第 1 章　反比例函数

知识回放

- 反比例函数
  - 定义：$y=\frac{k}{x}$(k是常数，且$k\neq0$)
  - 图象：双曲线
  - 性质
    - 当$k>0$时,双曲线的两支分别在第一、三象限,在每个象限内,y随x的增大而减小
    - 当$k<0$时,双曲线的两支分别在第二、四象限,在每个象限内,y随x的增大而增大

名师精讲

考点一　判断点是否在反比例函数的图象上

例 1　(宿迁市宿豫区期末)下列各点中与点(2,－4)在同一个反比例函数图象上的是　(　　)

A. (1,－5)　　B. (3,－1)

C. (4,－2)　　D. (6,－3)

分析　根据在同一个反比例函数图象上的点的横、纵坐标的积为常数k,只需计算出四个选项中哪个点的横、纵坐标的积等于－8 即可.

答案　C

关键提示

数与形之间的关系是:当点的坐标满足函数表达式时,点在此函数图象上,当点的坐标不满足函数表达式时,点不在此函数图象上;反之也成立.

考点二　反比例函数的图象与性质

例 2　(泰州市靖江市期末)已知$P(x_1,-2)$,$Q(x_2,2)$,$R(x_3,3)$三点都在反比例函数$y=\frac{a^2+1}{x}$的图象上,则下列关系正确的是　(　　)

A. $x_1<x_3<x_2$　　B. $x_1<x_2<x_3$

C. $x_3<x_2<x_1$　　D. $x_2<x_3<x_1$

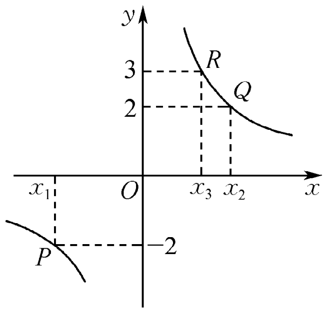
分析　方法一:根据题意可知$x_1=-\frac{a^2+1}{2}$,$x_2=\frac{a^2+1}{2}$,

易错警示

本题在借助点的纵坐标的值判断横坐标的大小时应注意利用图象的增减性时必须保证点在同一象限内,在不同的象限时可以利用符号判断大小.

$x_3=\frac{a^2+1}{3}$. 因为 $a^2+1>0$,所以 $x_1<x_3<x_2$.

方法二:判断 x_1,x_2,x_3 的大小可以结合其符号的正负以及图象的增减性来判断. 因为 $k=a^2+1>0$,所以图象在第一、三象限,所以 $x_1<0,x_2>0,x_3>0$,所以 x_1 最小. 而 x_2,x_3 的大小可以利用图象的增减性加以判断,画出草图(如图). 因为 $2<3$,y 随 x 的增大而减小,所以 $x_2>x_3$,所以 $x_1<x_3<x_2$.



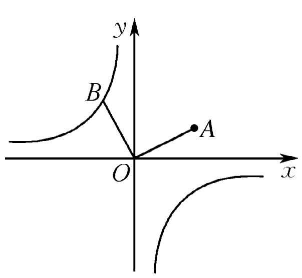
答案　A

方法与技巧

数形结合是常用的思想方法,优点是直观、形象,一目了然.

考点三　反比例函数表达式的确定

例3 (南京市玄武区期末)如图,在平面直角坐标系 xOy 中,B 是反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 图象上的任意一点,将点 B 绕原点 O 按顺时针方向旋转 $90°$到点 A.



(1) 假设点 A 的坐标为(4,2).

①求 k 的值.

②在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上是否存在一点 P,使得△AOP 是等腰三角形且∠AOP 是顶角? 若存在,写出点 P 的坐标;若不存在,请说明理由.

(2) 当 $k=-1$,点 B 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上运动时,试判断点 A 在怎样的图象上运动,并写出表达式.

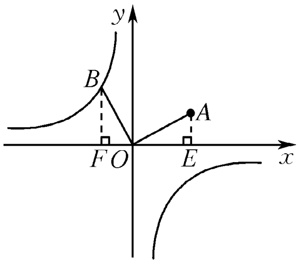
关键提示

旋转改变图形的位置,但没有改变图形的形状和大小,而绕直线上的点旋转 $90°$,又隐藏着互余角,充分认识到以上两点是发现和构造全等三角形的关键.

分析　(1) ①过点 A 作 $AE\perp x$ 轴于点 E,过点 B 作 $BF\perp x$ 轴于点 F. 通过同角的余角相等,结合旋转的性质即可证出△BOF≌△OAE. 根据全等三角形的性质找出相等边,再结合点 A 的坐标以及点 B 所在的位置即可得出点 B 的坐标. 由点 B 的坐标利用反比例函数图象上点的坐标特征即可求出 k 的值. ②假设存在,设点 P 的坐标为(m,n). 根据等腰三角形的性质,结合反比例函数图象上点的坐标特征,即可得出关于 m,n 的二元二次方程组,解方程组即可得出点 P 的坐标.

(2) 设点 B 的坐标为 (a,b). 由(1)中①可知,点 A 的坐标为 $(b,-a)$,根据反比例函数图象上点的坐标特征即可得出结论.

答案　(1) ①如图,过点 A 作 $AE\perp x$ 轴于点 E,过点 B 作 $BF\perp x$ 轴于点 F.



因为 $BF\perp x$ 轴,$AE\perp x$ 轴,所以 $\angle BFO=\angle OEA=90^\circ$,所以 $\angle OBF+\angle BOF=90^\circ$. 因为 $\angle BOA=90^\circ$,所以 $\angle BOF+\angle AOE=90^\circ$,所以 $\angle OBF=\angle AOE$. 在 $\triangle BOF$ 和 $\triangle OAE$ 中,因为 $\begin{cases}\angle BFO=\angle OEA,\\ \angle OBF=\angle AOE,\\ OB=AO,\end{cases}$ 所以 $\triangle BOF\cong\triangle OAE$ (AAS),所以 $OF=AE$,$BF=OE$. 因为点 $A(4,2)$,所以 $BF=OE=4$,$OF=AE=2$,所以点 $B(-2,4)$. 因为点 B 在反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象上,所以 $k=(-2)\times 4=-8$.

②假设存在,设点 P 的坐标为 (m,n). 因为 $\triangle AOP$ 是等腰三角形且 $\angle AOP$ 是顶角,所以 $OA=OP$. 又因为点 P 在反比例函数 $y=-\dfrac{8}{x}$ 的图象上,所以 $\begin{cases}mn=-8,\\ m^2+n^2=4^2+2^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m_1=-4,\\ n_1=2;\end{cases}$ $\begin{cases}m_2=4,\\ n_2=-2;\end{cases}$ $\begin{cases}m_3=2,\\ n_3=-4;\end{cases}$ $\begin{cases}m_4=-2,\\ n_4=4.\end{cases}$ 故在反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象上存在一点 P,使得 $\triangle AOP$ 是等腰三角形且 $\angle AOP$ 是顶角,点 P 的坐标为 $(-4,2)$ 或 $(4,-2)$ 或 $(2,-4)$ 或 $(-2,4)$.

(2) 设点 B 的坐标为 (a,b). 同理(1)中①可知,点 A 的坐标为 $(b,-a)$. 因为 $k=-1$,且点 B 在反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象上运动,所以 $ab=-1$,所以 $b\cdot(-a)=-ab=1$,所以点 A 在反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象上运动.

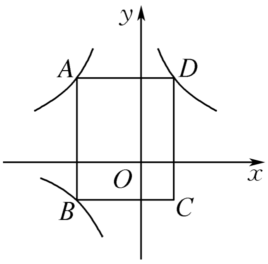
方法与技巧

对于(1)②,当存在多个等量关系时,用方程思想列出关于 m,n 的二元二次方程组是解题的基本技巧;对于(2),根据点 B 的坐标表示出点 A 的坐标是解题的基本策略.

考点四　反比例函数比例系数 k 的几何意义

例 4　(连云港市海州区期末)如图,矩形 $ABCD$ 的顶点

B,D 落在反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 的图象上,点 A 落在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$(k 为常数,$k\neq 0$)在第二象限的图象上,矩形 $ABCD$ 被坐标轴分割成四个小矩形. 若在第四象限的小矩形的面积为 1,则 k 的值为________.



分析 设点 $A(x_A,y_A)$,$B(x_B,y_B)$,$C(x_C,y_C)$,$D(x_D,y_D)$,由题意可知 $x_A=x_B$,$x_D=x_C$,$y_B=y_C$,$y_A=y_D$. 因为点 B,D 落在反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 的图象上,所以 $x_D\cdot y_D=2$,$x_B\cdot y_B=2$. 因为第四象限的小矩形的面积为 1,所以 $x_C\cdot(-y_C)=-x_Dy_B=1$. 又因为 $x_D\cdot y_D\cdot x_B\cdot y_B=2\times2=4$,所以 $(-x_Dy_B)\cdot(-x_By_D)=4$,所以 $x_By_D=-4$. 因为点 A 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上,所以 $k=x_Ay_A=x_By_D=-4$.

答案 -4

> **方法与技巧**
>
> 反比例函数图象上任意一点的横、纵坐标之积等于比例系数 k,由此可把横、纵坐标之积当作一个整体来考虑,这是解决与面积有关的问题的基本策略.

考点五 反比例函数与一次函数的综合应用

例5 (苏州市期末)已知直线 $y=k_1x+b$ 与双曲线 $y=\frac{k_2}{x}$ 交于 A,B 两点,其横坐标分别为 1 和 5,求关于 x 的不等式 $k_1x<\frac{k_2}{x}-b$ 的解集.

分析 如图 1,若 $k_2>0$,则当 $0<x<1$ 或 $x>5$ 时,$k_1x+b<\frac{k_2}{x}$,即关于 x 的不等式 $k_1x<\frac{k_2}{x}-b$ 的解集为 $0<x<1$ 或 $x>5$;如图 2,若 $k_2<0$,则当 $1<x<5$ 或 $x<0$ 时,$k_1x+b<\frac{k_2}{x}$,即关于 x 的不等式 $k_1x<\frac{k_2}{x}-b$ 的解集为 $1<x<5$ 或 $x<0$.

> **方法与技巧**
>
> 转化思想:将不等式 $k_1x<\frac{k_2}{x}-b$ 的解集转化为不等式 $k_1x+b<\frac{k_2}{x}$ 的解集.
>
> 数形结合思想:将不等式转化为直线与双曲线的位置关系.

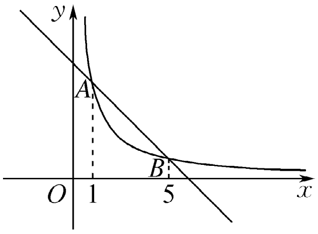


图 1

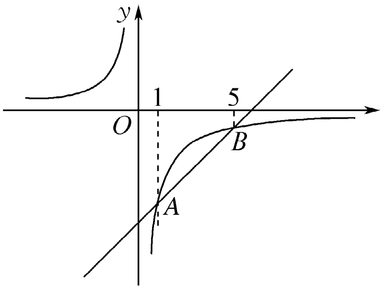


图 2

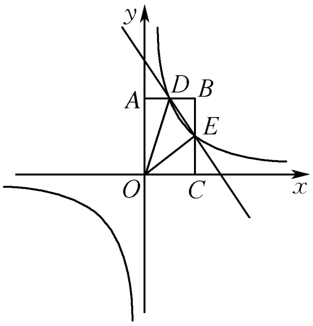
答案　当 $k_2>0$ 时，原不等式的解集为 $0<x<1$ 或 $x>5$；当 $k_2<0$ 时，原不等式的解集为 $1<x<5$ 或 $x<0$.

例 6　（扬州市江都区期末）如图，四边形 $OABC$ 为矩形，以 O 为原点建立平面直角坐标系，点 C 在 x 轴的正半轴上，点 A 在 y 轴的正半轴上，反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象经过 AB 的中点 $D(1,3)$，且与 BC 交于点 E，设直线 DE 的函数表达式为 $y=mx+n$.

（1）求 k 的值和点 E 的坐标.

（2）求 $\triangle DOE$ 的面积.

（3）若 Q 为 x 轴上一点，P 为反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 图象上一点，是否存在点 P，Q，使得以 P，Q，D，E 为顶点的四边形为平行四边形？如果存在，直接写出点 P 的坐标；如果不存在，请说明理由.



关键提示

反比例函数的代数特性是图象上任意一点的横、纵坐标之积是定值，与之相关的几何特性是过图象上任一点向两坐标轴作垂线，与坐标轴围成的几何图形面积是定值. 这一特性可将反比例函数与方程、数形结合、转化等数学思想相结合，具有很高的区分度.

分析　（1）将点 D 的坐标代入反比例函数的表达式可求得 k 的值. 由矩形的性质可知点 E 的横坐标，将点 E 的横坐标代入反比例函数的表达式可求得点 E 的纵坐标.

（2）在平面直角坐标系中求三角形的面积时，若所求三角形的边与 x 轴既不平行也不垂直，则需将三角形进行切割转化为边平行或垂直于坐标轴的图形求解面积.

（3）分 DE 为平行四边形的一边和 DE 为平行四边形的对角线两种情况，分别列方程求解即可.

答案　（1）将点 $D(1,3)$ 代入 $y=\dfrac{k}{x}$，得 $k=xy=1\times3=3$，所以反比例函数的表达式为 $y=\dfrac{3}{x}$. 因为 $D(1,3)$ 是边 AB 的中点，点 A 在 y 轴上，所以点 B 的横坐标为 2. 又因为四边形 $OABC$ 为矩形，点 E 在边 BC 上，所以点 E 的横坐标也为 2，所以点 E 的纵坐标为 $\dfrac{3}{2}$，所以点 $E\left(2,\dfrac{3}{2}\right)$.

（2）方法一：$\triangle DOE$ 的面积为 $S_{矩形OABC}-S_{\triangle AOD}-S_{\triangle DBE}-S_{\triangle OCE}=2\times3-\dfrac{1}{2}\times3\times1-\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\times2\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{4}$.

方法二：过点 D 作 $DF/\!/y$ 轴，交 OE 于点 F. 易知直线 OE 的函数表达式为 $y=\dfrac{3}{4}x$，所以点 $F\left(1,\dfrac{3}{4}\right)$，所以 $\triangle DOE$ 的

方法与技巧

反比例函数与一次函数的交点坐标满足两函数的表达式，因此通过解方程组可求交点坐标. 要善于将不规则图形的面积转化为规则图形的面积来求解.

面积为 $S_{\triangle ODF}+S_{\triangle DFE}=\frac{1}{2}DF\cdot OC=\frac{1}{2}\times\left(3-\frac{3}{4}\right)\times 2=\frac{9}{4}$.

(3) 存在. 点 P 的坐标为 $\left(-2,-\frac{3}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{2}{3},\frac{9}{2}\right)$.

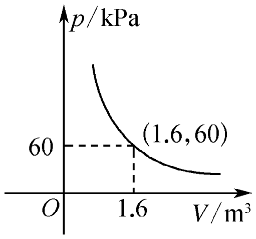
当 DE 是平行四边形的边时，$PQ/\!/DE$，且 $PQ=DE$. 因为点 Q 的纵坐标为 0，所以点 P 的纵坐标为 $\pm\frac{3}{2}$. 令 $y=\frac{3}{2}$，则 $\frac{3}{2}=\frac{3}{x}$，解得 $x=2$(舍去)；令 $y=-\frac{3}{2}$，则 $-\frac{3}{2}=\frac{3}{x}$，解得 $x=-2$. 所以点 P 的坐标为 $\left(-2,-\frac{3}{2}\right)$.

当 DE 是平行四边形的对角线时，因为点 $D(1,3)$，$E\left(2,\frac{3}{2}\right)$，所以 DE 的中点坐标为 $\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$. 设点 $P\left(a,\frac{3}{a}\right)$，$Q(x,0)$，则 $\frac{3}{a}\div 2=\frac{9}{4}$，$\frac{a+x}{2}=\frac{3}{2}$，解得 $a=\frac{2}{3}$，$x=\frac{7}{3}$，所以点 $P\left(\frac{2}{3},\frac{9}{2}\right)$.

综上所述，存在点 P,Q，使得以 P,Q,D,E 为顶点的四边形为平行四边形，点 P 的坐标为 $\left(-2,-\frac{3}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{2}{3},\frac{9}{2}\right)$.

考点六　反比例函数的应用

例 7 (南京市鼓楼区期末)某气球内充满了一定质量的气体，当温度不变时，气球内气体的气压 p(kPa)是气体体积 V(m^3)的反比例函数，其图象如图所示. 当气球内的气压大于 120 kPa 时，气球将爆炸. 为了安全起见，气球的体积应（　　）



A. 不小于 $\frac{5}{4}$ m^3

B. 小于 $\frac{5}{4}$ m^3

C. 不小于 $\frac{4}{5}$ m^3

D. 小于 $\frac{4}{5}$ m^3

分析　设气球内气体的气压 p(kPa)和气体体积 V(m^3)之间的函数表达式为 $p=\frac{k}{V}(V>0)$. 因为图象过点(1.6，60)，所以 $k=96$，即 $p=\frac{96}{V}(V>0)$. 因为在第一象限内，p 随 V 的增大而减小，所以当 $p\leqslant 120$ 时，$V=\frac{96}{p}\geqslant\frac{4}{5}$.

关键提示

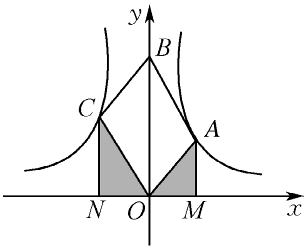
解题的关键是由待定系数法求得函数表达式，利用函数的图象与性质去解决问题.

数学思想

数学建模思想是解决各类实际问题的一种方法，它从数学的角度出发去分析实际问题，尽可能通过抽象(或简化)确定出主要的量，应用与各学科有关的定律、原理建立起各个量之间的某种关系，从实际问题中建立数学模型.

答案　C

例 8　如图，四边形 $OABC$ 是平行四边形，对角线 OB 在 y 轴正半轴上，位于第一象限的点 A 和第二象限的点 C 分别在双曲线 $y=\frac{k_1}{x}$ 和 $y=\frac{k_2}{x}$ 的一支上，分别过点 A，C 作 x 轴的垂线，垂足分别为 M 和 N，给出以下结论：①$\frac{AM}{CN}=\frac{|k_1|}{|k_2|}$；②阴影部分的面积是$\frac{1}{2}(k_1+k_2)$；③当$\angle AOC=90^\circ$时，$|k_1|=|k_2|$；④若四边形 $OABC$ 是菱形，则两双曲线既关于 x 轴对称，也关于 y 轴对称. 其中正确的结论有________（填序号）.



分析　分别过点 A，C 作 $AE\perp y$ 轴于点 E，$CF\perp y$ 轴于点 F. 根据平行四边形的性质，得 $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle CBO}$. 利用三角形面积公式，得 $AE=CF$，所以 $OM=ON$. 再利用反比例函数 k 的几何意义和三角形面积公式，得 $S_{\triangle AOM}=\frac{1}{2}|k_1|=\frac{1}{2}OM\cdot AM$，$S_{\triangle CON}=\frac{1}{2}|k_2|=\frac{1}{2}ON\cdot CN$，所以$\frac{AM}{CN}=\frac{|k_1|}{|k_2|}$，故①正确. 由 $S_{\triangle AOM}=\frac{1}{2}|k_1|$，$S_{\triangle CON}=\frac{1}{2}|k_2|$，得 $S_{阴影部分}=S_{\triangle AOM}+S_{\triangle CON}=\frac{1}{2}(|k_1|+|k_2|)=\frac{1}{2}(k_1-k_2)$，故②错误. 当$\angle AOC=90^\circ$时，易证四边形 $OABC$ 是矩形. 由于不能确定 OA 与 OC 相等，所以不能确定$\triangle AOM\cong\triangle CON$，所以不能确定 $AM=CN$，则不能确定 $|k_1|=|k_2|$，故③错误. 若四边形 $OABC$ 是菱形，则根据菱形的性质，得 $OA=OC$，所以 Rt$\triangle AOM\cong$Rt$\triangle CON$（HL），所以 $AM=CN$，所以$|k_1|=|k_2|$，即 $k_1=-k_2$. 根据反比例函数的性质可知两双曲线既关于 x 轴对称，也关于 y 轴对称，故④正确.

答案　①④

> **关键提示**
>
> 反比例函数图象上任意一点的横、纵坐标之积等于比例系数 k，由此可把横、纵坐标之积当作一个整体来考虑. 平行四边形是中心对称图形，对角线两侧的三角形面积相等，由此推出 $OM=ON$，这是解决问题的切入点. 两个比例系数互为相反数的反比例函数图象之间的位置关系要根据轴对称的定义判定，可在函数 $y=\frac{k_1}{x}$ 的图象上任取一点(a,b)，根据条件推出 $k_1=-k_2$，由此可得点$(-a,b)$在函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 的图象上，即可得出两双曲线关于 y 轴对称. 类似可得出两双曲线也关于 x 轴对称.

抢分必做

必会题

1. 对于反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$，下列说法不正确的是　（　　）

A. 图象分布在第二、四象限

B. 当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大

C. 图象经过点$(1,-2)$

D. 若点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$都在图象上，且 $x_1<x_2$，则 $y_1>y_2$

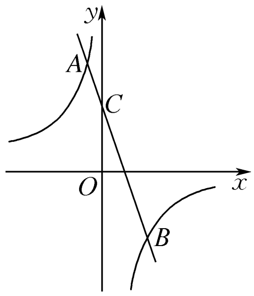
2. (苏州市常熟市期末)已知反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k<0)$，当 $1\leqslant x\leqslant 3$ 时，函数 y 的最大值和最小值之差为 4，则 $k=$________.

3. 如图，已知一次函数 $y=-3x+3$ 的图象与反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象交于 $A(-1,6)$，$B(n,-3)$ 两点，与 y 轴交于点 C.

(1) 求反比例函数的表达式及 n 的值；

(2) 根据函数图象，直接写出不等式 $-3x+3\leqslant\dfrac{k}{x}$ 的解集；

(3) 若 P 是 x 轴上一点，且△BOP 的面积等于△COB 面积的 2 倍，求点 P 的坐标.



4. (扬州市期中)小明在学习过程中遇到了一个函数 $y=\dfrac{4}{x-2}+1$，小明根据学习反比例函数 $y=\dfrac{4}{x}$ 的经验，对函数 $y=\dfrac{4}{x-2}+1$ 的图象和性质进行了探究.

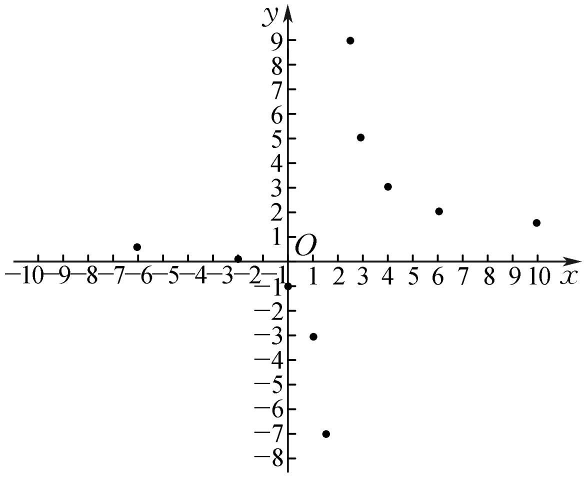
(1) 画函数图象：函数 $y=\dfrac{4}{x-2}+1$ 的自变量的取值范围是________.

①列表：如下表.

x	…	-6	-2	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	3	4	6	10	…
y	…	$\frac{1}{2}$	0	-1	-3	-7	9	5	3	2	$\frac{3}{2}$	…

②描点：点已描出，如图所示.

③连线：请你根据描出的点，画出该函数的图象.



(2) 探究性质：根据反比例函数 $y=\frac{4}{x}$ 的图象和性质，结合画出的函数 $y=\frac{4}{x-2}+1$ 的图象，回答下列问题：

①该函数的图象具有轴对称性和中心对称性，其对称中心的坐标是________；

②该函数图象可以看成是由函数 $y=\frac{4}{x}$ 的图象平移得到的，其平移方式为____；

③结合函数图象可知，当 $\frac{4}{x-2}+1\geqslant -1$ 时，x 的取值范围为____________.

易错题

5. 已知点 $A(-1,y_1)$，$B(a,y_2)$ 在反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象上，若 $y_2>y_1$，则 a 的取值范围是　　(　　)

A. $a<-1$ 或 $a>0$　　B. $-1<a<0$

C. $a>0$　　D. $a<-1$

6. (扬州市中考)在平面直角坐标系中，函数 $y=\frac{4}{x+2}$ 的图象与坐标轴的交点个数是　　(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

7. (淮安市盱眙县期末)在平面直角坐标系中，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)(x_1\neq x_2)$，则下列说法错误的是　　(　　)

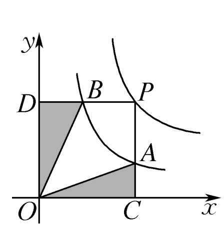
A. 若 $x_1x_2<0$，则 $y_1y_2<0$

B. 若 $(x_1-x_2)(y_1-y_2)<0$，则 $k<0$

C. 若 $x_1+x_2=0$，则 A，B 两点关于原点对称

D. 若 $k>0$，$x_1>x_2>0$，则 $y_2>y_1>0$

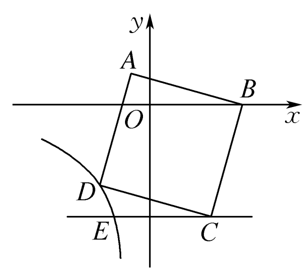
8. 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 和 $y=\frac{1}{x}$ 在第一象限内的图象如图所示，当点 P 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上运动时，作 $PC\perp x$ 轴于点 C，交反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象于点 A，作 $PD\perp y$ 轴于点 D，交反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象于点 B. 下列结论：①$S_{\triangle OBD}=S_{\triangle OAC}$；②$PA$ 与 PB 始终相等；③$S_{四边形PAOB}=k-1$；④若 $PA=AC$，则 $PB=DB$. 其中正确的有　　(　　)



A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

热点题

9. (扬州市期末)如图,在平面直角坐标系中,正方形 $ABCD$ 的顶点 A 的坐标为 $(-1,1)$,点 B 在 x 轴正半轴上,点 D 在第三象限内的双曲线 $y=\frac{8}{x}$ 上,过点 C 作 $CE /\!/ x$ 轴,交双曲线于点 E,则 CE 的长为　　(　　)



A. $\frac{8}{5}$　　B. $\frac{23}{5}$　　C. 3.5　　D. 5

10. (镇江市句容市期末)在平面直角坐标系中,函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 与 $y=x-1$ 的图象交于点 $P(m,n)$,且 $\frac{1}{n}-\frac{1}{m}=\frac{1}{4}$,则 k 的值为________.

11. (盐城市盐都区期末)如图 1,在矩形 $ABCD$ 中,$BC=x$,$CD=y$,y 与 x 之间满足的反比例函数关系如图 2 所示,等腰直角三角形 AEF 的斜边 EF 过点 C,M 为 EF 的中点. 给出下列结论:①当 $x=3$ 时,$EC<EM$;②当 $y=9$ 时,$EC>EM$;③当 x 增大时,$EC\cdot CF$ 的值增大;④当 y 增大时,$BE\cdot DF$ 的值不变. 其中结论正确的是________(填序号).

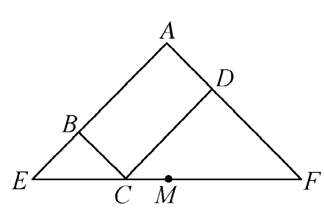


图 1

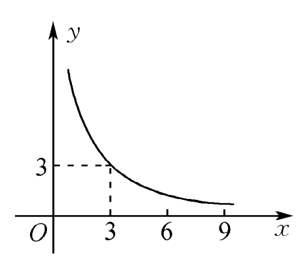
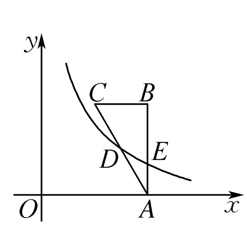


图 2

12. 如图,在平面直角坐标系中,$\angle ABC=90°$,$\angle A=30°$,$AC=6$,顶点 A 在 x 轴的正半轴上,$AB\perp x$ 轴. 若双曲线 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 交边 AC 于中点 D,交边 AB 于点 E,且满足 $3AE=AB$,则 k 的值为________.



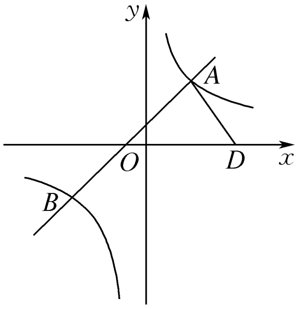
13. (连云港市海州区期末)如图,已知一次函数的图象与反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$(k 为常数,$k\neq0$)的图象相交于点 $A(m,3)$,$B(-3,-2)$.

(1) $k=$________,$m=$________.

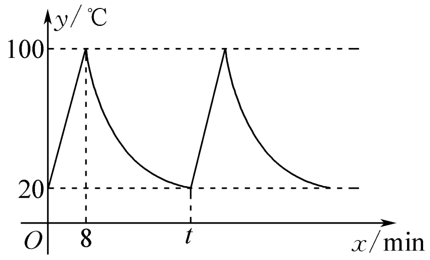
(2) 若点 $D(n,0)$在 x 轴正半轴上,连接 AD.

①用无刻度的直尺和圆规作图:过点 B 作 $BC/\!/AD$,交函数 $y=\dfrac{k}{x}$的图象于点 C(不写作法,保留作图痕迹,标明字母);

②连接①中的 CD,当四边形 $ABCD$ 为平行四边形时,求 n 的值.



14. 小明家饮水机中原有水的温度为 20 ℃,通电开机后,饮水机自动开始加热,此过程中水温 y(℃)与开机时间 x(min)满足一次函数关系,当加热到 100 ℃时自动停止加热,随后水温开始下降,此过程中水温 y(℃)与开机时间 x(min)成反比例关系,当水温降至 20 ℃时,饮水机又自动开始加热……重复上述程序(如图所示),根据图中提供的信息,解答下列问题:



(1) 当 $0\leqslant x\leqslant8$ 时,求水温 y(℃)与开机时间 x(min)的函数表达式;

(2) 求图中 t 的值;

(3) 若小明下午五点将饮水机在通电开机后即外出打篮球,预计一个半小时回到家中,回到家时,饮水机内的水温约为多少℃?请说明你的理由.

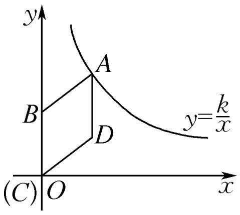
15. 如图,在平面直角坐标系中,菱形 $ABCD$ 的顶点 C 与原点 O 重合,点 B 在 y 轴的正半轴上,反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0,x>0)$的图象经过点 A,点 D 的坐标为$\left(2,\frac{3}{2}\right)$.

(1) k 的值为________;

(2) 若将菱形 $ABCD$ 沿 x 轴正方向平移 m 个单位长度.

①当菱形的顶点 B 落在反比例函数的图象上时,求 m 的值;

②若在平移过程中,反比例函数的图象与菱形的边 AD 始终有交点 P,请写出 m 的取值范围.



拓展题

16. 如图 1,在△OAB 中,点 $A(0,2)$,$B(4,0)$,将△OAB 向右平移 m 个单位长度,得到△$O'A'B'$.

(1) 当 $m=4$ 时,如图 2,若反比例函数 $y=\frac{k}{x}$的图象经过点A',一次函数 $y=ax+b$ 的图象经过 A',B'两点,求反比例函数及一次函数的表达式;

(2) 若反比例函数 $y=\frac{k}{x}$的图象经过点A'及边$A'B'$的中点M,求 m 的值.

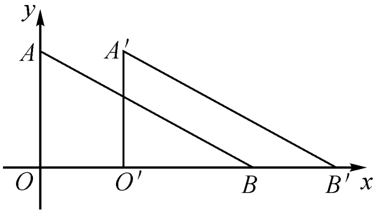


图 1

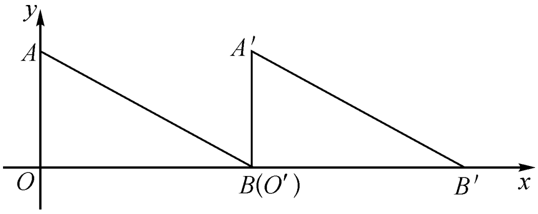


图 2

临门一脚

本章反比例函数的考点主要是反比例函数的图象与性质.考试时一会直接考查图象与性质,二会考查利用特征图形的面积反推导反比例函数表达式,三会考查灵活运用反比例函数的性质和图象.试题难度较大,需要对图象与性质特别熟悉.

参考答案与解析

第 1 章　反比例函数

1. D

2. -6　**提示：**当 $k<0$ 时，在每一象限内，反比例函数 y 随 x 的增大而增大. 因为当 $1\leqslant x\leqslant 3$ 时，函数 y 的最大值和最小值之差为 4，所以 $\frac{k}{3}-\frac{k}{1}=4$，解得 $k=-6$.

3. (1) **解：**因为一次函数 $y=-3x+3$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象交于 $A(-1,6)$，$B(n,-3)$ 两点，所以 $k=-1\times 6=-3n$，所以 $k=-6$，$n=2$，所以 $y=-\frac{6}{x}$.

(2) 由(1)可知 $B(2,-3)$. 由图象，得 $-3x+3\leqslant\frac{k}{x}$ 的解集为 $-1\leqslant x<0$ 或 $x\geqslant 2$.

(3) 因为 $y=-3x+3$，所以当 $x=0$ 时，$y=3$，所以 $C(0,3)$，所以 $OC=3$，所以 $S_{\triangle COB}=\frac{1}{2}OC\cdot|x_B|=\frac{1}{2}\times 3\times 2=3$. 设 $P(a,0)$，所以 $S_{\triangle BOP}=\frac{1}{2}OP\cdot|y_B|=\frac{1}{2}|a|\cdot 3=2S_{\triangle COB}=6$，所以 $|a|=4$，所以 $P(\pm 4,0)$.

4. **解：**(1) $x\neq 2$　③画出该函数的图象略.

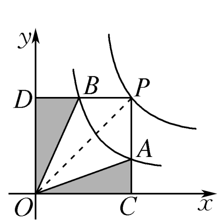
(2) ①$(2,1)$　②先向右平移 2 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度(或先向上平移 1 个单位长度，再向右平移 2 个单位长度)　③$x\leqslant 0$ 或 $x>2$

5. A　**提示：**因为点 $A(-1,y_1)$，$B(a,y_2)$ 在反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象上，所以 $y_1=\frac{1}{-1}=-1$，$y_2=\frac{1}{a}$. 因为 $y_2>y_1$，所以 $\frac{1}{a}>-1$. 当 $a>0$ 时，解得 $a>-1$，所以 $a>0$；当 $a<0$ 时，解得 $a<-1$. 综上所述，a 的取值范围是 $a<-1$ 或 $a>0$.

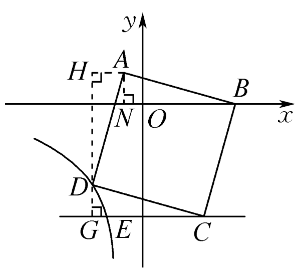
6. B　**提示：**当 $x=0$ 时，$y=2$，故函数与 y 轴的交点坐标为 $(0,2)$；当 $y=0$ 时，函数无意义，故函数与 x 轴没有交点. 所以函数 $y=\frac{4}{x+2}$ 的图象与坐标轴的交点个数是 1.

7. B　**提示：**因为 $x_1x_2<0$，$y_1y_2=\frac{k}{x_1}\cdot\frac{k}{x_2}=\frac{k^2}{x_1x_2}$，所以 $y_1y_2<0$，故 A 正确；因为 $(x_1-x_2)\cdot(y_1-y_2)<0$，所以 $x_1-x_2>0$，$y_1-y_2<0$ 或 $x_1-x_2<0$，$y_1-y_2>0$，所以 $x_1>x_2$，$y_1<y_2$ 或 $x_1<x_2$，$y_1>y_2$，无法确定 x_1，x_2 是否同号，所以无法确定 k 的正负，故 B 错误；因为 $x_1+x_2=0$，所以 $x_1=-x_2$，所以 $y_1=\frac{k}{x_1}=\frac{k}{-x_2}=-y_2$，所以 $y_1+y_2=0$，所以 A，B 两点关于原点对称，故 C 正确；若 $k>0$，则反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象在第一、三象限，且在每个象限 y 随 x 的增大而减小，所以当 $x_1>x_2>0$ 时，$y_2>y_1>0$，故 D 正确.

8. C　**提示：**因为 A，B 是反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 图象上的点，$PC\perp x$ 轴，$PD\perp y$ 轴，所以 $S_{\triangle OBD}=S_{\triangle OAC}=\frac{1}{2}$，故①正确；设点 P 的坐标为 $\left(m,\frac{k}{m}\right)$，则 $A\left(m,\frac{1}{m}\right)$，$B\left(\frac{m}{k},\frac{k}{m}\right)$，所以 $PA=\frac{k}{m}-\frac{1}{m}=\frac{k-1}{m}$，$PB=m-\frac{m}{k}=\frac{mk-m}{k}$，所以无法确定 PA 和 PB 的大小关系，故②错误；根据题意，得矩形 $PCOD$ 的面积是 k，所以 $S_{四边形PAOB}=S_{矩形PCOD}-S_{\triangle OBD}-S_{\triangle OAC}=k-1$，故③正确；如图，连接 OP，因为 $PA=AC$，所以 $PC=2AC$，所以 $S_{\triangle ODP}=S_{\triangle OPC}=2S_{\triangle OAC}=2\times\frac{1}{2}=1$，所以 $S_{\triangle ODP}=2S_{\triangle OBD}$，所以 $PD=2BD$，即 $PB=DB$，故④正确. 综上所述，正确的结论有①③④，共 3 个.



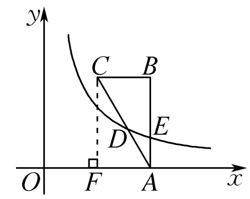
9. B **提示：**设点 $D\left(m,\frac{8}{m}\right)$，如图，过点 D 作 x 轴的垂线，交 CE 的延长线于点G，过点 A 作 x 轴的平行线，交 GD 的延长线于点H，过点 A 作 $AN\perp x$ 轴于点 N，易证$\triangle DHA\cong\triangle CGD$(AAS)，所以 $HA=DG$，$DH=CG$，同理可证$\triangle ANB\cong\triangle DGC$(AAS)，所以 $AN=DG=1=AH$，则点 $G\left(m,\frac{8}{m}-1\right)$，$AH=-1-m=1$，解得 $m=-2$，故点 $G(-2,-5)$，$D(-2,-4)$，$H(-2,1)$，则点 $E\left(-\frac{8}{5},-5\right)$，$GE=\frac{2}{5}$，$CE=CG-GE=DH-GE=5-\frac{2}{5}=\frac{23}{5}$.



10. 4 **提示：**由题意，得 $k=mn$，$n=m-1$，即 $m-n=1$. 因为 $\frac{1}{n}-\frac{1}{m}=\frac{m-n}{mn}=\frac{1}{k}=\frac{1}{4}$，所以 $k=4$.

11. ④ **提示：**根据题意得，反比例函数的表达式为 $y=\frac{9}{x}(x>0)$. 当 $x=3$ 时，$y=3$，即 $BC=CD=3$，所以易得 $EC=\sqrt{2}BC=3\sqrt{2}$，$CF=\sqrt{2}CD=3\sqrt{2}$，此时点 C 与点 M 重合，即 $EC=EM$，故①错误；当 $y=9$ 时，$x=1$，即 $BC=1$，$CD=9$，所以易得 $EC=\sqrt{2}$，$CF=9\sqrt{2}$，所以 $EF=10\sqrt{2}$，所以 $EM=5\sqrt{2}$，所以 $EC<EM$，故②错误；易得 $EC\cdot CF=\sqrt{2}x\cdot\sqrt{2}y=2xy=18$，所以 $EC\cdot CF$ 为定值，故③错误；易得 $BE\cdot DF=BC\cdot CD=xy=9$，即 $BE\cdot DF$ 的值不变，故④正确.

12. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ **提示：**如图，过点 C 作 $CF\perp x$ 轴于点F. 因为$\angle ABC=90°$，$AB\perp x$ 轴，$CF\perp x$ 轴，所以四边形 $ABCF$ 为矩形，所以 $AF=BC$，$CF=AB$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle A=30°$，$AC=6$，所以 $BC=\frac{1}{2}AC=3$. 由勾股定理，得 $AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=3\sqrt{3}$，所以 $AF=BC=3$，$CF=AB=3\sqrt{3}$，所以 $AE=\frac{1}{3}AB=\sqrt{3}$. 设 $OF=t$，则 $OA=OF+AF=t+3$，所以点 $C(t,3\sqrt{3})$，$A(t+3,0)$，$E(t+3,\sqrt{3})$. 因为 D 为 AC 的中点，所以点 D 的坐标为 $\left(\frac{2t+3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. 因为点 D，E 均在双曲线 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$上，所以 $k=\sqrt{3}(t+3)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(t+\frac{3}{2}\right)$，解得 $t=\frac{3}{2}$，所以 $k=\sqrt{3}(t+3)=\frac{9\sqrt{3}}{2}$.



13. **解：**(1) 6　2

(2) ①如图 1 所示，BC 即为所求.

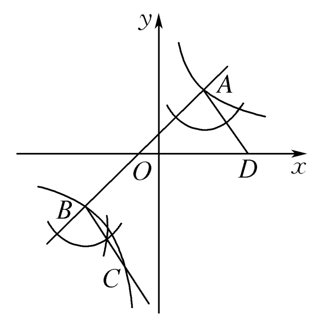


图 1

②如图 2，过点 A 作 $AE\perp OD$ 于点 E，过点 B 作 y 轴的垂线，过点 C 作 x 轴的垂线，两垂线交于点 F. 因为点 $A(2,3)$，所以 $AE=3$. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AD=BC$，$AD/\!/BC$. 因为 $AE/\!/CF$，所以$\angle DAE=\angle BCF$. 在$\triangle ADE$ 和$\triangle CBF$ 中，$\begin{cases}\angle DAE=\angle BCF,\\ \angle AED=\angle CFB,\\ AD=CB,\end{cases}$ 所以 $\triangle ADE\cong\triangle CBF$(AAS)，所以 $CF=AE=3$，$BF=DE$. 因为点 $B(-3,-2)$，所以点 C 的纵坐标为-5. 因为点 C 在函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图象上，所以 $x=-\frac{6}{5}$，所以点 $C\left(-\frac{6}{5},-5\right)$，$F\left(-\frac{6}{5},-2\right)$，所以 $DE=BF=\frac{9}{5}$，所以 $OD=OE+DE=2+\frac{9}{5}=\frac{19}{5}$，所以 $n=\frac{19}{5}$.

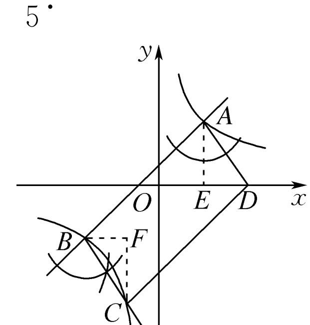


图 2

14. 解:(1) 当 $0\leqslant x\leqslant 8$ 时,设水温 y(℃)与开机时间 x(min)的函数表达式为 $y=kx+b(k\neq 0)$. 将(0,20),(8,100)代入 $y=kx+b$ 中,得 $\begin{cases}b=20,\\8k+b=100,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=10,\\b=20,\end{cases}$ 所以当 $0\leqslant x\leqslant 8$ 时,水温 y(℃)与开机时间 x(min)的函数表达式为 $y=10x+20$.

(2) 当 $8\leqslant x\leqslant t$ 时,设水温 y(℃)与开机时间 x(min)的函数表达式为 $y=\frac{m}{x}(m\neq 0)$. 将(8,100)代入 $y=\frac{m}{x}$ 中,得 $100=\frac{m}{8}$,解得 $m=800$,所以当 $8\leqslant x\leqslant t$ 时,水温 y(℃)与开机时间 x(min)的函数表达式为 $y=\frac{800}{x}$. 当 $y=\frac{800}{x}=20$ 时,$x=40$,所以图中 t 的值为 40.

(3) 当 $x=90-40-40=10$ 时,$y=\frac{800}{10}=80$.

答:小明回到家中时,饮水机内的水温约为 80 ℃.

15. 解:(1) 如图 1,过点 D 作 x 轴的垂线,垂足为 F,则 A,D,F 三点共线. 因为点 D 的坐标为 $\left(2,\frac{3}{2}\right)$,所以 $OF=2,DF=\frac{3}{2}$,所以 $OD=\sqrt{OF^2+DF^2}=\frac{5}{2}$. 因为四边形 $ABCD$ 是菱形,所以 $AD=OD=\frac{5}{2}$,则 $AF=AD+DF=4$,所以 $A(2,4)$. 因为点 A 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0,x>0)$的图象上,所以 $k=xy=2\times 4=8$.

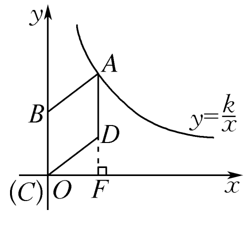


图 1

(2) ① 由(1)知,$OB=OD=\frac{5}{2}$,即点 $B\left(0,\frac{5}{2}\right)$. 将菱形 $ABCD$ 沿 x 轴正方向平移 m 个单位长度,则平移后 $B'\left(m,\frac{5}{2}\right)$. 因为菱形的顶点 B 落在反比例函数 $y=\frac{8}{x}$ 的图象上,所以 $m=\frac{16}{5}$.

②如图,将菱形 $ABCD$ 沿 x 轴正方向平移 m 个单位长度,使得点 D 落在反比例函数 $y=\frac{8}{x}(x>0)$的图象上的 D' 处,过点 D' 作 x 轴的垂线,垂足为 F'.

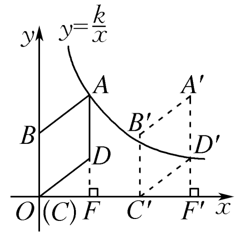


图 2

因为 $DF=\frac{3}{2}$,所以 $D'F'=\frac{3}{2}$,所以点 D' 的纵坐标为 $\frac{3}{2}$. 因为 D' 落在反比例函数 $y=\frac{8}{x}(x>0)$的图象上,所以 $\frac{3}{2}=\frac{8}{x}$,所以 $x=\frac{16}{3}$,则 $D'\left(\frac{16}{3},\frac{3}{2}\right)$,所以 $OF'=\frac{16}{3}$,所以 $FF'=OF'-OF=\frac{10}{3}$,所以 $0\leqslant m\leqslant\frac{10}{3}$.

16. 解:(1) 由题图 2,得点 A' 的坐标为(4,2),点 B' 的坐标为(8,0),所以 $k=4\times 2=8$,所以反比例函数的表达式为 $y=\frac{8}{x}$. 把点 $A'(4,2)$,$B'(8,0)$的坐标分别代入 $y=ax+b$,得 $\begin{cases}4a+b=2,\\8a+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\b=4,\end{cases}$ 所以经过 A',B' 两点的一次函数的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x+4$.