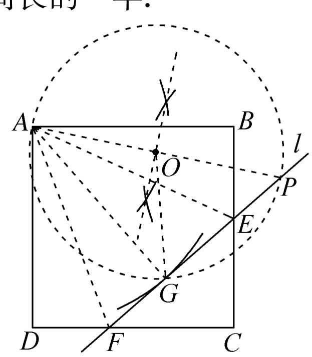


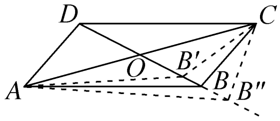
图 3

期末压轴 2

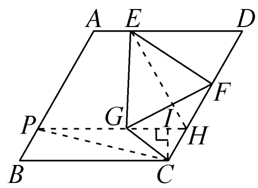
2025 年南京市秦淮区期末压轴题

1. D　**提示**：由平行四边形的定义及判定定理可知，①②，①③，②④，③④，⑤⑥均能判断四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 若①$AB/\!/CD$，则 $\angle BCD+\angle ABC=180^{\circ}$. 若⑦$\angle BAD=\angle BCD$，则 $\angle BAD+\angle ABC=180^{\circ}$，所以 $BC/\!/AD$，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形，即①⑦能判断四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 同理，①⑧，②⑦，②⑧也能判断四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 由四边形的内角和，得 $\angle BAD+\angle ABC+\angle BCD+$

$\angle ADC=360°$. 若⑦$\angle BAD=\angle BCD$,⑧$\angle ABC=\angle ADC$,则$\angle BAD+\angle ABC=180°$,$\angle BCD+\angle ABC=180°$,所以$BC/\!/AD$,$AB/\!/CD$,所以四边形$ABCD$是平行四边形,即⑦⑧能判断四边形$ABCD$是平行四边形. 若①$AB/\!/CD$,则$\angle OBA=\angle ODC$,$\angle OAB=\angle OCD$. 若⑤$OA=OC$,则$\triangle ABO\cong\triangle CDO$(AAS),所以$AB=CD$,所以四边形$ABCD$是平行四边形,即①⑤能判断四边形$ABCD$是平行四边形. 同理,①⑥,②⑤,②⑥也能判断四边形$ABCD$是平行四边形. 若⑤$OA=OC$,⑧$\angle ABC=\angle ADC$,在射线OB上截取$OB'=OD$,连接AB',CB',则四边形$AB'CD$为平行四边形,所以$\angle AB'C=\angle ADC$,所以$\angle ABC=\angle AB'C$,则有点B'与点B重合,理由:如图,假设两点不重合,则由三角形外角的性质,得$\angle AB'O>\angle ABO>\angle AB''O$,$\angle CB'O>\angle CBO>\angle CB''O$,所以$\angle AB'O+\angle CB'O>\angle ABO+\angle CBO>\angle AB''O+\angle CB''O$,即$\angle AB'C>\angle ABC>\angle AB''C$,此时$\angle ADC>\angle ABC$或$\angle ABC>\angle ADC$,这与条件$\angle ABC=\angle ADC$矛盾,所以点$B'$只能与点$B$重合,故$OB=OD$,所以四边形$ABCD$是平行四边形,即⑤⑧能判断四边形$ABCD$是平行四边形. 同理,由⑥⑦也能判断四边形$ABCD$是平行四边形. 综上所述,可以得出"四边形$ABCD$是平行四边形"这一结论的情况有16种.



2. $\sqrt{3}\leqslant d\leqslant 2\sqrt{21}$　**提示**:如图,在边CD上截取$DH=DE$,连接HG,并延长交AB于点P,连接EH. 因为四边形$ABCD$是菱形,$AB=10$,$\angle B=60°$,所以$BC=CD=AD=AB=10$,$\angle D=\angle B=60°$,所以$\triangle EDH$是等边三角形,所以$EH=DH=DE=AD-AE=8$,$\angle DEH=\angle DHE=60°$. 因为$\triangle EFG$是等边三角形,所以$EG=EF$,$\angle FEG=60°$,所以$\angle HEG=\angle DEF$. 在$\triangle HEG$和$\triangle DEF$中,$\begin{cases}EH=ED,\\ \angle HEG=\angle DEF,\\ EG=EF,\end{cases}$所以$\triangle HEG\cong\triangle DEF$(SAS),所以$\angle EHG=\angle D=60°$,$GH=FD$,所以$\angle PHC=180°-\angle EHG-\angle DHE=60°=\angle D$,所以$PH/\!/AD/\!/BC$,又因为$PB/\!/CH$,所以四边形$PBCH$是平行四边形,所以$PH=BC=CD=10$. 当点$F$与点$D$重合时,点$G$与点$H$重合;当点$F$与点$C$重合时,点$G$与点$P$重合. 所以点$G$的运动路径为线段$PH$. 连接$PC$,过点$C$作$CI\perp PH$于点$I$,则$\angle CIH=\angle CIP=90°$. 在Rt$\triangle CIH$中,$CH=CD-DH=2$,$\angle CHI=60°$,所以$\angle HCI=30°$,所以$HI=\frac{1}{2}CH=1$,所以$PI=PH-HI=9$. 由勾股定理,得$CI=\sqrt{CH^2-HI^2}=\sqrt{3}$,$PC=\sqrt{PI^2+CI^2}=\sqrt{81+3}=2\sqrt{21}$. 因为$CI\leqslant CG\leqslant CP$,所以$CG$的长度$d$的取值范围是$\sqrt{3}\leqslant d\leqslant 2\sqrt{21}$.



3. 解:(1) $3\sqrt{2}$　**提示**:由A,B,C,D四点的坐标可知,O为▱$ABCD$对角线的交点,所以点O到BC,AD的距离相等,且均为6,点O到AB,CD的距离相等. 记AB与y轴的交点为M,因为$AD=12=BD$,所以$\angle ABD=\angle BMO=45°$,所以$OM=OB=6$. 在Rt$\triangle OBM$中,由勾股定理,得$BM=\sqrt{OB^2+OM^2}=6\sqrt{2}$. 设点$O$到边$AB$的距离为$h$,则$S_{\triangle BOM}=\frac{1}{2}OB\cdot OM=\frac{1}{2}BM\cdot h$,所以$\frac{1}{2}\times 6\times 6=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{2}h$,解得$h=3\sqrt{2}$. 因为$3\sqrt{2}<6$,所以$d$(点$O$,▱$ABCD$)的值为$3\sqrt{2}$.

(2) 如图1. 若点P在x轴正半轴上且位于点D的左侧,则点Q位于边CD上时,点P,Q间距离最短. 过点P_1作$P_1Q_1\perp CD$于点Q_1. 因为d(点P,▱$ABCD$)$=2$,所以$P_1Q_1=2$. 因为$AB/\!/CD$,所以$\angle P_1DC=\angle ABD=45°$,所以$DQ_1=P_1Q_1=2$,在Rt$\triangle P_1DQ_1$中,由勾股定理,得$P_1D=\sqrt{DQ_1^2+P_1Q_1^2}=2\sqrt{2}$,

所以 $OP_1=OD-P_1D=6-2\sqrt{2}$，所以点 P_1 的坐标为$(6-2\sqrt{2},0)$. 若点 P 位于点 D 的右侧，则点 Q 位于点 D 处时，点 P,Q 间距离最短，即 $P_2D=2$. 所以 $OP_2=OD+P_2D=8$，所以点 P_2 的坐标为$(8,0)$. 综上所述，点 P 的坐标为$(6-2\sqrt{2},0)$或$(8,0)$.

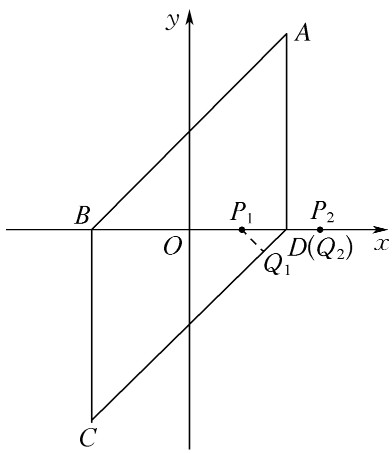


图 1

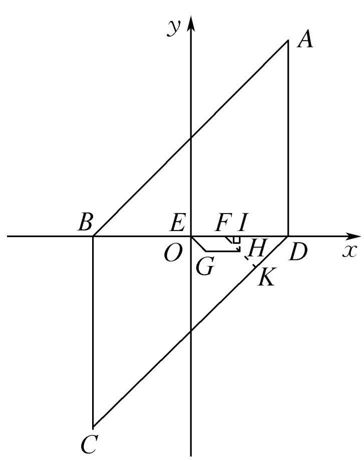


图 2

(3) ①$d(W,\square ABCD)$的值为$\sqrt{2}$.

提示：因为 $a=0$，所以点 $E(0,0)$，$F(2,0)$，$G(1,-1)$，$H(3,-1)$. 如图 2，$\square EFHG$ 即为图形 W. 观察图形发现，图形 W 上的点 H 到边 CD 的距离即为 $d(W,\square ABCD)$的值. 延长 FH，交 CD 于点 K，过点 H 作 $HI\perp BD$ 于点 I，则 $EI=3$，$HI=1$，所以 $FI=EI-EF=1$，所以 $FI=HI$，所以$\triangle HIF$ 是等腰直角三角形，所以 $FH=\sqrt{FI^2+HI^2}=\sqrt{2}$，且$\angle HFI=45°$. 又因为$\angle BDC=45°$，所以$\angle DKF=90°$，$DK=FK$. 在 Rt$\triangle DFK$ 中，$DF=DE-EF=4$. 由勾股定理，得 $DK^2+FK^2=DF^2$，即 $2FK^2=16$，所以 $FK=2\sqrt{2}$（负值已舍）. 所以 $HK=FK-FH=\sqrt{2}$，即 $d(W,\square ABCD)$的值为$\sqrt{2}$.

②$a\leqslant-5-\frac{\sqrt{2}}{2}$或 $a\geqslant 3+\frac{\sqrt{2}}{2}$或$-3+\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant a\leqslant 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **提示**：由点 $E(a,-a)$，$F(a+2,-a)$，$G(a+1,-a-1)$，$H(a+3,-a-1)$可知，点 E,G 在直线 $y=-x$ 上，点 F,H 在直线 $y=-x+2$ 上，易得四边形 $EFHG$ 为平行四边形且在平行线 EG 和 FH 间运动. 由点 $A(6,12)$，$B(-6,0)$，$C(-6,-12)$，$D(6,0)$可知，直线 AB 的函数表达式为 $y=x+6$，直线 CD 的函数表达式为 $y=x-6$. 易知 $AB\perp EG$，$AB\perp FH$，$CD\perp EG$，$CD\perp FH$.

分情况讨论：如图 3，当$\square EFHG$ 在$\square ABCD$ 外部左上方时，则点 H 到边 AB 的距离为“最近距离”. 过点 H 作 $HN/\!/AB$，交 y 轴于点 N，设直线 AB 与 y 轴的交点为 M，过点 M 作 $MI\perp HN$ 于点 I. 当 $d(W,\square ABCD)=1$，即 $HQ_1=1$ 时，易知 $MI=1$，$\triangle MNI$ 是等腰直角三角形，所以 $MN=\sqrt{MI^2+NI^2}=\sqrt{2}$，所以直线 HN 的函数表达式为 $y=x+6+\sqrt{2}$，联立，得$\begin{cases}y=-x+2,\\y=x+6+\sqrt{2},\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-2-\frac{\sqrt{2}}{2},\\y=4+\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$此时点 $H\left(-2-\frac{\sqrt{2}}{2},4+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，即 $a+3=-2-\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $a=-5-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 观察图形，发现当 $a\leqslant-5-\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$d(W,\square ABCD)\geqslant 1$. 如图 4，当$\square EFHG$ 在$\square ABCD$ 内部左上方时，则点 E 到边 AB 的距离为“最近距离”. 当 $d(W,\square ABCD)=1$，即 $EQ_2=1$ 时，同理，得直线 EN 的函数表达式为 $y=x+6-\sqrt{2}$，联立，得$\begin{cases}y=-x,\\y=x+6-\sqrt{2},\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-3+\frac{\sqrt{2}}{2},\\y=3-\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$此

时点 $E\left(-3+\frac{\sqrt{2}}{2},3-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，即 $a=-3+\frac{\sqrt{2}}{2}$. 如图 5，当▱$EFHG$ 在▱$ABCD$ 内部右下方时，则点 H 到边 CD 的距离为“最近距离”. 当 $d(W,▱ABCD)=1$，即 $HQ_3=1$ 时，同理，得直线 HN 的函数表达式为 $y=x-6+\sqrt{2}$，联立，得 $\begin{cases}y=-x+2,\\y=x-6+\sqrt{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=4-\frac{\sqrt{2}}{2},\\y=-2+\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$ 此时点 $H\left(4-\frac{\sqrt{2}}{2},-2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，即 $a+3=4-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 解得 $a=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 观察图形，发现当 $-3+\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant a\leqslant 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$d(W,▱ABCD)\geqslant 1$. 如图 6，当▱$EFHG$ 在▱$ABCD$ 外部右下方时，则点 E 到边 CD 的距离为“最近距离”. 当 $d(W,▱ABCD)=1$，即 $EQ_4=1$ 时，同理，得直线 EN 的函数表达式为 $y=x-6-\sqrt{2}$，联立，得 $\begin{cases}y=-x,\\y=x-6-\sqrt{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3+\frac{\sqrt{2}}{2},\\y=-3-\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$ 此时点 $E\left(3+\frac{\sqrt{2}}{2},-3-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，即 $a=3+\frac{\sqrt{2}}{2}$. 观察图形，发现当 $a\geqslant 3+\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$d(W,▱ABCD)\geqslant 1$. 综上所述，当 $a\leqslant -5-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $a\geqslant 3+\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $-3+\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant a\leqslant 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$d(W,▱ABCD)\geqslant 1$.

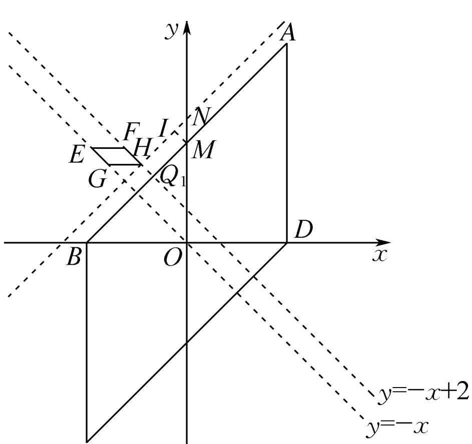


图 3

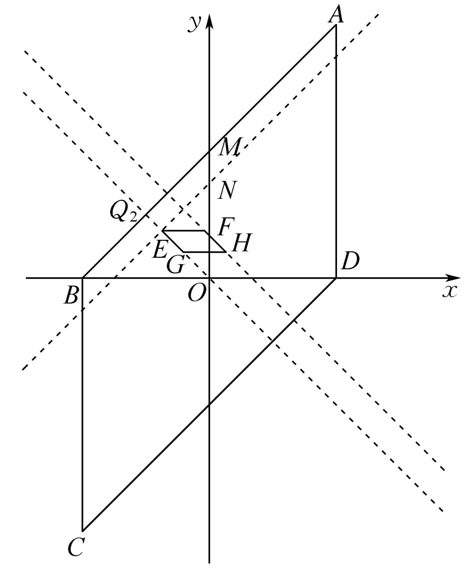


图 4

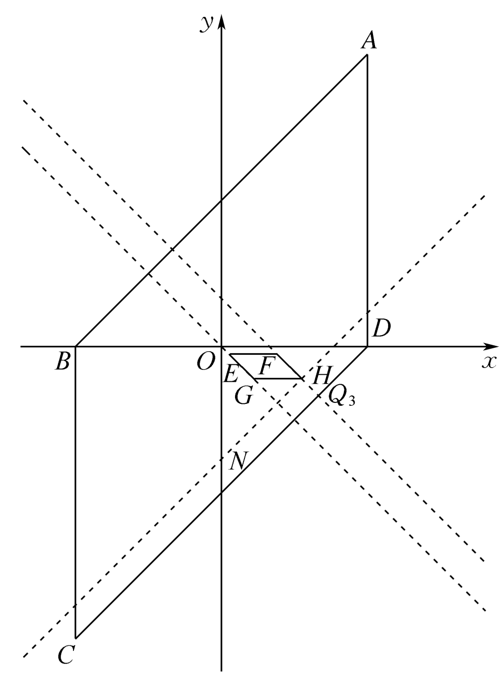


图 5

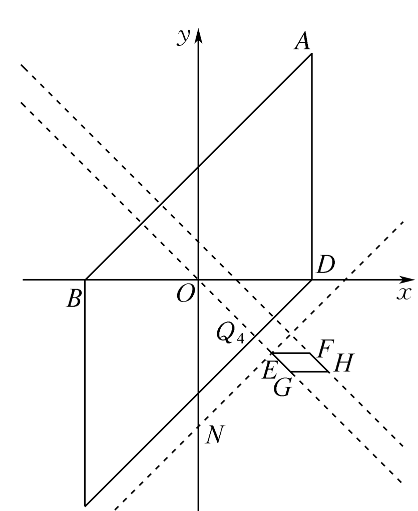
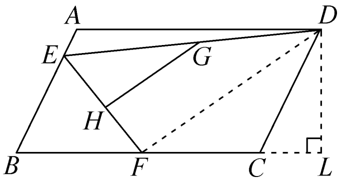


图 6

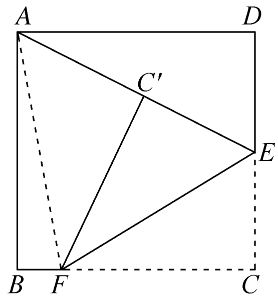
期末压轴 3

2025 年南京市联合体期末压轴题

1. C　**提示：**如图，连接 DF，过点 D 作 $DL\perp BC$，交 BC 的延长线于点 L，则 $\angle L=90°$. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$AB=2$，$AD=4$，$\angle A=120°$，所以 $BC=AD=4$，$CD=AB=2$，$\angle FCD=\angle A=120°$，所以 $\angle DCL=180°-\angle FCD=60°$，所以 $\angle CDL=90°-\angle DCL=30°$，所以 $CL=\frac{1}{2}CD=1$，所以 $DL=\sqrt{CD^2-CL^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$. 因为 F 是边 BC 的中点，所以 $CF=BF=\frac{1}{2}BC=2=CD$，所以 $\angle LFD=\angle CDF=\frac{1}{2}\times(180°-\angle FCD)=30°$，所以 $DL=\frac{1}{2}DF$. 因为 G，H 分别是 DE，EF 的中点，所以 $GH=\frac{1}{2}DF$，所以 $GH=DL=\sqrt{3}$.



2. $3-\sqrt{5}$　**提示：**连接 AE. 因为 $AC'+C'E\geqslant AE$，所以 $AC'\geqslant AE-C'E$. 当 A，C'，E 三点依次共线时，AC' 的长最小. 如图，连接 AF. 因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $\angle D=\angle B=\angle C=90°$，$AD=BC=AB=CD=4$. 因为 E 是边 CD 的中点，所以 $DE=CE=2$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中，由勾股定理，得 $AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=2\sqrt{5}$. 由翻折的性质，得 $C'E=CE=2$，$C'F=CF$，$\angle EC'F=\angle C=90°=\angle AC'F$，所以 $AC'=AE-C'E=2\sqrt{5}-2$. 设 $BF=x$，则 $C'F=CF=4-x$. 根据勾股定理，得 $AC'^2+C'F^2=AF^2=AB^2+BF^2$，即 $(2\sqrt{5}-2)^2+(4-x)^2=4^2+x^2$，解得 $x=3-\sqrt{5}$，所以 $BF=3-\sqrt{5}$.



3. (1) **证明：**因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $AB=BC=CD=AD$，$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$. 因为 $AE=BF$，所以 $AB-AE=BC-BF$，即 $BE=CF$，所以 $\triangle BEF\cong\triangle CFG$(SAS)，所以 $EF=FG$. 同理，得 $EF=FG=GH=EH$，所以四边形 $EFGH$ 是菱形. 因为 $\triangle BEF\cong\triangle CFG$，所以 $\angle BEF=\angle CFG$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BEF$ 中，$\angle BEF+\angle BFE=90°$，所以 $\angle BFE+\angle CFG=90°$，所以 $\angle EFG=90°$，所以菱形 $EFGH$ 是正方形，即四边形 $EFGH$ 是四边形 $ABCD$ 的内接正方形.

(2) **解：**(Ⅰ) 如图 1，连接 AC，BD 交于点 O；过点 O 作 $OK\perp AD$ 于点 K；以点 K 为圆心，OK 长为半径作圆，交直线 AD 于点 M，Q；过点 M 作 $MN\perp BC$ 于点 N，交边 AB 于点 E，过点 Q 作 $QP\perp BC$ 于点 P，交边 CD 于点 G，则四边形 $MNPQ$ 为正方形(通过 $\angle QMN=\angle MNP=\angle NPQ=\angle PQM=90°$，$MQ=2OK=MN$ 证明)，且 $ME=PG$［先通过 $\triangle OAM\cong\triangle OCP$(SAS)得到 $AM=CP$，再通过 $\triangle AME\cong\triangle CPG$(ASA)证得，或通过中心对称性证明］；以点 N 为圆心，ME 长为半径作弧，交边 BC 于点 F，以点 Q 为圆心，ME 长为半径作弧，交边 AD 于点 H，则 $ME=NF=PG=QH$；连接 EF，FG，GH，HE，同(1)可证，四边形 $EFGH$ 为正方形，故正方形 $EFGH$ 即为所求.

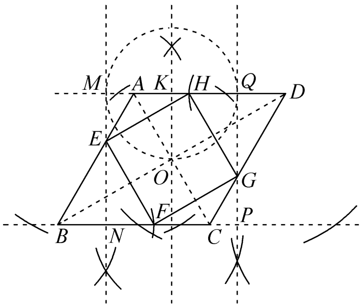


图 1

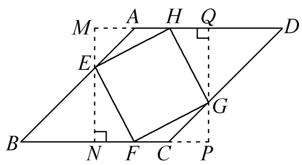


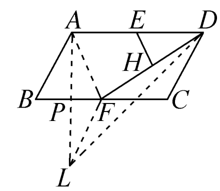
图 2

(Ⅱ) $\sqrt{26}$　**提示**:如图 2,过点 E 作 $MN\perp BC$ 于点 N,交 DA 的延长线于点 M,过点 G 作 $PQ\perp AD$ 于点 Q,交 BC 的延长线于点 P. 由四边形 $EFGH$ 为正方形,易证 $\triangle MEH\cong\triangle NFE\cong\triangle PGF\cong\triangle QHG$,所以 $ME=NF=PG=QH$,$NE=PF=QG=MH$. 所以 $MN=NP=PQ=QM$. 因为 $AD/\!/BC$,$AB/\!/CD$,所以 $\angle MAE=\angle B=\angle PCG=45°$. 在 $\text{Rt}\triangle BNE$ 和 $\text{Rt}\triangle AME$ 中,$AM=ME$,$BN=NE$,由勾股定理,得 $BE=\sqrt{2}\,NE$,$AE=\sqrt{2}\,ME$. 所以 $AB=AE+BE=\sqrt{2}(ME+NE)$,即 $6\sqrt{2}=\sqrt{2}(ME+NE)=\sqrt{2}\,MN$,所以 $MN=ME+NE=6$,所以 $BF=BN+NF=NE+ME=6$,所以 $CF=BC-BF=4$. 设 $ME=x$,则 $NF=PG=ME=x$,$PF=NE=6-x$. 在 $\text{Rt}\triangle PCG$ 中,$PC=PG=x$,所以 $PF=PC+CF=x+4$,所以 $6-x=x+4$,解得 $x=1$. 所以 $NE=5$,$NF=1$. 在 $\text{Rt}\triangle NEF$ 中,$EF=\sqrt{NE^2+NF^2}=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$.

期末压轴 4

2025 年苏州市期末压轴题

1. A　**提示**:如图,作点 A 关于直线 BC 的对称点 L,连接 AL 交 BC 于点 P,连接 AF,LF,DL. 由轴对称的性质可知,BC 垂直平分线段 AL,所以 $\angle APB=90°$,$LP=AP$,$LF=AF$. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,$AB=2$,$BC=4$,$\angle B=60°$,所以 $AD/\!/BC$,$AD=BC=4$,$\angle PAB=90°-\angle B=30°$,所以 $\angle DAL=\angle APB=90°$,$BP=\frac{1}{2}AB=1$,所以 $AP=\sqrt{AB^2-BP^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$,所以 $AL=2AP=2\sqrt{3}$,所以 $DL=\sqrt{AD^2+AL^2}=\sqrt{4^2+(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}$. 由两点间线段最短可知,$AF+DF=LF+DF\geqslant DL=2\sqrt{7}$(当 D,F,L 三点共线时,等号成立). 因为 H 是 DF 的中点,E 为边 AD 的中点,所以 $AF=2EH$,$DF=2HD$,所以 $2EH+2HD\geqslant 2\sqrt{7}$,所以 $EH+HD\geqslant\sqrt{7}$,所以 $EH+HD$ 的最小值为 $\sqrt{7}$.



2. 9　**提示:解法 1**　如图 1,延长 AE,DC 交于点 G. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $AB/\!/CD$,$AB=CD$,所以 $\angle BAE=\angle G$,$\angle B=\angle ECG$. 又因为 E 是边 BC 的中点,所以 $BE=CE$,所以 $\triangle ABE\cong\triangle GCE$,所以 $AE=GE$,$AB=GC$. 因为 F 是边 CD 的中点,所以 $CD=2CF$,所以 $GC=AB=CD=2CF$,所以 $GF=3CF$,又因为 $S_{\triangle CEF}=3$,所以 $S_{\triangle GEF}=3S_{\triangle CEF}=9$. 因为 $AE=GE$,所以 $S_{\triangle AEF}=S_{\triangle GEF}=9$.

解法 2　如图 2,连接 AC,DE. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $AD/\!/BC$,$AD=BC$. 设 AD 与 BC 之间的距离为 h,则 $S_{\triangle CDA}=\frac{1}{2}AD\cdot h=\frac{1}{2}BC\cdot h=S_{\triangle ABC}$. 因为 F 是边 CD 的中点,$S_{\triangle CEF}=3$,所以 $S_{\triangle DEF}=S_{\triangle CEF}=3$,所以 $S_{\triangle ACE}=S_{\triangle DCE}=2S_{\triangle CEF}=6$. 又因为 E 是边 BC 的中点,所以 $S_{\triangle ACF}=\frac{1}{2}S_{\triangle CDA}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACE}=6$,所以 $S_{\text{四边形}AECF}=S_{\triangle ACE}+S_{\triangle ACF}=6+6=12$,所以 $S_{\triangle AEF}=S_{\text{四边形}AECF}-S_{\triangle CEF}=12-3=9$.

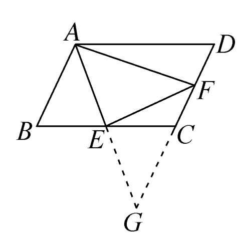


图 1

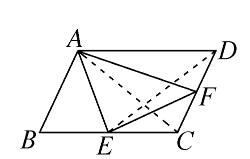


图 2

3. 解:(1) A　**提示**:正方形邻边均相等,任意两角都互补,故一定符合题意;平行四边形两个条件都不一定满足,故不符合题意;菱形不满足对角一定互补,

故不符合题意；矩形不满足邻边一定相等，故不符合题意.

(2) ①是. 理由如下：

如图1，过点 F 分别作 $FM\perp BC$ 于点 M，$FN\perp CD$ 于点 N，则 $\angle FMC=\angle FNC=\angle FND=90^\circ$. 因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 AC 平分 $\angle BCD$，$\angle BCD=90^\circ$，所以四边形 $CNFM$ 为矩形，又因为 $FM\perp BC$，$FN\perp CD$，所以 $FM=FN$，所以矩形 $CNFM$ 为正方形，所以 $\angle MFN=90^\circ$，所以 $\angle GFM+\angle NFG=90^\circ$. 因为 $DF\perp FG$，所以 $\angle DFN+\angle NFG=90^\circ$，所以 $\angle DFN=\angle GFM$，所以 $\triangle DFN\cong\triangle GFM$(ASA)，所以 $DF=GF$，又因为 $\angle DFG+\angle DCG=90^\circ+90^\circ=180^\circ$，所以四边形 $CDFG$ 是“奇妙四边形”.

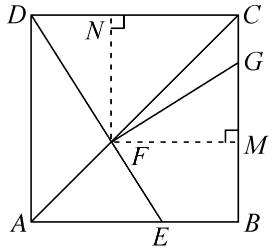


图1

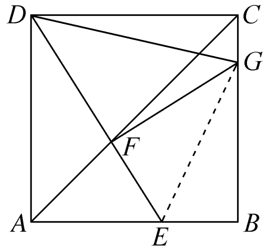


图2

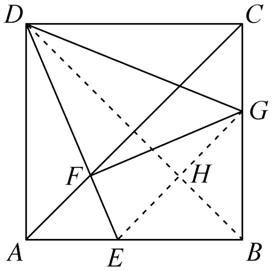


图3

②$\triangle DFG$ 的面积为 $24-12\sqrt{3}$ 或 $12-6\sqrt{2}$.

提示：因为 $FG\perp DE$，所以 $\angle GFE=90^\circ$，所以 $\angle GFE+\angle B=180^\circ$. 若四边形 $BGFE$ 是“奇妙四边形”，则需要邻边相等，分情况讨论：若 $EF=BE$，如图2，连接 EG. 因为 $EG=EG$，$EF=BE$，所以 $\triangle EFG\cong\triangle EBG$(HL)，所以 $FG=BG$. 由①可知，$DF=FG$，所以 $DF=FG=BG$. 设 $BG=x$，则 $CG=2\sqrt{3}-x$，$DF=FG=x$，所以 $DG=\sqrt{2}x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle CDG$ 中，$DG^2=CG^2+CD^2$，即 $(\sqrt{2}x)^2=(2\sqrt{3}-x)^2+(2\sqrt{3})^2$，整理，得 $x^2+4\sqrt{3}x-24=0$，配方，得 $(x+2\sqrt{3})^2=36$，解得 $x=6-2\sqrt{3}$(负值已舍). 所以 $S_{\triangle DFG}=\frac{1}{2}x^2=24-12\sqrt{3}$. 若 $FG=GB$，同 $EF=BE$. 若 $FG=EF$，由①可知，$DF\perp FG$，$DF=FG$，则 $DF=FG=EF$，所以 $\angle FDG=\angle FGD=45^\circ$，$\angle FEG=\angle FGE=45^\circ$，所以 $\angle FDG=\angle FEG$，$\angle FGD+\angle FGE=90^\circ$，所以 $DG=EG$，且 $\angle EGD=90^\circ$，所以 $DE=\sqrt{2}DG$. 因为 $DG\geqslant CD$，所以 $\sqrt{2}DG\geqslant\sqrt{2}CD=BD$，所以 $DE\geqslant BD$. 因为点 E 在边 AB 上，且不与点 A，B 重合，所以 $DE<BD$，因此上述情况不存在. 若 $BE=BG$，如图3，连接 EG，BD 交于点 H. 因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $AB=BC=CD=AD=2\sqrt{3}$，$\angle BCD=\angle ABC=\angle BAD=\angle ADC=90^\circ$，$BD$ 平分 $\angle ADC$，所以 $\angle ADB=45^\circ=\angle ADE+\angle BDE$. 因为 $\angle FDG=45^\circ=\angle BDG+\angle BDE$，所以 $\angle ADE=\angle BDG$. 因为 $BE=BG$，BD 平分 $\angle ABC$，所以 $BH\perp EG$，$EH=GH$. 因为 $AB=BC$，$BE=BG$，所以 $AE=CG$. 又因为 $AD=CD$，$\angle EAD=\angle GCD=90^\circ$，所以 $\triangle DAE\cong\triangle DCG$(SAS)，所以 $\angle ADE=\angle CDG$，所以 $\angle CDG=\angle BDG$. 又因为 $\angle GCD=\angle GHD=90^\circ$，$GD=GD$，所以 $\triangle GCD\cong\triangle GHD$(AAS)，所以 $CG=HG$. 设 $CG=x$，则 $BH=HG=x$，$BG=2\sqrt{3}-x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BHG$ 中，由勾股定理，得 $BG^2=BH^2+HG^2$，即 $(2\sqrt{3}-x)^2=x^2+x^2$，解得 $x=2\sqrt{6}-2\sqrt{3}$(负值已舍). 在 $\mathrm{Rt}\triangle CDG$ 中，由勾股定理，得 $DG^2=CD^2+CG^2=(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{6}-2\sqrt{3})^2=48-24\sqrt{2}$. 所以 $S_{\triangle DFG}=\frac{1}{2}DF^2=\frac{1}{4}DG^2=12-6\sqrt{2}$. 综上所述，$\triangle DFG$ 的面积为 $24-12\sqrt{3}$ 或 $12-6\sqrt{2}$.

期末压轴 5

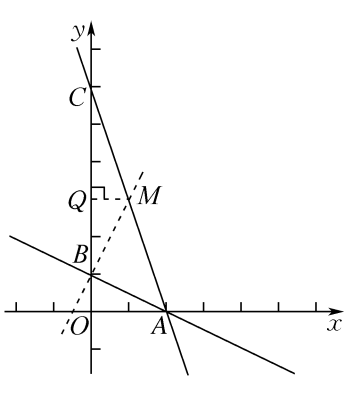
2025 年无锡市期末压轴题

1. D　**提示：**因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AB/\!/CD$，$AB=CD$，$DA/\!/BC$，$DA=BC$. 设点 P

到边 AB,BC,CD,DA 的距离分别是 h_1,h_2,h_3,h_4，点 C 到边 AB,DA 的距离分别为 h_{AB},h_{DA}，则 $h_{AB}=h_1+h_3$，$h_{DA}=h_2+h_4$. 因为 $S=S_{\square ABCD}=AB\cdot h_{AB}=DA\cdot h_{DA}$，所以 $S_1+S_3=\frac{1}{2}AB\cdot h_1+\frac{1}{2}CD\cdot h_3=\frac{1}{2}AB\cdot(h_1+h_3)=\frac{1}{2}AB\cdot h_{AB}=\frac{1}{2}S$，$S_2+S_4=\frac{1}{2}BC\cdot h_2+\frac{1}{2}DA\cdot h_4=\frac{1}{2}DA\cdot(h_2+h_4)=\frac{1}{2}DA\cdot h_{DA}=\frac{1}{2}S$，所以 $S_1+S_3=S_2+S_4=\frac{1}{2}S$，故①正确. 因为 $S_2=3S_4$，所以 $S_2+S_4=4S_4=\frac{1}{2}S$，所以 $S=8S_4$，故②正确. 因为点 P 在对角线 BD 上，所以 $S_1:S_4=PB:PD$，$S_2:S_3=PB:PD$，所以 $S_1:S_4=S_2:S_3$，所以 $S_1\cdot S_3=S_2\cdot S_4$，故③正确. 由 $S_1-S_2=S_3-S_4$，得 $S_1+S_4=S_2+S_3$. 又因为 $S_1+S_2+S_3+S_4=S$，所以 $S_1+S_4=\frac{1}{2}S=S_{\triangle ABD}$，所以点 P 一定在对角线 BD 上，故④正确.

2. $(0,6)$　$(2,-5)$或$(2,5)$或$(-2,7)$

提示：如图，过点 B 作 $BM\perp BA$ 于点 B，交直线 AC 于点 M，过点 M 作 $MQ\perp y$ 轴于点 Q，则 $\angle ABO=90^\circ-\angle MBQ=\angle BMQ$. 由旋转的性质可知，$\angle BAM=45^\circ$，所以 $BA=MB$. 在 $\triangle ABO$ 和 $\triangle BMQ$ 中，$\begin{cases}\angle AOB=\angle BQM,\\ \angle ABO=\angle BMQ,\\ AB=BM,\end{cases}$ 所以$\triangle ABO\cong\triangle BMQ$(AAS)，所以 $AO=BQ$，$BO=MQ$. 易得点 $A(2,0)$，$B(0,1)$，所以 $OA=2$，$OB=1$，所以 $BQ=2$，$MQ=1$，所以 $OQ=3$，所以点 $M(1,3)$，设直线 AC 的函数表达式为 $y=kx+b(k\neq0)$，所以 $\begin{cases}k+b=3,\\2k+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-3,\\b=6.\end{cases}$ 故直线 AC 的函数表达式为 $y=-3x+6$，故点 $C(0,6)$.



设点 $P(m,n)$. 当以 P,A,B,C 为顶点的四边形是平行四边形时，则可分以下几种情况：

①当以 AB 为对角线时，$2+0=m+0$，$0+1=6+n$，所以 $m=2$，$n=-5$，所以点 $P(2,-5)$.

②当以 AC 为对角线时，$2+0=m+0$，$0+6=1+n$，所以 $m=2$，$n=5$，所以点 $P(2,5)$.

③当以 BC 为对角线时，$0+0=m+2$，$6+1=0+n$，所以 $m=-2$，$n=7$，所以点 $P(-2,7)$.

综上所述，当以 P,A,B,C 为顶点的四边形是平行四边形时，则点 P 的坐标为$(2,-5)$或$(2,5)$或$(-2,7)$.

3. 解：(1) 连接 HF. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以$\angle D=\angle B=90^\circ$，$AD/\!/BC$，$CD=AB=9$，所以$\angle DHF=\angle HFB$. 因为四边形 $EFGH$ 是平行四边形，所以 $GH=EF$，$GH/\!/EF$，所以$\angle GHF=\angle HFE$，所以$\angle DHF-\angle GHF=\angle HFB-\angle HFE$，即$\angle DHG=\angle BFE$，所以$\triangle DHG\cong\triangle BFE$(AAS)，所以 $DG=BE=3$，所以 $GC=CD-DG=9-3=6$.

(2) 如图 1，四边形 $EFGH$ 即为所求作的内接菱形.　**提示：**由(1)可知，$\triangle DHG\cong\triangle BFE$，所以 $DG=BE$，故可作 $DG=BE$，连接 EG，作 EG 的垂直平分线，交 AD,BC 于点 H,F，则四边形 $EFGH$ 即为所求作的内接菱形 $EFGH$.

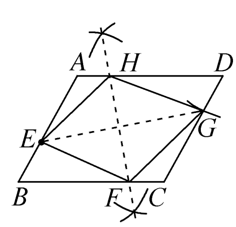


图 1

(3) 过点 E 作 $EP\perp BC$ 于点 P. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BEP$ 中，因为$\angle B=45^\circ$，$BE=\sqrt{2}$，所以 $BP=EP=1$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle FEP$ 中，由勾股定理，得 $PF=\sqrt{EF^2-EP^2}=\sqrt{EF^2-1^2}$，所以 $BF=BP+PF=1+\sqrt{EF^2-1^2}$，故当 EF 长最小时，BF 长最小. 因为四边形 $EFGH$ 是菱形，所

以 $EF=EH$，即当 EH 长最小时，BF 长最小. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AD\parallel BC$，$\angle BAD=180^\circ-\angle B=135^\circ$，所以 $EH\geqslant AE$. 如图 2，当点 A 与点 H 重合时，EH 长最小，最小值为 AE 长，此时点 F 与点 C 重合，BF 长最小. 此时 $EC=AE=4$，所以 $PF=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$，所以 $BC=BF=BP+PF=1+\sqrt{15}$，即当线段 BF 最短时，BC 的长为 $1+\sqrt{15}$.

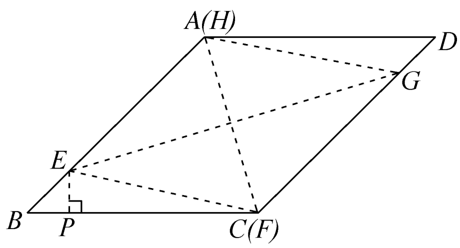


图 2

期末压轴 6

2025 年常州市期末压轴题

1. $10\dfrac{10}{11}$　**提示**：因为 $\sqrt{1+1+\dfrac{1}{4}}=\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{3}{2}=1+\dfrac{1}{1\times2}$，$\sqrt{1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}}=\sqrt{\dfrac{49}{36}}=\dfrac{7}{6}=1+\dfrac{1}{2\times3}$，$\sqrt{1+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{16}}=\sqrt{\dfrac{169}{144}}=\dfrac{13}{12}=1+\dfrac{1}{3\times4}$，…，所以 $S_1=1+\dfrac{1}{1\times2}=1+1-\dfrac{1}{2}=2-\dfrac{1}{2}$，$S_2=1+\dfrac{1}{1\times2}+1+\dfrac{1}{2\times3}=2+1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=3-\dfrac{1}{3}$，$S_3=1+\dfrac{1}{1\times2}+1+\dfrac{1}{2\times3}+1+\dfrac{1}{3\times4}=3+1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}=4-\dfrac{1}{4}$，…，所以 $S_{10}=11-\dfrac{1}{11}=10\dfrac{10}{11}$.

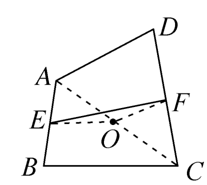
2. 解：(1) $EF=BC$. 理由如下：

因为 $AB\parallel CD$，$AD\parallel BC$，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 所以 $AB=CD$. 因为 E，F 分别是边 AB，CD 的中点，所以 $BE=\dfrac{1}{2}AB$，$CF=\dfrac{1}{2}CD$. 所以 $BE=CF$. 所以四边形 $EBCF$ 是平行四边形. 所以 $EF=BC$.

(2) ①一组对边平行且相等的四边形是平行四边形　$EF=\dfrac{1}{2}(AD+BC)$

②因为 $AD\parallel BC$，所以 $\angle DAF=\angle P$. 因为 F 是 CD 的中点，所以 $DF=CF$. 在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle PCF$ 中，$\begin{cases}\angle DAF=\angle P,\\ \angle AFD=\angle PFC,\\ DF=CF,\end{cases}$ 所以 $\triangle ADF\cong\triangle PCF$(AAS). 所以 $AF=PF$，$AD=PC$. 又因为 E 是 AB 的中点，所以 $EF=\dfrac{1}{2}BP=\dfrac{1}{2}(AD+BC)$.

(3) $\dfrac{1}{2}(m+n)$　**提示**：如图，连接 AC，取 AC 中点 O，连接 OE，OF. 因为 E 为 AB 的中点，所以 OE 为 $\triangle ABC$ 的中位线，所以 $OE=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}n$，同理可得 $OF=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{1}{2}m$. 由图可得 $EF\leqslant OE+OF=\dfrac{1}{2}(m+n)$，当且仅当 E，O，F 三点共线时取等号.



期末压轴 7

2025 年镇江市期末压轴题

1. (1) $\dfrac{2}{x-1}$　**提示**：由题意，得：$m_5=\dfrac{m_{5-1}+1}{m_{5-2}}=\dfrac{m_4+1}{m_3}=\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1}+1}{x}=\dfrac{2}{x-1}$.

(2) $\dfrac{x+1}{x-1}$　**提示**：由题可知，$m_1=1$，$m_2=x-1$，

$m_3=x$，$m_4=\dfrac{x+1}{x-1}$，$m_5=\dfrac{2}{x-1}$，$m_6=\dfrac{\frac{2}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}}=1$，$m_7=\dfrac{1+1}{\frac{2}{x-1}}=x-1$，…，所以 m_n 的结果以 $1,x-1,x,\dfrac{x+1}{x-1},\dfrac{2}{x-1}$，5 个为一组进行循环．因为 $2\ 024\div5=404\cdots\cdots4$，所以 $m_{2\,024}=m_4=\dfrac{x+1}{x-1}$．

（3）**解**：由（2）可知，$m_9=m_4=\dfrac{x+1}{x-1}$，$m_{10}=m_5=\dfrac{2}{x-1}$，所以$\dfrac{m_9}{m_{10}}=\dfrac{x+1}{2}=2$，解得 $x=3$，所以 $m_9=\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{3+1}{3-1}=2$．

（4）4　**提示**：因为 $2\ 020\div5=404$，$2\ 030\div5=406$，所以 $m_{2\,020}=m_{2\,030}=m_5=\dfrac{2}{x-1}$，所以 $m_{2\,020}+m_{2\,030}=\dfrac{4}{x-1}$，随着 x 值的增大，$x-1$ 的值也增大，$\dfrac{4}{x-1}$的值越来越小．因为 $x\geqslant2$，所以当 $x=2$ 时，$x-1=1$，此时$\dfrac{4}{x-1}$有最大值，最大值为 4．

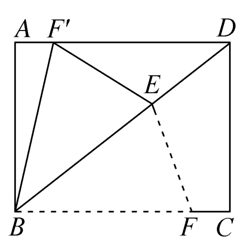
2.（1）$BF=\dfrac{1}{3}BC$　**提示**：因为点 B'落在线段 BC 上，且 $CB'=\dfrac{1}{3}CB$，所以 $BB'=\dfrac{2}{3}BC$，由折叠的性质，得 $BF=B'F$，所以 $BF=\dfrac{1}{2}BB'$，所以 $BF=\dfrac{1}{3}BC$．

（2）①$\dfrac{29}{10}$　**提示**：因为 $CD=4$，B'恰好为 CD 的中点，所以 $CB'=\dfrac{1}{2}CD=2$．由折叠的性质，得 $BF=B'F$．因为 $CB=5$，所以 $CF=CB-BF=5-BF$．因为 $\angle C=90^\circ$，所以 $CF^2+B'C^2=B'F^2$，即$(5-BF)^2+2^2=BF^2$，解得 $BF=\dfrac{29}{10}$．

②**证明**：因为 $BC\perp CD$，$EB'\perp CD$，所以 $EB'/\!/BC$，所以$\angle DEB'=\angle DBC$．由折叠的性质，知 $\angle DBC=\angle EB'F$，所以 $\angle DEB'=\angle EB'F$，所以 $B'F/\!/BD$，所以四边形 $BFB'E$ 是平行四边形．又因为 $BF=B'F$，所以▱$BFB'E$ 是菱形．

（3）$3-\sqrt{3}$　**提示**：由对称的性质，得 $B'E=BE=2\sqrt{3}$，$\angle EB'F=\angle DBC=30^\circ$．因为 EB' 平分$\angle FB'D$，所以$\angle DB'E=\angle EB'F=30^\circ$．因为四边形 $ABCD$ 为矩形，所以$\angle C=90^\circ$，所以$\angle BDC=90^\circ-\angle DBC=60^\circ$，所以$\angle DB'E+\angle B'DE=90^\circ$，所以$\angle B'ED=90^\circ$，所以 $B'D=2DE$．由勾股定理，得 $DE^2+B'E^2=B'D^2$，即 $DE^2+(2\sqrt{3})^2=4DE^2$，解得 $DE=2$（负值已舍），所以 $B'D=4$，所以 $BD=BE+DE=2\sqrt{3}+2$，所以 $CD=\dfrac{1}{2}BD=\sqrt{3}+1$，所以 $CB'=B'D-CD=3-\sqrt{3}$．

（4）$\dfrac{9}{10}$　**提示**：如图，因为四边形 $ABCD$ 为矩形，所以 $AD/\!/BC$，所以$\angle ADB=\angle CBD$．由翻折的性质，得$\angle F'BD=\angle CBD$，所以$\angle ADB=\angle F'BD$，所以 $BF'=DF'$．设 $AF'=x$．因为 $AD=CB=5$，所以 $BF'=DF'=5-x$．因为$\angle A=90^\circ$，所以 $AB^2+AF'^2=BF'^2$．因为 $AB=CD=4$，所以 $4^2+x^2=(5-x)^2$，解得 $x=\dfrac{9}{10}$，所以 $AF'=\dfrac{9}{10}$．



期末压轴 8

2025 年南通市期末压轴题

1. B　**提示**：在▱$ABCD$ 中，$AB=x$，设 $BC=a$，$AC=b$，则 $y=x+a+b$，$x>0$，$a>0$，$b>0$．因为 $a+b>x$，所以 $y=x+a+b>2x$，所以对于任意平行四边形

$ABCD$,坐标(x,y)位于直线 $y=2x$ 的上方,不可能位于区域Ⅰ中,故①正确.若▱$ABCD$ 是矩形,则$\angle B=90°$.当 $a>x$ 时,$\angle B>\angle BAC>\angle ACB$,所以 $b>a>x$,所以 $x+a+b>3x$,所以 $y>3x$,所以对于任意矩形 $ABCD$,坐标(x,y)位于直线 $y=3x$ 的上方,可能位于区域Ⅳ中,故②正确.若▱$ABCD$ 是菱形,$AB=x$,则 $a=BC=AB=x$,$y=x+x+b=2x+b$,$x>0$,$b>0$.因为 $BC+AB>AC$,即 $b<2x$,所以 $y<4x$,所以对于任意菱形 $ABCD$,坐标(x,y)位于直线 $y=4x$ 的下方,不可能位于区域Ⅳ中,故③错误.若▱$ABCD$ 是正方形,$AB=x$,则 $BC=AB=x$,$AC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{2}x$,所以 $y=x+x+\sqrt{2}x=(2+\sqrt{2})x$.因为 $3<2+\sqrt{2}<4$,$x>0$,所以 $3x<y<4x$,所以对于任意正方形 $ABCD$,坐标(x,y)位于直线 $y=4x$ 的下方、直线 $y=3x$ 的上方,一定位于区域Ⅲ中,故④正确.

2. (1) **证明**:因为 $FH/\!/BE$,所以$\angle OFH=\angle OEG$,$\angle FHO=\angle EGO$.因为 O 是 EF 的中点,所以 $OE=OF$,所以$\triangle FOH\cong\triangle EOG$(AAS),所以 $FH=EG$,所以四边形 $EGFH$ 是平行四边形.因为 $OG\perp EF$,所以四边形 $EGFH$ 是菱形.

(2) **解**:小明和小华的思路能求出 DG 的长.理由如下:

如图1,因为四边形 $ABCD$ 是菱形,所以$\angle ADC=\angle ABC=60°$,$BC=CD=AB=3$,$AD/\!/BC$,所以$\triangle ABC$ 是等边三角形,所以$\angle BAC=60°$.因为 $BE\perp AB$,所以$\angle ABE=90°$,所以$\angle CBG=90°-\angle ABC=30°$,$\angle AEB=90°-\angle BAC=30°$.由(1)知,四边形 $EGFH$ 是菱形,所以 $EG=FG$,所以$\angle GFE=\angle AEB=30°$,所以$\angle BGC=\angle AEB+\angle GFE=60°$,所以$\angle BCG=90°$,所以$\angle AMC=\angle BCG=90°$,所以$\angle CMD=90°$.因为 $CD=AB=3$,$\angle ADC=\angle ABC=60°$,所以$\angle DCM=30°$,$DM=\frac{1}{2}CD=\frac{3}{2}$,所以 $CM=\sqrt{CD^2-DM^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.因为 $BC=AB=3$,可知 $2CG=BG$,所以 $CG^2+3^2=4CG^2$,所以 $CG=\sqrt{3}$.因为 $GM=CM+CG=\frac{5\sqrt{3}}{2}$,所以 $DG=\sqrt{GM^2+DM^2}=\sqrt{21}$.所以小明的思路能求出 DG 的长.易得$\angle BCN=\angle ADC=60°$,$\angle CBG=30°$,所以$\angle BNC=90°$,所以$\angle DNG=90°$.易得$\angle NCG=30°$,所以 $GN=\frac{1}{2}CG=\frac{\sqrt{3}}{2}$.因为 $DN=CD+CN=3+\frac{1}{2}BC=\frac{9}{2}$,所以 $DG=\sqrt{DN^2+GN^2}=\sqrt{21}$.所以小华的思路能求出 DG 的长.

小红的方法:

如图1,连接 AG.易证$\triangle ACD$ 是等边三角形,所以 $AC=CD=AB$,$\angle ACD=60°$,所以$\angle ACB=\angle ABC=60°$,所以$\angle ACG=\angle ACB+\angle BCG=150°$,所以$\angle DCG=360°-\angle ACD-\angle ACG=150°$,所以$\angle ACG=\angle DCG$.因为 $CG=CG$,所以$\triangle ACG\cong\triangle DCG$(SAS),所以 $DG=AG$.因为 $BG=2CG=2\sqrt{3}$,所以 $AG=\sqrt{AB^2+BG^2}=\sqrt{3^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{21}$,所以 $DG=\sqrt{21}$.

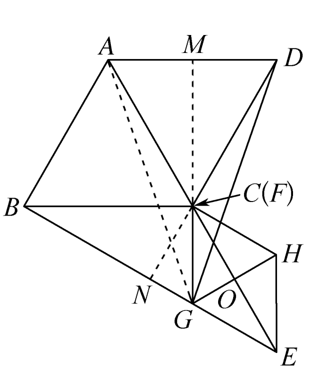


图1

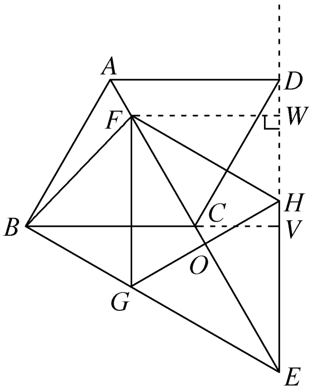


图2

(3) **解**:存在.如图2,过点 F 作 $FW\perp EH$,交 EH 的延长线于点 W,延长 BC,交 EH 于点 V.由(2)可知,$\angle FEH=\angle FEG=$

30°,所以$\angle BEV=60^\circ$. 与(2)同理,$\angle CBG=30^\circ$,所以$\angle BVE=90^\circ$,即$BV\perp EH$. 在Rt$\triangle EFW$中,$\angle FEW=30^\circ$,所以$FW=\frac{1}{2}EF=OE$,所以$FB+OE=FB+FW\geqslant BV$,所以当点F在C点处,$FB+OE$的值最小,最小值为BV的长. 因为$\angle CBE=\angle CEB$,所以$CE=CB=3$,所以$CV=\frac{1}{2}CE=\frac{3}{2}$,所以$BV=BC+CV=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$,所以$(FB+OE)_{最小值}=\frac{9}{2}$.

期末压轴 9

2025 年盐城市期末压轴题

1. 2　**提示**:过点B作$BH\perp OB$交CD于点H,连接OH,AH. 因为四边形$ABCD$是矩形,所以$AB\perp AD$,$AB/\!/CD$,所以$S_{\triangle ABH}=\frac{1}{2}AB\cdot AD=\frac{1}{2}S_{矩形ABCD}=12$. 因为$BH\perp OB$,所以$BH/\!/OA$,所以$S_{\triangle OBH}=\frac{1}{2}OB\cdot BH=S_{\triangle ABH}=12$. 因为点$B(0,4)$,所以$OB=4$,所以$BH=6$. 取$BH$的中点$M$,连接$CM,OM$,则$BM=MH=3$. 由矩形的性质,可得$\angle BCH=90^\circ$,所以$CM=\frac{1}{2}BH=3=MH$,所以$\angle MCH=\angle MHC$. 在Rt$\triangle OBM$中,由勾股定理,可得$OM=\sqrt{OB^2+BM^2}=5$. 所以$OM+CM=3+5=8=OC$,所以$O,C,M$三点共线. 因为$AB/\!/CD$,所以$\angle MCH=\angle MEB$,$\angle MHC=\angle MBE$,所以$\angle MEB=\angle MBE$,所以$ME=MB=3$,所以$OE=OM-ME=2$.

2. (1) ①$\frac{b}{a+m}$　$\frac{b}{a+m}<\frac{b}{a}$　②$\frac{b+n}{a+n}$　$\frac{b+n}{a+n}>\frac{b}{a}$

(2) **证明**:$\frac{b+n}{a+n}-\frac{b}{a}=\frac{a(b+n)-b(a+n)}{a(a+n)}=\frac{n(a-b)}{a(a+n)}$. 因为$a>b>0$,$n>0$,所以$a-b>0$,$a+n>0$,所以$\frac{n(a-b)}{a(a+n)}>0$,所以$\frac{b+n}{a+n}-\frac{b}{a}>0$,所以$\frac{b+n}{a+n}>\frac{b}{a}$.

(3) **解**:因为$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=k$,所以$b_1=a_1k$,$b_2=a_2k$,所以$\frac{b_1+b_2}{a_1+a_2}=\frac{a_1k+a_2k}{a_1+a_2}=\frac{k(a_1+a_2)}{a_1+a_2}=k$.

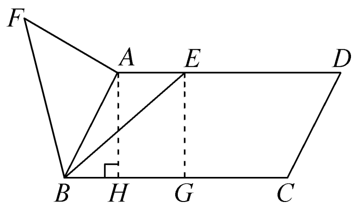
(4) **证明**:由现象 1,得$\frac{a}{a+b+c}<\frac{a}{b+c}<\frac{2a}{a+b+c}$①,$\frac{b}{a+b+c}<\frac{b}{a+c}<\frac{2b}{a+b+c}$②,$\frac{c}{a+b+c}<\frac{c}{a+b}<\frac{2c}{a+b+c}$③. 由①+②+③,得$\frac{a+b+c}{a+b+c}<\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}<\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}$,即$1<\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}<2$.

期末压轴 10

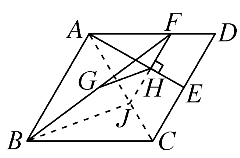
2025 年泰州市期末压轴题

1. $\frac{2\sqrt{21}}{3}$　**提示**:如图,过点A作$AH\perp BC$于点H,在BC上截取$BG=BA$,连接EG. 因为BE绕点B逆时针旋转60°得到BF,所以$BF=BE$,$\angle EBF=60^\circ$. 因为$\angle ABC=60^\circ$,所以$\angle EBF-\angle ABE=\angle ABC-\angle ABE$,即$\angle ABF=\angle GBE$. 在$\triangle BAF$和$\triangle BGE$中,$\begin{cases}BF=BE,\\ \angle ABF=\angle GBE,\\ BA=BG,\end{cases}$所以$\triangle BAF\cong\triangle BGE$(SAS),所以$AF=GE$. 当$GE\perp AD$时,$GE$长最小,即$AF$长最小,而$AF$长的最小值为$\sqrt{7}$,所以$G$点到$AD$的距离为$\sqrt{7}$. 因为四边形$ABCD$为平行四边形,所以$AD/\!/BC$,所以$AH=\sqrt{7}$. 在Rt$\triangle ABH$中,因为$\angle ABH=60^\circ$,所以$\angle BAH=30^\circ$,所以$AB=2BH$. 由勾股定理,得$AH^2+BH^2=AB^2$,即$7+BH^2=4BH^2$,解得$BH=\frac{\sqrt{21}}{3}$(负值已舍),所以$AB=2BH=$

$\frac{2\sqrt{21}}{3}$.



2. $\frac{4\sqrt{3}}{5}$ **提示**:如图,连接 AC,延长 FH 交 AC 于点 J,连接 BJ.因为四边形 $ABCD$ 是菱形,$\angle BAD=120°$,所以 $AB=BC=CD=AD$,$\angle BAC=\angle CAD=60°$,所以 $\triangle ABC$,$\triangle ACD$ 都是等边三角形.因为 $\angle DAE=30°$,所以 $\angle CAE=\angle DAE=30°$,所以 $AE\perp CD$.因为 $AE\perp FJ$,所以 $FJ\parallel CD$,所以 $\angle AJF=\angle ACD=60°$,$\angle AFJ=\angle D=60°$,所以 $\triangle AFJ$ 是等边三角形.又因为 $AH\perp FH$,所以 $FH=HJ$.因为 G 是 BF 的中点,所以 $GH=\frac{1}{2}BJ$.当 $BJ\perp AC$ 时,BJ 的值最小,即 GH 的值最小,此时 $BJ=2GH=\frac{6}{5}$.因为 $\angle BAJ=60°$,$\angle BJA=90°$,所以 $\angle ABJ=30°$,所以 $AB=2AJ$.因为 $AB^2=AJ^2+BJ^2$,所以 $4AJ^2=AJ^2+\left(\frac{6}{5}\right)^2$,所以 $AJ=\frac{2\sqrt{3}}{5}$,所以 $AB=\frac{4\sqrt{3}}{5}$.



3. (1) ①**证明**:由折叠的性质,得 $\angle A=\angle E$.因为 $DE\parallel BC$,所以 $\angle E=\angle ECB$,所以 $\angle A=\angle ECB$.因为 $\angle ACB=90°$,所以 $\angle A+\angle B=90°$,所以 $\angle ECB+\angle B=90°$,所以 $\angle CFB=90°$,所以 $CE\perp AB$.

②**解**:因为 $\angle ACB=90°$,$BC=3$,$AC=4$,所以由勾股定理,得 $AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$.由①,得 $CE\perp AB$.所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AC=\frac{1}{2}AB\cdot CF$,所以 $CF=\frac{12}{5}$,所以 $BF=\sqrt{BC^2-CF^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{9}{5}$.由折叠的性质,得 $CE=AC=4$,所以 $EF=CE-CF=4-\frac{12}{5}=\frac{8}{5}$.设 $AD=x$,则 $DE=x$,所以 $DF=AB-AD-BF=5-x-\frac{9}{5}=\frac{16}{5}-x$.在 $\mathrm{Rt}\triangle DEF$ 中,$DF^2+EF^2=DE^2$,所以 $\left(\frac{16}{5}-x\right)^2+\left(\frac{8}{5}\right)^2=x^2$,解得 $x=2$,所以 $BD=AB-AD=5-2=3$.

(2) **解**:四边形 $CBED$ 不可能是菱形.理由如下:

若四边形 $CBED$ 为菱形,则 $DE=BC$,$DE\parallel BC$.由(1)可知,当 $DE\parallel BC$ 时,$DE=2$,$BC=3$,所以 $DE\neq BC$,这与 $DE=BC$ 矛盾,所以四边形 $CBED$ 不可能是菱形.

(3) **解**:如图 1,点 F 即为所求. **提示**:如图 2,当 $DE\perp AB$ 时,$\angle EDF=90°$,所以 $\angle DFE+\angle E=90°$.由折叠的性质,得 $\angle A=\angle E$,所以 $\angle DFE+\angle A=90°$.因为 $\angle A+\angle B=90°$,所以 $\angle B=\angle DFE$.因为 $\angle DFE=\angle BFC$,所以 $\angle B=\angle BFC$,所以 $BC=FC$.所以以点 C 为圆心,BC 长为半径作弧,交 AB 于点 F,点 F 即为所求.

$\frac{AF}{BF}=\frac{7}{18}$. **提示**:如图 2,过点 C 作 $CG\perp AB$ 于点 G.同(1)②,得 $CG=\frac{12}{5}$,$BG=\frac{9}{5}$.因为 $BC=FC$,$CG\perp AB$,所以 $BF=2BG=\frac{18}{5}$.所以 $AF=AB-BF=5-\frac{18}{5}=\frac{7}{5}$,所以 $\frac{AF}{BF}=\frac{7}{18}$.

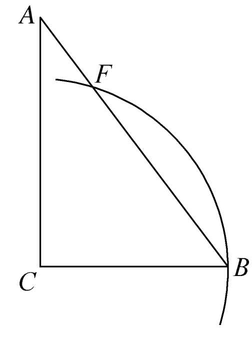


图 1

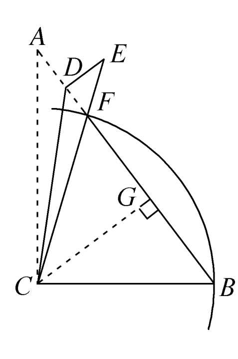


图 2

期末压轴 11

2025 年扬州市邗江区、江都区期末压轴题

1. B　**提示**：过点 A 作 $AH\perp EF$ 于点 H. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=3$，$BC=4$，由勾股定理，得 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=5$. 因为四边形 $ABDE$ 是正方形，所以 $BD=ED=AE=AB=5$，$\angle EDG=\angle BDG=45^\circ$，$\angle BAE=90^\circ$. 因为 $AH\perp EF$，$EF\perp BC$，所以 $\angle CFH=\angle FHA=90^\circ=\angle C$，所以四边形 $ACFH$ 是矩形，所以 $\angle CAH=90^\circ=\angle BAE$，所以 $\angle BAH+\angle EAH=\angle BAH+\angle BAC$，所以 $\angle EAH=\angle BAC$. 在 $\triangle EAH$ 和 $\triangle BAC$ 中，$\begin{cases}\angle AHE=\angle C,\\ \angle EAH=\angle BAC,\\ AE=AB,\end{cases}$ 所以 $\triangle EAH\cong\triangle BAC(\mathrm{AAS})$，所以 $EH=BC=4$，$AH=AC=3$，所以矩形 $ACFH$ 是正方形，所以 $CF=FH=AH=3$，所以 $BF=BC-CF=4-3=1$，$EF=EH+FH=4+3=7$. 在 $\triangle EDG$ 和 $\triangle BDG$ 中，$\begin{cases}ED=BD,\\ \angle EDG=\angle BDG,\\ DG=DG,\end{cases}$ 所以 $\triangle EDG\cong\triangle BDG(\mathrm{SAS})$，所以 $EG=BG$，所以 $\triangle GBF$ 的周长为 $BG+GF+BF=EG+GF+BF=EF+BF=7+1=8$.

2. -1　**提示**：由 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=5$，得 $b-a=5ab$，则 $\frac{3a+8ab-3b}{2ab-a+b}=\frac{8ab-3(b-a)}{2ab+(b-a)}=\frac{8ab-3\times5ab}{2ab+5ab}=\frac{-7ab}{7ab}=-1$.

3. 解：(1) $(4,5)$　$(-6,-5)$

(2) 因为无理数 $-\sqrt{a}$（a 为正整数）的“整数区间”为 $(-3,-2)$，所以 $-3<-\sqrt{a}<-2$，所以 $2<\sqrt{a}<3$，所以 $4<a<9$. 因为 $\sqrt{a+3}$ 的“整数区间”为 $(3,4)$，所以 $3<\sqrt{a+3}<4$，所以 $9<a+3<16$，即 $6<a<13$，所以 $6<a<9$. 因为 a 为正整数，所以 $a=7$ 或 $a=8$，所以 $\sqrt[3]{a+1}=\sqrt[3]{7+1}=\sqrt[3]{8}=2$ 或 $\sqrt[3]{a+1}=\sqrt[3]{8+1}=\sqrt[3]{9}$.

(3) 因为二次根式中被开方数为非负时才有意义，所以 $x+y-2\,026\geqslant0$ 且 $2\,026-x-y\geqslant0$，所以 $x+y=2\,026$，所以 $\sqrt{x+y-2\,026}=\sqrt{2\,026-x-y}=0$，所以 $\sqrt{2x+3y-m}+\sqrt{3x+4y-2m}=0$，所以 $2x+3y-m=3x+4y-2m=0$，所以 $m=x+y=2\,026$. 因为 $2\,025<m<2\,116$，即 $45^2<m<46^2$，所以 $45<\sqrt{m}<46$，所以 m 的算术平方根的“整数区间”为 $(45,46)$.

期末压轴 12

2025 年扬州市宝应县、高邮市期末压轴题

1. A　**提示**：如图 1，过点 F 作直线 $MN\perp AD$ 于点 M，交 BC 于点 N，则 $\angle NMD=90^\circ$. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $AD=CD$，$\angle ADF=45^\circ$，$\angle ADC=\angle C=90^\circ$，所以 $\angle NMD=\angle ADC=\angle C=90^\circ$，所以四边形 $CDMN$ 是矩形，所以 $\angle AMF=\angle FNH=\angle FMD=90^\circ$，$MN=CD=AD$，所以 $\angle1+\angle2=90^\circ$. 因为 $FH\perp AE$，所以 $\angle3+\angle2=90^\circ$，所以 $\angle1=\angle3$. 因为 $\angle ADF=45^\circ$，$\angle FMD=90^\circ$，所以 $\triangle MFD$ 是等腰直角三角形，所以 $MF=MD$，所以 $AD-MD=MN-MF$，即 $AM=FN$. 在 $\triangle AMF$ 和 $\triangle FNH$ 中，$\begin{cases}\angle AMF=\angle FNH,\\ AM=FN,\\ \angle1=\angle3,\end{cases}$ 所以 $\triangle AMF\cong\triangle FNH(\mathrm{ASA})$，所以 $AF=FH$，所以 $\triangle AFH$ 是等腰直角三角形，所以 $\angle HAF=45^\circ$，故①正确. 在 $\mathrm{Rt}\triangle HEF$ 中，$\angle HFE=90^\circ$，所以 $HE>HF$. 因为 $AF=FH$，所以 $HE>AF$，故②不正确. 如图 2，连接 AC 交 BD 于点 O. 又因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $BC=AB=3$，$\angle ABC=90^\circ$，$AC\perp BD$，$AO=\frac{1}{2}AC$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，由勾股定理，得 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=3\sqrt{2}$，所以 $AO=$

$\frac{1}{2}AC=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 因为 $HG\perp BD$,$AC\perp BD$,所以 $\angle HGF=\angle FOA=90^\circ$,所以 $\angle OAF+\angle OFA=90^\circ$. 因为 $FH\perp AE$,所以 $\angle GFH+\angle OFA=90^\circ$,所以 $\angle GFH=\angle OAF$. 在 $\triangle GFH$ 和 $\triangle OAF$ 中,$\begin{cases}\angle HGF=\angle FOA,\\ \angle GFH=\angle OAF,\\ AF=FH,\end{cases}$ 所以 $\triangle GFH\cong\triangle OAF$(AAS),所以 $FG=AO=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,故③正确. 假设 $FH=\sqrt{2}$,则有 $AF=FH=\sqrt{2}$. 在 Rt$\triangle AFH$ 中,由勾股定理,得 $AH=\sqrt{AF^2+FH^2}=2$. 在 Rt$\triangle ABH$ 中,$AB=3$,$\angle ABH=90^\circ$,所以 $AH>AB=3$,这与 $AH=2$ 矛盾,所以 $FH\neq\sqrt{2}$,故④不正确.

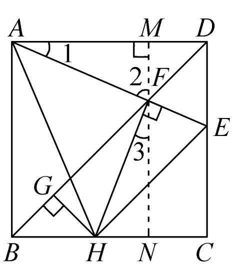


图 1

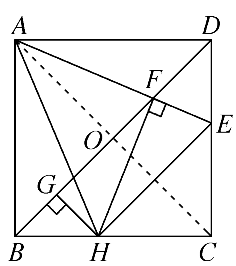
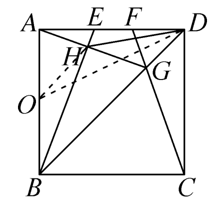


图 2

2. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ **提示**:因为四边形 $ABCD$ 为正方形,所以 $AB=AD=CD$,$\angle BAD=\angle CDA=90^\circ$,$\angle ADG=\angle CDG$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DCF$ 中,$\begin{cases}AB=DC,\\ \angle BAE=\angle CDF,\\ AE=DF,\end{cases}$ 所以 $\triangle ABE\cong\triangle DCF$(SAS),所以 $\angle ABE=\angle DCF$. 在 $\triangle ADG$ 和 $\triangle CDG$ 中,$\begin{cases}AD=CD,\\ \angle ADG=\angle CDG,\\ DG=DG,\end{cases}$ 所以 $\triangle ADG\cong\triangle CDG$(SAS),所以 $\angle DCG=\angle DAG$,所以 $\angle ABE=\angle DAG$. 因为 $\angle BAH+\angle DAG=\angle BAD=90^\circ$,所以 $\angle ABE+\angle BAH=90^\circ$,所以 $\angle AHB=180^\circ-(\angle ABE+\angle BAH)=90^\circ$. 如图,取 AB 的中点 O,连接 OH,OD,则 $OH=AO=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}$. 在 Rt$\triangle AOD$ 中,$OD=\sqrt{AD^2+AO^2}=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$,由两点间线段最短可知,$OH+DH\geqslant OD$,即 $DH\geqslant OD-OH=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,当 O,H,D 三点依次共线时,DH 的长度最小,最小值为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.



3. 解:(1) 4 $\frac{1}{21}$ **提示**:因为 $\frac{x}{x^2-x+1}=\frac{1}{3}$,所以 $\frac{x^2-x+1}{x}=3$,即 $\frac{x^2}{x}-\frac{x}{x}+\frac{1}{x}=3$,所以 $x+\frac{1}{x}=4$. 因为 $\frac{x^4+7x^2+1}{x^2}=x^2+7+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5=4^2+5=21$,所以 $\frac{x^2}{x^4+7x^2+1}=\frac{1}{21}$.

(2) 原方程组化为 $\begin{cases}\frac{2m+3n}{mn}=5,\\ \frac{3m+2n}{mn}=3,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{2}{n}+\frac{3}{m}=5①,\\ \frac{3}{n}+\frac{2}{m}=3②.\end{cases}$ ①×3−②×2,得 $\frac{9}{m}-\frac{4}{m}=15-6$,解得 $m=\frac{5}{9}$;①×2−②×3,得 $\frac{4}{n}-\frac{9}{n}=10-9$,解得 $n=-5$. 经检验,$\begin{cases}m=\frac{5}{9},\\ n=-5\end{cases}$ 满足原分式方程,所以原方程组的解为 $\begin{cases}m=\frac{5}{9},\\ n=-5.\end{cases}$

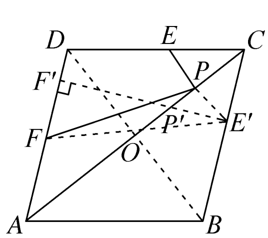
(3) 因为 $\frac{ab}{a+b}=\frac{1}{2\ 024}$,$\frac{bc}{b+c}=-\frac{1}{2\ 025}$,$\frac{ac}{a+c}=\frac{1}{2\ 026}$,所以 $\frac{a+b}{ab}=2\ 024$,$\frac{b+c}{bc}=-2\ 025$,$\frac{a+c}{ac}=2\ 026$,所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2\ 024$,

$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=-2\ 025$，$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=2\ 026$，所以 $2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=2\ 024-2\ 025+2\ 026=2\ 025$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{2\ 025}{2}$. 因为 $\frac{ab+bc+ac}{abc}=\frac{ab}{abc}+\frac{bc}{abc}+\frac{ac}{abc}=\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2\ 025}{2}$，所以 $\frac{abc}{ab+bc+ac}=\frac{2}{2\ 025}$.

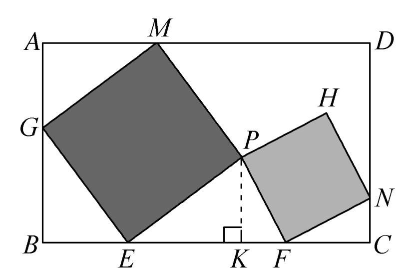
期末压轴 13

2025 年徐州市期末压轴题

1. B **提示**：如图，作点 E 关于 AC 的对称点 E'，过点 E' 作 $E'F'\perp AD$ 于点 F'，交 AC 于点 P'，连接 BD，交 AC 于点 O，连接 PE'，FE'，则 $PE'=PE$. 所以 $PE+PF=PE'+PF\geqslant E'F\geqslant E'F'$，当点 P 与点 P' 重合，点 F 与点 F' 重合时，等号成立，即 $PE+PF$ 的最小值为 $E'F'$ 长. 因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $BD=2OB$，$OA=\frac{1}{2}AC=4$，$AC\perp BD$. 由勾股定理，得 $OB^2=AB^2-OA^2=5^2-4^2=9$，解得 $OB=3$（负值已舍），所以 $BD=6$. 由等积法，得 $S_{\text{菱形}ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=BC\cdot E'F'$，即 $\frac{1}{2}\times8\times6=5E'F'$，解得 $E'F'=4.8$，所以 $PE+PF$ 的最小值为 4.8.



2. 40 **提示**：如图，过点 P 作 $PK\perp BC$ 于点 K，则 $\angle PKE=\angle PKF=90^\circ$. 设 $CN=x$，$FC=a$，$AM=y$. 因为 $DM=5$，$DN=4$，所以 $AD=AM+DM=y+5$，$CD=CN+DN=x+4$. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $AB=CD=x+4$，$BC=AD=y+5$，$\angle A=\angle B=\angle C=90^\circ$，所以 $\angle PKF=\angle C=90^\circ$，所以 $\angle KPF+\angle PFK=90^\circ$. 因为四边形 $FNHP$ 是正方形，所以 $PF=FN$，$\angle PFN=90^\circ$，所以 $\angle CFN+\angle PFK=90^\circ$，所以 $\angle KPF=\angle CFN$. 在 $\triangle KPF$ 和 $\triangle CFN$ 中，$\begin{cases}\angle PKF=\angle C,\\ \angle KPF=\angle CFN,\\ PF=FN,\end{cases}$ 所以 $\triangle KPF\cong\triangle CFN$（AAS），所以 $PK=FC=a$，$KF=CN=x$，同理可证 $\triangle PEK\cong\triangle EGB\cong\triangle GMA$，所以 $GA=EB=PK=a$，$EK=GB=MA=y$，所以 $EF=KF+EK=x+y$，$BE+FC=2a$. 因为 $EF=BE+FC$，所以 $x+y=2a$，$BC=BE+FC+EF=2EF=2(x+y)$，所以 $a=\frac{x+y}{2}$，所以 $AB=AG+GB=a+y=\frac{x+y}{2}+y=\frac{x+3y}{2}$. 又因为 $AB=CD=x+4$，所以 $\frac{x+3y}{2}=x+4$，整理，得 $3y-x=8$. 因为 $BC=AD=y+5$，所以 $2(x+y)=y+5$. 整理，得 $2x+y=5$. 联立，得 $\begin{cases}3y-x=8,\\ 2x+y=5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\ y=3.\end{cases}$ 所以 $AD=y+5=8$，$CD=4+x=5$，所以矩形 $ABCD$ 的面积为 $AD\cdot CD=8\times5=40$.



3. (1) **证明**：因为 $l\parallel AC$，$AE\parallel BD$，所以四边形 $AEBO$ 是平行四边形，所以 $AE=BO$. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $BO=OD$，所以 $AE=OD$. 又因为 $AE\parallel BD$，所以 $\angle AEF=\angle ODF$. 又因为 $\angle AFE=\angle OFD$，所以 $\triangle AFE\cong\triangle OFD$（AAS），所以 $EF=DF$.

(2) **解**：$AF+BE=CF$ 或 $AF-BE=CF$. 理由如下：

过点 E 作 $EH\parallel BD$ 交 AC 于点 H，同(1)可证 $\triangle HFE\cong\triangle OFD$（AAS），所以 $EF=$

DF. 又因为 $BO=DO$，所以 OF 是 $\triangle DBE$ 的中位线，所以 $BE=2OF$. 如图 1，当点 E 在 AB 的左侧时，因为 $AO=CO$，所以 $AF+OF=CF-OF$，所以 $AF+2OF=CF$，所以 $AF+BE=CF$；如图 2，当点 E 在 AB 的右侧时，因为 $AO=CO$，所以 $AF-OF=CF+OF$，所以 $AF-2OF=CF$，所以 $AF-BE=CF$.

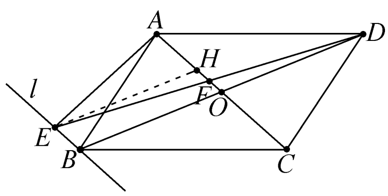


图 1

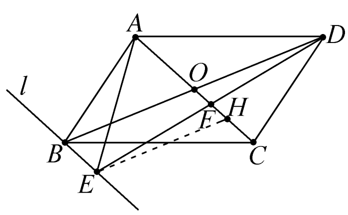
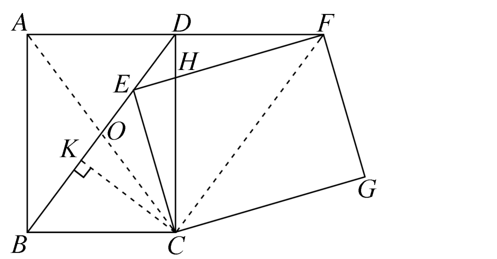


图 2

期末压轴 14

2025 年宿迁市泗阳县期末压轴题

1. D **提示**：如图，过点 C 作 $CK\perp BD$ 于点 K，连接 AC 交 BD 于点 O，连接 CF. 因为四边形 $ABCD$ 为矩形，所以 $\angle ABC=\angle BCD=90^\circ$，$AB\parallel CD$，$OB=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AC=OA=OC$，所以 $\angle BAC=\angle ABO=\angle BDC$，$\angle OBC=\angle ACB$. 由勾股定理，得 $BD=AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=10$. 由旋转的性质，得 $\angle BAC=\angle EFC$，$\angle ACB=\angle FCE$，$FC=AC$，$EC=BC$. 所以 $\angle BDC=\angle EFC$，$\angle OBC=\angle BEC$，所以 $\angle BEC=\angle FCE$，所以 $BD\parallel FC$，所以 $\angle BDC=\angle HCF$，所以 $\angle HCF=\angle EFC$，所以 $CH=FH$. 因为 $EC=BC$，$CK\perp BD$，所以 $BK=EK$. 由等积法，得 $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot CD=\frac{1}{2}BD\cdot CK$，所以 $CK=\frac{BC\times CD}{BD}=\frac{6\times 8}{10}=4.8$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BCK$ 中，$BK=\sqrt{BC^2-CK^2}=\sqrt{6^2-4.8^2}=3.6$. 所以 $BE=2BK=7.2$，故选项 A 正确. 因为 $BD\parallel FC$，且 $FC=AC=BD$，所以四边形 $BCFD$ 为平行四边形，所以 $DF=BC=6$，故选项 B 正确. 因为四边形 $BCFD$ 是平行四边形，所以 $DF\parallel BC$，所以 $\angle FDC=\angle BCD=90^\circ$. 设 $DH=x$，则 $FH=CH=CD-DH=8-x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle DHF$ 中，$DH^2+DF^2=HF^2$，即 $x^2+6^2=(8-x)^2$，解得 $x=1.75$. 所以 $DH=1.75$，$FH=8-x=6.25$，故选项 C 正确，选项 D 错误.



2. $\frac{1}{2}$ **提示**：因为 $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)=\left(ab+\frac{a}{c}+1+\frac{1}{bc}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)=abc+a+c+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{abc}=\left(a+\frac{1}{b}\right)+\left(b+\frac{1}{c}\right)+\left(c+\frac{1}{a}\right)+\left(abc+\frac{1}{abc}\right)$，所以 $3\times 11\times\left(c+\frac{1}{a}\right)=3+11+\left(c+\frac{1}{a}\right)+2$，解得 $c+\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$.

3. 解：(1) $2-\sqrt{3}$　$\sqrt{6}-\sqrt{2}$　**提示**：$\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=2-\sqrt{3}$；由题可知，$\sqrt{8-4\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，或者利用配方法，可得 $\sqrt{8-4\sqrt{3}}=\sqrt{2(4-2\sqrt{3})}=\sqrt{2}\times\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{2}\times(\sqrt{3}-1)=\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

(2) 设 $a=\sqrt{x+21}$，$b=\sqrt{x+5}$，则 $a-b=2$，$a^2-b^2=(a+b)(a-b)=x+21-x-5=16$，所以 $a+b=8$，所以 $2a=10$，解得 $a=5$，所以 $\sqrt{x+21}=5$，所以 $x+21=25$，解得 $x=4$，经检验 $x=4$ 是原方程的根.

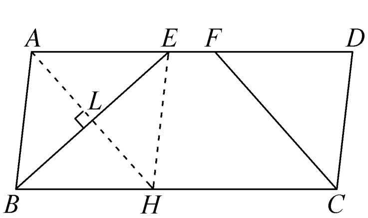
(3) 因为 $a\sqrt{3-b^2}+b\sqrt{3-a^2}=3$①，设

$a\sqrt{3-b^2}-b\sqrt{3-a^2}=m$②，所以①＋②，得 $2a\sqrt{3-b^2}=3+m$，①－②，得 $2b\sqrt{3-a^2}=3-m$，所以 $4a^2(3-b^2)=(m+3)^2$③，$4b^2(3-a^2)=(3-m)^2$④，③－④，得 $12a^2-4a^2b^2-12b^2+4a^2b^2=12m$，解得 $m=a^2-b^2$，③＋④，得 $12a^2-4a^2b^2+12b^2-4a^2b^2=2m^2+18$，解得 $m^2=6a^2+6b^2-4a^2b^2-9$，所以 $m^2=(a^2-b^2)^2=6a^2+6b^2-4a^2b^2-9$，所以 $a^4+2a^2b^2+b^4-6(a^2+b^2)+9=0$，所以 $(a^2+b^2)^2-6(a^2+b^2)+9=0$，所以 $(a^2+b^2-3)^2=0$，所以 $a^2+b^2=3$.

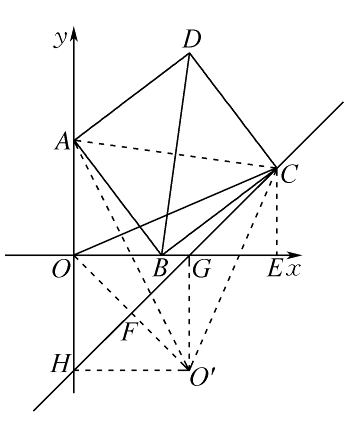
期末压轴 15

2025 年淮安市期末压轴题

1. $2\sqrt{5}$　**提示**：如图，过点 E 作 $EH/\!/AB$，交 BC 于点 H，连接 AH 交 BE 于点 L. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $\angle BCD=\angle BAD$，$AD/\!/BC$，所以 $\angle AEB=\angle CBE$，$\angle DFC=\angle BCF$. 因为 $\angle ABC$，$\angle BCD$ 的平分线分别交 AD 于点 E，F，所以 $\angle CBE=\angle ABE$，$\angle BCF=\angle DCF$，所以 $\angle AEB=\angle ABE$，$\angle DFC=\angle DCF=\frac{1}{2}\angle DCB=\frac{1}{2}\angle BAD$，所以 $AE=AB=3$. 因为 $EH/\!/AB$，$AD/\!/BC$，所以四边形 $ABHE$ 是平行四边形. 又因为 $AE=AB=3$，所以四边形 $ABHE$ 是菱形，所以 $AH\perp BE$，$BL=EL$，$AL=HL$，$\angle EAH=\angle BAH=\frac{1}{2}\angle BAD$. 又因为 $\angle DFC=\frac{1}{2}\angle BAD$，所以 $\angle EAH=\angle DFC$，所以 $AH/\!/CF$，所以四边形 $AHCF$ 是平行四边形，所以 $AH=CF=4$，所以 $AL=HL=\frac{1}{2}AH=2$. 在 $\text{Rt}\triangle AEL$ 中，$EL=\sqrt{AE^2-AL^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$，所以 $BE=2EL=2\sqrt{5}$.



2. $4\sqrt{5}$　**提示**：如图，过点 C 作 $CE\perp x$ 轴于点 E，连接 AC，则 $\angle BEC=\angle AOB=90°$，所以 $\angle CBE+\angle BCE=90°$. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $AB=BC$，$\angle ABC=90°$，$BD=AC$，所以 $\angle CBE+\angle ABO=90°$，所以 $\angle ABO=\angle BCE$，所以 $\triangle ABO\cong\triangle BCE$ (AAS)，所以 $BO=CE$，$AO=BE$. 因为点 A 坐标为 $(0,4)$，所以 $AO=4$，所以 $BE=4$. 设 $BO=a$，则 $CE=a$，$OE=BO+BE=a+4$，所以点 $C(a+4,a)$，所以点 C 在直线 $y=x-4$ 上（当点 B 位于原点或 x 轴负半轴上时，此结论仍成立）. 设直线 $y=x-4$ 交 x 轴于点 $G(4,0)$，交 y 轴于点 $H(0,-4)$，过点 G 向下作 x 轴的垂线，并在垂线上截取 $O'G=OG$，连接 OO' 交直线 CG 于点 F，连接 $O'A$，$O'H$，则四边形 $OGO'H$ 是正方形，点 $O'(4,-4)$，易知直线 CG 是 OO' 的垂直平分线，即点 O，O' 关于直线 CG 对称，所以 $OC=O'C$，此时 $OC+BD=O'C+AC\geqslant O'A$，当 A，C，O' 三点依次共线时，等号成立. 因为四边形 $OGO'H$ 为正方形，所以 $OH=O'H=OG=4$，所以 $AH=AO+OH=8$. 在 $\text{Rt}\triangle AO'H$ 中，$O'A=\sqrt{AH^2+O'H^2}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$，所以 $OC+BD$ 的最小值为 $4\sqrt{5}$.



3. 解：(1) $DE=GF$. 理由如下：

如图 1，连接 BD，过点 B 作 $BH/\!/GF$，交 AD 于点 H，交 DE 于点 N. 因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $AD/\!/BC$，$AB=AD$，又因为 $\angle A=60°$，所以 $\triangle ABD$ 为等边三角形，所以 $BD=AB=AD$，$\angle ABD=\angle ADB=60°$. 因为 $BH/\!/GF$，$AD/\!/BC$，所以四边形 $BGFH$ 为平

行四边形，所以 $GF=BH$. 因为 $BH/\!/GF$，所以 $\angle ENB=\angle EMG=60°$. 因为 $\angle A+\angle AHB+\angle ABH=180°$，所以 $\angle AHB+\angle ABH=120°$. 因为 $\angle ABH+\angle ENB+\angle NEB=180°$，所以 $\angle ABH+\angle NEB=120°$，所以 $\angle AHB=\angle NEB$. 在 $\triangle AHB$ 和 $\triangle BED$ 中，$\begin{cases}\angle A=\angle EBD,\\ \angle AHB=\angle BED,\\ AB=BD,\end{cases}$ 所以 $\triangle AHB\cong\triangle BED$ (AAS)，所以 $DE=BH$，所以 $DE=GF$.

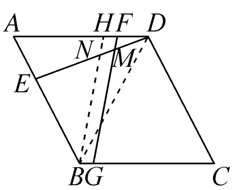


图 1

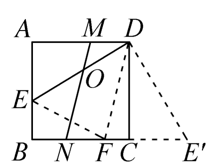


图 2

(2) 如图 2，过点 D 分别作 $DF/\!/MN$，交 BC 于点 F，作 $DE'\perp DE$，交 BC 的延长线于点 E'，连接 EF. 设 $AE=x$，则 $BE=4-x$. 因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $CD=AD=BC=AB=4$，$\angle A=\angle ADC=\angle BCD=90°$，$AD/\!/BC$，又因为 $DF/\!/MN$，所以四边形 $MNFD$ 为平行四边形，且 $\angle ODF=\angle EON=45°$，所以 $\angle E'DF=90°-\angle ODF=45°=\angle EDF$，$DF=MN=\sqrt{17}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle CDF$ 中，由勾股定理，得 $CF=\sqrt{DF^2-CD^2}=\sqrt{17-16}=1$，所以 $BF=BC-CF=3$. 因为 $\angle ADE+\angle CDE=90°$，$\angle CDE'+\angle CDE=90°$，所以 $\angle ADE=\angle CDE'$. 又因为 $\angle A=\angle DCE'=90°$，$AD=CD$，所以 $\triangle ADE\cong\triangle CDE'$ (ASA)，所以 $CE'=AE=x$，$DE'=DE$. 又因为 $\angle E'DF=\angle EDF$，$DF=DF$，所以 $\triangle E'DF\cong\triangle EDF$ (SAS)，所以 $EF=E'F=CF+CE'=x+1$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BEF$ 中，由勾股定理，得 $BE^2+BF^2=EF^2$，即 $(4-x)^2+3^2=(x+1)^2$，解得 $x=\frac{12}{5}$，即 $AE=\frac{12}{5}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中，由勾股定理，得 $DE=\sqrt{AD^2+AE^2}=\frac{4\sqrt{34}}{5}$.

(3) $AG+EF$ 的最小值为 $4\sqrt{5}$. **提示**：如图 3，过点 A 作 $AJ/\!/GF$，过点 F 作 $FJ/\!/AG$，交 AJ 于点 J，过点 F 作 $FK\perp CD$ 于点 K，连接 JE，则四边形 $AJFG$ 为平行四边形，所以 $AG=FJ$，$AJ=FG$. 因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $\angle BAD=\angle B=\angle C=90°$，$AB/\!/CD$，$BC=AB=6$. 因为 $CE=2BE$，所以 $BE=2$，所以 $AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$. 易证四边形 $FBCK$ 为矩形，所以 $FK=BC$，所以 $AB=FK$. 因为 $AB/\!/CD$，所以 $\angle AFH=\angle FGK$. 因为 $\angle KFG+\angle FGK=90°$，$\angle BAE+\angle AFH=90°$，所以 $\angle BAE=\angle KFG$. 易得 $\angle B=\angle FKG=90°$. 在 $\triangle BAE$ 和 $\triangle KFG$ 中，$\begin{cases}\angle BAE=\angle KFG,\\ AB=FK,\\ \angle B=\angle FKG,\end{cases}$ 所以 $\triangle BAE\cong\triangle KFG$ (ASA)，所以 $AE=FG$，所以 $AJ=FG=AE=2\sqrt{10}$. 因为 $AJ/\!/GF$，$FG\perp AE$，所以 $AJ\perp AE$，所以 $\triangle AJE$ 为等腰直角三角形，所以 $JE=\sqrt{2}AJ=4\sqrt{5}$. 由两点间线段最短可知，$JF+EF\geqslant JE$（J，E 为定点），当 J，F，E 三点依次共线时，$JF+EF$ 取得最小值，最小值为 $4\sqrt{5}$. 因为 $AG+EF=JF+EF$，所以 $AG+EF$ 的最小值为 $4\sqrt{5}$.

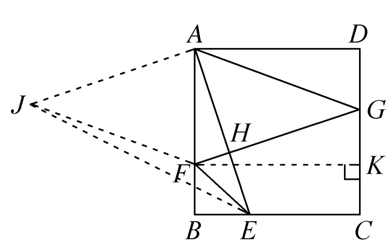


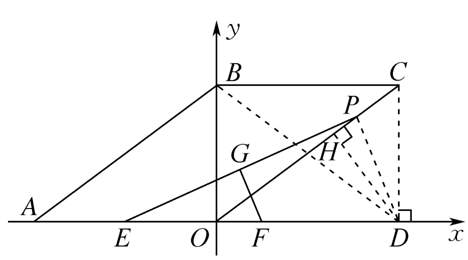
图 3

期末压轴 16

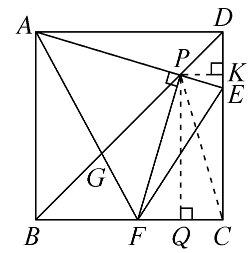
2025 年连云港市期末压轴题

1. $\frac{12}{5}\leqslant FG\leqslant 5$ **提示**：如图，过点 C 作 $CD\perp$

x 轴于点 D，连接 PD，过点 D 作 $DH\perp OC$ 于点 H，连接 BD. 因为四边形 $ABCO$ 是平行四边形，所以 $OA=BC$，$BC/\!/OA$. 因为点 $C(8,6)$，所以 $OA=BC=OD=8$，$OB=CD=6$，所以 $BD=OC=\sqrt{OD^2+CD^2}=10$. 由等积法，得 $S_{\triangle OCD}=\frac{1}{2}\cdot OD\cdot CD=\frac{1}{2}\cdot OC\cdot DH$，所以 $DH=\frac{24}{5}$. 因为 E 是 OA 的中点，所以 $OE=AE=4$. 因为点 $F(2,0)$，所以 $OF=2$，所以 $EF=FD=6$. 因为 G 是 PE 的中点，所以 $EG=GP$，所以 $FG=\frac{1}{2}PD$. 当点 P 与点 H 重合时，PD 的值最小，最小值为 $DH=\frac{24}{5}$，此时 FG 的值最小，最小值为 $FG=\frac{1}{2}DH=\frac{12}{5}$；当点 P 与点 B 重合时，PD 的值最大，最大值为 $BD=10$，此时 FG 的值最大，最大值为 $FG=\frac{1}{2}BD=5$. 所以 $\frac{12}{5}\leqslant FG\leqslant 5$.



2. 3　**提示**：如图，连接 PC，过点 P 作 $PQ\perp BC$ 于点 Q，$PK\perp CD$ 于点 K，则四边形 $PQCK$ 为矩形，所以 $PK=CQ$，$\angle PKD=90^\circ$. 因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $\angle PDK=45^\circ$，所以 $\angle PDK=\angle DPK=45^\circ$，所以 $PK=DK$. 由勾股定理，得 $DP=\sqrt{PK^2+DK^2}=\sqrt{2}PK=\sqrt{2}$，所以 $PK=DK=1$，所以 $CQ=1$. 因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $CB=AB=5$，$\angle ABP=\angle CBP=45^\circ$. 在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle CBP$ 中，$\begin{cases}AB=CB,\\ \angle ABP=\angle CBP,\\ BP=BP,\end{cases}$ 所以 $\triangle ABP\cong\triangle CBP$（SAS），所以 $PA=PC$，$\angle BAP=\angle BCP$. 因为 $PF\perp AP$，所以 $\angle APF=90^\circ$，所以 $\angle BAP+\angle BFP=360^\circ-\angle APF-\angle ABF=180^\circ$. 因为 $\angle BFP+\angle CFP=180^\circ$，所以 $\angle BAP=\angle CFP$，所以 $\angle BCP=\angle CFP$，所以 $\triangle PFC$ 为等腰三角形. 又因为 $PQ\perp BC$，所以 $FQ=CQ=1$，所以 $CF=2$，所以 $BF=CB-CF=3$.



3.（1）**证明**：因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AD/\!/BC$，所以 $\angle OAE=\angle OCF$，$\angle AEO=\angle CFO$. 因为 AC，EF 交于点 O，点 O 为▱$ABCD$ 的对称中心，所以 $AO=CO$，所以 $\triangle AEO\cong\triangle CFO$（AAS），所以 $S_{\triangle AEO}=S_{\triangle CFO}$. 因为 $S_{四边形ABFE}=S_{四边形ABFO}+S_{\triangle AEO}$，所以 $S_{四边形ABFE}=S_{四边形ABFO}+S_{\triangle CFO}=S_{\triangle ABC}$. 因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}S_{▱ABCD}$，所以 $S_{四边形ABFE}=\frac{1}{2}S_{▱ABCD}$，即 EF 平分▱$ABCD$ 的面积.

（2）$20+2\sqrt{17}$　**提示**：如图 1，过点 A 作 $AG\perp BC$ 于点 G，过点 E 作 $EQ\perp BC$ 于点 Q，则 $\angle AGQ=\angle EQG=90^\circ$. 因为 EF 平分菱形 $ABCD$ 的面积，所以 EF 经过菱形 $ABCD$ 的对称中心，且 $CF=AE=1$. 因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $AB=BC=10$，$AD/\!/BC$，所以 $\angle GAE+\angle AGQ=180^\circ$，所以 $\angle GAE=\angle AGQ=\angle EQG=90^\circ$，所以四边形 $AEQG$ 是矩形，所以 $AE=GQ=1$. 因为菱形 $ABCD$ 的边长为 10，面积为 80，所以 $BC\cdot AG=80$，所以 $AG=8$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABG$ 中，由勾股定理，得 $BG=\sqrt{AB^2-AG^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$，所以 $QF=BC-CF-GQ-BG=10-1-1-6=2$，所以 $EF=\sqrt{EQ^2+QF^2}=\sqrt{8^2+2^2}=2\sqrt{17}$，所以四边形 $ABFE$ 的周长为 $AB+BF+EF+AE=AB+BC-CF+EF+CF=AB+BC+EF=10+10+2\sqrt{17}=20+2\sqrt{17}$.

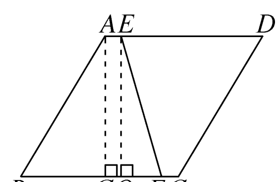


图 1

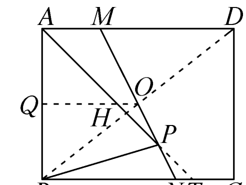


图 2

(3) **解**:如图 2,连接 BD 交 MN 于点 O,由题意可知,$AM=CN$,$OM=ON=\frac{1}{2}MN$,取 AB 中点 Q,连接 OQ,交 AP 于点 H,延长 AP 交 BC 于点 T,则 $AQ=\frac{1}{2}AB=40$ m. 因为 Q,O 分别为 AB,BD 的中点,所以 $OQ/\!/AD$,$OQ=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC=50$ m,所以 $\angle AQO=90°$. 因为点 P 到 AD,AB 的距离相等,所以 $\angle BAT=\frac{1}{2}\angle BAD=45°$,所以 $QH=AQ=40$ m,$BT=AB=80$ m. 在 Rt$\triangle AQH$ 中,由勾股定理,得 $AH=\sqrt{AQ^2+QH^2}=\sqrt{40^2+40^2}=40\sqrt{2}$(m),在Rt$\triangle ABT$ 中,$AT=\sqrt{AB^2+BT^2}=\sqrt{80^2+80^2}=80\sqrt{2}$(m),所以 $AH=\frac{1}{2}AT$. 因为 $OQ/\!/AD$,$BC/\!/AD$,所以 $OQ/\!/BC$,所以 $\angle OHP=\angle NTP$,$\angle HOP=\angle TNP$. 因为 $PM=3PN$,所以 $PN=\frac{1}{4}MN$. 因为 $ON=\frac{1}{2}MN$,所以 $OP=\frac{1}{4}MN=PN$,所以$\triangle OPH\cong\triangle NPT$(AAS),所以 $PH=PT$,$NT=OH=OQ-QH=50-40=10$(m),所以 $BN=BT-NT=80-10=70$(m),所以 $AM=CN=BC-BN=100-70=30$(m).

2 400 m^2　**提示**:因为 $AH=\frac{1}{2}AT$,所以 $AH=HT$. 因为 $PH=PT$,所以 $AP=3PT$,所以 $AP=\frac{3}{4}AT$,所以 $S_{\triangle ABP}=\frac{3}{4}S_{\triangle ABT}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times 80\times 80=2\ 400(m^2)$,所以$\triangle ABP$ 的面积为 2 400 m^2.