核心笔记与答案详析

第一章　集合与常用逻辑用语

题组 1　集合的概念

【核心笔记】

1. 对集合中的元素的认识：

(1) 集合中的元素是什么，是数、点或其他形式的元素.(练习运用：第 6 题)

(2) 元素的属性与满足条件是什么.(练习运用：第 2，3，6，7 题)

(3) 元素具有三个性质：确定性、互异性、无序性. 其中在确定集合元素时忽视互异性会致错.(练习运用：第 2，8 题)

2. 集合表示法：

(1) 列举法和描述法两者的特点和转化.(练习运用：第 3，10 题)

(2) 由描述法得各集合中元素的共同特征，判断时通过运算及变形整理找到新元素的特征归属即可.(练习运用：第 4 题)

3. 集合中含参的两类问题的求解策略：

(1) 已知元素与集合的关系求参数：依题意建立起含参的方程求解.(练习运用：第 8 题)

(2) 已知集合元素个数求参数：利用等价转化思想，通过建立含参的方程或不等关系求解，注意分类讨论思想的应用.(练习运用：第 2 题)

【答案详析】

1. A　由 $1\notin A$ 且 $3\in A$，得 $\begin{cases}2m-3\leqslant 0,\\6m-3>0,\end{cases}$ 解得 $\frac{1}{2}<m\leqslant\frac{3}{2}$.

2. D　若 $a=1$，则 $A=\{x\mid 2x+1=0\}=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$，符合题意；若 $a=-1$，则 $(a^2-1)x^2+(a+1)x+1=0$ 无解，不符合题意；当 $a^2-1\neq 0$，即 $a\neq\pm 1$ 时，则 $\Delta=(a+1)^2-4(a^2-1)=-3a^2+2a+5=0$，解得 $a=-1$(舍)或 $a=\frac{5}{3}$. 所以 a 的所有可能值的乘积为 $\frac{5}{3}$.

3. D　因为 $x\in\mathbf{Z}$，所以 $x+3\in\mathbf{Z}$. 又 $y\in\mathbf{Z}$，所以 $\frac{4}{x+3}\in\mathbf{Z}$，所以 $x+3$ 可能的取值为 $\pm1,\pm2,\pm4$，分别代入可得 $A=\{\pm4,\pm2,\pm1\}$，所以集合 A 中共有 6 个元素.

4. C　因为 $a\in A$，$b\in B$，$c\in C$，可设 $a=3k-1$，$k\in\mathbf{Z}$，$b=3k_1+1$，$k_1\in\mathbf{Z}$，$c=3k_2$，$k_2\in\mathbf{Z}$，所以 $2a=2(3k-1)=6k-2=6k-3+1=3(2k-1)+1$，$2k-1\in\mathbf{Z}$，即 $2a\in B$，故 A 错误；因为 $2b=2(3k_1+1)=6k_1+2=6k_1+3-1=3(2k_1+1)-1$，$2k_1+1\in\mathbf{Z}$，所以 $2b\in A$，故 B 错误；因为 $a+b=3k-1+3k_1+1=3(k+k_1)$，其中 $k+k_1\in\mathbf{Z}$，所以 $a+b\in C$，故 C 正确；因为 $b+c=3k_1+1+3k_2=3(k_1+k_2)+1$，其中 $k_1+k_2\in\mathbf{Z}$，所以 $b+c\in B$，故 D 错误.

5. B　由题意，若 $a\in A$，则 $\frac{1+a}{1-a}\in A$，若 $\frac{1+a}{1-a}\in A$ 则 $\dfrac{1+\frac{1+a}{1-a}}{1-\frac{1+a}{1-a}}=-\frac{1}{a}\in A$，进而有 $\dfrac{1-\frac{1}{a}}{1+\frac{1}{a}}=\frac{a-1}{a+1}\in A$，则 $\dfrac{1+\frac{a-1}{a+1}}{1-\frac{a-1}{a+1}}=a\in A$，即 $A=\left\{a,\frac{1+a}{1-a},-\frac{1}{a},\frac{a-1}{a+1}\right\}$，所以 $a\cdot\frac{1+a}{1-a}\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{a-1}{a+1}=1$.

6. BC　解方程组 $\begin{cases}y=2x-3,\\y=x-2,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\y=-1,\end{cases}$ 故一次函数 $y=2x-3$ 与 $y=x-2$ 的图象的交点组成的集合是 $\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}y=2x-3,\\y=x-2\end{cases}\right\}$ 或 $\{(1,-1)\}$.

7. BC　当 $a+b\sqrt{2}=1+\sqrt{2}\pi$ 时，有 $a=1$，$b=\pi$，这与 $a,b\in\mathbf{Q}$ 矛盾，故 A 不正确；因为 $\sqrt{11+6\sqrt{2}}=\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}=3+\sqrt{2}$，当 $a+b\sqrt{2}=\sqrt{11+6\sqrt{2}}=3+\sqrt{2}$ 时，有 $a=3$，$b=1$，都是有理数，所以 B 正确；因为 $\frac{1}{2+\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$，当 $a+b\sqrt{2}=\frac{1}{2+\sqrt{2}}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，有 $a=1$，$b=-\frac{1}{2}$，都是有理数，所以 C 正确；因为 $\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}+\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left[\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}\right]=\sqrt{6}$，当 $a+b\sqrt{2}=\sqrt{6}$ 时，有 $a=0$，$b=\sqrt{3}$ 或 $a=\sqrt{6}$，$b=0$，与 $a,b\in\mathbf{Q}$ 矛盾，所以 D 不正确.

8. $-\frac{3}{2}$　由题意 $a+2=3$ 或 $2a^2+a=3$，则 $a=1$ 或 $a=-\frac{3}{2}$. 当 $a=1$ 时，$a+2=2a^2+a$，不符合集合元素的互异性；当 $a=-\frac{3}{2}$ 时，$A=\left\{\frac{1}{2},3\right\}$，符合题意.

9. 1　2　当 $x=0$ 时，各个式子都是 0；当 $x\neq0$ 时，因为 $|x|=\pm x$，$\sqrt{x^2}=|x|$，$-\sqrt[3]{x^3}=-x$，所以不论 x 取何值，最多只能写成两种形式 x，$-x$，故集合中最少含有 1 个元素，最多含有 2 个元素.

10. 4　当 $a=1,b=3$ 时，$x=2a-b=-1$；当 $a=1$，$b=5$ 时，$x=2a-b=-3$；当 $a=2,b=3$ 时，$x=2a-b=1$；当 $a=2,b=5$ 时，$x=2a-b=-1$；当 $a=3,b=3$ 时，$x=2a-b=3$；当 $a=3,b=5$ 时，$x=2a-b=1$. 由集合 C 中元素满足互异性，得 $C=\{-3,-1,1,3\}$.

题组 2　由集合间的关系求参数范围问题

【核心笔记】

1. 根据集合的包含关系求参数，解题时要对含参数的集合分空集和非空集合两种情况讨论，结合包含关系列出等式或不等式组进行求解.（练习运用：第 4,5,6,7 题）

2. 解这类题有两个易错点：(1) 忽略空集是任何集合的子集致错. (2) 弄错不等关系列出错误的不等式(组)，此处应注意数轴的应用，避免犯错.（练习运用：第 6 题）

【答案详析】

1. B　因为 $3\in M$，若 $a=3$，此时 $a^2-3a-1=-1$，$M=\{1,2,3,-1\}$，与 $N\not\subseteq M$ 不符；若 $a^2-3a-1=3$，解得 $a=4$ 或 $a=-1$，当 $a=4$ 时，$M=\{1,2,4,3\}$，满足 $N\not\subseteq M$，当 $a=-1$ 时，$M=\{1,2,-1,3\}$，不满足 $N\not\subseteq M$. 综上知 $a=4$.

2. D　由题意，若 $\begin{cases}a+b=1,\\ \frac{a}{b}=1-b,\end{cases}$ 解得 $a=0,b=1$，此时集合 A 中 $\frac{a}{b}=0$ 与 $\frac{a}{b}\neq0$ 矛盾；若 $\begin{cases}a+b=1-b,\\ \frac{a}{b}=1,\end{cases}$ 解得 $a=b=\frac{1}{3}$，此时 $A=B=\left\{0,\frac{2}{3},1\right\}$，符合题意. 所以 $a+2b=1$.

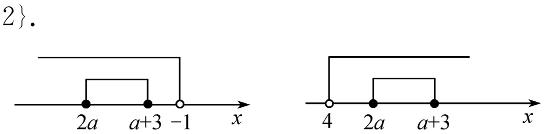
3. A　由题意知集合 A 中只有一个元素，即满足 $(k+2)x^2+2kx+1=0$ 的 x 值只有一个. 当 $k=-2$ 时，$A=\left\{\left(\frac{1}{4},-\frac{3}{4}\right)\right\}$，满足条件；当 $k\neq-2$ 时，$\Delta=4k^2-4(k+2)=0$，解得 $k=-1$ 或 $k=2$. 综上，实数 k 的最小值为 -2.

4. BCD　A 选项，由相等集合的概念可得 $\begin{cases}2a-3=1,\\ a-2=2,\end{cases}$ 解得 $a=2$ 且 $a=4$，得此方程组无解，故不存在实数 a 使得集合 $A=B$，因此 A 正确；B 选项，由 $A\subseteq B$，得 $\begin{cases}2a-3\leqslant1,\\ a-2\geqslant2,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a\leqslant2,\\ a\geqslant4,\end{cases}$ 此不等式组无解，因此 B 错误；C 选项，当 $a=4$ 时，得 $B=\{x\mid 5<x<2\}$ 为空集，不满足 $A\subseteq B$，因此 C 错误；D 选项，当 $2a-3\geqslant a-2$，即 $a\geqslant1$ 时，$B=\varnothing\subseteq A$，符合 $B\subseteq A$，当 $a<1$ 时，要使 $B\subseteq A$，需满足 $\begin{cases}2a-3\geqslant1,\\ a-2\leqslant2,\end{cases}$ 解得 $2\leqslant a\leqslant4$，不满足 $a<1$，故这样的实数 a 不存在，则当 $0\leqslant a\leqslant4$ 时 $B\subseteq A$ 不正确，因此 D 错误.

5. $\left\{a\,\middle|\,a<\frac{1}{2}\right\}$　**解法 1**　当 $a=0$ 时，$A=\mathbf{R}$，满足题意；当 $a<0$ 时，由 $ax<1$ 得 $A=\left\{x\,\middle|\,x>\frac{1}{a}\right\}$，而 $\frac{1}{a}<0$，满足题意；当 $a>0$ 时，$A=\left\{x\,\middle|\,x<\frac{1}{a}\right\}$，由 $B\subseteq A$ 得 $2<\frac{1}{a}$，所以 $0<a<\frac{1}{2}$. 综上，$\left\{a\,\middle|\,a<\frac{1}{2}\right\}$.

解法 2　由题意知 $\begin{cases}2a<1,\\ \sqrt{2}a<1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a<\frac{1}{2},\\ a<\frac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}$ 故 $a<\frac{1}{2}$.

6. $\{a\mid a<-4$ 或 $a>2\}$　当 $B=\varnothing$ 时，$2a>a+3$，即 $a>3$，满足要求；当 $B\neq\varnothing$ 时，根据题意作出如图所示的数轴，可得 $\begin{cases}a+3\geqslant2a,\\ a+3<-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a+3\geqslant2a,\\ 2a>4,\end{cases}$ 解得 $a<-4$ 或 $2<a\leqslant3$. 综上，实数 a 的取值范围为 $\{a\mid a<-4$ 或 $a>2\}$.



7. **解**：(1) 当 $a=5$ 时，$M=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-4x+5=0\}=\varnothing$，$N=\{x\in\mathbf{R}\mid(x-3)(x^2+3x-4)=0\}=\{-4,1,3\}$. 又因为 $M\subsetneqq P\subsetneqq N$，所以这样的集合 P 共有 6 个：$\{-4\}$，$\{1\}$，$\{3\}$，$\{-4,1\}$，$\{-4,3\}$，$\{1,3\}$.

(2) 当 $M=\varnothing$，即 $(-4)^2-4a<0$，$a>4$ 时，$M\subseteq N$，满足题意. 当 $M\neq\varnothing$ 时，若 $x^2-4x+a=0$ 有两个相等的实数根，即 $(-4)^2-4a=0$，则 $a=4$，此时 $M=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-4x+4=0\}=\{2\}$，不满足题意；若 $x^2-4x+a=0$ 有两个不相等的实数根，又 $M\subseteq N$，结合根与系数的关系可得两根 $x_1+x_2=4$，故 $M=\{1,3\}$，此时 $a=x_1x_2=3$. 综上，实数 a 的取值范围为 $\{a\mid a=3$ 或 $a>4\}$.

题组 3　含有参数的集合问题

【核心笔记】

求解含有参数的集合的策略：

1. 若集合元素是一一列举的，由集合的运算转化为集合间的关系，进而转化为解方程(组)求解，注意元素互异性的应用.(练习运用：第 2 题)

2. 若集合表示的是不等式的解集，则依据数轴转化为不等式(组)求解，此时需注意端点值能否取到，否则容易产生增解或漏解.(练习运用：第 3,4,8 题)

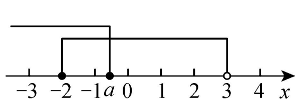
3. 明确集合中的元素，注意子集与真子集的区别，对子集是否为空集进行分类讨论，做到不漏解.(练习运用：第 5,7 题)

【答案详析】

1. D　已知 $A=\{2,m-1\}$，$\complement_U A=\{4\}$，由补集概念知 $m-1\neq4$，由集合中元素的互异性知 $m-1\neq2$. 又 $U=\{1,2,m^2\}$，$\complement_U A=\{4\}\subseteq U$，且 $A\subseteq U$，所以 $4\in U$，$m-1\in U$，则 $\begin{cases}m^2=4,\\ m-1=1,\end{cases}$ 解得 $m=2$.

2. B　由题意得 $B\subseteq A$，所以 $x^2=0$ 或 $x^2=2$ 或 $x^2=x$，解得 $x=0$ 或 $x=\sqrt{2}$ 或 $x=-\sqrt{2}$ 或 $x=1$，由集合中元素的互异性知当 $x=\sqrt{2}$ 或 $x=-\sqrt{2}$ 时满足题意.

3. C　因为 $N=\{x\,|\,x-a\leqslant0\}=\{x\,|\,x\leqslant a\}$，$\complement_{\mathbf{R}}M=\{x\,|-2\leqslant x<3\}$，如图，结合数轴可知，当 $a\geqslant-2$ 时，$N\cap(\complement_{\mathbf{R}}M)\neq\varnothing$，所以 $N\cap(\complement_{\mathbf{R}}M)=\varnothing$（$\mathbf{R}$ 为实数集）时，实数 a 的取值范围为 $\{a\,|\,a<-2\}$.



4. B　由题意，$A\cup B=\{x\,|-1<x<2\}$. ①当 $m<0$ 时，有 $x<-\frac{1}{m}$，则 $-\frac{1}{m}\geqslant2$，解得 $m\geqslant-\frac{1}{2}$，所以 $-\frac{1}{2}\leqslant m<0$；②当 $m=0$ 时，$C=\mathbf{R}$，$A\cup B\subseteq C$ 成立；③当 $m>0$ 时，有 $x>-\frac{1}{m}$，则 $-\frac{1}{m}\leqslant-1$，解得 $m\leqslant1$，所以 $0<m\leqslant1$. 综上所述，$-\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant1$.

5. CD　**解法 1**　若 $p=-3$，因为 $x^2-3x+1=0$ 有两个正根，故不满足 $A\cap M=\varnothing$；若 $p=-2$，则 $A=\{x\,|\,x^2-2x+1=0\}=\{1\}$，不满足 $A\cap M=\varnothing$；若 $p=0$，则 $A=\varnothing$，满足 $A\cap M=\varnothing$；若 $p=2$，则 $A=\{x\,|\,x^2+2x+1=0\}=\{-1\}$，满足 $A\cap M=\varnothing$.

解法 2　当 $A=\varnothing$ 时，$\Delta=p^2-4<0$，所以 $-2<p<2$. 当 $A\neq\varnothing$ 时，此时 $p\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$. 若方程有两个相同实数根，则 $p=\pm2$，显然当 $p=-2$ 时，方程根为 $x=1$，此时不满足 $A\cap M=\varnothing$；当 $p=2$ 时，方程根为 $x=-1$，此时满足 $A\cap M=\varnothing$. 若方程有两个不同实数根 x_1,x_2，此时 $x_1x_2>0$，所以 x_1,x_2 同号，且 $A\cap M=\varnothing$，所以 $x_1+x_2=-p<0$ 且 $\Delta=p^2-4>0$，所以 $p>2$. 综上可知，实数 p 的取值范围是 $\{p\,|\,p>-2\}$.

6. ±2　$A=\{1,2,m^2\}$，$\complement_U B=\{2,4\}$，因为 C 的真子集共有 3 个，所以集合 C 中只有 2 个元素，即 $A\cap\complement_U B=\{2,4\}$，所以 $m^2=4$，即 $m=\pm2$ 时，符合题意.

7. 解：(1) 由已知，$A=\{x\,|\,|x-1|\leqslant1\}=\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant2\}$，当 $a=-1$ 时，$B=\{x\,|\,ax^2-ax+1=0\}=\{x\,|-x^2+x+1=0\}=\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$，所以 $A\cap B=\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

(2) 因为 $B=\{x\,|\,ax^2-ax+1=0\}=\varnothing$，当 $a=0$ 时，$B=\{x\,|\,1=0\}=\varnothing$，$C=\{x\,|-1\geqslant0\}=\varnothing$，则 $C\subseteq\{x\,|\,x\geqslant1\}$；当 $a\neq0$ 时，则 $\Delta=(-a)^2-4a<0$，解得 $0<a<4$，则由 $ax-1\geqslant0$，得 $x\geqslant\frac{1}{a}$，因为 $C\subseteq\{x\,|\,x\geqslant1\}$，所以 $\frac{1}{a}\geqslant1$，解得 $a\leqslant1$，则 $0<a\leqslant1$. 综上，实数 a 的取值范围为 $\{a\,|\,0\leqslant a\leqslant1\}$.

8. 解：(1) 由 $\frac{10-x}{x+6}>0$ 得 $-6<x<10$，即 $A=\{x\,|-6<x<10\}$，因为 $A\cup B=A$，所以 $B\subseteq A$.

当 $B=\varnothing$ 时，有 $3m-1\geqslant2m+1$，解得 $m\geqslant2$，满足题意；

当 $B\neq\varnothing$ 时，$m<2$，则 $\begin{cases}3m-1\geqslant-6,\\ 2m+1\leqslant10,\end{cases}$ 解得 $-\frac{5}{3}\leqslant m\leqslant\frac{9}{2}$，即 $-\frac{5}{3}\leqslant m<2$. 综上，$m$ 的取值范围为 $\left\{m\,\middle|\,m\geqslant-\frac{5}{3}\right\}$.

(2) 由(1)知 $A=\{x\,|-6<x<10\}$，$B=\{x\,|\,3m-1<x<2m+1\}$. ①当 $A\cap B=\{3m-1<x<2m+1\}$ 时，有 $\begin{cases}2m+1-(3m-1)=2,\\ 3m-1\geqslant-6,\\ 2m+1\leqslant10,\end{cases}$ 解得 $m=0$；②当 $A\cap B=\{x\,|\,3m-1<x<10\}$ 时，有 $\begin{cases}10-(3m-1)=2,\\ 2m+1>10,\\ 10>3m-1>-6,\end{cases}$ 此时满足条件的 m 不存在；③当 $A\cap B=\{x\,|-6<x<2m+1\}$ 时，有 $\begin{cases}2m+1-(-6)=2,\\ 3m-1<-6,\\ -6<2m+1<10,\end{cases}$ 解得 $m=-\frac{5}{2}$. 综上，实数 m 的取值范围为 $\left\{-\frac{5}{2},0\right\}$.

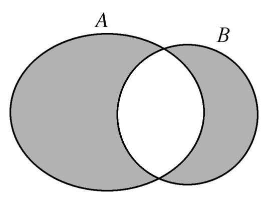
题组 4　集合中的新定义、应用探索问题

【核心笔记】

以集合为载体的新定义题型主要包括：新概念、新法则、新性质、新运算等，解题过程注意分析新定义的特点，弄清新定义的性质，明确新定义的运算法则，紧扣新定义进行验证、运算、推理，逐步将其化归为熟悉的问题解决.（练习运用：第 4，7，8 题）

【答案详析】

1. D　如图，由题意可得 $A*B$ 表示的是阴影部分. 设 $A*B=C$，则 $C*A=\{x|x\in C$ 或 $x\in A$，且 $x\notin A\cap C\}=B$，所以 $(A*B)*A=B$.



2. B　**解法 1**　因为 $23=3\times7+2=5\times4+3=7\times3+2$，所以 $23\in(A\cap B\cap C)$，故 A 符合；因为 $38=7\times5+3$，所以 $38\notin C$，故 B 不符合；因为 $128=3\times42+2=5\times25+3=7\times18+2$，所以 $128\in(A\cap B\cap C)$，故 C 符合；$233=3\times77+2=5\times46+3=7\times33+2$，所以 $233\in(A\cap B\cap C)$，故 D 符合.

解法 2　因为 $x\in(A\cap B\cap C)$，所以 $x\in A$ 且 $x\in C$，则 $x=3k+2$ 且 $x=7m+2(k,m\in\mathbf{Z})$，所以 $x-2=3k=7m$，即 $x-2=21a(a\in\mathbf{Z})$，所以 $x=21a+2=21b+23(b\in\mathbf{Z})$. 又 $x\in B$，所以 $x=5c+3=5d+23(c,d\in\mathbf{Z})$，即 $x-23=21b=5d$，即 $x-23=105e(e\in\mathbf{Z})$，所以 $x=105e+23$. 当 $e=0$ 时，$x=23$；当 $e=1$ 时，$x=128$；当 $e=2$ 时，$x=233$.

3. D　“孤立元”为 1 的集合为 $\{1\}$，$\{1,3,4\}$，$\{1,4,5\}$，$\{1,3,4,5\}$. “孤立元”为 2 的集合为 $\{2\}$，$\{2,4,5\}$. “孤立元”为 3 的集合为 $\{3\}$. “孤立元”为 4 的集合为 $\{4\}$，$\{1,2,4\}$. “孤立元”为 5 的集合为 $\{5\}$，$\{1,2,5\}$，$\{2,3,5\}$，$\{1,2,3,5\}$. 综上，满足题意的集合有 13 个.

4. A　$A=\left\{n\left|\dfrac{6-n}{n}\in\mathbf{N},n\in\mathbf{N}\right.\right\}=\{1,2,3,6\}$，非空子集有 $2^4-1=15$ 个. 当子集 M 为单元素集 $\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{6\}$ 时，“和睦数”分别为 1，2，3，6，和为 12；当子集 M 为双元素集 $\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{1,6\}$，$\{2,3\}$，$\{2,6\}$，$\{3,6\}$ 时，“和睦数”分别为 3，4，7，5，8，9，和为 36；当子集 M 为三元素集 $\{1,2,3\}$，$\{1,2,6\}$，$\{1,3,6\}$，$\{2,3,6\}$ 时，“和睦数”分别为 4，7，8，7，和为 26；当子集 M 为四元素集 $\{1,2,3,6\}$ 时，“和睦数”为 $6+3-2+1=8$. 故“和睦数”的总和为 $12+36+26+8=82$.

5. AB　根据题意，设 $A=\{x|x$ 是参加 100 米的同学$\}$，$B=\{x|x$ 是参加 400 米的同学$\}$，$C=\{x|x$ 是参加 1 500 米的同学$\}$，则 $\operatorname{card}(A)=8$，$\operatorname{card}(B)=7$，$\operatorname{card}(C)=5$，且 $\operatorname{card}(A\cap B)=4$，$\operatorname{card}(A\cap C)=3$，$\operatorname{card}(B\cap C)=3$，则 $\operatorname{card}(A\cap B\cap C)=12-[(8+7+5)-(4+3+3)]=2$，所以三项比赛都参加的有 2 人，只参加 100 米比赛的有 $8-4-3+2=3$(人)，只参加 400 米比赛的有 $7-4-3+2=2$(人)，只参加 1 500 米比赛的有 $5-3-3+2=1$(人).

6. ABD　对于 A，根据定义，由 $a\in P$，有 $a-a=0\in P$，$\dfrac{a}{a}=1\in P$，则 0，1 是任何数域中的元素，故 A 正确；对于 B，当 $b=0$ 时，$a+b\sqrt{2}=a\in\mathbf{Q}$，故 B 正确；对于 C，取 $x=1+\sqrt{2}\in E$，$y=1+\sqrt{3}\in F$，则 $x-y=\sqrt{2}-\sqrt{3}\notin(E\cup F)$，则 $E\cup F$ 不是一个数域，故 C 错误；对于 D，由 0，1 是任何数域中的元素可得 $1+1=2\in P$，$0-1=-1\in P$，以此类推，整数集是任何数域的子集，若数集 E，F 都是数域，则 $\mathbf{Z}\subseteq E$，$\mathbf{Z}\subseteq F$，则整数集 $\mathbf{Z}\subseteq(E\cap F)$，故 D 正确.

7. $\{1,2\}$　$\{0\}$　由 $\dfrac{6}{6-x}\in\mathbf{N}$ 及 $x\in\mathbf{N}$ 可得 $6-x$ 可能的取值有 1，2，3，6，即 $x=5,4,3,0$，故 $B=\{5,4,3,0\}$. 因为 $A-B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$，所以 $A-B=\{1,2\}$；又 $B-A=\{x|x\in B$ 且 $x\notin A\}$，则 $B-A=\{0\}$.

8. **解**：(1) 当 $n=1$，$n'=1$ 时，$A=\{1\}$，$A^+=\{2\}$，$A^-=\{0\}$，$A^+\cap A^-=\varnothing$，所以 A 不具有姊妹性质.

(2) 由题意 $A=\{1,2,\cdots,n\}(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $A^+=\{1+n',2+n',\cdots,n+n'\}(n,n'\in\mathbf{N}^*)$，$A^-=\{1-n',2-n',\cdots,n-n'\}(n,n'\in\mathbf{N}^*)$. 若要使集合 A 具有姊妹性质，则需满足 $A^+\cap A^-\neq\varnothing$，则 $n-n'\geqslant1+n'$，所以 $n-2n'\geqslant1$.

(3) 由 (2) 可知，当 $n-2n'<1$ 时，$A^+\cap A^-=\varnothing$，集合 $A^+\cap A^-$ 含有 0 个元素，此时 A^+，A^- 都含有 n 个元素，所以 $A^+\cup A^-$ 含有 $n+n-0=2n$ 个元素，$A^+\cap A^-$ 的子集的个数为 1，$A^+\cup A^-$ 的子集的个数为 2^{2n}；当 $n-2n'\geqslant1$ 时，$A^+\cap A^-\neq\varnothing$，集合 $A^+\cap A^-$ 含有 $(n-2n')$ 个元素，此时 A^+，A^- 含有 n 个元素，所以 $A^+\cup A^-$ 含有 $n+n-(n-2n')=(n+2n')$ 个元素，$A^+\cap A^-$ 的子集的个数为 $2^{n-2n'}$，$A^+\cup A^-$ 的子集的个数为 $2^{n+2n'}$. 综上所述，当 $n-2n'<1$ 时，$A^+\cap A^-$ 的子集的个数为 1，$A^+\cup A^-$ 的子集的个数为 2^{2n}；当 $n-2n'\geqslant1$ 时，$A^+\cap A^-$ 的子集的个数为 $2^{n-2n'}$，$A^+\cup A^-$ 的子集

的个数为 $2^{n+2n'}$.

综合提优(1.1～1.3)

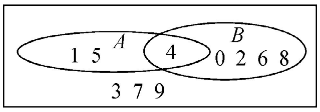
1. B　因为 $A=\{x\in\mathbf{Q}|(x-\sqrt{2})(x^2-1)=0\}=\{-1,1\}$,所以 $A\cup B=\{-1,1,\sqrt{3}\}$.

2. D　若 $a\notin A$,且 $a\in B$,则 $a\in\complement_B A$,即 $a\in\{x|4\leqslant x<5\}$.

3. B　由题意当 $2\in A$ 时,$1\notin A$,$4\notin A$,当 $2\notin A$ 时,$\{1,4\}\subseteq A$,即元素 2 与元素 1,4 必选其一;当 $3\in A$ 时,$6\notin A$,当 $3\notin A$ 时,$6\in A$,即元素 3 与元素 6 必选其一;元素 5 与 7 没有限制.则集合 A 的个数等于$\{2,3,5,7\}$的子集个数,集合$\{2,3,5,7\}$有 $2^4=16$ 个子集,集合 A 可以为$\{2,3\}$,$\{2,6\}$,$\{2,3,5\}$,$\{2,3,7\}$,$\{2,6,5\}$,$\{2,6,7\}$,$\{2,3,5,7\}$,$\{2,6,5,7\}$,$\{1,4,3\}$,$\{1,4,6\}$,$\{1,4,3,5\}$,$\{1,4,3,7\}$,$\{1,4,6,5\}$,$\{1,4,6,7\}$,$\{1,4,3,5,7\}$,$\{1,4,6,5,7\}$,共 16 个.

4. AC　由已知中阴影部分在集合 N 中,而不在集合 M 中,故阴影部分所表示的元素属于 N,不属于 M(属于 M 的补集),即可表示为 $N\cap(\complement_U M)$或$[\complement_U(M\cap N)]\cap N$.

5. BC　因为$U=\{x|x<10,x\in\mathbf{N}\}$,所以 $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.因为$A\cap(\complement_U B)=\{1,5\}$,所以 $1,5\in A$,$1,5\notin B$.因为$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{3,7,9\}=\complement_U(A\cup B)$,所以 $3,7,9\notin A,B$,又 $A\cap B=\{4\}$,说明 $4\in A,B$.综上,画出 Venn 图如下.对于 A,$8\in B$,故 A 错误;对于 B,$\{5\}\subseteq A$,故 B 正确;对于 C,$7\in\complement_U(A\cup B)$,故 C 正确;对于 D,$A$ 的不同真子集个数为 7,故 D 错误.



6. ABD　取 $x=1$,$y=2$,则 $x-y=-1\notin\mathbf{N}$,故 A 错误;取 $x=\sqrt{2}$,$y=\sqrt{2}$,则 $x-y=0$,0 不是无理数,故 B 错误;设 $x=3k_1(k_1\in\mathbf{Z})$,$y=3k_2(k_2\in\mathbf{Z})$,则 $x+y=3(k_1+k_2)\in M$,$x-y=3(k_1-k_2)\in M$,故 C 正确;取 $M_1=\{x|x=3k,k\in\mathbf{Z}\}$,$M_2=\{x|x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$,由 C 选项可知 M_1 是闭集合,同理可证 M_2 也是闭集合,则 $M_1\cup M_2$ 为被 2 整除或被 3 整除的全体整数集,取$x=2$,$y=3$,则 $x+y=5$,5 不能被 2 或 3 整除,即 $5\notin(M_1\cup M_2)$,故 D 错误.

7. 解:(1) 由集合 $A=\{2,3,4,5\}$,知 $M=5$,$m=2$,所以 $T_A=M-m=5-2=3$.

(2) 因为 $A=\{1,2,3,\cdots,9\}$,$A_i=\{a_i,b_i,c_i\}\subseteq A$,$A_i\cap A_j=\varnothing(i,j=1,2,3,i\neq j)$,$A_1\cup A_2\cup A_3=A$,由此可知集合 A_1,A_2,A_3 中各有 3 个元素,且完全不相同,根据定义要让 $T_{A_1}+T_{A_2}+T_{A_3}$ 取到最大值,则只需 T_{A_1},T_{A_2},T_{A_3} 中元素不同且 7,8,9 分布在 3 个集合中,4,5,6 分布在 3 个集合中,1,2,3 分布在 3 个集合中,这样差值才会最大,总体才会有最大值,所以 $T_{A_1}+T_{A_2}+T_{A_3}$ 的最大值为 $7+8+9-1-2-3=18$,所以有一组 $A_1=\{1,9,4\}$,$A_2=\{2,8,5\}$,$A_3=\{3,7,6\}$满足题意.

题组 5　充分条件、必要条件、充要条件的判断及关系的探求

【核心笔记】

充分、必要条件的常用判断方法:

1. 定义法:直接判断"若 p,则 q""若 q,则 p"的真假.即若"$p\Rightarrow q$"成立,则 p 是 q 的充分条件.若要否定"$p\Rightarrow q$",只需举反例即可,判断时注意和图示相结合.(练习运用:第 1,2,3 题)

2. 集合法:若 $A\subseteq B$,则 A 是 B 的充分条件或 B 是 A 的必要条件;若 $A\subsetneqq B$,则 A 是 B 的充分不必要条件或 B 是 A 的必要不充分条件;若 $A=B$,则 A 是 B 的充要条件.(练习运用:第 4 题)

【答案详析】

1. B　若 $c=0$,则 $ac=bc$,但 a,b 不一定相等.若 $a=b$,则 $ac=bc$,故"$ac=bc$"是"$a=b$"的必要不充分条件.

2. A　若 n 为质数,由 $n>2$,得 n 必为奇数,则 $n+1$ 为大于 2 的偶数,所以 $n+1$ 为合数.取 $n=9$,则 $n+1=10$ 为合数,但 9 不是质数.故"n 为质数"是"$n+1$ 为合数"的充分不必要条件.

3. D　由 $ab>1$ 推不出$(a-1)(b-1)>0$,例如 $a=5$,$b=1$;由$(a-1)(b-1)>0$ 可得 $a>1$,$b>1$ 或 $a<1$,$b<1$,当 $a<1$,$b<1$ 时不能推出 $ab>1$,例如 $a=\frac{1}{2}$,$b=-1$,所以"$ab>1$"是"$(a-1)(b-1)>0$"的既不充分也不必要条件.

4. A　由题意得 $0<x<2$,因为使"$0<x<2$"成立的充分不必要条件应该满足取值范围小于$\{x|0<x<2\}$,所以观察四个选项易知,只有 A 项的 $0<x<1$ 满足.

5. A　由已知可得"$a\geqslant b$"是"$c>d$"的充分条件,所以"$c\leqslant d$"是"$a<b$"的充分条件,又"$a<b$"是"$e\leqslant f$"的充分条件,故"$c\leqslant d$"是"$e\leqslant f$"的充分条件.

6. AB　若 $x=1$,则 $x^2=1$,即 $x^2=1$ 是 $x=1$ 的必要条件,故 A 正确;由"$x^2\neq y^2$"可以推出"$x\neq y$",故 B 正确;取 $m=1$,$n=\sqrt{2}$,满足 mn 为无理数,但 m 为有理数,故 C 错误;对角线互相垂直的四边形不一定是

菱形，故D错误.

7. ABC　若二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为正数，则 $b^2-4ac\geqslant 0$，$ab<0$，$ac>0$，故满足其中一个或两个不能推出二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为正数，所以选项A，B，C能成为使二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为正数的必要不充分条件.

8. 解：(1) 因为 $5=3^2-2^2$，$12=4^2-2^2$，$21=5^2-2^2$，所以 $5\in A$，$12\in A$，$21\in A$. 假设 $14=m^2-n^2$，$m,n\in\mathbf{Z}$，则 $14=(m-n)(m+n)$，因为 $m-n+m+n=2m$，$m-n-(m+n)=-2n$，所以 $m-n$，$m+n$ 的奇偶性一致，故 $(m-n)(m+n)$ 要么为奇数，要么为4的倍数，故 $14=m^2-n^2$ 无整数解，故 $14\notin A$.

(2) 结论："$x\in A$"是"$x\in B$"的必要不充分条件. 理由如下：集合 $B=\{x\mid x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，恒有 $2k+1=(k+1)^2-k^2$，所以 $2k+1\in A$，即必要性成立；又 $12\in A$，$12\notin B$，所以充分性不成立，即"$x\in A$"是"$x\in B$"的必要不充分条件.

(3) 由(1)可知 $(m-n)(m+n)$ 要么为奇数，要么为4的倍数，又对于任意 $k\in\mathbf{Z}$，总有 $4k=(k+1)^2-(k-1)^2$，故 $4k\in A$. 综上，集合 A 中的所有偶数为 $4k$，$k\in\mathbf{Z}$.

题组6　与充分条件和必要条件相关的参数范围问题

【核心笔记】

1. 解这类问题的策略：先把充分条件、必要条件或充要条件转化为集合间的关系，再根据集合间的关系，建立关于含参数的方程或不等式(组)求解.(练习运用：第1，5题)

2. 在转化过程中需要注意：

(1) 充分条件与充分不必要条件对应集合中的子集与真子集.(练习运用：第4，5，6题)

(2) 列含参数的不等式(组)时，要特别小心端点值的取舍问题，处理不当易出现增漏现象.(练习运用：第1，4，6，7，8题)

【答案详析】

1. A　因为 $B=\left\{x\,\middle|\,x<\frac{a}{2}\right\}$，所以 $\frac{a}{2}>2$，即 $a>4$.

2. D　$A=\{2,-3\}$，所以当 $m=0$ 时，$B=\varnothing$，$B\subsetneqq A$；当 $m=-\frac{1}{2}$ 时，$B=\{2\}\subsetneqq A$；当 $m=\frac{1}{3}$ 时，$B=\{-3\}\subsetneqq A$. 所以 $B\subsetneqq A$ 的一个充分不必要条件是 $m\in\left\{0,\frac{1}{3}\right\}$.

3. A　由题意得 $A\cap(\complement_U B)=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}2x-y+m>0,\\x+y-n>0\end{cases}\right\}$，因为 $(2,3)\in A\cap(\complement_U B)$，所以 $\begin{cases}2\times 2-3+m>0,\\2+3-n>0,\end{cases}$ 解得 $m>-1$，$n<5$，反之亦成立.

4. B　**解法1**　设 $A=\{x\mid -1<x<1\}$，$B=\{x\mid x<a$ 或 $x>3\}$，由题意可知 $A\subseteq B$ 和 $B\subseteq A$ 都不成立，所以 $a<1$.

解法2　若 $a=1$，则 $\{x\mid -1<x<1\}\subseteq\{x\mid x<a$ 或 $x>3\}$，故不成立，排除A，C；若 $a=2$，则 $\{x\mid -1<x<1\}\subseteq\{x\mid x<a$ 或 $x>3\}$，故不成立，排除D.

5. $\{a\mid a\geqslant 1\}$　设集合 $A=\{x\mid x=1\}$，$B=\{x\mid x\leqslant a\}$，要使得"$x=1$"是"$\{x\mid x\leqslant a\}$"的充分条件，即 $A\subseteq B$，可得 $a\geqslant 1$.

6. $\{a\mid a\leqslant -1$ 或 $1\leqslant a<2\}$　$\complement_{\mathbf{R}}B=\{x\mid x<0$ 或 $x>1\}$. 因为 $x\in A$，所以集合 $A=\{x\mid 2a-1<x<a+1\}$ 不是空集，即 $2a-1<a+1$，解得 $a<2$. 由题意知集合 A 是集合 $\complement_{\mathbf{R}}B$ 的真子集，即 $a+1\leqslant 0$ 或 $2a-1\geqslant 1$，解得 $a\leqslant -1$ 或 $a\geqslant 1$. 综上所述，实数 a 的取值范围为 $\{a\mid a\leqslant -1$ 或 $1\leqslant a<2\}$.

7. $\frac{1}{2}$　$\left\{b\,\middle|\,b>\frac{1}{2}\right\}$　因为 A 是 B 的充要条件，所以 $\frac{1}{b}=2$，解得 $b=\frac{1}{2}$. 因为 A 是 B 的充分不必要条件，所以 $A\subsetneqq B$，则 $\begin{cases}b>0,\\\frac{1}{b}<2,\end{cases}$ 解得 $b>\frac{1}{2}$.

8. 解：(1) 因为"$x\in B$"是"$x\in A$"的必要不充分条件，可得 A 是 B 的真子集，则满足 $\begin{cases}1-a<-1,\\1+a\geqslant 2,\end{cases}$ 解得 $a>2$，所以实数 a 的取值范围为 $(2,+\infty)$.

(2) 因为"$x\in B$"是"$x\in A$"的充分不必要条件，可得 B 是 A 的真子集. ①当 $1-a\geqslant 1+a$，即 $a\leqslant 0$ 时，此时 $A=\mathbf{R}$，符合题意；②当 $1-a<1+a$，即 $a>0$ 时，则满足 $\begin{cases}a>0,\\1-a\geqslant -1,\\1+a<2,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a>0,\\a\leqslant 2,\\a<1,\end{cases}$ 解得 $0<a<1$. 综上可得，实数 a 的取值范围为 $(-\infty,1)$.

题组7　与全称量词命题和存在量词命题相关的参数范围问题

【核心笔记】

1. 求解这类题的关键是：理解全称量词命题与存在量词命题的含义.

2. 求解的策略是"等价转化"，即把存在(全称)量词命题为假命题转化为全称(存在)量词命题为真命题.(练习运用：第5题)

3. 求解的方法有：

(1) 直接由方程、不等式或函数的性质求参数的取值范围.(练习运用:第2,3,4,5题)

(2) 利用分离参数法转化为不等式恒(能)成立,即利用不等式两边的最大值或最小值建立不等式.(练习运用:第2,5题)

4. 常见的有以下四种情况：

① $\forall x\in D, m\leqslant f(x)\Leftrightarrow m\leqslant f(x)_{\min}$；

② $\forall x\in D, m\geqslant f(x)\Leftrightarrow m\geqslant f(x)_{\max}$；

③ $\exists x\in D, m\leqslant f(x)\Leftrightarrow m\leqslant f(x)_{\max}$；

④ $\exists x\in D, m\geqslant f(x)\Leftrightarrow m\geqslant f(x)_{\min}$.(练习运用:第2,5题)

【答案详析】

1. D　由题意可知方程 $x^2-2x+m=0$ 有实数解,即 $\Delta=4-4m\geqslant 0$,解得 $m\leqslant 1$.

2. A　由题意知,$\forall x\in\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$,$a\geqslant\dfrac{x^2}{2}$恒成立,又抛物线 $y=\dfrac{x^2}{2}$开口向上,且对称轴为 y 轴,所以当 $x=2$ 时,$y=\dfrac{x^2}{2}$有最大值2,即 $a\geqslant 2$,命题"$\forall x\in\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$,$x^2-2a\leqslant 0$"是真命题的一个必要不充分条件是 $a\geqslant 1$.

3. AB　由题意,"$\forall x\in M, x\leqslant 3$"为真命题,得 $M\subseteq\{x|x\leqslant 3\}$. 又由题意可得 $M\subseteq\{x|x<0\}$,所以 $M\subseteq\{x|x<0\}$.

4. -1　因为命题"$\forall x\in\mathbf{R}, m^2-1=(m+m^2)x$"为真命题,即等式 $m^2-1=(m+m^2)x$ 恒成立,则 $\begin{cases}m^2-1=0,\\ m+m^2=0,\end{cases}$ 解得 $m=-1$.

5. $\left\{m\middle|\dfrac{5}{4}<m\leqslant\dfrac{9}{4}\right\}$　"对任意 $2\leqslant x_1\leqslant 5$,存在$\dfrac{3}{4}+m\leqslant x_2\leqslant 3$,使得 $x_1\geqslant x_2$"为假命题,则"存在$2\leqslant x_1\leqslant 5$,对任意的$\dfrac{3}{4}+m\leqslant x_2\leqslant 3$,使得$x_1<x_2$"为真命题,即 $(x_1)_{\min}<(x_2)_{\min}$,故$\begin{cases}2<\dfrac{3}{4}+m,\\ \dfrac{3}{4}+m\leqslant 3,\end{cases}$ 解得$\dfrac{5}{4}<m\leqslant\dfrac{9}{4}$.

6. **解**:(1) 由于 $p:\forall x\in A, x\in B$ 是真命题,所以 $A\subseteq B$,所以$\begin{cases}2m-1\geqslant 7,\\ -3m+4\leqslant 2,\\ -3m+4\leqslant 2m-1,\end{cases}$ 解得 $m\geqslant 4$,故 m 的取值范围是$\{m|m\geqslant 4\}$.

(2) 由题意知 $A\cap B\neq\varnothing$,所以 $B\neq\varnothing$,即$-3m+4\leqslant 2m-1$,解得 $m\geqslant 1$. 当$A\cap B=\varnothing$时,$-3m+4>7$ 或 $2m-1<2$,解得 $m<\dfrac{3}{2}$. 所以当 $A\cap B\neq\varnothing$时,$m\geqslant\dfrac{3}{2}$. 故 m 的取值范围是$\left\{m\middle|m\geqslant\dfrac{3}{2}\right\}$.

综合提优(1.4～1.5)

1. B　命题"$\forall x\in\mathbf{Z}, |x|\in\mathbf{N}$"的否定是"$\exists x\in\mathbf{Z}, |x|\notin\mathbf{N}$".

2. A　因为 p 是 $\neg q$ 的必要不充分条件,所以若 $\neg q$,则 p 为真命题,若 p,则 $\neg q$ 为假命题,所以若 $\neg p$,则 q 为真命题,若 q,则 $\neg p$ 为假命题,所以 $\neg p$ 是 q 的充分不必要条件.

3. A　由题意得$\begin{cases}1+a+b=0,\\ \Delta=a^2-4b=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-2,\\ b=1,\end{cases}$所以 $ab=-2$.

4. C　对于A,$\neg p$:存在一个能被3整除的整数不是奇数,例如实数12不是奇数,但能被3整除,所以 $\neg p$ 是真命题;对于B,$\neg p$:存在一个四边形的四个顶点不共圆,其中命题 p 为假命题,所以 $\neg p$ 是真命题;对于C,$\neg p$:所有的三角形不都是正三角形,其中命题 p 为真命题,所以 $\neg p$ 是假命题;对于D,$\neg p$:$\forall x\in\mathbf{R}$,都有 $x^2+2x+2>0$,由不等式 $x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$,所以命题 p 为假命题,所以 $\neg p$是真命题.

5. A　由题知 $a_1\neq 0, a_2\neq 0, b_1\neq 0, b_2\neq 0$. 若不等式 $a_1x+b_1>0$ 与 $a_2x+b_2>0$ 有相同的解集,则 a_1 与 a_2 同号且$-\dfrac{b_1}{a_1}=-\dfrac{b_2}{a_2}$,故不等式 $a_1x+b_1>0$ 与 $a_2x+b_2>0$ 有相同的解集,可以证得$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$,故 p 是 q 的充分条件. 因为$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$无法说明 a_1 与 a_2 同号,所以$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$无法证得不等式 $a_1x+b_1>0$ 与 $a_2x+b_2>0$ 有相同的解集,故 p 不是 q 的必要条件,综上所述,p 是 q 的充分不必要条件.

6. ABC　由 $A\cap B=A$,可得 $A\subseteq B$,由 $A\subseteq B$ 可得 $A\cap B=A$,故"$A\cap B=A$"是"$A\subseteq B$"的充要条件,故A正确;由 $\complement_U A\supseteq\complement_U B$ 可得$A\subseteq B$,由 $A\subseteq B$ 可得 $\complement_U A\supseteq\complement_U B$,故"$\complement_U A\supseteq\complement_U B$"是"$A\subseteq B$"的充要条件,故B正确;由$(\complement_U B)\cap A=\varnothing$,可得 $A\subseteq B$,由 $A\subseteq B$ 可得$(\complement_U B)\cap A=\varnothing$,故"$(\complement_U B)\cap A=\varnothing$"是"$A\subseteq B$"的充要条件,故C正确;由$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$,可得 $B\subseteq A$,不能推出 $A\subseteq B$,故"$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$"不是"$A\subseteq B$"的充要条件,故D错误.

7. BCD　对于A,2也是素数,但2不是奇数,所以A错误;对于B,$\forall x\in\mathbf{Z}$,则 x^2 的末位数只能是0,1,4,

5,6,9,所以B正确;对于C,若两个三角形相似,则三边成比例,若三角形的三边成比例,则这两个三角形是相似三角形,所以C正确;对于D,当$x=\sqrt[3]{2}$时,x为无理数,$x^3=2$为有理数,所以存在一个无理数,它的立方是有理数,所以D正确.

8. 解:(1) $A=\{x|x\leqslant 0$或$x\geqslant 4\}$.因为$\forall x\in A$,均有$x\notin B$,所以$A\cap B=\varnothing$.当$a+1\geqslant 2a-1$,即$a\leqslant 2$时,$B=\varnothing$,满足题意;当$a>2$时,$\begin{cases}a+1\geqslant 0,\\2a-1\leqslant 4,\end{cases}$解得$-1\leqslant a\leqslant\frac{5}{2}$,所以$2<a\leqslant\frac{5}{2}$.综上,实数$a$的取值范围是$\left\{a\middle|a\leqslant\frac{5}{2}\right\}$.

(2) 先证充分性:当$2<a<3$时,$3<a+1<4$,$3<2a-1<5$,所以当$x\in(a+1,4)$时,$x\in B$,$x\notin A$,所以$\exists x\in B$,$x\notin A$为真命题,充分性成立.再证必要性:若p:$\exists x\in B$,$x\notin A$为真命题,则$\neg p$:$\forall x\in B$,$x\in A$为假命题.先求$\neg p$:$\forall x\in B$,$x\in A$为真命题时a的取值范围,因为$a>2$,所以$B\neq\varnothing$.由$\neg p$:$\forall x\in B$,$x\in A$,得$B\subseteq A$,则$2a-1\leqslant 0$或$a+1\geqslant 4$,解得$a\leqslant\frac{1}{2}$或$a\geqslant 3$,所以$a\geqslant 3$.因为$\neg p$:$\forall x\in B$,$x\in A$为假命题,所以$2<a<3$.综上,若$a>2$,则p成立的充要条件为$2<a<3$.

章末提优·真题精选

1. A 因为$A=\{x|-\sqrt[3]{5}<x<\sqrt[3]{5}\}$,$B=\{-3,-1,0,2,3\}$,且注意到$1<\sqrt[3]{5}<2$,从而$A\cap B=\{-1,0\}$.

2. C 由题意得$M\cup N=\{x|-3<x<4\}$.

3. D 因为$A=\{1,2,3,4,5,9\}$,$B=\{x|\sqrt{x}\in A\}$,所以$B=\{1,4,9,16,25,81\}$,则$A\cap B=\{1,4,9\}$,所以$\complement_A(A\cap B)=\{2,3,5\}$.

4. A 由题意可得$\complement_U N=\{2,4,8\}$,则$M\cup(\complement_U N)=\{0,2,4,6,8\}$.

5. B 若$a-2=0$,解得$a=2$,此时$A=\{0,-2\}$,$B=\{1,0,2\}$,不符合题意;若$2a-2=0$,解得$a=1$,此时$A=\{0,-1\}$,$B=\{1,-1,0\}$,符合题意,故$a=1$.

6. A 因为整数集$\mathbf{Z}=\{x|x=3k,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{x|x=3k+1,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{x|x=3k+2,k\in\mathbf{Z}\}$,$U=\mathbf{Z}$,所以$\complement_U(M\cup N)=\{x|x=3k,k\in\mathbf{Z}\}$.

7. A 由题意可得$M\cup N=\{x|x<2\}$,则$\complement_U(M\cup N)=\{x|x\geqslant 2\}$,A正确;$\complement_U M=\{x|x\geqslant 1\}$,则$N\cup\complement_U M=\{x|x>-1\}$,B错误;$M\cap N=\{x|-1<x<1\}$,则$\complement_U(M\cap N)=\{x|x\leqslant -1$或$x\geqslant 1\}$,C错误;$\complement_U N=\{x|x\leqslant -1$或$x\geqslant 2\}$,则$M\cup\complement_U N=\{x|x<1$或$x\geqslant 2\}$,D错误.

8. D 由补集定义可知$\complement_U A=\{x|-3<x\leqslant -2$或$1<x<3\}$.

9. C 由$x+y=8\geqslant 2x$,得$x\leqslant 4$,所以满足$x+y=8$的有$(1,7)$,$(2,6)$,$(3,5)$,$(4,4)$,故$A\cap B$中元素的个数为4.

10. B 对于命题p,取$x=-1$,则有$|x+1|=0<1$,故p是假命题,$\neg p$是真命题;对于命题q,取$x=1$,则有$x^3=1^3=1=x$,故q是真命题,$\neg q$是假命题.综上,$\neg p$和q都是真命题.

11. B 由$|x-1|<1$,得$0<x<2$,因为$0<x<5$不能推出$0<x<2$,但$0<x<2$可以推出$0<x<5$,所以"$0<x<5$"是"$|x-1|<1$"的必要不充分条件.

12. A 当x为整数时,$2x+1$必为整数;当$2x+1$为整数时,x不一定为整数,例如当$2x+1=2$时,$x=\frac{1}{2}$.所以"x为整数"是"$2x+1$为整数"的充分不必要条件.

13. B 由$a^2=b^2$,得$a=\pm b$,当$a=-b\neq 0$时,$a^2+b^2=2ab$不成立,充分性不成立;由$a^2+b^2=2ab$,得$(a-b)^2=0$,即$a=b$,显然$a^2=b^2$成立,必要性成立,所以"$a^2=b^2$"是"$a^2+b^2=2ab$"的必要不充分条件.

14. C 因为$xy\neq 0$,且$x+y=0$.所以$x=-y$,所以$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{y}{-y}+\frac{-y}{y}=-2$,所以充分性成立;因为$xy\neq 0$,且$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$,所以$x^2+y^2=-2xy$,即$x^2+y^2+2xy=0$,即$(x+y)^2=0$,所以$x+y=0$,所以必要性成立.故"$x+y=0$"是"$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$"的充要条件.

15. D 若$a+b>0$,取$a=3$,$b=-2$,则$ab>0$不成立;反之,若$a=-2$,$b=-3$,则$a+b>0$也不成立.因此"$a+b>0$"是"$ab>0$"的既不充分也不必要条件.

第二章 一元二次函数、方程与不等式

题组8 利用不等式性质证明不等式

【核心笔记】

1. 利用不等式性质证明不等式的方法:

① 利用不等式的性质用综合法证明;(练习运用:第1,2,3,4题)

② 利用不等式的性质用分析法证明.(练习运用:第1,4题)

2. 分析法采用逆向思维,当条件与结论的联系不明

显,或证明过程中所需要用到的知识不明确,或从正面不易推导时,往往采用分析法,特别是对含有根号、绝对值的不等式问题.

注意用分析法证明时,一定要严格按照格式书写.

【答案详析】

1. 证明:(1) 因为 $c<d<0$,所以 $-c>-d>0$. 又 $a>b>0$,所以 $a-c>b-d>0$,则 $\frac{1}{(a-c)(b-d)}>0$,所以 $(a-c)\times\frac{1}{(a-c)(b-d)}>(b-d)\times\frac{1}{(a-c)(b-d)}$,即 $\frac{1}{a-c}<\frac{1}{b-d}$. 又 $e<0$,所以 $\frac{e}{a-c}>\frac{e}{b-d}$.

(2) 要证 $\sqrt{a}-\sqrt{a-2}<\sqrt{a-1}-\sqrt{a-3}(a\geqslant 3)$,只需证 $\sqrt{a}+\sqrt{a-3}<\sqrt{a-1}+\sqrt{a-2}$,即证 $a+(a-3)+2\sqrt{a(a-3)}<(a-1)+(a-2)+2\sqrt{(a-1)(a-2)}$,即证 $\sqrt{a(a-3)}<\sqrt{(a-1)(a-2)}$,即证 $a(a-3)<(a-1)(a-2)$,即证 $0<2$,显然成立,所以 $\sqrt{a}-\sqrt{a-2}<\sqrt{a-1}-\sqrt{a-3}(a\geqslant 3)$.

2. (1) **证明**:因为 $|b|>|c|$,且 $b>0,c<0$,所以 $b>-c$,所以 $b+c>0$.

(2) **证明**:因为 $c<d<0$,所以 $-c>-d>0$. 又 $a>b>0$,所以 $a-c>b-d>0$,所以 $(a-c)^2>(b-d)^2>0$,所以 $0<\frac{1}{(a-c)^2}<\frac{1}{(b-d)^2}$. 因为 $a>b,d>c$,所以 $a+d>b+c$,由(1)知 $b+c>0$,所以 $a+d>b+c>0$,所以 $\frac{b+c}{(a-c)^2}<\frac{a+d}{(b-d)^2}$.

(3) **解**:因为 $a+d>b+c>0,0<\frac{1}{(a-c)^2}<\frac{1}{(b-d)^2}$,所以 $\frac{b+c}{(a-c)^2}<\frac{b+c}{(b-d)^2}<\frac{a+d}{(b-d)^2}$ 或 $\frac{b+c}{(a-c)^2}<\frac{a+d}{(a-c)^2}<\frac{a+d}{(b-d)^2}$.(只要写出其中一个即可)

3. 证明:(1) 因为 $\frac{y+m}{x+m}-\frac{y}{x}=\frac{x(y+m)-y(x+m)}{x(x+m)}=\frac{m(x-y)}{x(x+m)}$,又 $x>y>0,m>0$,所以 $x+m>0,x-y>0$,所以 $\frac{m(x-y)}{x(x+m)}>0$,即 $\frac{y}{x}<\frac{y+m}{x+m}$.

(2) 因为 a,b,c 是三角形的三边,所以 $b+c>a>0$,由(1)知 $\frac{a}{b+c}<\frac{a+a}{b+c+a}=\frac{2a}{a+b+c}$,同理 $\frac{b}{a+c}<\frac{2b}{a+b+c}$,$\frac{c}{a+b}<\frac{2c}{a+b+c}$,所以 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}<\frac{2a}{a+b+c}+\frac{2b}{a+b+c}+\frac{2c}{a+b+c}=\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2$,所以原不等式成立.

4. (1) **解法 1**　因为 $a>b>c$ 且 $a+b+c=0$,所以 $c<0$,且 $a-c>b-c>0$,两边取倒数得 $\frac{1}{a-c}<\frac{1}{b-c}$,又 $c<0$,则 $\frac{c}{a-c}>\frac{c}{b-c}$,从而得证.

解法 2　因为 $a>b>c$ 且 $a+b+c=0$,所以 $c<0$,且 $a-c>b-c>0$,所以 $\frac{c}{a-c}-\frac{c}{b-c}=\frac{c(b-c)-c(a-c)}{(a-c)(b-c)}=\frac{c(b-a)}{(a-c)(b-c)}>0$,即 $\frac{c}{a-c}>\frac{c}{b-c}$.

(2) 因为 $a>b>c$ 且 $a+b+c=0$,所以 $a>0,c<0$,则 $\frac{c}{a}<0,\frac{b}{a}<1$,由 $a+b+c=0$,可得 $1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=0$,即 $\frac{b}{a}=-\frac{c}{a}-1$,所以 $-\frac{c}{a}-1<1$,即 $\frac{c}{a}>-2$. 综上,$-2<\frac{c}{a}<0$.

题组 9　基本不等式在最值问题中的应用

【核心笔记】

1. 利用基本不等式求最值,要关注三步:

(1)“一正”:验证各项为正数.(练习运用:第 8 题)

(2)“二定”:求和的最小值,须将构成和的二项之积转化为定值. 求积的最大值,须将构成积的因式的和转化为定值,主要的方法有:①凑配法(练习运用:第 2,3 题);②“1”的替换法(练习运用:第 1,4 题);③换元转换法(练习运用:第 6,9,10 题). 常用的技巧有:①减少变量法(练习运用:第 6,9 题);②分离常数法.(练习运用:第 6 题)

(3)“三相等”:必须验证等号成立的条件,若等号不成立,则所求值不是最值,特别地,在同一过程中,两次使用基本不等式,使等号成立的变量取值须一致,这是易错点.(练习运用:第 7,8 题)

【答案详析】

1. B　由 $2a+b=6$ 得 $\frac{a}{3}+\frac{b}{6}=1$. 因为 $a>0$ 且 $b>0$,所以 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{6}\right)=\frac{2}{3}+\frac{2a}{3b}+\frac{b}{6a}\geqslant\frac{2}{3}+2\sqrt{\frac{2a}{3b}\cdot\frac{b}{6a}}=\frac{4}{3}$,当且仅当 $\frac{2a}{3b}=\frac{b}{6a}$,即 $4a^2=b^2$,即 $a=\frac{3}{2},b=3$ 时取等号,所以 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$ 的最小值为 $\frac{4}{3}$.

2. A　因为 $\frac{2}{b^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{a^2c^2}}=2\sqrt{1}=2$,当且仅当 $a=c=\pm 1$ 时,等号成立,所以 $0<b^2\leqslant 1$,所以 $-1\leqslant b\leqslant 1$,且 $b\neq 0$,所以 b 的最大值为 1.

3. B　因为 $a^2+3ab+9b^2=6$,所以 $a^2+6ab+9b^2=$

$(a+3b)^2=6+3ab\leqslant 6+\left(\frac{a+3b}{2}\right)^2$，所以 $(a+3b)^2\leqslant 8$，即 $a+3b\leqslant 2\sqrt{2}$，当且仅当 $a=3b$ 时取等号.

4. D　因为 $\frac{b}{a}+\frac{2}{b}=\frac{b}{a}+\frac{a+b}{b}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+1$，又 a,b 为正实数，所以 $\frac{b}{a}+\frac{2}{b}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+1\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}+1=3$，当且仅当 $a=b=1$ 时，等号成立，所以 $\frac{b}{a}+\frac{2}{b}$ 的最小值为 3.

5. D　因为 $a>b>0$，所以 $a-b>0$，因此 $ab+\frac{4}{b^2}+\frac{1}{b(a-b)}=ab-b^2+\frac{1}{b(a-b)}+b^2+\frac{4}{b^2}=b(a-b)+\frac{1}{b(a-b)}+b^2+\frac{4}{b^2}\geqslant 2\sqrt{b(a-b)\cdot\frac{1}{b(a-b)}}+2\sqrt{b^2\cdot\frac{4}{b^2}}=2+4=6$，当且仅当 $b^2(a-b)^2=1$，$b^2=\frac{4}{b^2}$，即 $a=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$b=\sqrt{2}$ 时等号成立，所以 $ab+\frac{4}{b^2}+\frac{1}{b(a-b)}$ 的最小值 6.

6. C　**解法 1**　令 $a+1=m$，$b+1=n$，则 $m>1$，$n>1$，且 $a=m-1$，$b=n-1$，$m+n=8$，所以 $\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}=\frac{(m-1)^2}{m}+\frac{(n-1)^2}{n}=m+n+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-4=m+n+\frac{m+n}{mn}-4=4+\frac{8}{mn}\geqslant 4+\frac{8}{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2}=\frac{9}{2}$，当且仅当 $m=n=4$，即 $a=b=3$ 时等号成立.

解法 2　因为 $\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}=\frac{(a+1)^2-2a-1}{a+1}+\frac{(b+1)^2-2b-1}{b+1}=a+1-\frac{2a+1}{a+1}+b+1-\frac{2b+1}{b+1}=a+1-2+\frac{1}{a+1}+b+1-2+\frac{1}{b+1}=a+b-2+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}=4+\frac{1}{8}(a+1+b+1)\cdot\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\right)\geqslant\frac{1}{8}\left(2+2\sqrt{\frac{b+1}{a+1}\cdot\frac{a+1}{b+1}}\right)+4=\frac{9}{2}$（当且仅当 $a+1=b+1$，即 $a=b=3$ 时取等号）.

7. ACD　因为 $2x\sqrt{1-x^2}=2\sqrt{x^2(1-x^2)}\leqslant 2\cdot\frac{x^2+1-x^2}{2}=1$，当且仅当 $1-x^2=x^2$，即 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号，所以 $2x\sqrt{1-x^2}$ 的最大值为 1，故 A 正确；因为 $x^2+2+\frac{1}{x^2+2}\geqslant 2$ 的等号成立条件是 $x^2+2=\frac{1}{x^2+2}$，不成立，所以 B 错误；当 $x=0$ 时，$\frac{2x}{x^2+1}=0$，当 $x>0$ 时，$\frac{2x}{x^2+1}=\frac{2}{x+\frac{1}{x}}\leqslant\frac{2}{2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}}=1$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立，当 $x<0$ 时，$\frac{2x}{x^2+1}<0$，故 $\frac{2x}{x^2+1}$ 有最大值 1，故 C 正确；因为 $\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}(x+2-x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}\right)=\frac{1}{2}\left(2+\frac{2-x}{x}+\frac{x}{2-x}\right)\geqslant\frac{1}{2}(2+2)=2$，当且仅当 $\frac{1}{x}=\frac{1}{2-x}$，即 $x=1$ 时，等号成立，所以 D 正确.

8. AC　对于 A，有 $1-2x>0$，所以 $\frac{1}{2x-1}+2x=(2x-1)+\frac{1}{2x-1}+1=-\left[(1-2x)+\frac{1}{1-2x}\right]+1\leqslant -2\sqrt{(1-2x)\cdot\frac{1}{1-2x}}+1=-1$（当且仅当 $x=0$ 时等号成立），故 A 正确；对于 B，$x+\frac{1}{x}\geqslant 2$，当且仅当 $x=\frac{1}{x}$，即 $x=1$ 时取等号，又 $y=1-x>0$，所以 $x+\frac{1}{x}>2$，同理 $y+\frac{1}{y}>2$，故 $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)>4$，故 B 错误；对于 C，因为 $(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y})^2=2+x+y+2\sqrt{(1+x)(1+y)}\leqslant 3+1+x+1+y=6$，当且仅当 $1+x=1+y$，即 $x=y=\frac{1}{2}$ 时取等号，所以 $\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}\leqslant\sqrt{6}$，故 C 正确；对于 D，$2xy\leqslant\left(\frac{x+2y}{2}\right)^2$，$8-(x+2y)\leqslant\frac{(x+2y)^2}{4}$，故 $(x+2y+8)(x+2y-4)\geqslant 0$，故 $x+2y\geqslant 4$，故 D 错误.

9. $\frac{1}{9}$　因为 $12=x+y+2xy\geqslant 2\sqrt{xy}+2xy$，即 $(\sqrt{xy}-2)(\sqrt{xy}+3)\leqslant 0$，所以 $0<\sqrt{xy}\leqslant 2$，即 $xy\in(0,4]$. 令 $t=xy+1$，则 $t\in(1,5]$，则 $\frac{xy+1}{x^2y^2+3xy+18}=\frac{t}{(t-1)^2+3(t-1)+18}=\frac{t}{t^2+t+16}=\frac{1}{t+\frac{16}{t}+1}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{t\cdot\frac{16}{t}}+1}=\frac{1}{9}$，当且仅当 $t=4$ 时等号成立.

10. $\frac{47}{48}$　因为 a,b,c 为正实数，不妨令 $\begin{cases}b+3c=x,\\8c+4a=y,\\3a+2b=z,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}a=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{8}y+\frac{1}{6}z,\\b=\frac{1}{2}x-\frac{3}{16}y+\frac{1}{4}z,\\c=\frac{1}{6}x+\frac{1}{16}y-\frac{1}{12}z,\end{cases}$ 所以 $\frac{a}{b+3c}+\frac{b}{8c+4a}+\frac{9c}{3a+2b}=$

$\dfrac{-\frac{1}{3}x+\frac{1}{8}y+\frac{1}{6}z}{x}+\dfrac{\frac{1}{2}x-\frac{3}{16}y+\frac{1}{4}z}{y}+\dfrac{\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}y-\frac{3}{4}z}{z}=-\frac{1}{3}+\frac{y}{8x}+\frac{z}{6x}+\frac{x}{2y}-\frac{3}{16}+\frac{z}{4y}+\frac{3x}{2z}+\frac{9y}{16z}-\frac{3}{4}=-\frac{61}{48}+\left(\frac{y}{8x}+\frac{x}{2y}\right)+\left(\frac{z}{6x}+\frac{3x}{2z}\right)+\left(\frac{9y}{16z}+\frac{z}{4y}\right)\geqslant-\frac{61}{48}+2\sqrt{\frac{y}{8x}\cdot\frac{x}{2y}}+2\sqrt{\frac{z}{6x}\cdot\frac{3x}{2z}}+2\sqrt{\frac{9y}{16z}\cdot\frac{z}{4y}}=\frac{47}{48}$，当且仅当$\frac{y}{8x}=\frac{x}{2y}$，$\frac{z}{6x}=\frac{3x}{2z}$，$\frac{9y}{16z}=\frac{z}{4y}$，即$x:y:z=1:2:3$，即$a:b:c=10:21:1$时等号成立.

题组 10 不等式的解法、三个“二次”(二次函数、二次方程、二次不等式)的综合应用

【核心笔记】

1. 有关二次不等式的解集和分析一元二次方程的根的问题，密切联系二次函数的图象是探求解题思路的有效方法. 一般从：①开口方向；②对称轴位置；③判别式；④端点函数值符号四个方面分析(练习运用：第1,2,3,4题). 用二次函数的性质对方程的根进行限制时，可通过画出相应的示意图，避免因条件不严谨而致错.(练习运用：第3,5题)

2. 解含有参数的“一元二次不等式”时，需要把握分类讨论的层次：一是根据二次项系数的正负讨论，二是根据相应一元二次方程的判别式Δ的正负讨论，三在方程有解时，根据解的大小讨论.(练习运用：第6题)

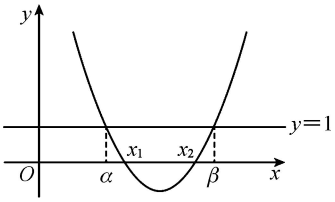
【答案详析】

1. B **解法1** 由$\begin{cases}x^2-4x+3<0,\\x^2-6x+8<0,\end{cases}$解得$\begin{cases}1<x<3,\\2<x<4,\end{cases}$则不等式组的解集是$\{x|2<x<3\}$. 关于$x$的不等式$x^2-3x+a<0$解集包含$\{x|2<x<3\}$，令$y=x^2-3x+a$，则当$x=2$时，$y\leqslant0$，当$x=3$时，$y\leqslant0$，即$\begin{cases}-2+a\leqslant0,\\a\leqslant0,\end{cases}$解得$a\leqslant0$.

解法2 由解法1知不等式组的解集为$\{x|2<x<3\}$. 若$a=2$，则$x^2-3x+2<0$的解集为$\{x|1<x<2\}$，不满足条件，故排除C；若$a=1$，则$x^2-3x+1<0$的解集为$\left\{x\middle|\frac{3-\sqrt5}{2}<x<\frac{3+\sqrt5}{2}\right\}$，不满足条件，故排除D；若$a=0$，则$x^2-3x<0$的解集为$\{x|0<x<3\}$，满足条件，故选B.

2. D 因为$y=x^2+ax+b\geqslant0(a,b\in\mathbf{R})$，则$\Delta=a^2-4b=0$，即$b=\frac{a^2}{4}$，则$y=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2$，对称轴为$x=-\frac{a}{2}$. 由$y<c$的解集为$\{x|m<x<m+4\}$，得$y-c=0$的根为$m,m+4$，即$x^2+ax+\frac{a^2}{4}-c=0$的根为$m,m+4$，则$x_1+x_2=-a=2m+4$，$m=\frac{-a-4}{2}$，所以$c=\left(m+\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{-a-4}{2}+\frac{a}{2}\right)^2=(-2)^2=4$.

3. BC 由题意得$a>0$，故A错误；因为将二次函数$y=ax^2+bx+c-1$的图象上的所有点向上平移1个单位长度，得到二次函数$y=ax^2+bx+c$的图象，所以$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}$，即$\beta-x_1=x_2-\alpha$，B正确；如图，又$0<\beta-\alpha<1$，所以$|x_1-x_2|<|\beta-\alpha|<1$，C正确；当$\alpha<\beta<0$，$x_1<x_2<0$时，$|\beta-x_2|=|\alpha-x_1|$，$|\beta+x_2|<|\alpha+x_1|$，所以$|\beta^2-x_2^2|=|(\beta-x_2)\cdot(\beta+x_2)|<|(\alpha-x_1)(\alpha+x_1)|=|\alpha^2-x_1^2|$，D错误.



4. $\left\{x\middle|x>1\text{ 或 }x<-\frac{1}{2}\right\}$ $\frac{2\sqrt2}{3}$ 当$a=\frac{1}{2}$时，由$x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}>0$，解得$x>1$或$x<-\frac{1}{2}$，即不等式的解集为$\left\{x\middle|x>1\text{ 或 }x<-\frac{1}{2}\right\}$. 令$x^2-(3a-1)x-a=0$，显然$\Delta=(3a-1)^2+4a=9a^2-2a+1>0$，$x_1+x_2=3a-1$，$x_1x_2=-a$，所以$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{(3a-1)^2+4a}=\sqrt{9a^2-2a+1}=\sqrt{9\left(a-\frac{1}{9}\right)^2+\frac{8}{9}}$，当$a=\frac{1}{9}$时，$|x_1-x_2|$取得最小值，最小值为$\frac{2\sqrt2}{3}$.

5. $\left\{k\middle|-\frac{3}{4}<k\leqslant0\right\}$ 由题意令$y=x^2+kx+2k-1$，当$x=-1$，$x=2$不是方程的根时，结合函数图象得$\begin{cases}\Delta=k^2-4(2k-1)>0,\\(1-k+2k-1)(4+2k+2k-1)<0,\end{cases}$解得$-\frac{3}{4}<k<0$；当$x=-1$是方程的根时，得$1-k+2k-1=0$，解得$k=0$，此时方程为$x^2-1=0$，解得$x=1$或$x=-1$，符合题意；当$x=2$是方程的根时，得$4+2k+2k-1=0$，解得$k=-\frac{3}{4}$，此时方程为$x^2-\frac{3}{4}x+2\times\left(-\frac{3}{4}\right)-1$

$=0$,解得 $x=2$ 或 $x=-\frac{5}{4}$,不符合题意. 所以实数 k 的取值范围是 $\left\{k\left|-\frac{3}{4}<k\leqslant 0\right.\right\}$.

6. 解:(1) 由题知 $y=ax^2+x-1(a\in\mathbf{R})$,又 $\{x|y=0\}$ 中有且只有一个元素,

所以方程 $ax^2+x-1=0$ 有且仅有一个根,

当 $a=0$ 时,$x-1=0$,即 $x=1$,则 $\{x|y=0\}=\{1\}$,满足题设;

当 $a\neq 0$ 时,$\Delta=1+4a=0$,即 $a=-\frac{1}{4}$,则 $\{x|y=0\}=\{2\}$,满足题设.

所以 a 的取值集合为 $\left\{-\frac{1}{4},0\right\}$.

(2) 由题设 $ax^2+x-b<(a-1)x^2+(b+2)x-2b$,整理得 $x^2-(b+1)x+b=(x-b)(x-1)<0$,

当 $b<1$ 时,解集为 $\{x|b<x<1\}$;当 $b=1$ 时,解集为 $\varnothing$;当 $b>1$ 时,解集为 $\{x|1<x<b\}$.

(3) 由 $t>0$,恒有 $t-2>-t-2$,故 $Q\neq\varnothing$.

$y=ax^2+x-b>0$ 且 $a>0,b>1$,故其图象开口向上且当 $x=0$ 时,$y=-b<0$,故对应一元二次方程恒有两个不等实根,且在 y 轴两侧,

因为 $P\cap Q\neq\varnothing$,即 $y>0$ 在 $-2-t<x<-2+t$ 内有解,且对任意 $t>0$ 均成立,

所以满足当 $x=-2$ 时,函数 $y\geqslant 0$,即 $4a-2-b\geqslant 0$,所以 $4a\geqslant b+2>3$,

则 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{4}{b+2}-\frac{1}{b}=\frac{3b-2}{b(b+2)}$,

令 $t=3b-2>1$,此时 $b=\frac{t+2}{3}$,

的以 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\leqslant\frac{4}{b+2}-\frac{1}{b}=\frac{3b-2}{b(b+2)}=\frac{9}{t+\frac{16}{t}+10}\leqslant\frac{1}{2}$,

当且仅当 $t=\frac{16}{t}$,即 $t=4$ 时取等号,此时 $a=1,b=2$,$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ 有最大值 $\frac{1}{2}$.

题组 11 一元二次不等式恒成立与有解问题

【核心笔记】

一元二次不等式恒成立或有解的几种解题策略:

1. 转化法:将问题转化成含参的二次方程有解、无解或含参的二次函数的最值问题,对于给定范围的恒成立或有解,则对对称轴的位置及端点值的正负进行分类讨论,最后解相关的一元二次不等式,注意对含参的二项式系数的分类讨论.(练习运用:第 1,4,6 题)

2. 参变分离法,先分离出参数,再求函数的最值来处理;$m>f(x)$ 恒成立的充要条件是 $m>f(x)_{\max}$,$m<f(x)$ 恒成立的充要条件是 $m<f(x)_{\min}$;$m>f(x)$ 有解的充要条件是 $m>f(x)_{\min}$,$m<f(x)$ 有解的充要条件是 $m<f(x)_{\max}$.(练习运用:第 2,4 题)

3. 主元变换法,把已知取值范围的变量作为主元,把未知取值范围的变量看作参数.(练习运用:第 7,8 题)

【答案详析】

1. B 当 $a=3$ 时,$-1<0$ 恒成立;当 $a\neq 3$ 时,则 $\begin{cases}\Delta<0,\\a-3<0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}(a-3)^2-4(a-3)(-1)<0,\\a-3<0,\end{cases}$ 解得 $-1<a<3$,则 a 的取值范围是 $\{a|-1<a\leqslant 3\}$.

2. C 由题意,命题 p 的否定"$\forall x>0,x^2-mx+1>0$"为真命题,即 $m<x+\frac{1}{x}$ 对任意 $x>0$ 恒成立. 因为 $x>0,\frac{1}{x}>0,x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$,当且仅当 $x=\frac{1}{x}$,即 $x=1$ 时取等号,所以 $m<2$.

3. B 由于 $\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}\subseteq A$,则对于任意的 $1\leqslant x\leqslant 2$,$x^2-mx-m<0$ 恒成立,所以 $\begin{cases}1-m-m<0,\\4-2m-m<0,\end{cases}$ 解得 $m>\frac{4}{3}$.

4. B **解法 1** 解不等式 $x^2-2x-3\leqslant 0$,得 $-1\leqslant x\leqslant 3$,所以存在 $-1\leqslant x\leqslant 3$,使得不等式 $x^2+4x-(1+a)\leqslant 0$ 成立,即存在 $-1\leqslant x\leqslant 3$,使得 $1+a\geqslant x^2+4x$ 成立,只需 $1+a\geqslant(x^2+4x)_{\min}$. 又当 $-1\leqslant x\leqslant 3$ 时,函数 $y=x^2+4x=(x+2)^2-4$ 的最小值为 -3,所以 $1+a\geqslant -3$,即 $a\geqslant -4$.

解法 2 解不等式 $x^2-2x-3\leqslant 0$,得 $-1\leqslant x\leqslant 3$. 当 $a=20$ 时,由 $x^2+4x-21\leqslant 0$ 得 $-7\leqslant x\leqslant 3$,显然成立,排除 A,D;当 $a=31$ 时,由 $x^2+4x-32\leqslant 0$,得 $-8\leqslant x\leqslant 4$,显然成立,故排除 C,选 B.

5. D 由题意知,不等式 $x^2+(m+2)x+2m\leqslant 0$ 的解集是 $\left\{x\left|x\leqslant\frac{1}{2}\right.\right\}$ 的子集. 又 $x^2+(m+2)x+2m\leqslant 0$ 等价于 $(x+2)(x+m)\leqslant 0$,当 $m=2$ 时,$x=-2$,符合题意. 当 $m<2$ 时,$-2\leqslant x\leqslant -m$,又 $\{x|-2\leqslant x\leqslant -m\}\subseteq\left\{x\left|x\leqslant\frac{1}{2}\right.\right\}$,则 $-m\leqslant\frac{1}{2}$,所以 $-\frac{1}{2}\leqslant m<2$;当 $m\geqslant 2$ 时,$-m\leqslant x\leqslant -2$,又 $\{x|-m\leqslant x\leqslant -2\}\subseteq\left\{x\left|x\leqslant\frac{1}{2}\right.\right\}$,符合题意,故实数 m 的取值范围为 $\left\{m\left|m\geqslant-\frac{1}{2}\right.\right\}$.

6. $\left\{m\left|m<\frac{5}{24}\right.\right\}$ 当 $m=0$ 时,$-5<0$,显然恒成立.

当 $m>0$ 时，二次函数 $y=mx^2-2mx-5$ 的图象开口向上，对称轴为直线 $x=1$，当 $2\leqslant x\leqslant 6$ 时，$mx^2-2mx-5<0$ 恒成立，则 $36m-12m-5<0$，解得 $0<m<\frac{5}{24}$. 当 $m<0$ 时，二次函数 $y=mx^2-2mx-5$ 的图象开口向下，对称轴为直线 $x=1$，当 $2\leqslant x\leqslant 6$ 时，$mx^2-2mx-5<0$ 恒成立，则 $4m-4m-5<0$，显然成立，所以 $m<0$. 故 m 的取值集合是 $\left\{m\middle|m<\frac{5}{24}\right\}$.

7. $\{x|x<0$ 或 $x>4\}$　由 $x^2+(a-4)x+4-2a>0$，得 $(x-2)a+x^2-4x+4>0$，令 $y=(x-2)a+x^2-4x+4$，若 $x=2$，则 $y=0$ 不合题意，所以 $x\neq 2$. 当 $x>2$ 时，要使 $y>0$ 在 $-2\leqslant a\leqslant 2$ 时上恒成立，则需当 $a=-2$ 时，$y=x^2-6x+8>0$，解得 $x<2$ 或 $x>4$，所以 $x>4$；当 $x<2$ 时，要使 $y>0$ 在 $-2\leqslant a\leqslant 2$ 时恒成立，则需当 $a=2$ 时，$y=x^2-2x>0$，解得 $x<0$ 或 $x>2$，所以 $x<0$. 因此 x 的取值范围为 $\{x|x<0$ 或 $x>4\}$.

8. $\{t|t\leqslant -4$ 或 $t=0$ 或 $t\geqslant 4\}$　因为二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的对称轴为 y 轴，所以 $-\frac{b}{2a}=0$ 即 $b=0$. 因为二次函数的图象经过 $(0,0)$，$(1,1)$ 两点，所以 $\begin{cases}c=0,\\a+c=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}c=0,\\a=1,\end{cases}$ 所以二次函数的解析式为 $y=x^2$. 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y=x^2$ 的最大值为 1，依题意有 $1\leqslant t^2-2mt+1$ 即 $2mt-t^2\leqslant 0$ 恒成立. 当 $-2\leqslant m\leqslant 2$ 时，令 $f(m)=2mt-t^2$，若 $t=0$，$f(m)=0$ 满足题意，若 $t>0$，则 $f(2)=4t-t^2\leqslant 0$，解得 $t\geqslant 4$，若 $t<0$，则 $f(-2)=-4t-t^2\leqslant 0$，解得 $t\leqslant -4$. 综上，实数 t 的取值范围是 $t\geqslant 4$ 或 $t\leqslant -4$ 或 $t=0$.

综合提优(2.1～2.3)

1. C　**解法 1**　因为 $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}>0$，所以 $\sqrt{a}>\sqrt{b}$，故 A 错误；因为 $ac-bc=c(a-b)<0$，所以 $ac<bc$，故 B 错误；因为 $\frac{c}{a-c}-\frac{b}{a-b}=\frac{c(a-b)-b(a-c)}{(a-c)(a-b)}=\frac{a(c-b)}{(a-c)(a-b)}<0$，所以 $\frac{c}{a-c}<\frac{b}{a-b}$，故 C 正确；因为 $\frac{b-c}{a-c}-\frac{b}{a}=\frac{a(b-c)-b(a-c)}{a(a-c)}=\frac{c(b-a)}{a(a-c)}>0$，所以 $\frac{b-c}{a-c}>\frac{b}{a}$，故 D 错误.

解法 2　令 $a=2$，$b=1$，$c=-1$，显然 A，B 错误；由 $\frac{b-c}{a-c}=\frac{2}{3}$，$\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$ 可知 D 错误.

2. B　因为 $x>1$，所以 $2-3x-\frac{4}{x-1}=-1-\left[3(x-1)+\frac{4}{x-1}\right]\leqslant -1-2\sqrt{3(x-1)\cdot\frac{4}{x-1}}=-1-4\sqrt{3}$，当且仅当 $3(x-1)=\frac{4}{x-1}$，即 $x=1+\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立，所以 $2-3x-\frac{4}{x-1}$ 的最大值是 $-4\sqrt{3}-1$.

3. A　因为 $(m+2n)^2=\left(\frac{1}{m}+\frac{4}{n}\right)(m+2n)=9+\frac{4m}{n}+\frac{2n}{m}\geqslant 9+4\sqrt{2}$，当且仅当 $n=\sqrt{2}$，$m=1$ 时等号成立，所以 $(m+2n)_{\min}=\sqrt{9+4\sqrt{2}}=2\sqrt{2}+1$.

4. D　**解法 1**　因为 $x<y<z$，$a<b<c$，所以 $ax+by+cz-(az+by+cx)=a(x-z)+c(z-x)=(x-z)\cdot(a-c)>0$，故 $ax+by+cz>az+by+cx$. 同理，$ay+bz+cx-(ay+bx+cz)=b(z-x)+c(x-z)=(x-z)(c-b)<0$，故 $ay+bz+cx<ay+bx+cz$. 因为 $az+by+cx-(ay+bz+cx)=a(z-y)+b(y-z)=(a-b)(z-y)<0$，所以 $az+by+cx<ay+bz+cx$. 故最低费用为 $az+by+cx$.

解法 2　令 $x=1$，$y=2$，$z=3$，$a=1$，$b=2$，$c=3$，则 $ax+by+cz=14$，$ay+bx+cz=13$，$ay+bz+cx=11$，$az+by+cx=10$.

5. C　因为实数 x_1，x_2 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-(m+1)x+2m-1=0$ 的两个根，所以 $x_1+x_2=m+1$，$x_1x_2=2m-1$，且 $\Delta>0$，即 $(m+1)^2-4(2m-1)>0$，整理得 $(m-5)(m-1)>0$，得 $m<1$ 或 $m>5$，所以 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{m+1}{2m-1}$，故 $\frac{m+1}{2m-1}<m-1$，即 $\frac{m+1}{2m-1}-(m-1)<0$，即 $\frac{m+1}{2m-1}-\frac{(2m-1)(m-1)}{2m-1}<0$，整理得 $\frac{2m(-m+2)}{2m-1}<0$，即 $\frac{m(m-2)}{2m-1}>0$，故 $m(m-2)(2m-1)>0$，可得 $0<m<\frac{1}{2}$ 或 $m>2$，又 $m<1$ 或 $m>5$，所以 $0<m<\frac{1}{2}$ 或 $m>5$.

6. ACD　对于 A，$\frac{b}{a}=\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{a}\right)\leqslant\left[\frac{\frac{1}{a}+1-\frac{1}{a}}{2}\right]^2=\frac{1}{4}$，当且仅当 $a=2$ 时等号成立，故 A 正确；对于 B，$\frac{1}{a^2}+b^2=\frac{1}{a^2}+\left(1-\frac{1}{a}\right)^2=2\left(\frac{1}{a}\right)^2-2\left(\frac{1}{a}\right)+1=2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$，当 $a=2$ 时，$\frac{1}{a^2}+b^2$ 有最小值 $\frac{1}{2}$，故 B 错误；对于 C，$\frac{a}{2}-b=\frac{a}{2}-1+\frac{1}{a}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{2}}-1=\sqrt{2}-1$，当且仅当 $a=\sqrt{2}$ 时等号成立，故 C 正确；对于 D，$a+$

$\frac{1}{b}=a+\frac{1}{1-\frac{1}{a}}=a+\frac{a}{a-1}=(a-1)+\frac{1}{a-1}+2\geqslant 4$，当且仅当 $a-1=\frac{1}{a-1}$，即 $a=2$ 时等号成立，故 D 正确.

7. AD　不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集 $M=\varnothing$，等价于一元二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象没有在 x 轴上方的部分，故等价于 $\begin{cases}a<0,\\ b^2-4ac\leqslant 0,\end{cases}$ 所以 A 正确；取 $a=1,b=-2,c=-3,a_1=-1,b_1=2,c_1=3$，此时能满足 $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c}$，而 $x^2-2x-3>0$ 的解集为 $\{x|x<-1$ 或 $x>3\}$，$-x^2+2x+3>0$ 的解集为 $\{x|-1<x<3\}$，故 B 错误；因为一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $M=\{x|-2<x<3\}$，所以 -2 与 3 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根且 $a<0$，故 $\begin{cases}-2+3=-\frac{b}{a},\\ -2\times 3=\frac{c}{a},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-a,\\ c=-6a,\\ a<0,\end{cases}$ 所以不等式 $cx^2-bx+a<0$ 即为 $-6ax^2+ax+a<0$，等价于不等式 $6x^2-x-1<0$，解集为 $\left\{x\middle|-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}\right\}$，所以 C 错误；因为 $M=\left\{x\middle|x\neq-\frac{b}{2a}\right\}$，所以 $a>0$，$\Delta=b^2-4ac=0$，即 $4c=\frac{b^2}{a}$，令 $b-a=t(t>0)$，所以 $\frac{a+2b+\frac{b^2}{a}}{b-a}=\frac{a^2+2ab+b^2}{a(b-a)}=\frac{a^2+2a(t+a)+(t+a)^2}{at}=\frac{4a^2+4at+t^2}{at}=\frac{4a}{t}+4+\frac{t}{a}\geqslant 2\sqrt{\frac{4a}{t}\cdot\frac{t}{a}}+4=8$，当且仅当 $\frac{4a}{t}=\frac{t}{a}$，即 $b=3a$ 时取"="，D 正确.

8. 解：(1) 由题意可得 $(a-1)x^2-2bx-2=0$ 的两根为 -1 和 2，所以 $\begin{cases}(a-1)+2b-2=0,\\ 4(a-1)-4b-2=0,\end{cases}$ 解得 $a=2$，$b=\frac{1}{2}$.

(2) 由(1)知 $amx^2+(m-a)x-1\geqslant 0$ 可化为 $2mx^2+(m-2)x-1\geqslant 0$，即 $(2x+1)(mx-1)\geqslant 0$. 当 $m=0$ 时，不等式为 $2x+1\leqslant 0$，解得 $x\leqslant-\frac{1}{2}$. 当 $m\neq 0$ 时，$(2x+1)(mx-1)=0$ 的两根为 $-\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{m}$. ①当 $m>0$ 时，$(2x+1)(mx-1)\geqslant 0$ 的解集为 $\left\{x\middle|x\leqslant-\frac{1}{2}\text{或}x\geqslant\frac{1}{m}\right\}$. ②当 $m<0$ 时，(ⅰ)若 $-\frac{1}{2}=\frac{1}{m}$，即 $m=-2$，$(2x+1)(mx-1)\geqslant 0$ 的解集为 $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.(ⅱ)若 $-\frac{1}{2}<\frac{1}{m}$，即 $m<-2$，$(2x+1)(mx-1)\geqslant 0$ 的解集为 $\left\{x\middle|-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{m}\right\}$.(ⅲ)若 $-\frac{1}{2}>\frac{1}{m}$，即 $-2<m<0$，$(2x+1)(mx-1)\geqslant 0$ 的解集为 $\left\{x\middle|\frac{1}{m}\leqslant x\leqslant-\frac{1}{2}\right\}$. 综上，当 $m=0$ 时，解集为 $\left\{x\middle|x\leqslant-\frac{1}{2}\right\}$；当 $m>0$ 时，解集为 $\left\{x\middle|x\leqslant-\frac{1}{2}\text{或}x\geqslant\frac{1}{m}\right\}$；当 $m=-2$ 时，解集为 $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$；当 $m<-2$ 时，解集为 $\left\{x\middle|-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{m}\right\}$；当 $-2<m<0$ 时，解集为 $\left\{x\middle|\frac{1}{m}\leqslant x\leqslant-\frac{1}{2}\right\}$.

(3) 由(1)得 $amx^2+(m-a)x-1\geqslant mx$ 可化为 $2mx^2-2x-1\geqslant 0$，即 $m\geqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}$ 对任意 $1\leqslant x\leqslant 2$ 恒成立. 令 $t=\frac{1}{x}\in\left\{t\middle|\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\right\}$，可得 $m\geqslant\frac{1}{2}t^2+t$. 易知 $y=\frac{1}{2}t^2+t$，对称轴为 $t=-1$，所以当 $t=1$ 时，$y_{\max}=\frac{3}{2}$，所以 $m\geqslant\frac{3}{2}$.

章末提优·真题精选

1. D　由 $c<d<0$ 得 $-\frac{1}{d}>-\frac{1}{c}>0$，又 $a>b>0$，所以 $-\frac{a}{d}>-\frac{b}{c}>0$，所以 $\frac{a}{d}<\frac{b}{c}$.

2. B　由 $x^2-3xy+4y^2-z=0$，得 $z=x^2-3xy+4y^2$. 所以 $\frac{xy}{z}=\frac{xy}{x^2-3xy+4y^2}=\frac{1}{\frac{x}{y}+\frac{4y}{x}-3}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{4y}{x}}-3}=1$，当且仅当 $\frac{x}{y}=\frac{4y}{x}$，即 $x=2y$ 时取等号，此时 $z=2y^2$，$\left(\frac{xy}{z}\right)_{\max}=1$. 所以 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}=\frac{2}{2y}+\frac{1}{y}-\frac{2}{xy}=\frac{2}{y}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{y}\left(1-\frac{1}{2y}\right)\leqslant 4\left(\frac{\frac{1}{2y}+1-\frac{1}{2y}}{2}\right)^2=1$.

3. A　由 $x^2-2ax-8a^2<0(a>0)$ 得 $(x-4a)\cdot(x+2a)<0$，即 $-2a<x<4a$，则 $x_1=-2a,x_2=4a$. 由 $x_2-x_1=4a-(-2a)=6a=15$，所以 $a=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}$.

4. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　由 $a+b+c=0$ 得 $a=-b-c$，则 $a^2=(-b-$

$c)^2=b^2+c^2+2bc\leqslant b^2+c^2+b^2+c^2=2(b^2+c^2)$. 又 $a^2+b^2+c^2=1$，所以 $3a^2\leqslant 2$，解得 $-\frac{\sqrt{6}}{3}\leqslant a\leqslant\frac{\sqrt{6}}{3}$，故 a 的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

5. BC　由 $x^2+y^2-xy=1$ 可变形为 $(x+y)^2-1=3xy\leqslant 3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$，解得 $-2\leqslant x+y\leqslant 2$，当且仅当 $x=y=-1$ 时，$x+y=-2$，当且仅当 $x=y=1$ 时，$x+y=2$，所以 A 错误，B 正确；由 $x^2+y^2-xy=1$ 可变形为 $|(x^2+y^2)-1|=|xy|\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}$，解得 $\frac{2}{3}\leqslant x^2+y^2\leqslant 2$，当且仅当 $x=y=\pm 1$ 时取等号，所以 C 正确；但 $x^2+y^2\geqslant 1$ 不成立，所以 D 错误.

6. 4　因为 $a>0,b>0$，得 $a+b>0$，又 $ab=1$，则 $\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{8}{a+b}=\frac{ab}{2a}+\frac{ab}{2b}+\frac{8}{a+b}=\frac{a+b}{2}+\frac{8}{a+b}\geqslant 2\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{8}{a+b}}=4$，当且仅当 $a+b=4$ 且 $ab=1$，即 $a=2-\sqrt{3},b=2+\sqrt{3}$ 或 $a=2+\sqrt{3},b=2-\sqrt{3}$ 时取等号.

7. $4\sqrt{3}$　因为 $x>0,y>0,x+2y=5$，则 $\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}=\frac{2xy+x+2y+1}{\sqrt{xy}}=\frac{2xy+6}{\sqrt{xy}}=2\sqrt{xy}+\frac{6}{\sqrt{xy}}\geqslant 2\sqrt{2\sqrt{xy}\cdot\frac{6}{\sqrt{xy}}}=4\sqrt{3}$，当且仅当 $2\sqrt{xy}=\frac{6}{\sqrt{xy}}$ 时，即 $\begin{cases}x=3,\\y=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2,\\y=\frac{3}{2}\end{cases}$ 时，等号成立.

8. $\left\{x^2+y^2\middle|\frac{1}{2}\leqslant x^2+y^2\leqslant 1\right\}$　由题意，$u=x^2+y^2=x^2+(1-x)^2=2x^2-2x+1=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$，且 $x\in[0,1]$. 又当 $x=0$ 时，$u=x^2+y^2=1$，当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$u_{\min}=x^2+y^2=\frac{1}{2}$，当 $x=1$ 时，$u=x^2+y^2=1$，所以 x^2+y^2 的取值范围为 $\left\{x^2+y^2\middle|\frac{1}{2}\leqslant x^2+y^2\leqslant 1\right\}$.

9. $\left\{m\middle|-\frac{\sqrt{2}}{2}<m<0\right\}$　由题意可得 $y<0$ 对 $m\leqslant x\leqslant m+1$ 恒成立，即 $\begin{cases}2m^2-1<0,\\2m^2+3m<0,\end{cases}$ 解得 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<m<0$.

阶段温习 1(第一章)

1. A　$A=\{x|3\leqslant x<6\}$，$B=\{x|-2<x<5\}$，则 $A\cap B=\{x|3\leqslant x<5\}$，所以 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)=\{x|x<3$ 或 $x\geqslant 5\}$.

2. A　因为 $\{1,2\}$ 为 M 的真子集，所以 $1\in M,2\in M$ 且 M 中至少还有一个元素. 又 $M\subseteq\{1,2,3,4\}$，所以 $M=\{1,2,3\}$ 或 $\{1,2,4\}$ 或 $\{1,2,3,4\}$，故满足条件的集合 M 有 3 个.

3. C　由 $ax^2+(a-2)x-2\leqslant 0$，可得 $a\leqslant\frac{2x+2}{x^2+x}=\frac{2}{x}$，即 $a\leqslant\left(\frac{2}{x}\right)_{\max}=2$.

4. BD　对于 A，$x=\sqrt{2}$ 是无理数，$x^2=2$ 是有理数，故 A 错误；对于 B，由全称量词命题与存在量词命题的定义知其正确；对于 C，$x^2+y^2\geqslant 4$，可取 $x=3,y=0$，不符合 $x\geqslant 2$ 且 $y\geqslant 2$，而 $x\geqslant 2$ 且 $y\geqslant 2$ 可以推出 $x^2+y^2\geqslant 4$，所以“$x^2+y^2\geqslant 4$”是“$x\geqslant 2$ 且 $y\geqslant 2$”的必要不充分条件，故 C 错误；对于 D，若 $a\neq 0$，但 $b=0$ 时，有 $ab=0$，而 $ab\neq 0$ 可推出 $a\neq 0$，所以“$a\neq 0$”是“$ab\neq 0$”的必要不充分条件，故 D 正确.

5. $\{m|m\geqslant 4$ 或 $m\leqslant -3\}$　由必要不充分条件的定义可知 $x<m$ 或 $x>m+2\not\Rightarrow -1<x<4$，$-1<x<4\Rightarrow x<m$ 或 $x>m+2$，所以 $m\geqslant 4$ 或 $m+2\leqslant -1$，即 $m\geqslant 4$ 或 $m\leqslant -3$.

6. $\left\{a\middle|a<\frac{1}{2}\text{或}a=1\right\}$　$A=\{2,3\}$，且 B 为 A 的子集. 当 $B=\varnothing$ 时，$\begin{cases}a-1\neq 0,\\\Delta=4^2+32(a-1)<0,\end{cases}$ 解得 $a<\frac{1}{2}$. 当 $B\neq\varnothing$ 时，若 $a-1=0$，即 $a=1$，此时 $(a-1)x^2+4x-8=0$ 的解为 $x=2$，即 $B=\{2\}$，符合题意. 若 $a-1\neq 0$，即 $a\neq 1$，当 $\Delta=4^2+32(a-1)=0$，即 $a=\frac{1}{2}$ 时，此时 $-\frac{1}{2}x^2+4x-8=0$，即 $(x-4)^2=0$，解得 $x=4$，即 $B=\{4\}$，不符合题意；当 $\Delta=4^2+32(a-1)>0$，即 $a>\frac{1}{2}$ 时，由此时集合 $B=\{2,3\}$，得 $2+3=-\frac{4}{a-1}$，解得 $a=\frac{1}{5}$，与 $a>\frac{1}{2}$ 矛盾，不符合题意. 综上所述，实数 a 的取值范围为 $\left\{a\middle|a<\frac{1}{2}\text{或}a=1\right\}$.

7. **解**：(1) $B=\{x|x\leqslant m-2$ 或 $x\geqslant m+2\}$，当 $m=1$ 时，$B=\{x|x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 3\}$，则 $\complement_U B=\{x|-1<x<3\}$，所以阴影部分表示的集合为 $A\cap(\complement_U B)=\{x|-1<x<2\}$.

(2) 由(1)可知，命题 $\neg q$ 为 $x\in\{x|m-2<x<m+2\}$.

若选①，命题 p 为 $x\in\{x|x\leqslant -3$ 或 $x\geqslant 2\}$，因为 p 是 $\neg q$ 的必要不充分条件，则 $\complement_U B\subsetneqq\complement_U A$，所以 $m+2\leqslant -3$ 或 $m-2\geqslant 2$，则 $m\leqslant -5$ 或 $m\geqslant 4$，故存在 m 满足题

意,且 m 的取值范围为 $\{m|x\leqslant -5$ 或 $m\geqslant 4\}$.

若选②,命题 p 为 $x\in A\cap C=\{x|-1<x<2\}$. 因为 p 是 $\neg q$ 的必要不充分条件,则 $\complement_U B\subsetneqq A\cap C$,所以 $\begin{cases}m-2\geqslant -1,\\ m+2\leqslant 2,\end{cases}$ 且等号不同时成立,故不存在满足题意的实数 m.

若选③,命题 p 为 $x\in A\cup C=\{x|-3<x<4\}$,因为 p 是 $\neg q$ 的必要不充分条件,则 $\complement_U B\subsetneqq A\cup C$,所以 $\begin{cases}m-2\geqslant -3,\\ m+2\leqslant 4,\end{cases}$ 且等号不同时成立,解得 $-1\leqslant m\leqslant 2$,故存在 m 满足题意,m 的取值范围为 $\{m|-1\leqslant m\leqslant 2\}$.

8. 解:(1) **解法 1**　$\Delta=(-a)^2-4(3-a)=a^2+4a-12$,当 $\Delta\leqslant 0$,即 $-6\leqslant a\leqslant 2$ 时,满足题意;当 $\Delta>0$ 时,则有 $\begin{cases}a^2+4a-12>0,\\ \dfrac{a}{2}<-1,\\ 1-a\times(-1)-a+3\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $a<-6$,综上,$\{a|a\leqslant 2\}$.

解法 2　因为 $\forall x\geqslant -1$,$x^2-ax-a+3\geqslant 0$,所以 $a(x+1)\leqslant x^2+3$,当 $x=-1$ 时,$a\in\mathbf{R}$,当 $x>-1$ 时,$a\leqslant \dfrac{x^2+3}{x+1}$,令 $x+1=t$,则 $\dfrac{x^2+3}{x+1}=\dfrac{-(t-1)^2+3}{t}=\dfrac{t^2-2t+4}{t}=t+\dfrac{4}{t}-2(t>0)$,因为 $t+\dfrac{4}{t}\geqslant 2\sqrt{t\cdot\dfrac{4}{t}}=4$,当且仅当 $t=2$ 时等号成立. 所以 $t+\dfrac{4}{t}-2\geqslant 2$,即 $a\leqslant 2$.

(2) 因为两根均大于 0,所以 $\begin{cases}\Delta=4a^2-4(6-a)\geqslant 0,\\ x_1+x_2=2a>0,\\ x_1x_2=6-a>0,\end{cases}$ 解得 $2\leqslant a<6$,若 p 真 q 假,$a<2$;若 p 假 q 真,$2<a<6$,综上,$\{a|a<2$ 或 $2<a<6\}$.

第三章　函数的概念与性质

题组 12　函数的定义域问题

【核心笔记】

1. 求函数定义域的常用方法(练习运用:第 1,7 题)

(1) 若 $f(x)$ 是分式,则应考虑使分母不为零;

(2) 若 $f(x)$ 是偶次根式,则被开方数大于或等于零;

(3) 若 $f(x)$ 是指数幂,则函数的定义域是使指数幂运算有意义的实数集合;

(4) 若 $f(x)$ 是由几个式子构成的,则函数的定义域要使各个式子都有意义;

(5) 若 $f(x)$ 是实际问题的解析式,则应符合实际问题,使实际问题有意义.

2. 抽象函数的定义域的求解策略(练习运用:第 3,4,9 题)

(1) 若已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$,则复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域由不等式 $a\leqslant g(x)\leqslant b$ 求出.

(2) 若已知函数 $f[g(x)]$ 的定义域为 $[a,b]$,则 $f(x)$ 的定义域为 $g(x)$ 在 $x\in[a,b]$ 时的值域.

3. 已知函数定义域及值域求参数问题的解题思路(练习运用:第 5,7 题)

(1) 注意调整思维方向,根据定义域及值域的含义,将给出的定义域及值域转化为方程的解或不等式的解集的问题.

(2) 根据方程的解或不等式的解集情况来确定参数的值或取值范围.

(3) 已知函数的定义域求函数中参数的取值,需运用分类讨论以及转化与化归的思想方法. 转化与化归即通过某种转化过程,将一个难以解决的问题转化为一个已经解决或者比较容易解决的问题,从而获解.

【答案详析】

1. D　要使原函数有意义,则 $\begin{cases}x-2\geqslant 0,\\ |x|-5\neq 0,\end{cases}$ 解得 $x\geqslant 2$ 且 $x\neq 5$,即函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{|x|-5}$ 的定义域为 $[2,5)\cup(5,+\infty)$.

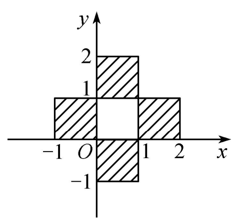
2. D　令 $f(x)=t$,则 $f(t)=1$,所以 $\begin{cases}t\leqslant -1,\\ t+2=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}t>-1,\\ t^2=1,\end{cases}$ 解得 $t=-1$ 或 $t=1$,所以 $f(x)=1$ 或 $f(x)=-1$,所以 $\begin{cases}x+2=1,\\ x\leqslant -1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x^2=1,\\ x>-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+2=-1,\\ x\leqslant -1,\end{cases}$ 解得 $x=-1$ 或 $x=1$ 或 $x=-3$.

3. A　因为 $f(x)=\dfrac{11}{\sqrt{x-2}}$,所以 $x-2>0$,解得 $x>2$,即 $f(x)$ 的定义域为 $(2,+\infty)$. 若 $y=f(x)-f(13-x)$ 有意义,则 $\begin{cases}x>2,\\ 13-x>2,\end{cases}$ 解得 $2<x<11$,即 $y=f(x)-f(13-x)$ 的定义域为 $(2,11)$.

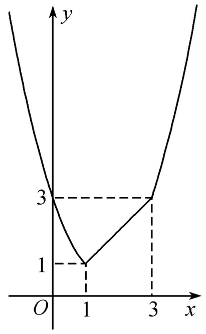
4. D　因为 $f(x-1)$ 的定义域为 $[-1,3]$,则 $-1\leqslant x\leqslant 3$,故 $-2\leqslant x-1\leqslant 2$,要使函数 $y=\dfrac{f(2x)}{\sqrt{x}}$ 有意义,则 $\begin{cases}x>0,\\ -2\leqslant 2x\leqslant 2,\end{cases}$ 解得 $0<x\leqslant 1$.

5. ABD　对于 A,$f(2\,024.25)=2\,024.25-[2\,024.25]=$

0.25,故 A 正确;对于 B,$f(x)=x-[x]\in[0,1)$,故 B 正确;对于 C,当 $x=3.8$ 时,$[3.8]=3$,满足 $-1\leqslant[x]\leqslant3$,但 $x=3.8>3$,故 C 错误;对于 D,$[x]^2+[y]^2=1$ 的解为 $\begin{cases}[x]=0,\\ [y]=\pm1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}[x]=\pm1,\\ [y]=0,\end{cases}$ 当 $\begin{cases}[x]=0,\\ [y]=\pm1\end{cases}$ 时,$0\leqslant x<1$,$1\leqslant y<2$ 或 $-1\leqslant y<0$,当 $\begin{cases}[x]=\pm1,\\ [y]=0\end{cases}$ 时,$1\leqslant x<2$ 或 $-1\leqslant x<0$,$0\leqslant y<1$,所以点集 $\{(x,y)|[x]^2+[y]^2=1\}$ 所表示的平面区域的面积是 4,故 D 正确.



6. BC　因为 $-|x-3|+3=\begin{cases}x, & x\leqslant3,\\ 6-x, & x>3.\end{cases}$ 当 $x\leqslant3$ 时,若 $x^2-3x+3\geqslant x$,即 $x^2-4x+3\geqslant0$,解得 $x\leqslant1$ 或 $x=3$;当 $x>3$ 时,若 $x^2-3x+3\geqslant6-x$,即 $x^2-2x-3\geqslant0$,解得 $x<-1$ 或 $x\geqslant3$,此时 $x>3$. 所以 $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+3, & x\leqslant1\text{ 或 }x\geqslant3,\\ x, & 1<x<3,\end{cases}$ 作出函数 $f(x)$ 的图象如图所示. 因为函数 $f(x)$ 在区间 $[m,n]$ 上的值域为 $[1,3]$,则当 $[m,n]=[0,1]$ 时,区间 $[m,n]$ 的长度取最小值;当 $[m,n]=[0,3]$ 时,区间 $[m,n]$ 的长度取最大值,所以区间 $[m,n]$ 的长度的取值范围是 $[1,3]$.



7. $[0,1)$　若函数 $f(x)=\dfrac{ax-1}{\sqrt{ax^2-2ax+1}}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,则 $ax^2-2ax+1>0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立. 当 $a=0$ 时,不等式 $ax^2-2ax+1>0$ 化为 $1>0$,恒成立;当 $a\neq0$ 时,需满足 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta=4a^2-4a<0,\end{cases}$ 解得 $0<a<1$. 综上所述,实数 a 的取值范围是 $[0,1)$.

8. $\dfrac{1}{2}(x+6+|x-6|)$　由题意可得 $f(x)=\begin{cases}x, x>0,\\ 0, x\leqslant0\end{cases}$ 可表示为 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+0+|x-0|)$,$f(x)=\begin{cases}x, x\leqslant3,\\ 3, x>3\end{cases}$ 可表示为 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+3-|x-3|)$,类比上述两个式子,可得 $f(x)=\begin{cases}6, & x<6,\\ x, & x\geqslant6\end{cases}$ 可表示为 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+6+|x-6|)$.

9. 解:(1) 由题设知 $2x-1>0$,解得 $x>\dfrac{1}{2}$,所以函数 $\varphi(x)$ 的定义域为 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$,又 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)\subseteq(0,+\infty)$,所以函数 $\varphi(x)$ 是函数 $h(x)$ 的好函数.

(2) 记函数 $u(x)$ 的定义域为 M,则 $M=\{x|-x^2-ax+a+1>0\}$ 且 $M\subseteq(0,+\infty)$. 由 $-x^2-ax+a+1>0$ 得 $x^2+ax-a-1<0$,即 $(x-1)(x+a+1)<0$. 由函数的定义知 M 为非空数集,故 $a+1\neq-1$,即 $a\neq-2$. 当 $a<-2$ 时,$M=(1,-a-1)$,显然满足 $M\subseteq(0,+\infty)$;当 $a>-2$ 时,$M=(-a-1,1)$,又 $M\subseteq(0,+\infty)$,则 $-a-1\geqslant0$,解得 $a\leqslant-1$,故 $-2<a\leqslant-1$. 综上,实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-2)\cup(-2,-1]$.

题组 13　函数的单调性及最值

【核心笔记】

1. 判断或证明函数的单调性(练习运用:第 1,4,5,8 题)

(1) 定义法. 根据增函数、减函数的定义,按照"取值→作差→变形→判断符号→下结论"进行判断.

单调性判断的等价结论:

当 $x\in D$ 时,$f(x)$ 是增函数,$\forall x_1,x_2\in D$ 且 $x_1\neq x_2$,则 $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0\Leftrightarrow\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$.

当 $x\in D$ 时,$f(x)$ 是减函数,$\forall x_1,x_2\in D$ 且 $x_1\neq x_2$,则 $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0\Leftrightarrow\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$.

(2) 图象法. 根据函数图象的升降情况进行判断.

(3) 直接法. 运用已知结论,直接得到函数的单调性,如一次函数、二次函数、反比例函数的单调性均可直接得出.

(4) 利用单调函数的运算性质判断函数的单调性

函数的单调性具有以下性质,灵活运用它们能迅速解决某些函数的单调性问题. 若函数 $f(x)$,$g(x)$ 在区间 I 上具有单调性. 则:①函数 $y=-f(x)$ 与 $y=f(x)$ 的单调性相反. ②当函数 $y=f(x)$ 恒为正或恒为负时,函数 $y=\dfrac{1}{f(x)}$ 与 $y=f(x)$ 的单调性相反. ③函数 $y=$

$f(x)$与函数 $y=f(x)+C$(C 为常数)的单调性相同.④当$C>0$(C 为常数)时,$y=f(x)$与 $y=C\cdot f(x)$的单调性相同;当 $C<0$(C 为常数)时,$y=f(x)$与 $y=C\cdot f(x)$的单调性相反.⑤若 $f(x)>0$,$g(x)>0$ 且 $f(x)$,$g(x)$都是增(减)函数,则 $f(x)\cdot g(x)$也是增(减)函数;若$f(x)<0$,$g(x)<0$ 且 $f(x)$与 $g(x)$都是增(减)函数,则 $f(x)\cdot g(x)$是减(增)函数.

2.根据函数的单调性求参数的取值范围.(练习运用:第 2 题)

(1) 利用单调性的定义:在单调区间内任取 x_1,x_2,且$x_1<x_2$,由 $f(x_1)-f(x_2)<0$(或 $f(x_1)-f(x_2)>0$)恒成立求参数的取值范围.

(2) 利用具体函数本身具有的特征:如二次函数的图象被对称轴一分为二,可根据对称轴相对于所给单调区间的位置建立关于参数的不等式(组),解不等式(组),求出参数的取值范围.

注意:若某个函数在区间$[a,b]$上是单调的,则该函数在此区间的任意子集上也是单调的.

对于分段函数由单调性求参问题,一般从两方面考虑:一方面每个分段区间上函数具有相同的单调性,由此列出相关式子;另一方面要考虑分界点处函数值之间的大小关系,由此列出另外的式子,从而解得参数的取值范围.

3.利用单调性求最值的常用结论(练习运用:第 4,5,7 题)

(1) 如果函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上是增(减)函数,则$f(x)$在区间$[a,b]$的左、右端点处分别取得最小(大)值和最大(小)值.

(2) 如果函数 $f(x)$在区间$(a,b]$上是增函数,在区间$[b,c)$上是减函数,则函数 $f(x)$在区间(a,c)上有最大值$f(b)$.

(3) 如果函数 $f(x)$在区间$(a,b]$上是减函数,在区间$[b,c)$上是增函数,则函数 $f(x)$在区间(a,c)上有最小值$f(b)$.

4.求函数最值的常用方法与技巧(练习运用:第 2,8 题)

(1) 图象法求函数最值.

①画出函数 $y=f(x)$的图象;

②观察图象,找出图象的最高点和最低点;

③写出最值,最高点的纵坐标是函数的最大值,最低点的纵坐标是函数的最小值.

(2) 运用函数单调性求最值是求函数最值的常用方法,特别是当函数图象不易作出时,单调性几乎成为首选方法.①注意对问题中求最值的区间与函数的单调区间之间的关系进行辨析;②注意对问题中求最值的区间的端点值的取舍.

5.求二次函数在给定区间上最值的方法(练习运用:第 6,7 题)

求二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$在区间$[m,n]$上的最值一般分为以下几种情况,即:

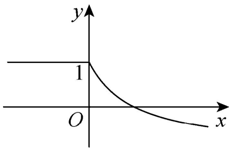
(1) 若对称轴$x=-\frac{b}{2a}$ 在区间$[m,n]$内,则最小值为$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$,最大值为$f(m)$,$f(n)$中较大者(或区间端点 m,n 中与直线 $x=-\frac{b}{2a}$距离较远的一个对应的函数值为最大值);

(2) 若对称轴 $x=-\frac{b}{2a}<m$,则 $f(x)$在区间$[m,n]$上是增函数,最大值为 $f(n)$,最小值为 $f(m)$;

(3) 若对称轴 $x=-\frac{b}{2a}>n$,则 $f(x)$区间$[m,n]$上是减函数,最大值为$f(m)$,最小值为 $f(n)$.

【答案详析】

1. D 当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=\frac{1-x}{x+1}=\frac{2}{x+1}-1$,作出函数$f(x)$的图象,如图所示,由函数的单调性及 $f(x^2-x)<f(x)$,可得$\begin{cases}x^2-x>0,\\x^2-x>x,\end{cases}$解得 $x<0$ 或 $x>2$.



2. D 由题意知,函数 $f(x)$在 **R** 上为减函数,所以$\begin{cases}\frac{a}{2}\geqslant 1,\\a>0,\\1-a+5\geqslant a,\end{cases}$即$\begin{cases}a\geqslant 2,\\a>0,\\a\leqslant 3,\end{cases}$解得 $2\leqslant a\leqslant 3$,所以实数 a 的取值范围是$[2,3]$.

3. A $f(x)=(x+a)|x-1|=\begin{cases}(x+a)(x-1), & x\geqslant 1,\\-(x+a)(x-1), & x<1,\end{cases}$当$-a>1$,即 $a<-1$ 时,此时 $f(x)$在$(-\infty,1)$,$\left(\frac{-a+1}{2},+\infty\right)$上单调递增,在$\left(1,\frac{-a+1}{2}\right)$上单调递减,由于 $f(x)=(x+a)|x-1|$的单调递减区间为$(1,2)$,则 $2=\frac{-a+1}{2}$,解得 $a=-3$.当$-a<1$,即 $a>-1$ 时,此时 $f(x)$在$\left(-\infty,\frac{-a+1}{2}\right)$,$(1,+\infty)$上单调递增,在$\left(\frac{-a+1}{2},1\right)$上单调递减,这与$f(x)$的单调

递减区间为(1,2)矛盾,不符合题意. 当$-a=1$,即$a=-1$时,$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x\geqslant 1,\\ -(x-1)^2, & x<1,\end{cases}$此时$f(x)$在整个定义域上单调递增,故不符合题意. 综上可得$a=-3$.

4. B　$9f(x)=\begin{cases}9x^2, & x\geqslant 0,\\ -9x^2, & x<0,\end{cases}$ $f(3x)=\begin{cases}(3x)^2=9x^2, & x\geqslant 0,\\ -(3x)^2=-9x^2, & x<0,\end{cases}$所以$f(3x)=9f(x)$,由函数$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ -x^2, & x<0,\end{cases}$可知$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增. 因为不等式$f(x+t)\geqslant 9f(x)$在$x\in[t,t+1]$上恒成立,所以不等式$f(x+t)\geqslant f(3x)$在$x\in[t,t+1]$上恒成立,所以$x+t\geqslant 3x$在$x\in[t,t+1]$上恒成立,即$x\leqslant \dfrac{t}{2}$在$x\in[t,t+1]$上恒成立,因此$t+1\leqslant \dfrac{t}{2}$,即$t\leqslant -2$.

5. AD　对于A,令$x=1,y=0$,则$f(1)=f(0)f(1)$,由$x>0$时,$0<f(x)<1$得$0<f(1)<1$,所以$f(0)=1$,故A正确;对于B,因为$f(1)=\dfrac{1}{3}$,则$f(2)=f(1)\cdot f(1)=\dfrac{1}{9}$,故B错误;对于D,令$y=-x$,则$f(x)f(-x)=f(x-x)=f(0)=1$,当$x<0$时,$-x>0$,所以$0<f(-x)<1$,所以$f(x)=\dfrac{1}{f(-x)}>0$,所以对于任意$x\in\mathbf{R}$,$f(x)>0$,故D正确;对于C,设$x_2>x_1$,则$f(x_2)-f(x_1)=f[(x_2-x_1)+x_1]-f(x_1)=f(x_2-x_1)\cdot f(x_1)-f(x_1)=f(x_1)[f(x_2-x_1)-1]$,因为$x_2-x_1>0$,所以$0<f(x_2-x_1)<1$,即$f(x_2-x_1)-1<0$,又$f(x)>0$,所以$f(x_2)-f(x_1)<0$,则$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递减,故C错误.

6. 3　由题意知$f(x)$在$[0,2]$上的最小值为-8,$f(x)$的对称轴是$x=m$,开口向上. 当$0<m<2$时,$f(x)$在$[0,m]$上单调递减,在$[m,2]$上单调递增,故$f(x)$的最小值为$f(m)=-m^2=-8$,解得$m=\pm 2\sqrt{2}$,不合题意;当$m\geqslant 2$时,$f(x)$在$[0,2]$上单调递减,$f(x)_{\min}=f(2)=4-4m=-8$,解得$m=3$,符合题意.

7. (1)2　(2)0　(1) 因为$[1,b]$为$f(x)=x^2-2x+2$的跟随区间,所以函数$f(x)=x^2-2x+2$的值域为$[1,b]$. 因为$f(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$,对称轴为直线$x=1$,所以函数$f(x)=x^2-2x+2$在$[1,b]$上单调递增,因此根据题中所给的定义有$\begin{cases}f(b)=b^2-2b+2=b,\\ b>1,\\ f(1)=1^2-2\times 1+2=1,\end{cases}$解得$b=2$.

(2) 函数$f(x)=m-\sqrt{x+1}$的定义域为$[-1,+\infty)$. 因为函数$f(x)=m-\sqrt{x+1}$存在跟随区间,设跟随区间为$[a,b](-1\leqslant a<b)$,所以$f(x)=m-\sqrt{x+1}$的值域为$[a,b]$,而函数$f(x)=m-\sqrt{x+1}$是定义域内的减函数,因此有$\begin{cases}f(b)=m-\sqrt{b+1}=a,\\ f(a)=m-\sqrt{a+1}=b,\end{cases}$得$\sqrt{b+1}-\sqrt{a+1}=b-a$,由$b>a\geqslant -1$,知$\sqrt{b+1}\neq\sqrt{a+1}$,所以有$\sqrt{b+1}-\sqrt{a+1}=(b+1)-(a+1)=(\sqrt{b+1}-\sqrt{a+1})(\sqrt{b+1}+\sqrt{a+1})$,即$\sqrt{b+1}+\sqrt{a+1}=1$,所以$0\leqslant\sqrt{a+1}<\sqrt{b+1}\leqslant 1$,令$c=\sqrt{a+1}$,$d=\sqrt{b+1}$,则$0\leqslant c<d\leqslant 1$,$c+d=1$,则有$m=a+\sqrt{b+1}=a+1-\sqrt{a+1}=c^2-c$,同理$m=d^2-d$,设函数$h(x)=x^2-x=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}(x\in[0,1])$,则$h(x)_{\min}=-\dfrac{1}{4}$,$h(x)_{\max}=0$. 因为$m=c^2-c$,$m=d^2-d$,所以方程$x^2-x=m$在$x\in[0,1]$时,有两个不相等的实数根. 因此直线$y=m$与函数$h(x)=x^2-x(x\in[0,1])$的图象有两个交点,因此有$-\dfrac{1}{4}<m\leqslant 0$,故$m$的最大值为0.

8. (1) **证明:**函数$f(x)=\dfrac{1}{4}x^2$在$[0,4]$上单调递增,又$f(0)=0$,$f(4)=4$,所以函数$f(x)=\dfrac{1}{4}x^2$在$[0,4]$上的值域为$[0,4]$,所以$[0,4]$是函数$f(x)=\dfrac{1}{4}x^2$的一个“优美区间”.

(2) **证明:**由函数$g(x)=1-\dfrac{1}{x}$,得$x\neq 0$,则$[m,n]\subseteq(-\infty,0)$或$[m,n]\subseteq(0,+\infty)$,则函数$g(x)=1-\dfrac{1}{x}$在$[m,n]$上单调递增. 若$[m,n]$是$g(x)$的“优美区间”,则$\begin{cases}1-\dfrac{1}{m}=m,\\ 1-\dfrac{1}{n}=n,\end{cases}$即$m,n$是方程$1-\dfrac{1}{x}=x$的两个不等的同号实根. 方程$1-\dfrac{1}{x}=x$,可化为$x^2-x+1=0$,而方程$x^2-x+1=0$无解,所以函数$g(x)=1-\dfrac{1}{x}$不存在“优美区间”.

(3) **解:**由函数$h(x)=\dfrac{(a^2+a)x-1}{a^2x}(a\in\mathbf{R},a\neq 0)$,得

$x\neq0$,则$[m,n]\subseteq(-\infty,0)$或$[m,n]\subseteq(0,+\infty)$. 函数$h(x)=\frac{a+1}{a}-\frac{1}{a^2x}$在$[m,n]$上单调递增,而$[m,n]$是函数$h(x)$的“优美区间”,则$\begin{cases}h(m)=m,\\h(n)=n,\end{cases}$即$m,n$是方程$h(x)=x$的两个不等的同号实根,因此$m,n$是方程$\frac{a+1}{a}-\frac{1}{a^2x}=x$,即$a^2x^2-(a^2+a)x+1=0$的两个不等的同号实根,则$\Delta=(a^2+a)^2-4a^2=a^2(a+3)(a-1)>0$,解得$a<-3$或$a>1$,所以$m+n=\frac{a^2+a}{a^2}=1+\frac{1}{a}$,$mn=\frac{1}{a^2}$,故$n-m=\sqrt{(n+m)^2-4mn}=\sqrt{\left(1+\frac{1}{a}\right)^2-\frac{4}{a^2}}=\sqrt{-3\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{3}}\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$,当且仅当$a=3$时取等号,所以当$n-m$取得最大值时,$a=3$.

题组 14 函数的奇偶性

【核心笔记】

1. 判断函数奇偶性的两种方法(练习运用:第 2,5 题)

(1) 定义法:若函数的定义域不关于原点对称,则函数为非奇非偶函数;若函数的定义域关于原点对称,则应进一步判断$f(-x)$是否等于$\pm f(x)$,或判断$f(-x)\pm f(x)$是否等于 0,从而确定奇偶性.

(2) 图象法:若函数图象关于原点对称,则函数为奇函数;若函数图象关于y轴对称,则函数为偶函数.

2. 奇(偶)函数的应用(练习运用:第 1,4,7,8 题)

(1) 利用奇、偶函数的图象可以解决求值、比较大小及解不等式问题.

(2) 利用奇偶性求值,若自变量的取值不在已知的范围内,可利用奇偶性将未知的值(区间)转化为已知的值(区间),必要时需构造奇函数或偶函数便于求值.

(3) 若解析式含参数,则根据$f(-x)=-f(x)$或$f(-x)=f(x)$列式,比较系数利用待定系数法求解;若定义域含参数,则根据定义域关于原点对称,利用区间的端点和为 0 求参数.

(4) 已知某区间上函数的解析式,求对称区间上的解析式:在所求区间设出变量x,将x转化为$-x$(已知区间). 应用奇(偶)函数的定义,推导出所求区间上的解析式.

3. 函数的奇偶性反映定义域上的整体性质,揭示函数图象特殊的对称性,进一步拓展有两个结论:(练习运用:第 3,6,9 题)

(1) 已知函数$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的函数,若$f(a+x)=f(b-x)$恒成立,则$y=f(x)$的图象关于直线$x=\frac{a+b}{2}$对称,特别地,若$f(a+x)=f(a-x)$恒成立,则$y=f(x)$的图象关于直线$x=a$对称.

(2) 已知函数$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的函数,若$f(a+x)+f(b-x)=c$,则$y=f(x)$的图象关于点$\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)$对称. 特别地,若$f(a+x)+f(a-x)=0\Leftrightarrow f(x)=-f(2a-x)$,则$y=f(x)$的图象关于点$(a,0)$对称.

【答案详析】

1. C 因为$f(x)=x^3+\frac{a}{x}+bx-3$,所以$f(-x)+f(x)=-x^3-\frac{a}{x}-bx-3+x^3+\frac{a}{x}+bx-3=-6$. 因为$f(-2\,023)=2\,023$,所以$f(2\,023)=-2\,029$.

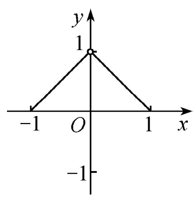
2. C 因为函数$y=f(x-1)$是偶函数,所以$f(-x-1)=f(x-1)$,故$f(x)=f(-2-x)$.

3. C 由题设条件得$f(1+x)+f(1-x)=0$,将$x=\frac{3}{2}$代入,可得$f\left(\frac{5}{2}\right)+f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$. 又当$x\in[0,1]$时,$f(x)=x-1$,所以$f\left(\frac{5}{2}\right)=-f\left(-\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{1}{2}$.

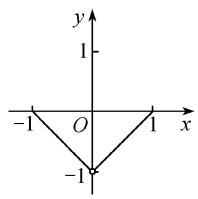
4. A 由题设条件得$f(0)=0$,当$x<0$时,$-x>0$,则$f(-x)=\sqrt{-x}+2=-f(x)$,即$f(x)=-2-\sqrt{-x}$,故$f(x)=\begin{cases}2+\sqrt{x}, & x>0,\\0, & x=0,\\-2-\sqrt{-x}, & x<0.\end{cases}$当$x>0$时,不等式$f(x)=2+\sqrt{x}>x$,解得$0<x<4$;当$x=0$时,不等式$f(x)=0>0$不成立;当$x<0$时,不等式$f(x)=-2-\sqrt{-x}>x$,解得$x<-4$. 综上,$0<x<4$或$x<-4$.

5. ACD 由$f(x)$的定义域是$\{x\mid-1\leqslant x\leqslant1$且$x\neq0\}$,当$x\neq0$时,$|x|+|y|=1$,$|y|=1-|x|\neq1$,$y\neq\pm1$. 当$x=\pm1$时,$|x|+|y|=1$,$|y|=1-|x|=0$,$y=0$. 当$\begin{cases}-1<x<0,\\y>0\end{cases}$时,$-x+y=1$,$y=x+1$;当$\begin{cases}-1<x<0,\\y<0\end{cases}$时,$-x-y=1$,$y=-x-1$;当$\begin{cases}0<x<1,\\y>0\end{cases}$时,$x+y=1$,$y=-x+1$;当$\begin{cases}0<x<1,\\y<0\end{cases}$时,$x-y=1$,$y=x-1$,所以$f(x)$的图象可能有如下①②③④四种情况. 故 A,D 正确,B 错误. 对于选项 C,当

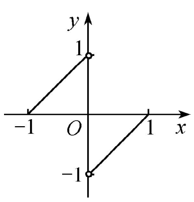
函数 $f(x)$ 的图象如图⑤所示，函数既不是偶函数，也不是奇函数，故 C 正确.



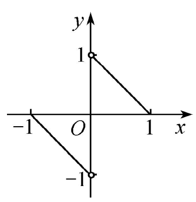
①



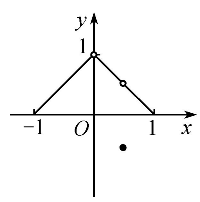
②



③



④



⑤

6. ACD　因为 $f(x)=f(4-x)$，所以 $f(3)=f(1)$. 因为 $f(x)=x^2-2x(0<x\leqslant 2)$，所以 $f(3)=f(1)=-1$，故 A 正确. 因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(-1)=-f(1)=1$. 因为 $f(-1)\neq f(3)$，所以 $f(x)$ 的图象不关于直线 $x=1$ 对称，故 B 错误. 因为 $f(x)=f(4-x)$，所以 $f(-x)=f(4+x)$. 因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(4+x)=-f(4-x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(4,0)$ 中心对称，故 C 正确. 因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(0)=0$，所以当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，$f(x)=x^2-2x$. 设 $4\leqslant x\leqslant 6$，则 $0\leqslant x-4\leqslant 2$，所以 $f(x-4)=(x-4)^2-2(x-4)=x^2-10x+24$. 因为 $f(x)=f(4-x)$，所以 $f(x)=-f(x-4)=-x^2+10x-24$，故 D 正确.

7. 0　因为奇函数 $f(x)=2\,024x^3-5x+b+3$ 的定义域为 $[a-8,a+2]$，所以 $(a-8)+(a+2)=0$，解得 $a=3$，又因为 $f(-x)=-2\,024x^3+5x+b+3=-f(x)=-2\,024x^3+5x-b-3$，所以 $b=-3$，所以 $f(x)=2\,024x^3-5x$，所以 $f(a)+f(b)=f(3)+f(-3)=0$.

8. -3　由题意可知 $f(x)$ 的图象关于 $x=2$ 轴对称，$g(x)$ 的图象关于点 $(1,5)$ 中心对称，由 $f(2-x)+g(x)=2$ 得 $f(2-x)+10-g(2-x)=2$，即 $f(2-x)-g(2-x)=-8$，所以 $f(x)-g(x)=-8$，故 $f(x)+f(2-x)=-6=f(x)+f(2+x)$，所以 $f(x+2)+f(x+4)=-6$，故 $f(x)=f(x+4)$，即 $T=4$ 是 $f(x)$ 的一个正周期，则 $f(2\,023)=f(3)=f(1)$. 由 $f(2-x)+f(x)=-6$ 得 $f(-1)+f(3)=-6$，且 $f(-1)=f(3)$，则 $f(1)=f(3)=-3$.

9. (1) **解**：因为函数 $F(x)=f(x+1)-1=\dfrac{x+1}{(x+1)-1}-1=\dfrac{1}{x}$，所以函数 $F(x)$ 的定义域为 $\{x\,|\,x\neq 0\}$，$F(-x)=-F(x)$，所以 $F(x)$ 是奇函数，所以函数 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 的对称中心为 $(1,1)$.

(2) **证明**：记 $G(x)=g(x-1)-2=(x-1)^3+3(x-1)^2-2=x^3-3x$，则定义域为 $\mathbf{R}$，即定义域关于原点对称. 又 $G(-x)+G(x)=(-x)^3-3(-x)+x^3-3x=0$，所以 $G(x)$ 为奇函数，所以 $g(x)$ 的对称中心为 $(-1,2)$.

(3) **解**：$h(x)=x^3-ax^2+\dfrac{3-2x}{x-b}=x^3-ax^2+\dfrac{3-2(x-b)-2b}{x-b}=x^3-ax^2+\dfrac{3-2b}{x-b}-2$. 令 $H(x)=h(x+1)+4=(x+1)^3-a(x+1)^2+\dfrac{3-2b}{(x+1)-b}+2=x^3+(3-a)x^2+(3-2a)x+3-a+\dfrac{3-2b}{x+1-b}$，因为函数 $h(x)=x^3-ax^2+\dfrac{3-2x}{x-b}$ 的对称中心为 $(1,-4)$，所以 $H(x)=h(x+1)+4$ 是奇函数，所以 $H(-x)+H(x)=0$，即 $(-x)^3+(3-a)(-x)^2+(3-2a)(-x)+3-a+\dfrac{3-2b}{(-x)+1-b}+x^3+(3-a)x^2+(3-2a)x+3-a+\dfrac{3-2b}{x+1-b}=0$，整理得 $2(3-a)(1+x^2)+\dfrac{2(3-2b)(1-b)}{(1-b)^2-x^2}=0$，得 $\begin{cases}3-a=0,\\(3-2b)(1-b)=0,\end{cases}$ 解得 $a=3$，$b=\dfrac{3}{2}$ 或 $b=1$.

题组 15　函数的性质的综合应用

【核心笔记】

1. 函数奇偶性与单调性的关系(练习运用：第 2,4,7 题)

(1) 若 $f(x)$ 为奇函数且在区间 $[a,b](a<b)$ 上单调递增，则 $f(x)$ 在 $[-b,-a]$ 上单调递增，即在对称区间上单调性一致(相同).

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数且在区间 $[a,b](a<b)$ 上单调递增，则 $f(x)$ 在 $[-b,-a]$ 上单调递减，即在对称区间上单调性相反.

(3) 若 $f(x)$ 为奇函数且在区间 $[a,b](a<b)$ 上有最大值为 M，则 $f(x)$ 在 $[-b,-a]$ 上有最小值为 $-M$.

(4) 若 $f(x)$ 为偶函数且在区间 $[a,b](a<b)$ 上有最大值为 N，则 $f(x)$ 在 $[-b,-a]$ 上有最大值为 N.

2. 抽象函数的单调性与奇偶性问题(练习运用：第 5 题)

(1) 解决此类问题通常有两种方法：一种是“凑”，凑定义或凑已知，从而使用定义域或已知条件得出结论；另一种是赋值法，给变量赋值要根据条件与结论的关

系，有时可能要进行多次尝试.

(2) 判断或证明抽象函数的奇偶性，需利用奇、偶函数的定义，找准方向，巧妙赋值，合理、灵活地变形配凑，找出 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系.

3. 判断分段函数奇偶性的方法

(1) 一般用定义法，分段处理. 分段函数的奇偶性应分段说明 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系，只有当对称区间上的对应关系满足同样的关系时，才能判断函数的奇偶性，否则该分段函数不是奇函数也不是偶函数. 要特别注意：若 $x\in[a,b]$，则 $-x\in[-b,-a]$，在求 $f(-x)$ 时，需代入区间 $[-b,-a]$ 上的解析式.

(2) 分段函数的奇偶性也可以通过函数图象的对称性加以判断.

【答案详析】

1. B　令 $t=f(x)-3x$，则 $f(t)=4$，因为 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的单调函数，所以 t 为常数，即 $f(x)=3x+t$，所以 $f(t)=4t=4$，解得 $t=1$，所以 $f(x)=3x+1$，故 $f(0)=1$，$f(-1)=-2$，$f(1)=4$，$f(2)=7$.

2. D　根据题意，函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，当 $x_1<x_2<-2$ 时，$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 恒成立，则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递增. 又由函数 $f(x-2)$ 是偶函数，则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称，故 $b=f(0)=f(-4)$，$c=f(2)=f(-6)$，则有 $f(-6)<f(-4)<f(-3)$，即 $f(2)<f(0)<f(-3)$，即 $c<b<a$.

3. A　函数 $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x}=x+\frac{1}{x}+1$，可得定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 由函数 $y=g(x)-1$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，得 $g(-x)-1=-[g(x)-1]$，即 $g(-x)+g(x)=2$，则函数 $g(x)$ 的图象关于点 $(0,1)$ 中心对称，而 $f(-x)+f(x)=-x+\frac{1}{-x}+1+x+\frac{1}{x}+1=2$，则函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,1)$ 中心对称，因此函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象的交点关于点 $(0,1)$ 中心对称，则 $x_1+\cdots+x_8=0$，$y_1+\cdots+y_8=4\times2=8$，所以 $(x_1+\cdots+x_8)-(y_1+\cdots+y_8)=-8$.

4. BCD　当 $x\in[2,3]$ 时，$f(x)=1-|x-2|$，且 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上单调递减，由偶函数的图象关于 y 轴对称，可得 $f(x)$ 在 $(-3,-2)$ 上单调递增，故 A 错误. 函数 $f(x)$ 是偶函数，可得 $f(-x)=f(x)$，$f(x+1)$ 是奇函数，可得 $f(-x+1)=-f(x+1)$，即为 $f(-x)=-f(x+2)$，所以 $f(x)=-f(x+2)$，即有 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，可得 $f(x)$ 的最小正周期为 4，由 $f(4+x)=f(x)$，可得 $f(-x)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称，故 C 正确. 当 $x\in[2,3]$ 时，$f(x)=1-|x-2|=3-x$，由 $f(x)$ 为偶函数，可得 $x\in[-3,-2]$ 时，$f(x)=x+3$，$x\in[1,2]$ 时，$x-4\in[-3,-2]$，则 $f(x-4)=x-1$，所以 $x\in[1,2]$ 时，$f(x)=x-1$；由于 $f(x)$ 的图象关于 $(1,0)$ 中心对称，可得 $f(1)=0$，$f(0)=-f(2)=-1$，所以 $x\in[0,1)$ 时，$f(x)=x-1$；由 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，可得 $x\in[-1,0)$ 时，$f(x)=-x-1$，则 $f(x)$ 在一个周期内的最小值为 -1，最大值为 1，故 B 正确. 当 $x\in(-4,-3)$ 时，$f(x)=f(x+4)=x+3\in(-1,0)$，故 D 正确.

5. $(0,3)$　由 $\frac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，且 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，则两边同时除以 x_1x_2 可得 $\frac{\frac{f(x_1)}{x_1}-\frac{f(x_2)}{x_2}}{x_1-x_2}<0$，令 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，则原不等式为 $\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}<0$，因此函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，由 $f(x)>3x$，得 $\frac{f(x)}{x}>3$，又 $g(3)=\frac{f(3)}{3}=3$，所以 $g(x)>g(3)$，解得 $0<x<3$，所以使 $f(x)>3x$ 成立的 x 的取值范围是 $(0,3)$.

6. ②③⑤　对于①②，因为 $f(x+1)$ 为偶函数，所以 $f(-x+1)=f(x+1)$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(x+2)=f(-x)$，因为 $f(x+2)$ 为奇函数，所以 $f(x+2)=-f(-x+2)$，所以 $f(x+4)=-f(-x)=-f(x+2)$，所以 $f(x+2)=-f(x)$，所以 $f(-x)=-f(x)$，$f(x+4)=f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，周期为 4，所以①错误，②正确. 对于③，因为 $f(x)$ 为奇函数，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增，因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上单调递减，因为 $f(x)$ 的周期为 4，所以 $f(x)$ 在 $[2\ 021,2\ 023]$ 上单调递减，所以③正确. 对于④，因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且为奇函数，所以 $f(0)=0$，因为 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增，$f(x)$ 在 $[1,3]$ 上单调递减，$f(x)$ 的周期为 4，所以 $f(x)$ 在 $[3,4]$ 上单调递增，$f(4)=f(0)=0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上的最大值为 $f(1)$，因为 $f(2\ 024)=f(4\times506)=f(0)=0$，所以 $f(2\ 024)$ 不是 $f(x)$ 的一个最大值，所以④错误. 对于⑤，因为 $f(-x+2)=-f(x+2)$，所以当 $x=0$ 时，得 $f(2)=0$，当 $x=1$ 时，得 $f(1)+f(3)=0$，所以 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0$，因为 $f(x)$ 的周期为 4，所以 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2\ 024)=506\times[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]$

$=0$,所以⑤正确.

7. 解:(1) ①由题意知函数 $g(x)=\dfrac{x+m}{x^2+1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,$g(x)$ 为奇函数,所以 $g(0)=m=0$,当 $m=0$ 时,$g(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$,经检验,符合题意.

②$g(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增. 证明如下:设 $-1\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$,则 $g(x_1)-g(x_2)=\dfrac{x_1}{x_1^2+1}-\dfrac{x_2}{x_2^2+1}=\dfrac{(x_2-x_1)(x_1x_2-1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$. 因为 $-1\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$,所以 $x_2-x_1>0$ 且 $-1\leqslant x_1x_2<1$,即 $x_1x_2-1<0$,又 $x_1^2+1>0$,$x_2^2+1>0$,所以 $g(x_1)-g(x_2)<0$,即 $g(x_1)<g(x_2)$,所以 $g(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增,所以 $g(x)_{\min}=g(-1)=-\dfrac{1}{2}$,$g(x)_{\max}=g(1)=\dfrac{1}{2}$,所以 $g(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的值域为 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$.

(2) 因为 $a\neq 0$,所以 $f(x)=ax^2-x+1$,其对称轴为 $x=\dfrac{1}{2a}$,分 4 种情况讨论:当 $a<0$ 时,此时 $f(x)$ 的图象开口向下,对称轴 $x=\dfrac{1}{2a}<0$,函数 $f(x)$ 在区间 $[1,4]$ 上单调递减,所以 $f(x)_{\min}=f(4)=16a-3=-2$,得 $a=\dfrac{1}{16}>0$,不符合题意;当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{8}$ 时,此时 $f(x)$ 的图象开口向上,对称轴 $x=\dfrac{1}{2a}\geqslant 4$,函数 $f(x)$ 在区间 $[1,4]$ 上单调递减,此时 $f(x)_{\min}=f(4)=16a-3=-2$,得 $a=\dfrac{1}{16}$,符合题意;当 $\dfrac{1}{8}<a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时,此时 $f(x)$ 的图象开口向上,对称轴满足 $1\leqslant\dfrac{1}{2a}<4$,此时 $f(x)_{\min}=f\left(\dfrac{1}{2a}\right)=\dfrac{4a-1}{4a}=-2$,解得 $a=\dfrac{1}{12}<\dfrac{1}{8}$,不符合题意;当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时,此时 $f(x)$ 的图象开口向上,对称轴满足 $0<\dfrac{1}{2a}<1$,函数 $f(x)$ 在区间 $[1,4]$ 上单调递增,$f(x)_{\min}=f(1)=a=-2<0$,不符合题意. 综合,$a=\dfrac{1}{16}$.

综合提优(3.1~3.2)

1. D　函数 $f(x-2)$ 中的 x 需满足 $-3\leqslant x-2\leqslant 3$,解得 $-1\leqslant x\leqslant 5$,故函数 $f(x-2)$ 的定义域为 $[-1,5]$,故 A 正确;函数 $\dfrac{f(3x)}{x-1}$ 中的 x 需满足 $\begin{cases}-3\leqslant 3x\leqslant 3,\\ x-1\neq 0,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant x<1$,故函数 $\dfrac{f(3x)}{x-1}$ 的定义域为 $[-1,1)$,故 B 正确;函数 $f(x-2)$ 和 $f(2x)$ 的值域都为 $[-3,3]$,故 C 正确,D 错误.

2. B　当 $x>1$ 时,$f(x)=-x^2+2ax+2$ 的图象开口向下,$x\to+\infty$ 时,$f(x)\to-\infty$,若使得 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$,则只有 $f(x)=(2-3a)x+4$ 在 $x\leqslant 1$ 时单调递减,所以 $2-3a<0$,此时 $f(x)\geqslant 2-3a+4=6-3a$. 当 $x>1$ 时,$f(x)=-x^2+2ax+2=-(x-a)^2+2+a^2$,则 $\begin{cases}a\leqslant 1,\\ 6-3a\leqslant 2a+1,\\ 2-3a<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a>1,\\ 6-3a\leqslant a^2+2,\\ 2-3a<0,\end{cases}$ 解得 $a\geqslant 1$.

3. D　不妨设 $0\leqslant x_1<x_2$,所以 $x_1^2<x_2^2$,即 $x_1^2-x_2^2<0$,则 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1^2-x_2^2}>-1$,即 $f(x_1)-f(x_2)<x_2^2-x_1^2$,所以 $f(x_1)+x_1^2<x_2^2+f(x_2)$. 令 $g(x)=f(x)+x^2$,则 $g(x_1)<g(x_2)$. 又因为 $0\leqslant x_1<x_2$,所以 $g(x)=f(x)+x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增. 又 $f(x)$ 是偶函数,所以 $g(-x)=f(-x)+(-x)^2=f(x)+x^2=g(x)$,即 $g(x)=f(x)+x^2$ 也是偶函数,则其在 $(-\infty,0]$ 上单调递减. 因为 $f(1)=1$,所以 $g(1)=f(1)+1^2=2$,则 $f(x)<2-x^2$,即 $f(x)+x^2<2$,$g(x)<g(1)$,所以 $|x|<1$,解得 $x\in(-1,1)$.

4. ABD　由 $f(1+x)=f(1-x)$ 得 $f(2+x)=f(-x)$,于是 $f(4+x)=f(-2-x)=-f(2+x)=-f(-x)=f(x)$,所以函数 $y=f(x)$ 的最小正周期为 4,A 正确;$f\left(\dfrac{11}{2}\right)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$,B 正确;$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增,由 $f(x)$ 是奇函数得 $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上单调递增,即 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增,又因为 $f(1+x)=f(1-x)$,所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,因此 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上单调递减,而 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数,因此 $f(x)$ 在 $[3,5]$ 上单调递增,C 错误;由 C 可得到不等式 $f(x)\geqslant 0$ 的解集为 $[4k,4k+2]$ $(k\in\mathbf{Z})$,D 正确.

5. ABD　设 $g(x)=xf(x)$ $(x>0)$,若 $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$,$x_1\neq x_2$,$\dfrac{x_1f(x_1)-x_2f(x_2)}{x_1-x_2}>0$,即 $\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}>0$,则函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,即若函数 $f(x)$ 为"理想函数",必有 $g(x)=xf(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 对于 A,$g(x)=xf(x)=-\dfrac{1}{2}x$,在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,不是"理想函数";对于 B,$g(x)=2x+\dfrac{1}{x}$,由对勾函数的性质,$g(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调递减,不是"理想函数";对于 C,$g(x)=$

x^2-1,是二次函数,在$(0,+\infty)$上单调递增,是"理想函数";对于 D,$g(x)=2x^2-x$,是二次函数,在$\left(0,\frac{1}{4}\right)$上单调递减,不是"理想函数".

6. $[2+\sqrt{6},+\infty)$　函数 $f(x)$定义域非空集,则 $a^2-4a<a^2-8$,解得 $a>2$. 记 $g(x)=(x+a+2)(x-2)$,因为$-2-a<-2-2=-4$,所以 $g(x)>0$ 的解集为$(-\infty,-a-2)\cup(2,+\infty)$,依题意有 $a^2-8\leqslant-a-2$ 或 $a^2-4a\geqslant2$,所以 $a^2+a\leqslant6$ 或 $a^2-4a-2\geqslant0$. 又 $a>2$,$a^2+a>4+2=6$,所以 $a\in[2+\sqrt{6},+\infty)$.

7. ②③④　定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$,对任意实数 x,y 都有 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$,令 $x=y=0$,则 $f(0)+f(0)=2[f(0)]^2=2f(0)$,又 $f(0)\neq0$,所以 $f(0)=1$,故①错误;令 $x=0$ 得 $f(y)+f(-y)=2f(0)f(y)$,由 $f(0)=1$ 得 $f(y)=f(-y)$,所以函数 $f(x)$为偶函数,故②正确;令 $x=\frac{1}{2}$,则 $f\left(\frac{1}{2}+y\right)+f\left(\frac{1}{2}-y\right)=2f\left(\frac{1}{2}\right)f(y)$,因为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$,所以 $f\left(\frac{1}{2}+y\right)+f\left(\frac{1}{2}-y\right)=0$,故函数 $f(x)$关于$\left(\frac{1}{2},0\right)$中心对称,故③正确;因为 $f\left(\frac{1}{2}+y\right)+f\left(\frac{1}{2}-y\right)=0$,令 $y=\frac{1}{2}+x$,则 $f(1+x)+f(-x)=0$,又函数 $f(x)$为偶函数,所以 $f(1+x)=-f(x)$,则④正确.

8. $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$　设 $g(x)=f(x)-2=x+\frac{2x}{|x|+1}(x\in\mathbf{R})$,则 $g(-x)=-x+\frac{-2x}{|x|+1}=-g(x)$,故 $g(x)$为奇函数,由 $f(x^2-ax-6)+f(3a-x)>4$ 得$f(x^2-ax-6)-2>2-f(3a-x)$,即 $g(x^2-ax-6)>-g(3a-x)=g(x-3a)$. 当 $x>0$ 时,$g(x)=x+\frac{2x}{x+1}=x-\frac{2}{x+1}+2$,由 $y=x+2$ 在$(0,+\infty)$上单调递增,$y=-\frac{2}{x+1}$在$(0,+\infty)$上单调递增,则 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,又 $g(x)$为奇函数,所以 $g(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 故由 $g(x^2-ax-6)>g(x-3a)$得 $x^2-ax-6>x-3a$,即 $a(3-x)+x^2-x-6>0$,由题意,存在 $a\in[1,2]$使得 $a(3-x)+x^2-x-6>0$ 有解,当 $3-x=0$ 时,$a(3-x)+x^2-x-6=0$,不符合题意;当 $3-x>0$,即 $x<3$ 时,$2(3-x)+x^2-x-6>0$,解得 $x<0$ 或 $x>3$,故$x<0$;当 $3-x<0$,即 $x>3$ 时,$1\times(3-x)+x^2-x-6>0$,解得 $x<-1$ 或 $x>3$,故 $x>3$. 综上可得,实数 x 的取值范围是$(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$.

9. (1) **解**:函数 $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}(x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty))$.(答案不唯一,如 $f(x)=x-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}(x\neq0)$,$f(x)=\frac{1}{2}(x\neq0)$也是正确的)

(2) **解**:若 $y=f(x)$满足性质 Q,且定义域为$(0,+\infty)$. 令 $x=1$,由 $f(1)+f\left(\frac{1}{1}\right)=1$ 得 $f(1)=\frac{1}{2}$,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调,$y=f(x)$在 $x\in(0,1)$时,恒有 $f(x)>\frac{1}{2}=f(1)$,所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,由$f(ax^2+x-ax)-\frac{1}{2}<0$ 得 $f(ax^2+x-ax)<\frac{1}{2}$,即$f(ax^2+x-ax)<f(1)$. 因为 $f(x)$在$(0,+\infty)$上是减函数,所以 $ax^2+x-ax>1$,即 $ax^2+(1-a)x-1>0$,即$(x-1)(ax+1)>0$. ①当 $a=0$ 时,不等式为 $x-1>0$,不等式的解集为$(1,+\infty)$;②当$-\frac{1}{a}=1$,即 $a=-1$ 时,不等式为$(x-1)^2<0$,不等式的解集为$\varnothing$;③当$-1<a<0$ 时,$-\frac{1}{a}>1$,不等式的解集为$\left(1,-\frac{1}{a}\right)$;④当$a<-1$ 时,$-\frac{1}{a}<1$,不等式的解集为$\left(-\frac{1}{a},1\right)$;⑤当 $a>0$ 时,不等式的解集为$\left(-\infty,-\frac{1}{a}\right)\cup(1,+\infty)$.

(3) **证明**:已知对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,$x_1\neq x_2$,若 $f(x_1)+f(x_2)=1$,则由 $f(x_1)+f\left(\frac{1}{x_1}\right)=1$,得 $f(x_2)=f\left(\frac{1}{x_1}\right)$. 因为 $f(x)$在$(0,+\infty)$上是单调函数,所以 $x_2=\frac{1}{x_1}$,$x_1x_2=1$,所以 $x_1+x_2>2\sqrt{x_1x_2}=2$.

题组 16　幂函数的图象与性质

【核心笔记】

1. 幂函数的图象问题(练习运用:第 2,5 题)

(1) 依据图象高低判断幂指数大小,相关结论为:在$(0,1)$上,幂指数越大,幂函数图象越靠近 x 轴(简记为指大图低);在$(1,+\infty)$上,幂指数越大,幂函数图象越远离 x 轴(简记为指大图高).

(2) 依据图象确定幂指数 α 与 0,1 的大小关系,即根据幂函数在第一象限内的图象类似于 $y=x^{-1}$ 或 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 或 $y=x^3$ 来判断.

2. 利用幂函数的性质解不等式(练习运用:第 1,8,9 题)

利用幂函数的性质解不等式,实质是已知两个函数值

的大小,判断自变量的大小,常与幂函数的单调性、奇偶性等综合命题,求解步骤如下:

(1) 确定可以利用的幂函数;

(2) 借助相应的幂函数的单调性,将不等式的大小关系转化为自变量的大小关系;

(3) 解不等式(组)求参数范围,注意分类讨论思想的应用.

3. 比较幂的大小(练习运用:第 3,4,7 题)

比较幂值的大小,关键是构造适当的函数,具体思路如下:

(1) 若指数相同,底数不同,则考虑幂函数;

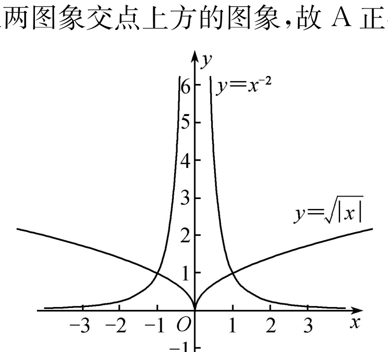
(2) 若指数不同,底数相同,则考虑指数函数;

(3) 若指数与底数都不同,则考虑借助中间量,这个中间量的底数与所比较幂值的一个底数相同,指数与另一个幂值的指数相同,那么这个中间量就介于所比较的两个幂值之间,进而比较大小.

【答案详析】

1. A　由幂函数的概念知 $m^2-2m-2=1$,所以 $m^2-2m-3=0$,解得 $m=3$ 或 $m=-1$. 当 $m=3$ 时,$f(x)=x^{-1}$,则 $f(2)>f(3)$,不满足题意;当 $m=-1$ 时,$f(x)=x^3$,则 $f(2)<f(3)$,满足题意. 则 $g(x)=2x-1-\sqrt{x+1}$,其定义域为$[-1,+\infty)$. 令 $t=\sqrt{x+1}(t\geqslant 0)$,则 $x=t^2-1$,所以 $y=2(t^2-1)-1-t=2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{25}{8}$,当 $t=\frac{1}{4}$时,y 取得最小值$-\frac{25}{8}$. 所以 $g(x)$的值域为$\left[-\frac{25}{8},+\infty\right)$.

2. A　$y=\sqrt{|x|}$和 $y=x^{-2}$都是偶函数,当 $x>0$ 时,$y=\sqrt{|x|}=x^{\frac{1}{2}}$在$(0,+\infty)$上单调递增,$y=x^{-2}$在$(0,+\infty)$上单调递减,当 $x=1$ 时,$\sqrt{|x|}=x^{-2}$. 在同一平面直角坐标系中作出 $y=\sqrt{|x|}$和 $y=x^{-2}$的图象,如图,$f(x)=\max\{\sqrt{|x|},x^{-2}\}$表示$\sqrt{|x|}$与 x^{-2}的较大者,所以取两图象交点上方的图象,故 A 正确.



3. C　因为对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$ 成立,所以该函数在$(0,+\infty)$上单调递减. 又因为 $f(x)=(m^2-3m-3)x^m$ 是幂函数,所以 $m^2-3m-3=1$,解得 $m=-1$ 或 $m=4$. 当 $m=4$ 时,$f(x)=x^4$,在$(0,+\infty)$上单调递增,矛盾,故 $m=-1$,即 $f(x)=x^{-1}=\frac{1}{x}$,定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,则 $f(-x)=\frac{1}{-x}=-f(x)$,所以 $f(x)$是奇函数.

4. C　由 $y=x^{\frac{2}{3}}$单调递增,则可知 $c=3^{\frac{2}{3}}<a=2^{\frac{4}{3}}=4^{\frac{2}{3}}$,由 $y=x^{15}(x>0)$单调递增,又 $b^{15}=(4^{\frac{2}{5}})^{15}=4^6=(4^3)^2=64^2$,$c^{15}=(3^{\frac{2}{3}})^{15}=3^{10}=(3^5)^2=243^2$,可得 $b<c$,所以 $b<c<a$.

5. BC　因为幂函数 $f(x)=\left(a-\frac{3}{a}-1\right)x^a$ 在$(0,+\infty)$上单调递减,所以$\begin{cases}a-\frac{3}{a}-1=1,\\a<0,\end{cases}$解得 $a=-1$. 因为 $y=x^2+(a+b)x-3$ 在$(-1,1)$上不单调,即 $y=x^2+(b-1)x-3$ 在$(-1,1)$上不单调,所以 $-1<-\frac{b-1}{2}<1$,解得$-1<b<3$. 观察四个选项,实数 b 的可能取值为 0,1.

6. BC　由条件得$\begin{cases}m^2-m-1=1,\\m^2+m-3>0,\end{cases}$解得 $m=2$,所以 $f(x)=x^3$,是 $\mathbf{R}$ 上的增函数. 因为 $a,b\in\mathbf{R}$,且 $f(a)+f(b)<0$,即 $f(a)<-f(b)=f(-b)$,则 $a<-b$,即 $a+b<0$,而 ab 的值不确定,所以 $a+b<0,ab>0$ 或 $a+b<0,ab<0$ 均可能成立.

7. $\left[\frac{9}{8},+\infty\right)$　设 $f(x)=x^\alpha$,其图象过点$(2,8)$可得 $2^\alpha=8=2^3$,故 $\alpha=3$,所以 $f(x)=x^3$,则 $f(x)$为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数且为增函数. 又 $8f(x)=(2x)^3=f(2x)$,所以 $f(mx^2)+8f(4-3x)\geqslant 0$ 等价于 $f(mx^2)\geqslant -8f(4-3x)=f(6x-8)$,得 $mx^2\geqslant 6x-8$,所以 $mx^2-6x+8\geqslant 0$ 恒成立. 当 $m=0$ 时,有$-6x+8\geqslant 0$,不恒成立,不合题意;当 $m\neq 0$ 时,有$\begin{cases}\Delta=36-4\times m\times 8\leqslant 0,\\m>0,\end{cases}$解得 $m\geqslant\frac{9}{8}$. 所以实数 m 的取值范围是$\left[\frac{9}{8},+\infty\right)$.

8. $[6,+\infty)$　由条件得 $m^2-5m+5=1$,解得 $m=1$ 或 $m=4$,当 $m=1$ 时,$f(x)=x^{-1}$,该函数是定义域为$\{x|x\neq 0\}$的奇函数,不符合题意;当 $m=4$ 时,$f(x)=x^2$,该函数是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数,符合题意. 所以 $f(x)=x^2$,则 $g(x)=x^2-(2a-6)x$,其对称轴方程为 $x=a-3$,因为 $g(x)$在区间$[1,3]$上单调递减,则 $a-3\geqslant 3$,解得 $a\geqslant 6$.

9. 解:(1) 由题意得 $p^2-3p+3=1$,解得 $p=1$ 或 $p=2$. 当 $p=1$ 时,$f(x)=\frac{1}{x}$,在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,当 $p=2$ 时,$f(x)=\sqrt{x}$,在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $f(x)=\sqrt{x}$.

(2) $h(x)=x+af(x)=x+a\sqrt{x}$,令 $t=\sqrt{x}$,因为 $x\in[1,9]$,所以 $t\in[1,3]$,令 $k(t)=t^2+at,t\in[1,3]$,对称轴为 $t=-\frac{a}{2}$. 当 $-\frac{a}{2}\leqslant 1$,即 $a\geqslant -2$ 时,函数 $k(t)$ 在 $[1,3]$ 上单调递增,$k(t)_{\min}=k(1)=1+a=0$,解得 $a=-1$. 当 $1<-\frac{a}{2}<3$,即 $-6<a<-2$ 时,$k(t)_{\min}=k\left(-\frac{a}{2}\right)=-\frac{a^2}{4}=0$,解得 $a=0$,不符合题意,舍去. 当 $-\frac{a}{2}\geqslant 3$,即 $a\leqslant -6$ 时,函数 $k(t)$ 在 $[1,3]$ 上单调递减,$k(t)_{\min}=k(3)=9+3a=0$,解得 $a=-3$. 不符合题意,舍去. 综上所述,存在 $a=-1$ 使得 $h(x)$ 的最小值为 0.

(3) $g(x)=b-f(x+3)=b-\sqrt{x+3}$,则 $g(x)$ 在定义域内为减函数,若存在实数 $m,n(m<n)$,使函数 $g(x)$ 在 $[m,n]$ 上的值域为 $[m,n]$,则 $\begin{cases} g(m)=b-\sqrt{m+3}=n ① , \\ g(n)=b-\sqrt{n+3}=m ② ,\end{cases}$ ②－①得 $\sqrt{m+3}-\sqrt{n+3}=m-n=(m+3)-(n+3)$,所以 $\sqrt{m+3}-\sqrt{n+3}=(\sqrt{m+3}-\sqrt{n+3})(\sqrt{m+3}+\sqrt{n+3})$,即 $\sqrt{m+3}+\sqrt{n+3}=1$ ③. 将③代入②得 $b=m+\sqrt{n+3}=m+1-\sqrt{m+3}$. 令 $t=\sqrt{m+3}$,因为 $m<n$,$0\leqslant\sqrt{m+3}+\sqrt{m+3}<\sqrt{m+3}+\sqrt{n+3}=1$,所以 $t\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$,则 $b=t^2-t-2=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$,在区间 $\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减,所以 $-\frac{9}{4}<b\leqslant -2$,故实数 b 的取值范围且为 $\left(-\frac{9}{4},-2\right]$.

题组 17　对勾函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}(a\neq 0)$ 模型及应用

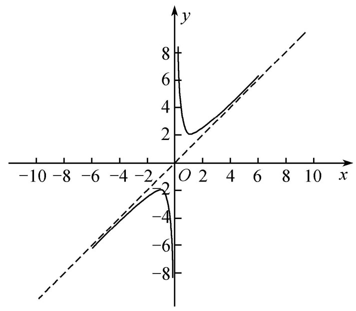
【核心笔记】

1. 函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 的图象与性质(练习运用:第 2,3,4 题)

(1) 定义域为 $\{x\mid x\neq 0\}$,值域为 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$,$y=x+\frac{1}{x}$ 是奇函数. 增区间为 $(-\infty,-1]$,$[1,+\infty)$,减区间为 $[-1,0)$,$(0,1]$.

(2) 最值:当 $x>0$ 时,$x+\frac{1}{x}\geqslant 2$,当且仅当 $x=\frac{1}{x}$,即 $x=1$ 时取得等号;当 $x<0$ 时,$x+\frac{1}{x}\leqslant -2$,当且仅当 $x=\frac{1}{x}$,即 $x=-1$时取得等号.

(3) 图象:



2. 形如 $f(x)=x+\frac{a}{x}(a>0)$ 的函数模型称为"对勾"函数模型,"对勾"函数的性质.(练习运用:第 5,6,7 题)

(1) 该函数在 $(-\infty,-\sqrt{a}]$ 和 $[\sqrt{a},+\infty)$ 上单调递增,在 $[-\sqrt{a},0)$ 和 $(0,\sqrt{a}]$ 上单调递减.

(2) 当 $x>0$ 时,$x=\sqrt{a}$时取最小值$2\sqrt{a}$;当 $x<0$ 时,$x=-\sqrt{a}$时取最大值$-2\sqrt{a}$.

【答案详析】

1. D　$f(x)=\frac{x^2+2x+a}{x+1}=x+1+\frac{a-1}{x+1}$,令 $t=x+1$,则 $t\in[2,+\infty)$. 当 $a-1<0$,即 $a<1$ 时,$y=t+\frac{a-1}{t}$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增,满足要求;当 $a-1=0$,即 $a=1$ 时,$y=t$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增,满足要求;当 $a-1>0$,即 $a>1$ 时,由对勾函数性质得到 $y=t+\frac{a-1}{t}$ 在 $[\sqrt{a-1},+\infty)$ 上单调递增,故 $0<\sqrt{a-1}\leqslant 2$,解得 $1<a\leqslant 5$,综上,实数 a 的取值范围是 $(-\infty,5]$.

2. C　函数 $f(1-2x)$ 的定义域 $A=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,即 $-\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{2}$,所以 $0<1-2x\leqslant 2$,所以 $f(x)$ 的定义域 $B=(0,2]$. 因为 $\forall x\in(0,2]$,$x^2-mx+2>0$,所以 $m<\frac{x^2+2}{x}=x+\frac{2}{x}$ 在区间 $(0,2]$ 上恒成立,由于 $x+\frac{2}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{2}{x}}=2\sqrt{2}$,当且仅当 $x=\frac{2}{x}$,即 $x=\sqrt{2}$时等号成立,所以 $m<2\sqrt{2}$,即 m 的取值范围是 $(-\infty,2\sqrt{2})$.

3. ABD　对于 A,$f(x)=x^4$,则$\frac{f(x)}{x}=x^3$在定义域内的任何区间上都单调递增,故不存在区间 M,使 $f(x)$

为“弱增函数”. 对于 B, $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上, $y=\frac{f(x)}{x}=1+\frac{1}{x^2}$, 易知它在 $[1,+\infty)$ 上单调递减, 故存在区间 $M=[1,+\infty)$, 使 $f(x)$ 为“弱增函数”. 对于 C, $f(x)=x^5+x^3+x$ 为奇函数, 且 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)=x^5+x^3+x$ 单调递增, 故由奇函数的对称性可知, $f(x)=x^5+x^3+x$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数; $y=\frac{f(x)}{x}=x^4+x^2+1$ 为偶函数, 其在 $x\geqslant 0$ 时单调递增, 故在 $x<0$ 时单调递减, 故不是 $\mathbf{R}$ 上的“弱增函数”. 对于 D, 若 $f(x)=x^2+(4-a)x+a$ 在区间 $(0,2]$ 上是“弱增函数”, 则 $f(x)=x^2+(4-a)x+a$ 在 $(0,2]$ 上单调递增, 故 $-\frac{4-a}{2}\leqslant 0$, 故 $a\leqslant 4$; 又 $y=\frac{f(x)}{x}=x+(4-a)+\frac{a}{x}$ 在 $(0,2]$ 上单调递减, 则由对勾函数的单调性可知, $\sqrt{a}\geqslant 2$, 则 $a\geqslant 4$. 综上, $a=4$.

4. $\left(-\infty,\frac{2}{9}\right)$　不妨设 $x_1<x_2$, 则 $x_1-x_2<0$, 因为 $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0$, 所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$, 又 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 所以 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 故由 $f(mt^2-t)+f(2m)>0$ 可得 $f(mt^2-t)>-f(2m)=f(-2m)$, 可得 $mt^2-t<-2m$ 在 $t\in[1,4]$ 上恒成立, 故得 $m<\frac{t}{t^2+2}=\frac{1}{t+\frac{2}{t}}$, $t\in[1,4]$. 又因为 $y=t+\frac{2}{t}$ 在 $t\in[1,\sqrt{2}]$ 上单调递减, 在 $t\in[\sqrt{2},4]$ 上单调递增, 设 $g(t)=\frac{1}{t+\frac{2}{t}}$, 所以 $g(t)$ 在 $t\in[1,\sqrt{2})$ 上单调递增, 在 $t\in[\sqrt{2},4]$ 上单调递减, 所以 $m<\frac{t}{t^2+2}=\frac{1}{t+\frac{2}{t}}$ 在 $t\in[1,4]$ 上恒成立, 得 $m<g(t)_{\min}$. 因为 $g(1)=\frac{1}{3}$, $g(4)=\frac{2}{9}$, 所以当 $t=4$ 时, $g(t)_{\min}=\frac{2}{9}$, 故 $m<\frac{2}{9}$.

5. $\sqrt{2}$　要使得 t 取得最大值, 必须 $x+y>0$, $\frac{8y}{x^2+8y^2}>0$, 即 $x>0$. 因为 $t=\min\left\{x+y,\frac{8y}{x^2+8y^2}\right\}$, 此时 $t\leqslant x+y$, $t\leqslant\frac{8y}{x^2+8y^2}$, 所以 $t^2\leqslant\frac{8xy+8y^2}{x^2+8y^2}=\frac{\frac{8x}{y}+8}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+8}$. 令 $\frac{x}{y}=m>0$, 则 $\frac{\frac{8x}{y}+8}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+8}=\frac{8m+8}{m^2+8}=\frac{8(m+1)}{(m+1)^2-2(m+1)+9}=\frac{8}{(m+1)-2+\frac{9}{m+1}}\leqslant\frac{8}{2\sqrt{(m+1)\times\frac{9}{m+1}}-2}=2$, 当且仅当 $m+1=3$, 即 $m=2(x=2y)$ 时取等号, 所以 $t^2\leqslant 2$, 即 $t\leqslant\sqrt{2}$.

6. (1)**解**: 因为 $x>0$, $a>0$, 所以 $f(x)=x+\frac{a}{x}+1\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{a}{x}}+1=2\sqrt{a}+1$, 当且仅当 $x=\frac{a}{x}$, 即 $x=\sqrt{a}$ 时等号成立, 所以 $2\sqrt{a}+1=5$, 解得 $a=4$.

(2) **证明**: 先证充分性: 若 $a\leqslant 4$, 当 $a<0$ 时, $f(x)=x+\frac{a}{x}+1$, 因为 $y=x$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增, $y=\frac{a}{x}$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增. 当 $a=0$ 时, $f(x)=x+1$, 显然 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增. 当 $0<a\leqslant 4$ 时, $f(x)=x+\frac{a}{x}+1$, 由对勾函数的性质可知函数 $f(x)$ 在 $(\sqrt{a},+\infty)$ 上单调递增, 由 $0<a\leqslant 4$, 得 $0<\sqrt{a}\leqslant 2$, 所以 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增. 再证必要性: 若 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增, 当 $a<0$ 时, $f(x)=x+\frac{a}{x}+1$, 因为 $y=x$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增, $y=\frac{a}{x}$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增, 所以 $a<0$ 符合题意. 当 $a=0$ 时, $f(x)=x+1$, 显然 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增, 所以 $a=0$ 符合题意. 当 $a>0$ 时, $f(x)=x+\frac{a}{x}+1$, 由对勾函数的性质可知函数 $f(x)$ 在 $(\sqrt{a},+\infty)$ 上单调递增, 所以 $\sqrt{a}\leqslant 2$, 得 $0<a\leqslant 4$. 综上所述, $a\leqslant 4$. 所以“$f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增”的充要条件是“$a\leqslant 4$”.

7. **解**: (1) 因为 $m=4$, 所以 $y=mf(x)=\begin{cases}\frac{64}{8-x}, & 0\leqslant x\leqslant 4,\\ 20-2x, & 4<x\leqslant 10.\end{cases}$ 当 $0\leqslant x\leqslant 4$ 时, 由 $\frac{64}{8-x}\geqslant 4$, 解得 $x\geqslant -8$, 此时 $0\leqslant x\leqslant 4$; 当 $4<x\leqslant 10$ 时, 由 $20-2x\geqslant 4$, 解得 $x\leqslant 8$, 此时 $4<x\leqslant 8$. 综上, 得 $0\leqslant x\leqslant 8$. 故若一次投放 4 个单位的药剂, 则有效治污的时间可达 8 天.

(2) 当 $6\leqslant x\leqslant 10$ 时, $y=2\times\left(5-\frac{1}{2}x\right)+$

$m\left[\frac{16}{8-(x-6)}\right]=10-x+\frac{16m}{14-x}=14-x+\frac{16m}{14-x}-4$. 又 $14-x\in[4,8]$, $m\in[1,4]$, 则 $y\geqslant 2\sqrt{16m}-4=8\sqrt{m}-4$, 当且仅当 $14-x=\frac{16m}{14-x}$, 即 $14-x=4\sqrt{m}\in[4,8]$ 时取等号. 令 $8\sqrt{m}-4\geqslant 4$, 解得 $m\geqslant 1$, 故所求 m 的最小值为 1.

题组 18　二次函数模型、分段函数模型及应用

【核心笔记】

1. 二次函数模型应用题的求解方法(练习运用:第 1, 2, 4, 5, 6 题)

(1) 有些问题的两变量之间是二次函数关系,如面积问题、利润问题、产量问题等,构建二次模型,利用二次函数图象与单调性解决.

(2) 二次函数是我们比较熟悉的基本函数,建立二次函数模型可以求出函数的最值,解决实际中的最优化问题,需要强调的是:一定要注意自变量的取值范围,根据图象的对称轴与定义域在数轴上表示的区间之间的位置关系讨论求解.

2. 分段函数模型应用题的求解方法(练习运用:第 3, 4, 7, 8 题)

(1) 很多实际问题中变量间的关系,不能用同一个关系式给出,而是几个不同的关系式构成分段函数,如出租车的票价与路程之间就是分段函数.

(2) 分段函数中每一段自变量变化所遵循的规律不同,在应用时,可以先将其当作几个问题,将各段的变化规律分别找出来,再将其合到一起. 要注意各段变量的范围,特别是端点值.

(3) 构造分段函数时,要力求准确、简洁,做到分段合理,不重不漏.

【答案详析】

1. B　由 $40-V-\frac{\frac{4}{5}V}{40}(40-V)\leqslant 40\times 60\%$, $V\leqslant 40$, 解得 $10\leqslant V\leqslant 40$, 则 V 的最小值为 10.

2. B　由题意,职工 11 月份收入为 19 000 元,其中纳税部分为 19 000－5 000＝14 000(元),其中不超过 3 000 元的部分,纳税额为 3 000×3%＝90(元);超过 3 000 元至 12 000 元的部分,纳税额为 9 000×10%＝900(元);超过 12 000 元至 25 000 元的部分,纳税额为 2 000×20%＝400(元). 所以该职工 11 月份应缴纳个税为 90＋900＋400＝1 390(元).

3. C　根据函数的解析式可知当 $n<N_0$ 时, $t(n)=\frac{t_0}{\sqrt{n}}$ 单调递减;当 $n\geqslant N_0$ 时, $t(n)=\frac{t_0}{\sqrt{N_0}}$ 为常数. 且第 64 天和第 67 天检测过程平均耗时均为 8 小时,所以有 $t(16)=\frac{t_0}{\sqrt{16}}=\frac{t_0}{4}=16$, 所以 $t_0=64$, 即 $t(n)=\frac{64}{\sqrt{n}}(n<N_0)$. 又 $t(67)=\frac{t_0}{\sqrt{N_0}}=\frac{64}{\sqrt{N_0}}=8$, 所以 $N_0=64$, 所以 $t(n)=\begin{cases}\frac{64}{\sqrt{n}}, & n<64,\\ 8, & n\geqslant 64,\end{cases}$ 则 $t(49)=\frac{64}{7}\approx 9$.

4. BC　对于 A, 当 $0\leqslant x\leqslant 5$ 时, $y=\left(5x-\frac{1}{2}x^2\right)-(0.5+0.25x)=-0.5x^2+4.75x-0.5$; 当 $x>5$ 时, $y=R(5)-(0.5+0.25x)=12-0.25x$, 故 $y=\begin{cases}-0.5x^2+4.75x-0.5, & 0\leqslant x\leqslant 5,\\ 12-0.25x, & x>5,\end{cases}$ 故 A 错误. 对于 B, 当 $0\leqslant x\leqslant 5$ 时, $y=-0.5x^2+4.75x-0.5=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{19}{4}\right)^2+\frac{345}{32}$, 故当 $x=\frac{19}{4}=4.75$ 时, y 取到最大值 $\frac{345}{32}$; 当 $x>5$ 时, $y=12-0.25x<12-0.25\times 5=10.75<\frac{345}{32}$, 故当年产量为 475 台时年利润最大,最大为 $\frac{345}{32}$ 万元,故 B 正确. 对于 C, 当 $x=500$ 时,销售收入最多为 $R(5)=25-\frac{25}{2}=\frac{25}{2}$, 设最大产量为 a 百台,所以有 $\frac{25}{2}=\frac{1}{2}+0.25a$, 解得 $a=48$, 故 C 正确. 对于 D, 不亏本即 $y\geqslant 0$, 当 $0\leqslant x\leqslant 5$ 时, $y=-0.5x^2+4.75x-0.5\geqslant 0$, 解得 $\frac{19-\sqrt{345}}{4}\leqslant x\leqslant 5$; 当 $x>5$ 时, $y=12-0.25x\geqslant 0$, 解得 $5<x\leqslant 48$; 故 $\frac{19-\sqrt{345}}{4}\leqslant x\leqslant 48$ 时,企业才不亏本,企业不亏本的最大年产量为 4 800 台,故 D 错误.

5. $y=-2x+24(0<x<12, x\in\mathbf{Z})$　6　由题意设 $y=kx+b$, 则 $\begin{cases}4k+b=16,\\ 7k+b=10,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-2,\\ b=24,\end{cases}$ 所以 $y=-2x+24(0<x<12, x\in\mathbf{Z})$. 设每只小船的载重量为 M, 每日的运货总重量为 G, 所以每日运货总重量为 $G=Mxy=Mx(-2x+24)=-2M(x-6)^2+72M$, 所以当 $x=6$, $y=12$ 时, G 取得最大值 $72M$, 即每次拖 6 只小船.

6. $\{5,6,7,8,9,10\}$　记捐赠后的利润为 W, 由题意, $W=y(r-m)=(120-2t)\cdot\left(\frac{1}{4}t+10-m\right)$, 化简得 $W=$

$-\frac{1}{2}t^2+(2m+10)t+1\ 200-120m,1\leqslant t\leqslant 20,t\in\mathbf{N}^*$. 记 $W=f(t)=-\frac{1}{2}t^2+(2m+10)t+1\ 200-120m$，则其图象开口向下，且对称轴为直线 $x=2m+10$. 因为该公司每天都能盈利，且获得的利润随时间 t 的增大而增大，

所以 $\begin{cases}2m+10\geqslant 20,\\ f(1)=-\frac{1}{2}+2m+10+1200-120m>0,\\ m\in\mathbf{N}^*,\end{cases}$ 解得

$5\leqslant m<10.25$ 且 $m\in\mathbf{N}^*$. 所以 m 的取值范围是 $\{5,6,7,8,9,10\}$.

7. 解：(1) 当 $0<x\leqslant 40$ 时，$y=100x$；当 $40<x\leqslant m$ 时，$y=[100-(x-40)]x=-x^2+140x$；当 $x>m$ 时，$y=(140-m)x$，所以 $f(x)=\begin{cases}100x, & 0<x\leqslant 40,\\ -x^2+140x, & 40<x\leqslant m,\\ (140-m)x, & x>m.\end{cases}$

(2) 当 $0<x\leqslant 40$ 时，$y=100x$，y 随着 x 的增大而增大；当 $x>m$ 且 $40<m\leqslant 100$ 时，$140-m>0$，则 $y=(140-m)x$，y 随着 x 的增大而增大；当 $40<x\leqslant m$ 时，$y=-x^2+140x=-(x-70)^2+4\ 900$，所以当 $40<x\leqslant 70$ 时，y 随着 x 的增大而增大，当 $x>70$ 时，y 随着 x 的增大而减小. 综上所述，当 $40<m\leqslant 70$ 时，景点收取的总费用随着团队中人数增加而增加.

8. 解：(1) 由表格中的数据知，当时间 x 变长时，$Q(x)$ 先增后减，①③函数模型描述的都是单调函数，不符合该数据模型，所以选择函数模型②.

$Q(x)=a|x-m|+b$，由 $Q(15)=Q(25)$，可得 $|15-m|=|25-m|$，解得 $m=20$. 因为 $\begin{cases}Q(15)=5a+b=55,\\ Q(20)=b=60,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=60,\end{cases}$ 则日销售量 $Q(x)$ 与时间 x 的关系式为 $Q(x)=-|x-20|+60(1\leqslant x\leqslant 30,x\in\mathbf{N}^*)$.

(2) 因为第 10 天的日销售收入为 505 元，则 $\left(10+\frac{k}{10}\right)\times 50=505$，解得 $k=1$，所以 $P(x)=\frac{1}{x}+10$. 由 (1) 知 $Q(x)=-|x-20|+60=\begin{cases}x+40, & 1\leqslant x\leqslant 20,\\ -x+80, & 20<x\leqslant 30,\end{cases}x\in\mathbf{N}^*$，则 $f(x)=P(x)\cdot Q(x)=\begin{cases}10x+\frac{40}{x}+401, & 1\leqslant x\leqslant 20,\\ -10x+\frac{80}{x}+799, & 20<x\leqslant 30,\end{cases}x\in\mathbf{N}^*$.

(3) 当 $1\leqslant x\leqslant 20,x\in\mathbf{N}^*$ 时，$f(x)=10x+\frac{40}{x}+401\geqslant 2\sqrt{10x\cdot\frac{40}{x}}+401=441$，当且仅当 $10x=\frac{40}{x}$，即 $x=2$ 时，等号成立；当 $20<x\leqslant 30,x\in\mathbf{N}^*$ 时，$f(x)=-10x+\frac{80}{x}+799$ 单调递减，所以函数的最小值为 $f(30)=499+\frac{8}{3}>441$. 综上可得，当 $x=2$ 时，函数 $f(x)$ 取得最小值 441，所以该工艺品的日销售收入第 2 天最低，最低收入是 441 元.

9. 解：(1) 由题意得，$f(x)=70x+10x-t(x)-300$，而 $t(x)=\begin{cases}40, & 0<x\leqslant 5,\\ x^2+40x-140, & 5<x<25,\\ 81x+\frac{900}{x+1}-608, & x\geqslant 25,\end{cases}$ 即 $f(x)$

$=\begin{cases}80x-340, & 0<x\leqslant 5,\\ -x^2+40x-160, & 5<x<25,\\ -x-\frac{900}{x+1}+308, & x\geqslant 25.\end{cases}$

(2) 由 (1) 可得当 $0<x\leqslant 5$ 时，$f(x)$ 单调递增，此时 $f(x)_{\max}=f(5)=60$；当 $5<x<25$ 时，$f(x)=-x^2+40x-160=-(x-20)^2+240$，开口向下，对称轴 $x=20$，此时 $f(x)_{\max}=f(20)=240$；当 $x\geqslant 25$ 时，$f(x)=-\left(x+1+\frac{900}{x+1}\right)+309$，因为 $x+1+\frac{900}{x+1}\geqslant 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{900}{x+1}}=60$，当且仅当 $x+1=\frac{900}{x+1}$，即 $x=29$ 时取等号，所以 $f(x)=-\left(x+1+\frac{900}{x+1}\right)+309\leqslant -60+309=249$，此时 $f(x)_{\max}=f(29)=249$. 因为 $249>240$，$249>60$，所以一年的游客为 29 万人时，该景区一年利润最大，且最大利润是 249 万元.

综合提优(3.3～3.4)

1. D　由题意，令 $3m^2-7m-5=1$，即 $(m-3)(3m+2)=0$，解得 $m=3$ 或 $m=-\frac{2}{3}$. 当 $m=3$ 时，$f(x)=x^8$ 为偶函数，舍去；当 $m=-\frac{2}{3}$ 时，$f(x)=x^{-3}$ 为奇函数，满足题意.

2. D　对于 A，二次函数 $y=ax^2+4bx$ 的图象开口向下，则 $a<0$，其对称轴为 $x=-\frac{4b}{2a}=-1<0$，所以 $a=2b$，即 $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$，不符合幂函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的图象，故 A 错误；对于 B，二次函数 $y=ax^2+4bx$ 的图象开口向下，则 $a<0$，其对称轴为 $x=-\frac{4b}{2a}>0$，所以 $\frac{b}{a}<0$，幂函数 $y=x^{\frac{b}{a}}$ 中，$\frac{b}{a}<0$，为减函数，不符合题意，故 B 错误；

对于C,二次函数 $y=ax^2+4bx$ 的图象开口向上,则 $a>0$,其对称轴为 $x=-\frac{4b}{2a}=-2<0$,所以 $a=b$,幂函数 $y=x^{\frac{b}{a}}$ 中,$\frac{b}{a}=1$,即 $y=x$,图象是一条直线,不符合题意,故C错误;对于D,二次函数 $y=ax^2+4bx$ 的图象开口向上,则 $a>0$,其对称轴为 $x=-\frac{4b}{2a}>0$,所以 $\frac{b}{a}<0$,幂函数 $y=x^{\frac{b}{a}}$ 中,$\frac{b}{a}<0$,为减函数,符合题意,故D正确.

3. C 设函数 $f(x)=\frac{(x-2)\times(x^2+2x+4)}{x^3}=\frac{x^3-8}{x^3}=1-\frac{8}{x^3}$,则 $b=f(997)$,$c=f(999)$,易得$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.因为 $997<999$,所以 $b<c$.当 $x>0$ 时,$f(x)<1$,则 $b<c<1$.因为 $a=\frac{1\,000}{999}>1$,所以 $b<c<a$.

4. $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$ 构造函数 $F(x)=\frac{f(x)}{x^3}(x\neq0)$,所以 $F(-x)=\frac{f(-x)}{(-x)^3}=\frac{-f(x)}{-x^3}=\frac{f(x)}{x^3}=F(x)$,所以 $F(x)$是偶函数,由于对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,都有$(x_1-x_2)\cdot\left[\frac{f(x_1)}{x_1^3}-\frac{f(x_2)}{x_2^3}\right]>0$,所以 $F(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,则 $F(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减.$f(2)=f(2\times1)=2f(1)=2$,由 $\frac{f(x)}{x}\geqslant\frac{1}{4}x^2$ 得$\frac{f(x)}{x^3}\geqslant\frac{1}{4}=\frac{f(2)}{2^3}$,即 $F(x)\geqslant F(2)$,所以 $x\leqslant-2$或 $x\geqslant2$,所以不等式$\frac{f(x)}{x}\geqslant\frac{1}{4}x^2$ 的解集为$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

5. BD 因为 $f(x)=(m^2-3)x^n(m,n\in\mathbf{R})$为幂函数,所以 $m^2-3=1$,得 $m=2$ 或 $m=-2$.对于A,当 $m=2$ 时,$n=2-1=1$,则 $f(x)=x$ 在$(0,+\infty)$上单调递增,故A错误.对于B,当 $m=2$ 时,$n=2+1=3$,则$f(x)=x^3(x\in\mathbf{R})$,因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$,所以 $f(x)$是奇函数,当 $m=-2$ 时,$n=-2+1=-1$,则$f(x)=x^{-1}(x\neq0)$,因为 $f(-x)=(-x)^{-1}=-x^{-1}=-f(x)$,所以 $f(x)$是奇函数,所以当 $n=m+1$ 时,$f(x)$是奇函数,故B正确.对于C,因为$f(x)=x^n(n\in\mathbf{R})$,所以 $y=2f(x-1)+1=2(x-1)^n+1$,当 $x=2$ 时,$y=2\times1^n+1=3$,所以函数 $y=2f(x-1)+1$ 过定点$(2,3)$,故C错误.对于D,当 $n=-3$ 时,$f(x)=x^{-3}$,则 $f(5)+f(-4)=5^{-3}+(-4)^{-3}=\left(\frac{1}{5}\right)^3-\left(\frac{1}{4}\right)^3<0$,故D正确.

6. AD 设幂函数 $f(x)=x^\alpha$,则 $2^\alpha=\frac{1}{8}$,解得 $\alpha=-3$,故 $f(x)=x^{-3}$,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,故A正确;$f(x)$的值域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,故B错误;$f(|x|)=27$,则$|x|^{-3}=27$,解得 $x=\pm\frac{1}{3}$,故C错误;$|f(-x)|=|f(x)|=|x|^{-3}$,故 $f(x)$为偶函数,故D正确.

7. $\sqrt{3}$ $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ 设 $f(x)=x^a$,则 $2^a=\sqrt{2}$,$a=\frac{1}{2}$,$f(x)=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$,当 $x>0$ 时,$g(x)=f(x)=\sqrt{x}$,$g(x)$是偶函数,所以 $g(-3)=g(3)=\sqrt{3}$.易知,当 $x>0$ 时,$g(x)=\sqrt{x}$单调递增,且 $g(1)=1$,所以 $g(x+1)>1$ 可化为 $g(|x+1|)>g(1)$,则 $\sqrt{|x+1|}>1$,即$|x+1|>1$,则 $x+1>1$ 或 $x+1<-1$,所以 $x>0$ 或 $x<-2$.

8. $(-\infty,-1)$ 由题意知,函数 $f(x)$在$(-\infty,0)$上,存在 $x_1\neq x_2$,使得 $f(x_1)=f(x_2)$成立,则函数$f(x)$在$(-\infty,0)$上不单调,$f(x)=\begin{cases}x+\frac{1}{x}-m,x\geqslant m,\\ \frac{1}{x}-x+m,x<m.\end{cases}$ 若 $m\geqslant0$,$x<0$,则$f(x)=\frac{1}{x}-x+m$,因为函数 $y=\frac{1}{x}$和 $y=-x+m$在$(-\infty,0)$上单调递减,所以函数$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,不符合题意.若 $m<0$,$x<0$,则 $f(x)=\begin{cases}x+\frac{1}{x}-m,m\leqslant x<0,\\ \frac{1}{x}-x+m,x<m,\end{cases}$ 当 $x<m$ 时,易知 $f(x)=\frac{1}{x}-x+m$ 在$(-\infty,m)$上单调递减,有 $f(x)>f(m)$,当 $m\geqslant-1$ 时,$m\leqslant x<0$,则函数 $f(x)$在$[m,0)$上单调递减,则 $f(x)\leqslant f(m)$,不符合题意;当 $m<-1$ 时,$m\leqslant x<0$,$f(x)=\frac{1}{x}+x-m$,对于对勾函数 $y=\frac{1}{x}+x$ 在$(-1,0)$和$(0,1)$上单调递减,在$(-\infty,-1)$和$(1,+\infty)$上单调递增,则函数 $f(x)$在$(m,-1)$上单调递增,在$(-1,0)$上单调递减,且对任意 $x_0\in(m,-1)$,使得 $f(x_0)>f(m)$,所以存在$x_1\neq x_2$,$x\in(-\infty,0)$使得 $f(x_1)=f(x_2)$成立,所以 $m<-1$.

9. **解**:(1) 当 $0<x<80$ 且 $x\in\mathbf{N}$ 时,$y=200x-400-\left(\frac{1}{2}x^2+130x+50\right)=-\frac{1}{2}x^2+70x-450$;当 $x\geqslant80$

且 $x\in\mathbf{N}$ 时，$y=200x-400-\left(201x+\dfrac{8\ 100}{x-1}-2\ 781\right)=2\ 381-x-\dfrac{8\ 100}{x-1}$.

综上所述，$y=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x^2+70x-450,\ 0<x<80,x\in\mathbf{N},\\ 2\ 381-x-\dfrac{8\ 100}{x-1},\quad x\geqslant 80,x\in\mathbf{N}.\end{cases}$

(2) 当 $0<x<80$ 且 $x\in\mathbf{N}$ 时，$y=-\dfrac{1}{2}(x-70)^2+2\ 000$，所以当 $x=70$ 时，此时最大值为 2 000；当 $x\geqslant 80$，且 $x\in\mathbf{N}$ 时，$y=2\ 380-\left[(x-1)+\dfrac{8\ 100}{x-1}\right]\leqslant 2\ 380-2\sqrt{(x-1)\cdot\dfrac{8\ 100}{x-1}}=2\ 200$，当且仅当 $x-1=\dfrac{8\ 100}{x-1}$，即 $x=91$ 时，取得最大值 2 200. 又 $2\ 200>2\ 000$，故当年产量为 91 台时，企业所获利润最大，最大值为 2 200 万元.

章末提优 · 真题精选

1. 0　由题意，可得 $f(0)=0+a=0$，解得 $a=0$. 当 $a=0$ 时，$f(x)=x^3$，满足 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$，即 $f(x)$是奇函数，故 $a=0$ 符合题意.

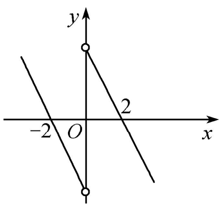
2. $\dfrac{37}{28}$　$3+\sqrt{3}$　由已知 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+2=\dfrac{7}{4}$，$f\left(\dfrac{7}{4}\right)=\dfrac{7}{4}+\dfrac{4}{7}-1=\dfrac{37}{28}$，所以 $f\left[f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]=\dfrac{37}{28}$. 当 $x\leqslant 1$ 时，由 $1\leqslant f(x)\leqslant 3$ 可得 $1\leqslant -x^2+2\leqslant 3$，所以 $-1\leqslant x\leqslant 1$. 当 $x>1$ 时，由 $1\leqslant f(x)\leqslant 3$ 可得 $1\leqslant x+\dfrac{1}{x}-1\leqslant 3$，所以 $1<x\leqslant 2+\sqrt{3}$，$1\leqslant f(x)\leqslant 3$ 等价于 $-1\leqslant x\leqslant 2+\sqrt{3}$，所以$[a,b]\subseteq[-1,2+\sqrt{3}]$，所以 $b-a$ 的最大值为 $3+\sqrt{3}$.

3. 2　当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)$为奇函数，且当$x>\dfrac{1}{2}$时，$f(x+1)=f(x)$，所以 $f(6)=f(5\times 1+1)=f(1)$. 而$f(1)=-f(-1)=-[(-1)^3-1]=2$，所以 $f(6)=2$.

4. B　**解法 1**(排除法)　$f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}=\dfrac{-(x+1)+2}{1+x}=-1+\dfrac{2}{1+x}$. 对于选项 A，$f(x-1)-1=\dfrac{2}{x}-2$，不是奇函数；对于选项 B，$f(x-1)+1=\dfrac{2}{x}$，是奇函数；对于选项 C，$f(x+1)-1=\dfrac{2}{x+2}-2$，不是奇函数；对于选项 D，$f(x+1)+1=\dfrac{2}{x+2}$，不是奇函数.

解法 2(直接法)　$f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}=\dfrac{-(x+1)+2}{1+x}=-1+\dfrac{2}{1+x}$的图象关于点$(-1,-1)$中心对称，该图象向右平移 1 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度后得到的图象关于点$(0,0)$中心对称.

5. $[-1,0]\cup[1,3]$　因为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，且$f(2)=0$，$f(x)$的大致图象如图所示. 所以$f(x)$在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，且 $f(-2)=0$，故 $f(-1)<0$；当 $x=0$ 时，不等式 $xf(x-1)\geqslant 0$ 成立，当$x=1$ 时，不等式$xf(x-1)\geqslant 0$ 成立，当 $x-1=2$ 或 $x-1=-2$ 时，即 $x=3$ 或 $x=-1$时，不等式 $xf(x-1)\geqslant 0$ 成立，当 $x>0$ 时，不等式 $xf(x-1)\geqslant 0$ 等价为 $f(x-1)\geqslant 0$，此时$\begin{cases}x>0,\\0<x-1\leqslant 2,\end{cases}$此时 $1<x\leqslant 3$，当 $x<0$ 时，不等式$xf(x-1)\geqslant 0$ 等价为 $f(x-1)\leqslant 0$，即$\begin{cases}x<0,\\-2\leqslant x-1<0,\end{cases}$得$-1\leqslant x<0$，综上 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 或 $1\leqslant x\leqslant 3$，即满足 $xf(x-1)\geqslant 0$ 的 x 的取值范围是$[-1,0]\cup[1,3]$.



6. $\dfrac{5}{2}$　因为 $f(x+1)$为奇函数，所以 $f(-x+1)=-f(x+1)$，令 $x=0$ 得 $f(1)=0$，所以$f(1)=a+b=0$. 因为 $f(x+2)$为偶函数，所以 $f(-x+2)=f(x+2)$. 又 $f(0)=f(-1+1)=-f(1+1)=-f(2)$，$f(3)=f(1+2)=f(-1+2)=f(1)$，所以 $f(0)+f(3)=-f(2)+f(1)=-f(2)+0=-4a-b=6$. 联立$\begin{cases}a+b=0,\\-4a-b=6,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-2,\\b=2.\end{cases}$所以当 $x\in[1,2]$时，$f(x)=-2x^2+2$. 由 $f(-x+1)=-f(x+1)$，得 $-f(x)=f(-x+2)$. 由 $f(-x+2)=f(x+2)$，得 $f(x)=f(4-x)$. 所以 $-f(4-x)=f(-x+2)$，即 $-f(x)=f(x+2)$，所以 $-f(x+2)=f(x+4)$，得 $f(x)=f(x+4)$. 所以 $f\left(\dfrac{9}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}+4\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(-\dfrac{1}{2}+1\right)=-f\left(\dfrac{1}{2}+1\right)=-f\left(\dfrac{3}{2}\right)=-\left(-2\times\dfrac{9}{4}+2\right)=\dfrac{5}{2}$.

7. B　由条件知 $f(1)=1$，$f(2)=2$，$f(x)>f(x-1)+f(x-2)$，故 $f(3)>3$，$f(4)>f(3)+f(2)>5$，$f(5)>f(4)+f(3)>5+3=8$，观察可知，$f(6)>13$，$f(7)>21$，$f(8)>34$，$f(9)>55$，$f(10)>89$，$f(11)>$

144，$f(12)>233$，$f(13)>377$，$f(14)>610$，$f(15)>987$，$f(16)>1\ 597$，则 $f(20)>1\ 000$.

8. A 由题意 $x=0$ 时，$f(x)$的最小值2，所以不等式 $f(x)\geqslant\left|\frac{x}{2}+a\right|$ 等价于 $\left|\frac{x}{2}+a\right|\leqslant 2$ 在$\mathbf{R}$上恒成立. 当 $a=2\sqrt{3}$时，令 $x=0$，得 $\left|\frac{x}{2}+2\sqrt{3}\right|>2$，不符合题意，排除C，D；当 $a=-2\sqrt{3}$时，令 $x=0$，得 $\left|\frac{x}{2}-2\sqrt{3}\right|>2$，不符合题意，排除B.

9. A 因为 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$，令 $x=1$，$y=0$ 可得，$2f(1)=f(1)f(0)$，所以$f(0)=2$，令 $x=0$ 可得，$f(y)+f(-y)=2f(y)$，即 $f(y)=f(-y)$，所以函数 $f(x)$为偶函数，令 $y=1$ 得，$f(x+1)+f(x-1)=f(x)\cdot f(1)=f(x)$，即有 $f(x+2)+f(x)=f(x+1)$，从而可知 $f(x+2)=-f(x-1)$，$f(x-1)=-f(x-4)$，故$f(x+2)=f(x-4)$，即 $f(x)=f(x+6)$，所以函数$f(x)$的一个周期为6. 因为 $f(2)=f(1)-f(0)=1-2=-1$，$f(3)=f(2)-f(1)=-1-1=-2$，$f(4)=f(-2)=f(2)=-1$，$f(5)=f(-1)=f(1)=1$，$f(6)=f(0)=2$，所以一个周期内的 $f(1)+f(2)+\cdots+f(6)=0$. 由于22除以6余4，所以 $\sum\limits_{k=1}^{22}f(k)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=1-1-2-1=-3$.

10. D 因为 $y=g(x)$的图象关于直线 $x=2$ 对称，所以 $g(2-x)=g(x+2)$，因为 $g(x)-f(x-4)=7$，所以 $g(x+2)-f(x-2)=7$，即 $g(x+2)=7+f(x-2)$，因为$f(x)+g(2-x)=5$，所以 $f(x)+g(x+2)=5$，代入得 $f(x)+[7+f(x-2)]=5$，即 $f(x)+f(x-2)=-2$，所以 $f(3)+f(5)+\cdots+f(21)=(-2)\times 5=-10$，$f(4)+f(6)+\cdots+f(22)=(-2)\times 5=-10$. 因为 $f(x)+g(2-x)=5$，所以 $f(0)+g(2)=5$，即 $f(0)=1$，所以$f(2)=-2-f(0)=-3$. 因为 $g(x)-f(x-4)=7$，所以 $g(x+4)-f(x)=7$，又因为 $f(x)+g(2-x)=5$，联立得 $g(2-x)+g(x+4)=12$，所以 $y=g(x)$的图象关于点$(3,6)$中心对称，因为函数 $g(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，所以$g(3)=6$. 因为 $f(x)+g(x+2)=5$，所以 $f(1)=5-g(3)=-1$. 所以 $\sum\limits_{k=1}^{22}f(k)=f(1)+f(2)+[f(3)+f(5)+\cdots+f(21)]+[f(4)+f(6)+\cdots+f(22)]=-1-3-10-10=-24$.

阶段温习2(第一章—第二章)

1. B $B=\{x|x^2-x=0\}=\{0,1\}$，$U=\{-2,-1,0,1,2\}$，故 $\complement_U B=\{-2,-1,2\}$，$A=\{-2,1\}$，故 $A\cap(\complement_U B)=\{-2\}$.

2. A 由 $x^2-x-2<0$，得$-1<x<2$；由$|x|<a$，$a>0$，得$-a<x<a$. 因为"$|x|<a$"是"$x^2-x-2<0$"的必要不充分条件，所以 $(-1,2)\subsetneqq(-a,a)$，得 $\begin{cases}-a\leqslant -1,\\ a\geqslant 2\end{cases}$(等号不能同时成立)，解得 $a\geqslant 2$，即实数 a 的取值范围为$[2,+\infty)$.

3. B 根据题意，当 A 中最小数为1时，不合题意；当 A 中最小数为2时，$A=\{2\}$或$\{2,3\}$或$\{2,4\}$或$\{2,3,4\}$，B 为$\{1\}$的非空子集，则集合对(A,B)有 $4\times 1=4$ 个；当 A 中最小数为3时，$A=\{3\}$或$\{3,4\}$，B 为$\{1,2\}$的非空子集，则集合对(A,B)有 $2\times(2^2-1)=6$(个)；当 A 中最小数为4时，$A=\{4\}$，B 为$\{1,2,3\}$的非空子集，则集合对(A,B)有 $1\times(2^3-1)=7$(个). 综上，满足题意的集合对(A,B)的个数为 $4+6+7=17$.

4. B **解法1** 因为 $4x^2+4ax+1=4\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+1-a^2$，$2x^2+x+a=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+a-\frac{1}{8}$，当 $1-a^2>0$，即$-1<a<1$ 时，$4x^2+4ax+1>0$ 也应对于一切实数 x 恒成立，因此 $2x^2+x+a>0$ 对于一切实数 x 恒成立，所以 $a-\frac{1}{8}>0$，即 $a>\frac{1}{8}$，故$\frac{1}{8}<a<1$；当 $1-a^2\leqslant 0$ 时，关于 x 的方程 $4x^2+4ax+1=0$ 有实数解，即存在实数 x 使得$(4x^2+4ax+1)(2x^2+x+a)=0$，不满足题意.

解法2 取 $a=\frac{1}{4}$，则$(4x^2+4ax+1)(2x^2+x+a)=(4x^2+x+1)\left(2x^2+x+\frac{1}{4}\right)=8\left(x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\right)\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\right)=8\left[\left(x+\frac{1}{8}\right)^2+\frac{15}{64}\right]\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{16}\right]$，显然对任意 $x\in\mathbf{R}$，$(4x^2+4ax+1)(2x^2+x+a)>0$ 恒成立，排除C，D；取 $a=1$，$(4x^2+4ax+1)(2x^2+x+a)=(4x^2+4x+1)(2x^2+x+1)=(2x+1)^2(2x^2+x+1)$，当 $x=-\frac{1}{2}$时，$(4x^2+4ax+1)(2x^2+x+a)=0$，不合题意，排除A.

5. AD 对于A，命题"$\forall x\in\mathbf{R}$，$3x^2-2x-1<0$"的否定是"$\exists x\in\mathbf{R}$，$3x^2-2x-1\geqslant 0$"，故A正确；对于B，由题意可知，命题"$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-2x-a\geqslant 0$"为真命题，即$\Delta=(-2)^2+4a\leqslant 0$，即 $a\leqslant -1$，故B错误；对于C，由 $a>b$，不能推出 $a^2>b^2$，例如，$a=1$，$b=-2$，反过来，$a^2>b^2$ 也不能推出 $a>b$，例如，$a=-2$，$b=1$，所以

“$a>b$”是“$a^2>b^2$”的既不充分也不必要条件，故C错误；存在$x=\sqrt[4]{2}$是无理数，$x^2=\sqrt{2}$也是无理数，故D正确.

6. ABC　因为正实数a,b,c满足$a^2-ab+4b^2-c=0$，所以$c=a^2-ab+4b^2$，可得$\frac{c}{ab}=\frac{a^2-ab+4b^2}{ab}=\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}-1\geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{4b}{a}}-1=3$，当且仅当$\frac{a}{b}=\frac{4b}{a}$，即$a=2b$时等号成立，此时$c=a^2-ab+4b^2=6b^2$，所以$a+b-c=2b+b-6b^2=-6b^2+3b=-6\left(b-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{8}$，当$b=\frac{1}{4}$时，取得最大值$\frac{3}{8}$.

7. $\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right]$　因为区域Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ表示的集合均不是空集，所以$\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^2-2a\cdot\frac{1}{2}+2\geqslant 0,\\ 2^2-2a\cdot 2+2<0\end{cases}$或$\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^2-2a\cdot\frac{1}{2}+2<0,\\ 2^2-2a\cdot 2+2\geqslant 0,\end{cases}$

解得$\frac{3}{2}<a\leqslant\frac{9}{4}$.

8. $\{1,2\}$(答案不唯一，也可以是$\{1,2,3\}$，$\{1,2,4\}$)　-1　由已可得$A=\{1,2\}$，$B=\{1,2,3,4\}$. 又$A\subseteq C\subsetneqq B$，所以$C$是$\{1,2\}$，$\{1,2,3\}$，$\{1,2,4\}$中的一个. 显然1是方程$ax^2+bx+1=0$与$x^2+ax+b=0$的公共解，且$-3\in(\complement_{\mathbf{R}}D)\cap E$，则$\begin{cases}a+b+1=0,\\ 9-3a+b=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\ b=-3,\end{cases}$所以$a+b=-1$.

9. $(1,2)$　命题“$\exists x>0,\frac{4x^2+1}{2x}<3m-m^2$”是真命题，等价于$\left(\frac{4x^2+1}{2x}\right)_{\min}<3m-m^2$. 因为$\frac{4x^2+1}{2x}=2x+\frac{1}{2x}\geqslant 2$，当且仅当$x=\frac{1}{2}$时等号成立，所以$3m-m^2>2$，即$m^2-3m+2<0$，解得$1<m<2$.

第四章　指数函数与对数函数

题组19　实数指数幂的运算性质的应用

【核心笔记】

1. 根式恒等变形的常见技巧(练习运用：第7题)

(1) 熟练运用初中学习的各种多项式乘法公式；进行数式运算的难点是运用各种变换技巧，如配方、因式分解、有理化(分子或分母)、拆项、添项、换元等，这些都是经常使用的变换技巧，必须通过各种题型的训练逐渐积累经验，提高计算、化简的能力.

(2) 形如$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$的双重根式，当A^2-B是一个平方数时，则能通过配方法去掉双重根号，这也是双重根号能否开方的判别技巧. 而分母有理化中，常常用到的是平方差公式.

2. 分数指数幂运算的常用方法技巧(练习运用：第1，3，8题)

(1) 进行指数幂运算的一般方法为化负数为正数，化根式为分数指数幂，化小数为分数.

(2) 一般情况下，指数的底数是大于0的，但具体题目要具体对待，一定要注意底数的正负.

(3) 当根式为多重根式时，要清楚哪个是被开方数，一般由里向外用分数指数幂依次写出.

(4) 分数指数幂的一般运算步骤是：有括号的先算括号里的，无括号的先进行指数运算(即先乘方、开方)，再乘除，最后加减. 负指数幂化为正指数幂的倒数；底数是负数的，先确定符号；底数是小数的，先要化为分数；底数是带分数的，先要化为假分数；若是根式，应化为分数指数幂，然后尽可能用幂的形式表示，便于运用指数幂的运算性质.

(5) 其中字母a的范围是$(0,+\infty)$，若$a\leqslant 0$，应根据m,n的奇偶情况具体分析. (练习运用：第1，3，7题)

3. 指数幂运算的一般原则和技巧(练习运用：第4，6题)

(1) 在进行幂和根式的化简时，一般原则是：先将负指数幂化为正指数幂，将小数化为分数，将根式化为分数指数幂，将底数较大的整数分解质因数化成指数幂的形式，再利用幂的运算性质在系数、同底数幂间进行运算，达到化简和求值的目的.

(2) 化简指数幂的几个常用技巧如下：

①$\left(\frac{b}{a}\right)^{-p}=\left(\frac{a}{b}\right)^{p}(ab\neq 0)$；

②$a=(a^{\frac{1}{m}})^m$，$a^{\frac{n}{m}}=(a^{\frac{1}{m}})^n$；

③1的代换，如$1=a^{-1}a$，$1=a^{-\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}}$等；

④乘法公式的常见变形，如$(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})\cdot(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})=a-b$，$(a^{\frac{1}{2}}\pm b^{\frac{1}{2}})^2=a\pm 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b$，$(a^{\frac{1}{3}}\pm b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}\mp a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})=a\pm b$.

(3) 对于条件求值问题，一般先化简代数式，再将字母的取值代入求值. 但有时字母的取值不知道或不易求出，这时可将所求代数式恰当地变形，构造出与已知条件相同或相似的结构，从而通过“整体代入”巧妙地求出代数式的值.

4. 指数幂的综合应用问题的处理方法(练习运用：第9题)

(1) 对于指数幂等式的证明问题，常常是将指数幂化

为相同底数,利用指数幂相等的规律进行证明.解决此类问题的关键是通过指数运算进行等价代换以及利用参数找到已知与结论的联系,这样才能使问题迅速得到解决.

(2) 解决有关指数幂的综合应用问题时,首先,要善于观察、分析,并对条件与结论进行适当的化简变形,以创造运用公式和幂的有关性质的条件;其次,进行化简、求值;最后,要注意方程思想、整体思想、转化与化归思想、换元思想等数学思想的运用.

【答案详析】

1. A　因为 $\sqrt[3]{a^4}\cdot a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{5}{12}}=a^{\frac{4}{3}}\cdot a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{5}{12}}=a^{\frac{4}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{12}}=a^2=4$,所以 $a=\pm2$,又 $a>0$,所以 $a=2$.

2. B　由题意 $A^{\frac{1}{x}}=2,A^{\frac{1}{y}}=7^2=49,A^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=2\times49=98$,所以 $A=98^{\frac{1}{2}}=7\sqrt{2}$.

3. B　因为 a,b,c,p,q 是五个非负整数,$2^a+2^b+2^c+\left(\frac{1}{2}\right)^p+\left(\frac{1}{2}\right)^q=21\frac{5}{8}$,若 $q=0$,则 $\left(\frac{1}{2}\right)^p=\frac{5}{8}$,矛盾,所以 $q\geqslant1$,所以 $2^a+2^b+2^c=21,\left(\frac{1}{2}\right)^p+\left(\frac{1}{2}\right)^q=\frac{5}{8}$.因为 $a>b>c$,所以 $a\geqslant2$.若 $a=2$,则 $2^a+2^b+2^c=2^1+2^2+2^0=7$,矛盾;若 $a=3$,则 $2^a+2^b+2^c\leqslant2^1+2^2+2^3=14$,矛盾;若 $a\geqslant5$,则 $2^a+2^b+2^c\geqslant2^5+2^0+2^1=35$,矛盾;若 $a=4$,则 $2^b+2^c=5$,所以 $b=2,c=0$.若 $q\geqslant2$,则 $\left(\frac{1}{2}\right)^p+\left(\frac{1}{2}\right)^q\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3$,与已知矛盾,所以 $q=1,p=3$,所以 $b+p=2+3=5$.

4. ABC　对于 A,$a^{2\sqrt{3}}+a^{-2\sqrt{3}}=(a^{\sqrt{3}}+a^{-\sqrt{3}})^2-2=3^2-2=7$,故 A 正确;对于 B,$a^{3\sqrt{3}}+a^{-3\sqrt{3}}=(a^{2\sqrt{3}}+a^{-2\sqrt{3}})\cdot(a^{\sqrt{3}}+a^{-\sqrt{3}})-(a^{\sqrt{3}}+a^{-\sqrt{3}})=7\times3-3=18$,故 B 正确;对于 C,由题意可知 $a>0$,由于$(a^{\frac{\sqrt{3}}{2}}+a^{-\frac{\sqrt{3}}{2}})^2=a^{\sqrt{3}}+a^{-\sqrt{3}}+2=3+2=5$,所以 $a^{\frac{\sqrt{3}}{2}}+a^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{5}$,故 C 正确;对于 D,原式$=a^{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}+a^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$,由于$(a^{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}+a^{\frac{3\sqrt{3}}{2}})^2=a^{3\sqrt{3}}+a^{-3\sqrt{3}}+2=18+2=20$,所以原式$=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$,故 D 错误.

5. BCD　对于 A,令$(4,6)=x,(2,3)=y$,则 $4^x=6,2^y=3$,所以$\frac{4^x}{2^y}=2$,即 $2^{2x-y}=2$,所以 $2x-y=1$,即 $2\times(4,6)-(2,3)=1$,若$(4,6)=2(2,3)$,则$(2,3)=\frac{1}{3}$,显然不成立,故 A 错误;对于 B,因为 $2^1=2$,所以$(2,2)=1$,故 B 正确;对于 C,令$(4,5)=a,(4,6)=b,(4,30)=c$,则 $4^a=5,4^b=6,4^c=30$,所以 $4^a\times4^b=4^c$,即 $4^{a+b}=4^c$,所以 $a+b=c$,即$(4,5)+(4,6)=(4,30)$,故 C 正确;对于 D,因为 $a>1,b>1$,令$(a,b)=t$,则 $a^t=b$ 且 $t>0$,所以 $a=b^{\frac{1}{t}}$,则$(b,a)=\frac{1}{t}$,所以$(a,b)+(b,a)=t+\frac{1}{t}\geqslant2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}=2$,当且仅当 $t=\frac{1}{t}$,即 $t=1$,即 $a=b$ 时取等号,故 D 正确.

6. 75　方程可化为$(3^x)^2-9\cdot3^x+3=0$,由根与系数的关系得 $3^{x_1}+3^{x_2}=9,3^{x_1}\cdot3^{x_2}=3$,即 $3^{x_1+x_2}=3$,则 $x_1+x_2=1$,又 $9^{x_1}+9^{x_2}=(3^{x_1}+3^{x_2})^2-2\cdot3^{x_1}\cdot3^{x_2}=81-6=75$,所以$\frac{9^{x_1}+9^{x_2}}{x_1+x_2}=75$.

7. -2　因为 $a>0$,所以$\frac{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}=\frac{(a^{\frac{1}{3}})^2-(b^{\frac{1}{3}})^2}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}=\frac{(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}=a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}},\frac{\sqrt[3]{a^5}}{a\sqrt[3]{a}}=\frac{a^{\frac{5}{3}}}{a^1\cdot a^{\frac{1}{3}}}=a^{\frac{1}{3}}$.因为 $b>8$,则 $b^{\frac{1}{3}}>2$,所以 $\sqrt{4-4b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}=\sqrt{(2-b^{\frac{1}{3}})^2}=|2-b^{\frac{1}{3}}|=b^{\frac{1}{3}}-2$,因此$\frac{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}-\frac{\sqrt[3]{a^5}}{a\sqrt[3]{a}}+\sqrt{4-4b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}=a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}-2=-2$.

8. 解:(1) 原式$=-4-1+\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\times(-\sqrt{2})^4=-4-1+\frac{1}{2}\times4=-3$.

(2) 原式$=\frac{2a^{\frac{2}{3}}\sqrt{b}(-6\sqrt{a}b^{\frac{1}{3}})}{-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}}+\frac{8\sqrt{b^3}}{-2b^{\frac{1}{2}}}=\frac{4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}}-4b=4a-4b$.

(3) 因为 $x+x^{-1}=3$,所以$(x+x^{-1})^2=x^2+x^{-2}+2=9$,所以 $x^2+x^{-2}=7$,则$(x-x^{-1})^2=x^2+x^{-2}-2=5$,可得 $x-x^{-1}=\pm\sqrt{5}$,且 $x^3+x^{-3}=(x+x^{-1})(x^2+x^{-2}-1)=3\times(7-1)=18$,所以$\frac{x-x^{-1}}{x^3+x^{-3}-2}=\frac{\pm\sqrt{5}}{18-2}=\pm\frac{\sqrt{5}}{16}$.

9. 证明:(1) 由$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$得 $y=\frac{xz}{x-z}$,将其代入 $a^x=b^y$ 得 $a^x=b^{\frac{xz}{x-z}}$,所以 $a=b^{\frac{z}{x-z}}$,则 $a^{x-z}=b^z$,所以$\frac{a^x}{a^z}=b^z$,即 $a^x=(ab)^z$.

(2) 由 $a^x=(ab)^z$ 得 $a=(ab)^{\frac{z}{x}}=a^{\frac{z}{x}}\cdot b^{\frac{z}{x}}$,因为$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$,所以$\frac{z}{x}=1-\frac{z}{y},\frac{z}{y}=1-\frac{z}{x}$.由 $a=a^{\frac{z}{x}}\cdot b^{\frac{z}{x}}$ 得 $a^{1-\frac{z}{x}}=b^{1-\frac{z}{y}}$,即 $a^{\frac{z}{y}}=b^{1-\frac{z}{y}}$,所以 $a^z=b^{y-z}$.两边同时乘以 b^z,得 $b^y=(ab)^z$.

题组 20 指数型函数问题

【核心笔记】

1. 指数函数的概念(练习运用:第 2,6 题)

(1) 一个函数是指数函数,需满足三个条件:

①底数大于 0 且不等于 1;

②幂指数是单一的自变量 x;

③系数为 1,且没有其他项.

(2) 求指数函数的解析式可用待定系数法.

2. 求指数型函数的定义域和值域的一般方法

(1) 求指数型函数的定义域时,先观察函数是 $y=f(a^x)$型还是 $y=a^{f(x)}$ 型.

①由于指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$的定义域是 $\mathbf{R}$,所以函数 $y=a^{f(x)}$的定义域与 $f(x)$的定义域相同.

②对于函数 $y=f(a^x)(a>0$ 且 $a\neq1)$的定义域,关键是找出 $t=a^x$ 的值域的哪些部分在 $y=f(t)$的定义域中.

③求 $y=\sqrt{f(a^x)}$型函数的定义域时,往往转化为解指数不等式(组).

(2) 求与指数函数有关的函数的值域时,要注意指数函数的值域为$(0,+\infty)$,还需注意:在求形如 $y=a^{f(x)}$$(a>0$ 且 $a\neq1)$的函数的值域时,先求得 $f(x)$的值域(即函数 $t=f(x)$中 t 的范围),再根据 $y=a^t$ 的单调性,列出指数不等式(组),得出 a^t 的范围,即 $y=a^{f(x)}$的值域.

3. 指数函数的性质及应用问题的常见类型及解题策略(练习运用:第 3,4 题)

(1) 比较大小问题.常利用指数函数的单调性及中间值(0 或 1)法.

(2) 简单的指数方程或不等式的求解问题.解决此类问题应利用指数函数的单调性,要特别注意底数 a 的取值范围,并在必要时进行分类讨论.

(3) 指数型函数中参数的取值范围问题.在解决涉及指数函数的单调性或最值的含参问题时,应注意对底数 a 的分类讨论.

4. 解决与指数函数综合问题的方法(练习运用:第 5,7,8,9 题)

(1) 性质法

利用指数函数的有关性质可以解决有关定义域、值域、单调性、不等式、方程等问题.

(2) 隐含性质法

在利用指数函数的性质解决问题时,要善于挖掘函数所隐含的性质,以利于解题.

(3) 图象法

利用指数函数来解决有关综合问题时,应充分利用其图象,利用图象的形象、直观可降低思维难度,简化解题过程.

(4) 构造法

利用指数函数解决有关综合问题时,关键在于构造函数,这就需要观察分析题目的结构特征,以便构造相关函数.

【答案详析】

1. D 由条件得$\begin{cases}t-2=0,\\s=a^0+1,\end{cases}$解得 $t=2,s=2$,所以 $g(x)=t+x^{s+1}=x^3+2$ 的图象不经过第四象限.

2. B 由指数函数 $y=\left(\frac{5}{3}\right)^x$ 是增函数,可得$\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2}}>\left(\frac{5}{3}\right)^0=1$,由指数函数 $y=\left(\frac{3}{5}\right)^x$ 是减函数,可得$\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{5}}<\left(\frac{3}{5}\right)^0=1$,故 $c=\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2}}>1>\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{5}}=a$.又由幂函数 $y=x^{\frac{2}{5}}$ 在$(0,+\infty)$上单调递增,可得 $a=\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{5}}>\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{5}}=d$.又由指数函数 $y=\left(\frac{2}{5}\right)^x$ 为减函数,可得 $d=\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{5}}>\left(\frac{2}{5}\right)^2=b$.综上所述,$a,b,c,d$ 的大小关系是 $c>a>d>b$.

3. C $\forall x_1\neq x_2,\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$,故函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,由 $f[f(x)-2^x]=6$,知存在唯一值 $f(x)-2^x=a$ 使等式成立,即 $f(x)=2^x+a$,有 $f(a)=2^a+a=6$,当 $a=2$ 时满足,又函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,故 $a=2$ 是唯一解,所以 $f(x)=2^x+2$,故 $f(-2)=\frac{1}{4}+2=\frac{9}{4}$.

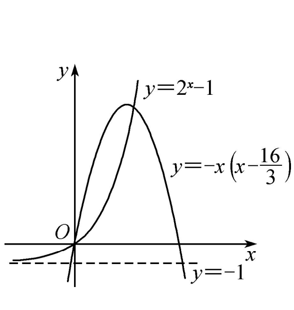
4. ABC 因为 $0<a<1$,则 $0<1-a<1$,得 $y=(1-a)^x$ 为减函数,又 $0<b<1$,得$\frac{1}{b}>b,b>\frac{b}{2}$,则 $(1-a)^{\frac{1}{b}}<(1-a)^b,(1-a)^b<(1-a)^{\frac{b}{2}}$,故 A,C 错误;又 $1<1+a<1+b$,则 $y=(1+b)^x,y=x^b$ 和 $y=x^a$ 在$(0,+\infty)$上均单调递增,则$(1+a)^a<(1+b)^a<(1+b)^b$,故 B 错误;对于 D,$(1-a)^a>(1-a)^b$,而 $(1-a)^b>(1-b)^b$,则$(1-a)^a>(1-b)^b$,故 D 正确.

5. AC 因为函数 $f(x)=a\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}+b$ 的图象过原点,所以 $a\left(\frac{1}{3}\right)^0+b=0$,即 $a+b=0$,故 A 正确;又因为 $f(x)$图象无限接近直线 $y=1$,所以 $b=1$,从而 $a=$

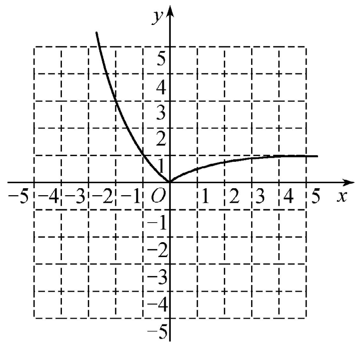
-1，所以 $f(x)=-\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}+1$，故B错误；又 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$ 为偶函数，故C正确；当 $x>0$ 时，$f(x)=-\left(\frac{1}{3}\right)^{x}+1$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，又偶函数的图象关于 y 轴对称，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，故D错误.

6. $\frac{3}{2}$　令 $f(x)=e^x+x$，明显其在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，又由 $e^{2x-1}+2x=e^{3-y}+4-y$ 得 $e^{2x-1}+2x-1=e^{3-y}+3-y$，即 $f(2x-1)=f(3-y)$，所以 $2x-1=3-y$，即 $2x+y=4$，所以 $\frac{x}{y}+\frac{1}{x}=\frac{\frac{4-y}{2}}{y}+\frac{1}{x}=\frac{2}{y}+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{y}+\frac{1}{x}\right)(2x+y)-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\left(4+\frac{4x}{y}+\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{2}\geqslant\frac{1}{4}\left(4+2\sqrt{\frac{4x}{y}\cdot\frac{y}{x}}\right)-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，当且仅当 $\frac{4x}{y}=\frac{y}{x}$，即 $x=1,y=2$ 时等号成立，故 $\frac{x}{y}+\frac{1}{x}$ 的最小值为 $\frac{3}{2}$.

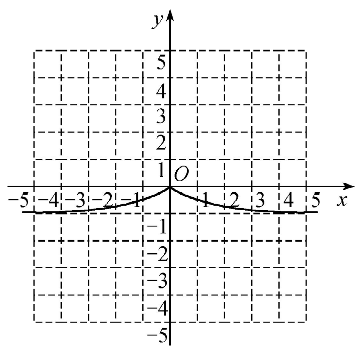
7. $(-\infty,3]$　作出 $y=2^x-1$，$y=-x\left(x-\frac{16}{3}\right)$ 的图象如图所示，由 $\begin{cases}y=2^x-1,\\y=-x\left(x-\frac{16}{3}\right),\end{cases}$ 解得 $x=0$ 或 $x=3$，则 $\begin{cases}x=0,\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=3,\\y=7.\end{cases}$ 对于二次函数 $y=-x\left(x-\frac{16}{3}\right)$，函数的图象开口向下，对称轴为直线 $x=\frac{8}{3}$，当 $x=\frac{8}{3}$ 时，$y=-\frac{8}{3}\left(\frac{8}{3}-\frac{16}{3}\right)=\frac{64}{9}$. 对于指数型函数 $y=2^x-1$，当 $x=\frac{8}{3}$ 时，$2^{\frac{8}{3}}-1<2^3-1=7<\frac{64}{9}$. 对于函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-1, & x<a,\\-x\left(x-\frac{16}{3}\right), & x\geqslant a,\end{cases}$ 当 $a\leqslant\frac{8}{3}$ 时，$f(x)_{\max}=f\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{64}{9}$；当 $\frac{8}{3}<a\leqslant3$ 时，$f(x)_{\max}=-a\left(a-\frac{16}{3}\right)$；当 $a>3$ 时，$f(x)$ 没有最大值. 综上所述，a 的取值范围是 $(-\infty,3]$.



8. 解：(1) ①当 $\left(\frac{1}{2}\right)^x-1\geqslant0$，即 $\left(\frac{1}{2}\right)^x\geqslant1=\left(\frac{1}{2}\right)^0$ 时，根据指数函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 单调递减，可得当 $x\leqslant0$ 时，$n(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$；当 $\left(\frac{1}{2}\right)^x-1<0$，即 $\left(\frac{1}{2}\right)^x<1$ 时，可得当 $x>0$ 时，$n(x)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^x$. 当 $x=0$ 时，$n(0)=0$，当 $x\to+\infty$ 时，$n(x)\to1$，所以 $n(x)$ 的值域是 $[0,+\infty)$，$n(x)=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x-1\right|$ 的图象如下：



②因为 $m(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}-1$，所以当 $x=0$ 时，$m(0)=0$；当 $x\to\pm\infty$ 时，$m(x)\to-1$，且 $m(x)\geqslant-1$，所以 $m(x)$ 的值域是 $[-1,0)$，$m(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}-1$ 的图象如下：



(2) 若选①空集，已知 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，$4=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$，则 $4^{\frac{1}{k}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{k}}$，不等式 $f(kx^2-kx)>4^{\frac{1}{k}}$ 可化为 $\left(\frac{1}{2}\right)^{kx^2-kx}>\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{k}}$，因为 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 单调递减，所以 $kx^2-kx<-\frac{2}{k}$. 若解集为空集，则 $kx^2-kx+\frac{2}{k}\geqslant0$ 恒成立，则 $\begin{cases}k>0,\\\Delta=k^2-4\times k\times\frac{2}{k}\leqslant0,\end{cases}$ 解得 $0<k\leqslant2\sqrt{2}$，即当不等式解集为空集时，k 的取值范围是 $(0,2\sqrt{2}]$. 若选②不是空集，则由①，得 $k\leqslant0$ 或 $>2\sqrt{2}$，即 k 的取值范围是 $(-\infty,0]\cup(2\sqrt{2},+\infty)$. 若选③是全体实数，则由①，得 $kx^2-kx<-\frac{2}{k}$ 恒成立，即 kx^2-kx+

$\frac{2}{k}<0$ 恒成立，则 $\begin{cases}k<0,\\ \Delta=k^2-4\times k\times\frac{2}{k}<0,\end{cases}$ 解得 $-2\sqrt{2}<k<0$，即当不等式解集为全体实数时，k 的取值范围是 $(-2\sqrt{2},0)$.

9. (1)**解**：因为 $f(x)+g(x)=2^{x+1}+3$，所以 $f(-x)+g(-x)=2^{-x+1}+3$，又 $f(x)$ 是偶函数，$g(x)$ 是奇函数，所以 $f(x)-g(x)=2^{-x+1}+3$，$2f(x)=2^{x+1}+2^{-x+1}+6$，可得 $f(x)=2^x+2^{-x}+3$.

(2) **证明**：$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，证明如下：任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，令 $x_1<x_2$，$f(x_1)-f(x_2)=2^{x_1}+2^{-x_1}+3-(2^{x_2}+2^{-x_2}+3)=(2^{x_1}-2^{x_2})+(2^{-x_1}-2^{-x_2})=(2^{x_1}-2^{x_2})\left(1-\frac{1}{2^{x_1+x_2}}\right)=(2^{x_1}-2^{x_2})\frac{2^{x_1+x_2}-1}{2^{x_1+x_2}}$. 因为 $0<x_1<x_2$，所以 $2^{x_1}<2^{x_2}$，$2^{x_1+x_2}>1$，则 $(2^{x_1}-2^{x_2})\cdot\frac{2^{x_1+x_2}-1}{2^{x_1+x_2}}<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

(3) **解**：令 $t=2^x+2^{-x}$，由(2)可知当 $x\in[0,2]$ 时，函数 t 单调递增，又函数 t 为偶函数，所以当 $x\in[-1,0]$ 时，函数 t 单调递减，所以当 $x=2$ 时，t 取得最大值 $\frac{17}{4}$，当 $x=0$ 时，t 取得最小值 2，即 $t\in\left[2,\frac{17}{4}\right]$. 又 $f(2x)=2^{2x}+2^{-2x}+3=(2^x+2^{-x})^2+1$，所以 $f(2x)+af(x)+4-a=(2^x+2^{-x})^2+a\cdot(2^x+2^{-x})+5+2a=t^2+at+5+2a$. 设 $h(t)=t^2+at+5+2a$，所以当 $t\in\left[2,\frac{17}{4}\right]$ 时，$h(t)>0$ 恒成立，即 $\begin{cases}-\frac{a}{2}\leqslant 2,\\ 4+2a+5+2a>0\end{cases}$ ①

或 $\begin{cases}2<-\frac{a}{2}\leqslant\frac{17}{4},\\ a^2-4(5+2a)<0\end{cases}$ ②或 $\begin{cases}-\frac{a}{2}>\frac{17}{4},\\ \left(\frac{17}{4}\right)^2+\frac{17}{4}a+5+2a>0\end{cases}$

③. 由①解得 $a>-\frac{9}{4}$；②无解；③无解. 综上，$a\in\left(-\frac{9}{4},+\infty\right)$.

题组 21 对数的运算性质

【核心笔记】

1. 指数式与对数式互化的方法(练习运用：第 2，5，8 题)

(1) 指数式 $a^b=N$ 与对数式 $\log_a N=b$ 的互化规则是“底数不变，左右交换”，即两式均以 a 为底，b,N 两个字母在等号两边互换其位置.

(2) 若要求的是指数式的值，而已知的是对数式的值，则需把对数式转化为指数式进行运算；反之，若要求的是对数式的值，而已知的是指数式的值，则需把指数式转化为对数式进行运算.

2. 对数运算性质的运用(练习运用：第 1 题)

(1) 正用公式：将式中积、商、幂、方根的对数，运用对数的运算性质分别化为对数的和、差、积、商，然后化简求值；

(2) 逆用公式：将式中对数的和、差、积、商运用对数的运算性质将它们分别化为积、商、幂、方根的对数，然后化简求值. 对数式的化简、求值还要注意 $\log_a 1=0$，$\log_a a=1$，$a^{\log_a N}=N(a>0$ 且 $a\neq1,N>0)$ 的应用.

3. 对数换底公式的选用技巧(练习运用：第 1，7 题)

(1) 在运算过程中，出现不能直接用计算器或查表获得对数值时，可化成以 10 为底的常用对数进行运算.

(2) 在化简求值过程中，出现不同底数的对数不能运用运算法则时，可统一化成以同一个实数为底的对数，再根据运算法则进行化简与求值.

(3) 重视以下结论的应用：

① $\log_a c\cdot\log_c a=1$；② $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=1$；③ $\log_{a^n}b^m=\frac{m}{n}\log_a b$.

4. 对数式的求值、化简方法(练习运用：第 3 题)

(1) 对于同底的对数式的化简常用方法是：①“收”，将同底的两对数的和(差)收成积(商)的对数；②“拆”，将积(商)的对数拆成同底的对数的和(差).

(2) 对于常用对数的化简要创设情境，充分利用“lg 5+lg 2=1”来解题.

(3) 对于含多重对数符号的对数式的化简，应从内向外逐层化简.

(4) 对数的化简、求值一般是正用或逆用公式，对真数进行处理，选哪种策略化简，取决于问题的实际情况，一般本着便于真数化简的原则进行.

5. 条件求值问题的求解方法(练习运用：第 7，8，9 题)

带有附加条件的代数式求值问题，需要对已知条件和所求式子进行化简转化，原则是化为同底的对数，以便利用对数的运算性质. 要整体把握对数式的结构特征，灵活运用指数式与对数式的互化.

【答案详析】

1. B 由 $3^a=5^b=A$，得 $a=\log_3 A$，$b=\log_5 A$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\log_A 3+\log_A 25=\log_A(3\times25)=\log_A 75=2$，所以 $A^2=75$，而 $A>0$ 且 $A\neq1$，所以 $A=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$.

2. B 由题意，对于 $\frac{3^{361}}{10\,000^{52}}$，有 $\lg\frac{3^{361}}{10\,000^{52}}=\lg 3^{361}-$

$\lg 10\ 000^{52}=361\times\lg 3-52\times4\approx361\times0.477-52\times4=-35.803$，所以$\frac{3^{361}}{10\ 000^{52}}\approx10^{-35.803}$，选项 B 中 10^{-36} 与其最接近.

3. D　由 $2^{x+\log_2(2^x+1)}+2m>0$ 得 $2^x\cdot2^{\log_2(2^x+1)}+2m>0$，即 $2^x\times(2^x+1)+2m>0$，所以$(2^x)^2+2^x+2m>0$ 对任意的 $x\in(1,2)$恒成立. 令 $2^x=t$，因为 $2^x\in(2,4)$，所以 $t^2+t+2m>0$ 对任意的 $t\in(2,4)$恒成立，即 $2m>-t^2-t$. 又 $y=-t^2-t=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$，$t\in(2,4)$，所以 $y\in(-20,-6)$，即 $2m\geqslant-6$，解得 $m\geqslant-3$.

4. A　因为 $z=\frac{xy}{x+y}$，设 $m^x=n^{2y}=p^{3z}=t$，所以 $x=\log_m t=\frac{1}{\log_t m}$，$2y=\log_n t=\frac{1}{\log_t n}$，$3z=\log_p t=\frac{1}{\log_t p}$，即 $x=\frac{1}{\log_t m}$，$y=\frac{1}{2\log_t n}=\frac{1}{\log_t n^2}$，$z=\frac{1}{3\log_t p}=\frac{1}{\log_t p^3}$. 由 $z=\frac{xy}{x+y}$，得$\frac{1}{z}=\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{y}+\frac{1}{x}$，即 $\log_t p^3=\log_t n^2+\log_t m=\log_t(mn^2)$，所以 $p^3=mn^2$，所以$\frac{mn^2}{p^3}=1$.

5. ABC　由题意，设$\left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{4}\right)^y=\left(\frac{1}{6}\right)^z=m$，则 $x=\log_{\frac{1}{3}}m=-\log_3 m$，$y=\log_{\frac{1}{4}}m=-\log_4 m$，$z=\log_{\frac{1}{6}}m=-\log_6 m$，且 $0<m<1$，所以 $\lg m<0$. 由于$\frac{y}{x}-\frac{y}{z}=\frac{\log_4 m}{\log_3 m}-\frac{\log_4 m}{\log_6 m}=\frac{\lg 3}{\lg 4}-\frac{\lg 6}{\lg 4}=\frac{\lg\frac{1}{2}}{2\lg 2}=-\frac{\lg 2}{2\lg 2}=-\frac{1}{2}$，故 A 正确. 由上可知，$\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}=\frac{1}{z}$，所以$\frac{z}{x}+\frac{z}{2y}=1$，由基本不等式得$\frac{z}{x}+\frac{z}{2y}=1\geqslant2\sqrt{\frac{z^2}{2xy}}$，即$\sqrt{\frac{z^2}{2xy}}\leqslant\frac{1}{2}$，所以$\frac{z^2}{2xy}\leqslant\frac{1}{4}$，即 $2z^2\leqslant xy$，当且仅当$\frac{z}{x}=\frac{z}{2y}=\frac{1}{2}$，即 $x=2z$，$y=z$ 时取得等号. 又 $y=z$ 时，由$\left(\frac{1}{4}\right)^y=\left(\frac{1}{6}\right)^z$，可得 $y=z=0$，与 $y>0$，$z>0$ 矛盾，所以只能 $2z^2<xy$，不可能 $2z^2=xy$，故 B 正确. 又 $x-2z=-\log_3 m+2\log_6 m=2\frac{\lg m}{\lg 6}-\frac{\lg m}{\lg 3}=\frac{\lg m(2\lg 3-\lg 6)}{\lg 3\cdot\lg 6}=\frac{\lg m\cdot\lg\frac{3}{2}}{\lg 6\cdot\lg 3}<0$，所以 $x<2z$. 再根据 $2z-3y=-2\log_6 m+3\log_4 m=\frac{3\lg m}{\lg 4}-\frac{2\lg m}{\lg 6}=\frac{\lg m(3\lg 6-2\lg 4)}{\lg 4\cdot\lg 6}=\frac{\lg m\cdot\lg\frac{27}{2}}{\lg 4\cdot\lg 6}<0$，可得 $2z<3y$. 综上所述，$x<2z<3y$，故 C 正确，D 错误.

6. -4　2 或 20　因为 $f(x)=x+\frac{2}{x}+1$，在定义域$\{x|x\neq0\}$上任取 x，则 $f(-x)=-x-\frac{2}{x}+1$，所以 $f(x)+f(-x)=2$，所以 $f\left(\lg\frac{1}{m}\right)=f(-\lg m)=2-f(\lg m)=2-6=-4$. 由 $f(x)=x+\frac{2}{x}+1=4$，即 $x^2-3x+2=0$，解得 $x=1$ 或 $x=2$，所以 $\lg 5+\lg n=\lg(5n)=1$ 或$\lg 5+\lg n=\lg(5n)=2$，可得 $5n=10$ 或 100，所以 n 的值为 2 或 20.

7. 8　由 $\ln\sqrt[3]{3x_2+2}+x_2=\frac{8}{3}$，得$\frac{1}{3}\ln(3x_2+2)+x_2=\frac{8}{3}$，即 $\ln(3x_2+2)+(3x_2+2)=10$，令 $g(x)=x+e^x$，易知 $g(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，又$g[\ln(3x_2+2)]=\ln(3x_2+2)+e^{\ln(3x_2+2)}=\ln(3x_2+2)+(3x_2+2)=10=g(x_1)$，所以 $\ln(3x_2+2)=x_1$，则 $3x_2+2=e^{x_1}=10-x_1$，所以 $x_1+3x_2=8$.

8. **解**：(1) ①因为 $2^a=3^b=6^c=k$，所以 $a=\log_2 k=\frac{1}{\log_k 2}$，所以$\frac{1}{a}=\log_k 2$.

②因为$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log_k 2+\log_k 3=\log_k 6$，$\frac{1}{c}=\log_k 6$，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{m}{c}$，所以 $\log_k 6=m\log_k 6$，解得 $m=1$.

(2) 由不等式 $4a+b\geqslant tc$，得 $t\leqslant\frac{4a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{4\log_2 k}{\log_6 k}+\frac{\log_3 k}{\log_6 k}=\frac{4\lg 6}{\lg 2}+\frac{\lg 6}{\lg 3}=4\log_2 6+\log_3 6=4(1+\log_2 3)+(1+\log_3 2)=5+4\log_2 3+\log_3 2$，所以 t 的最大值 $5+4\log_2 3+\log_3 2$.

9. **解**：(1) 由题意得 $k\lg\frac{P}{2\times10^{-5}}+60=k\lg\frac{1\ 000P}{2\times10^{-5}}$，则 $k\lg\frac{P}{2\times10^{-5}}+60=k\left(3+\lg\frac{P}{2\times10^{-5}}\right)$，即 $3k=60$，解得 $k=20$，故声压级 S 关于声压 P 的函数解析式为 $S=20\lg\frac{P}{2\times10^{-5}}$.

(2) 不会干扰我们正常的学习，理由如下：

将 $S=40$ 代入 $S=20\lg\frac{P}{2\times10^{-5}}$得 $\lg\frac{P}{2\times10^{-5}}=2$，所以$\frac{P}{2\times10^{-5}}=10^2$，解得 $P=2\times10^{-3}$，即 $P_1=P_2=2\times10^{-3}$，所以 $P=\sqrt{P_1^2+P_2^2}=\sqrt{2}P_1=2\sqrt{2}\times10^{-3}$，代入 $S=20\lg\frac{P}{2\times10^{-5}}$得 $S=20\lg\frac{2\sqrt{2}\times10^{-3}}{2\times10^{-5}}=20\lg(\sqrt{2}\times$

$10^2)=40+10\lg 2\approx 43<45$，所以不会干扰我们正常的学习.

题组 22　对数型函数问题

【核心笔记】

1. 对数函数的概念与图象(练习运用：第 2,6 题)

(1) 定义域是使函数解析式有意义的自变量的取值集合，求与对数函数有关的定义域问题时，要注意对数函数的概念.

(2) 有关对数函数图象的识别问题，主要依据底数确定图象是上升还是下降、图象位置、图象所过的定点、图象与坐标轴的交点等求解.

2. 对数函数的性质及其应用问题(练习运用：第 1,2,5 题)

(1) 比较对数式的大小. ①若底数为同一常数，则可由对数函数的单调性直接进行判断；若底数为同一字母，则需对底数进行分类讨论；②若底数不同，真数相同，则可以先用换底公式化为同底后，再进行比较；③若底数与真数都不同，则常借助 1,0 等中间量进行比较.

(2) 解对数不等式. 形如 $\log_a x>\log_a b$ 的不等式，借助 $y=\log_a x$ 的单调性求解，如果 a 的取值不确定，需分 $a>1$ 与 $0<a<1$ 两种情况讨论；形如 $\log_a x>b$ 的不等式，需先将 b 化为以 a 为底的对数式.

3. 对数型函数有关的恒成立问题(练习运用：第 4,8 题)

与对数型函数有关的恒成立问题多与其定义域和值域有关. 对于函数 $y=\log_a f(x)$，若定义域为 $\mathbf{R}$(即对任意 x 都有意义)，则 $f(x)>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立；若函数 $y=\log_a f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，则函数 $f(x)$ 能取遍所有正实数.

4. 对数型函数的方程或不等式问题(练习运用：第 7 题)

有关对数型函数的方程或不等式问题，常常结合对数函数的图象来解决，即数形结合法. 应用时要准确地画出图象，把方程的解、不等式的解集等问题转化为函数图象之间的关系问题.

【答案详析】

1. D　对于 A，由已知得$\begin{cases}2-x>0,\\x+4>0,\end{cases}$解得 $-4<x<2$，即函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-4,2)$，A 错误；对于 B，$f(x-1)=g(x)=\log_{\frac{1}{2}}(3-x)-\log_2(x+3)$，其定义域为 $(-3,3)$，又 $g(1)=\log_{\frac{1}{2}}2-\log_2 4=-3$，$g(-1)=\log_{\frac{1}{2}}4-\log_2 2=-3$，则 $g(1)+g(-1)\neq 0$，故函数 $y=f(x-1)$ 不是奇函数，B 错误；对于 C，$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(2-x)-\log_2(x+4)=\log_{\frac{1}{2}}(2-x)+\log_{\frac{1}{2}}(x+4)=\log_{\frac{1}{2}}[(2-x)(x+4)]=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2-2x+8)$，对于函数 $y=-x^2-2x+8$，其在 $[-1,2)$ 上单调递减，则由复合函数的单调性判断法则可得 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2-2x+8)$ 在 $[-1,2)$ 上单调递增，C 错误；对于 D，$f(-1+x)-f(-1-x)=\log_{\frac{1}{2}}(3-x)-\log_2(x+3)-[\log_{\frac{1}{2}}(3+x)-\log_2(3-x)]=-\log_2(3-x)-\log_2(x+3)+\log_2(3+x)+\log_2(3-x)=0$，即 $f(-1+x)=f(-1-x)$，$-3<x<3$，故函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称，D 正确.

2. A　因为 $a>0,b>0$，所以 $a^2=(2^{1.5})^2=2^3=8$，$1<b^2=(1.5^2)^2=(2.25)^2<(2.5)^2=6.25$，故 $a>b>1$，$c=\log_{0.3}0.6<\log_{0.3}0.3=1$. 综上所述，$c<b<a$.

3. B　由 $2f(ax)=f(x+1)+f(x+2)$，得 $2\log_a(ax)=\log_a(x+1)+\log_a(x+2)$，即 $\log_a(x+1)(x+2)=\log_a(ax)^2$，故 $(x+1)(x+2)=(ax)^2$ 且 $\begin{cases}x+2>0,\\x+1>0,\\ax>0,\\a>0,a\neq 1,\end{cases}$ 所以 $a^2=\dfrac{(x+1)(x+2)}{x^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解，又 $\dfrac{(x+1)(x+2)}{x^2}=\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x}+1=2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}>2\times\left(0+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}=1$，故 $a^2>1$，解得 $a>1$ 或 $a<-1$，又 $a>0$，故 $a>1$.

4. B　由不等式 $\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}>-2$ 得 $\dfrac{[g(x_1)+2x_1]-[g(x_2)+2x_2]}{x_1-x_2}>0$，构造 $f(x)=g(x)+2x=\log_2(a+2^{-x})+\log_2 2^{2x}=\log_2(a\cdot 2^{2x}+2^x)$，则 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，依题意，$\forall x_1,x_2\in(1,2)$，$x_1<x_2$，$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，则函数 $f(x)=\log_2(a\cdot 2^{2x}+2^x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增，令 $u=a\cdot 2^{2x}+2^x$，由 $y=\log_2 u$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则函数 $u=a\cdot 2^{2x}+2^x$ 在 $(1,2)$ 上单调递增，且恒有 $a\cdot 2^{2x}+2^x>0$，令 $t=2^x\in(2,4)$，显然函数 $t=2^x$ 在 $(1,2)$ 上单调递增，因此 $u=at^2+t$ 在 $(2,4)$ 上单调递增，且 $\forall t\in(2,4)$，$at^2+t>0$，当 $a>0$ 时，$u=at^2+t$ 在 $(2,4)$ 上单调递增，当 $a=0$ 时，$u=t$ 在 $(2,4)$ 上单调递增，且 $at^2+t>0$ 恒成立，因此 $a\geqslant 0$ 符合题意；当 $a<0$ 时，由 $u=at^2+t$ 在 $(2,4)$ 上单调递增，得 $-\dfrac{1}{2a}\geqslant 4$，解得 $-\dfrac{1}{8}\leqslant a<0$，由 $\forall t\in$

$(2,4)$，$at^2+t>0$，得 $4a+2\geqslant 0$，解得 $a\geqslant -\frac{1}{2}$，因此 $-\frac{1}{8}\leqslant a<0$. 综上，实数 a 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{8},+\infty\right)$.

5. ABD　对于A，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$\sqrt{x^2+1}-x>|x|-x\geqslant 0$，所以函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)+3$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)+f(x)=\ln[\sqrt{(-x)^2+1}+x]+3+\ln(\sqrt{x^2+1}-x)+3=\ln(x^2+1-x^2)+6=6$，所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,3)$ 对称，故A正确；由A知，$f(x)+f(-x)=6$，故 $f(\ln 2)+f\left(\ln\frac{1}{2}\right)=f(\ln 2)+f(-\ln 2)=6$，故B正确；对于C，对于函数 $h(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$，该函数的定义域为 $\mathbf{R}$，$h(-x)+h(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=\ln(x^2+1-x^2)=0$，即 $h(-x)=-h(x)$，所以函数 $h(x)$ 为奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，设 $u=\sqrt{x^2+1}-x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$，其在定义域内单调递减，而函数 $y=\ln u$ 在定义域内单调递增，所以函数 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，故函数 $h(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，因为函数 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，故函数 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，又因为函数 $y=x+3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，故C错误；对于D，因为实数 a,b 满足 $f(a)+f(b)>6$，所以 $f(a)>6-f(b)=f(-b)$，因为 $f(x)$ 在定义域上单调递减，所以 $a<-b$，即 $a+b<0$，故D正确.

6. $\log_2 x$（答案不唯一，形如 $\log_a x(a>1)$ 均可）　因为函数 $y=\frac{f(x^{-x})}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递减的对数函数，注意到 $\log_a x^{-x}=-x\log_a x$，所以可设 $f(x)=\log_a x$，此时 $y=\frac{f(x^{-x})}{x}=-\log_a x=\log_{\frac{1}{a}}x$，因为函数 $y=\frac{f(x^{-x})}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $0<\frac{1}{a}<1$，则 $a>1$，所以 $f(x)=\log_a x(a>1)$ 满足这两个条件.

7. $\left[\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right]$　由题设，可知 $f(x)$ 是偶函数且在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，所以由 $f(\ln t)-f(1)\leqslant f(1)-f\left(\ln\frac{1}{t}\right)$ 得 $f(\ln t)\leqslant f(1)$，所以 $|\ln t|\leqslant 1$，$-1\leqslant\ln t\leqslant 1$，所以 $\frac{1}{\mathrm{e}}\leqslant t\leqslant\mathrm{e}$，则 t 的取值范围为 $\left[\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right]$.

8. 解：(1) 因为 $m=\frac{1}{2}$，所以 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ 的定义域为 $(1,+\infty)$. 由 $\log_{\frac{1}{2}}\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)\right]+\log_2 5=\log_{\frac{1}{2}}\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)\right]+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{5}>0$，化简得 $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)<5$，解得 $-\frac{3}{2}<x<3$，又 $x>1$，所以所求不等式的解集为 $\{x|1<x<3\}$.

(2) 对于任意的 $x\in[3m,4m]$，都有 $f(x)\leqslant 1$，等价于 $f(x)_{\max}\leqslant 1$，因为 $f(x)=\log_m[(x-m)(x-2m)]=\log_m(x^2-3mx+2m^2)(x\in[3m,4m])$，设 $t=x^2-3mx+2m^2=\left(x-\frac{3}{2}m\right)^2-\frac{m^2}{4}(x\in[3m,4m])$，所以 t 在 $[3m,4m]$ 上单调递增. 下面按照 $y=\log_m t$ 的单调性分类讨论：当 $0<m<1$ 时，$f(x)$ 在 $[3m,4m]$ 上单调递减，则 $f(x)_{\max}=f(3m)=\log_m(2m^2)\leqslant 1$，解得 $\frac{1}{2}\leqslant m<1$；当 $m>1$ 时，$f(x)$ 在 $[3m,4m]$ 上单调递增，则 $f(x)_{\max}=f(4m)=\log_m(6m^2)\leqslant 1$，解得 $0<m\leqslant\frac{1}{6}$，与 $m>1$ 矛盾，故舍去. 综上，实数 m 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2},1\right)$.

(3) 因为 $\frac{1}{2}\leqslant m<1$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{5m}{2},+\infty\right)$ 上单调递减，所以 $\begin{cases}f(\alpha)=\log_m\alpha,\\f(\beta)=\log_m\beta,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}(\alpha-m)(\alpha-2m)=\alpha,\\(\beta-m)(\beta-2m)=\beta,\end{cases}$ 即关于 x 的方程 $(x-m)(x-2m)=x$ 在 $\left(\frac{5m}{2},+\infty\right)$ 上有两个不等的实根. 设 $h(x)=(x-m)(x-2m)-x=x^2-(3m+1)x+2m^2$，则 $\begin{cases}\frac{1}{2}\leqslant m<1,\\\Delta=(3m+1)^2-8m^2\geqslant 0,\\\frac{3m+1}{2}>\frac{5m}{2},\\h\left(\frac{5m}{2}\right)>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{1}{2}\leqslant m<1,\\m^2+6m+1\geqslant 0,\\m<\frac{1}{2},\\m>\frac{10}{3},\end{cases}$ 解得 $m\in\varnothing$. 综上，不存在这样的 α，β 满足条件.

9. 解：(1) 由题意，$x\in(1,2)$，$a\cdot 9^x+3^x-1>0$，即 $a>\left(\frac{1}{9}\right)^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x$. 令 $u=\left(\frac{1}{3}\right)^x$，则 $a>u^2-u$ 恒成立，因为 $\frac{1}{9}<u<\frac{1}{3}$，所以 $-\frac{2}{9}<u^2-u<-\frac{8}{81}$，所以 $a\geqslant-\frac{8}{81}$，即 a 的取值范围为 $\left[-\frac{8}{81},+\infty\right)$.

(2) 令 $h(x)=a\cdot 9^x+3^x-1$,由题意,$h(x)$的值域包含$(0,+\infty)$. ①当 $a=0$ 时,$h(x)=3^x-1$,值域为$(-1,+\infty)$,满足条件;②当 $a<0$ 时,$h(x)=a\cdot 9^x+3^x-1$,令 $t=3^x$,所以 $y=at^2+t-1=a\left(t+\frac{1}{2a}\right)^2-1-\frac{1}{4a}$为开口向下的抛物线,易知 $h(x)$的值域为$\left(-\infty,-1-\frac{1}{4a}\right)$,不满足条件. 综上,$a=0$.

(3) 当 $x>0$ 时,$g(x)=3^x$,若 $x<0$,则 $-x>0$,$g(-x)=3^{-x}$,又因为 $g(x)$为奇函数,所以当 $x<0$ 时,$g(x)=-3^{-x}$. 综上,$g(x)=\begin{cases}3^x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -3^{-x}, & x<0,\end{cases}$ $\frac{g^3(x)}{|g(x)|}=g(2x)$,且 $x\neq 0$. 易知 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 为减函数,所以 $g(x)$为单调递增函数,不等式 $g(x^2+tx-2t)\geqslant g(2x)$等价于 $x^2+tx-2t\geqslant 2x$,$x\neq 0$,即解关于 x 的不等式 $x^2+(t-2)x-2t\geqslant 0$,$x\neq 0$. ①当 $t<-2$ 时,解集为$\{x\mid x\leqslant 2$ 且 $x\neq 0$ 或 $x\geqslant -t\}$;②当 $t=-2$ 时,解集为$\{x\mid x\neq 0\}$;③当$-2<t\leqslant 0$ 时,解集为$\{x\mid x\leqslant -t$ 且 $x\neq 0$ 或 $x\geqslant 2\}$;④当 $t>0$ 时,解集为$\{x\mid x\leqslant -t$ 或 $x\geqslant 2\}$.

题组 23　函数的零点及方程根的分布问题

【核心笔记】

1. 二次函数的零点(练习运用:第 5,6 题)

(1) 二次函数在某一个区间内有两个零点,一般情况下需要从以下三个方面考虑:

①对应一元二次方程根的判别式;

②区间端点函数值的正负;

③对应二次函数的图象——抛物线的对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$在区间内.

(2) 二次函数在某一个区间内仅有一个零点,只需考虑区间端点函数值的正负.

2. 一元二次方程根的分布问题(练习运用:第 2,3,7,8 题)

(1) 首先画出符合题意的草图,转化为函数问题.

(2) 结合草图考虑四个方面:

①Δ 与 0 的大小;

②对称轴与所给端点值的关系;

③端点的函数值与 0 的关系;

④开口方向.

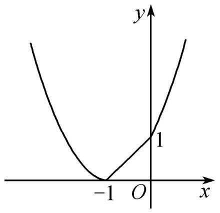
(3) 写出由题意得到的不等式(组).

(4) 结合得到的不等式去验证图象是否符合题意.

【答案详析】

1. D　因为函数 $f(x)$在其定义域内单调递增,又 $f(1)=-1<0$,$f(2)=\ln 2>0$,于是 $x_0\in(1,2)$,A 正确;因为 $\ln x_0+x_0-2=0$,则$\ln x_0+\ln e^{x_0}=\ln(x_0e^{x_0})=2$,所以 $x_0e^{x_0}=e^2$,B 正确;由 $x_0\in(1,2)$,得 $2-x_0\in(0,1)$,于是$(2-x_0)^{x_0}<1$,$x_0^{2-x_0}>1$,C 正确,D 错误.

2. C　由题意可知,$M(x)=\begin{cases}(x+1)^2, & x<-1,\\ x+1, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ (x+1)^2, & x>0,\end{cases}$图象如图所示,设 $m=M(x)$,由 $h(m)+t=0$ 得 $m^2-(t+1)m+t=0$,解得 $m=1$ 或 $m=t$,即 $M(x)=1$ 或 $M(x)=t$,当 $M(x)=1$ 时,由图可知方程有两个实根. 当 $M(x)=t$ 时,若 $t<0$,方程没有实根;若 $t=0$,方程有一个实根;若 $t>0$,方程有两个实根,所以 $h[M(x)]+t=0$ 有两个实根或三个实根或四个实根,所以实根个数的最小值为 2.

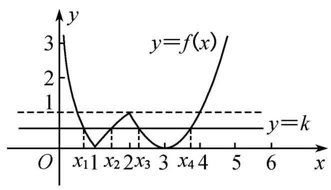


3. B　已知对任意的 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(2\,024x)>2\,024f(x)$,取 $x=0$,可得 $f(0)>2\,024f(0)$,即 $c>2\,024c$,得 $c<0$;又 $f(2\,024x)>2\,024f(x)$恒成立,所以 $a\cdot 2\,024^2x^2+2\,024bx+c>2\,024ax^2+2\,024bx+2\,024c$恒成立,即 $x^2>\frac{c}{2\,024a}$恒成立,又 $c<0$,可得 $a>0$,令 $f(x)=ax^2+bx+c=0$,其判别式 $\Delta=b^2-4ac>0$,可知方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个根. 而 $x_1x_2=\frac{c}{a}<0$,则方程有一正根和一负根,即 $f(x)$有一正一负两个零点.

4. C　当 $x<1$ 时,函数 $f(x)=2^x-m$ 单调递增,则函数 $f(x)$在$(-\infty,1)$上至多有一个零点;当 $x\geqslant 1$ 时,函数 $f(x)=x^2-4mx+3m^2=(x-m)(x-3m)$,至多有两个零点,因为函数 $f(x)$有三个零点,所以函数 $f(x)$在$(-\infty,1)$上有一个零点,在$[1,+\infty)$上有两个零点. 当 $x<1$ 时,令 $f(x)=2^x-m=0$,可得 $m=2^x$,必有 $m>0$,解得 $x=\log_2m$,所以 $\log_2m<1$,解得 $0<m<2$;当 $x\geqslant 1$ 时,由 $f(x)=(x-m)(x-3m)=0$,可得 $x=m$ 或 $x=3m$,所以$\begin{cases}m\geqslant 1,\\ 3m\geqslant 1,\\ m\neq 3m,\end{cases}$解得 $m\geqslant 1$. 综上所述,实数 m 的取值范围为$[1,2)$.

5. ABD　如图所示,在同一坐标系内作出函数 $f(x)=\begin{cases}|\log_2x|, 0<x\leqslant 2,\\ x^2-6x+9, x>2\end{cases}$ 和 $y=k$ 的图象,由图象知,

要使得方程 $f(x)=k$ 有四个不同的零点，只需 $0<k<1$，故 A 正确；对于 B，因为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left|\log_2\frac{1}{2}\right|=1$，$f(2)=|\log_2 2|=1$，$f(4)=4^2-6\times4+9=1$，且函数 $y=x^2-6x+9$ 的图像关于 $x=3$ 对称，由图象得 $\frac{1}{2}<x_1<1<x_2<2<x_3<3<x_4<4$，且 $-\log_2 x_1=\log_2 x_2$，$x_3+x_4=6$，所以 $\log_2 x_2+\log_2 x_1=\log_2(x_1x_2)=0$，可得 $x_1x_2=1$，则 $x_1=\frac{1}{x_2}$，所以 $2x_1+x_2=\frac{2}{x_2}+x_2$，其中 $1<x_2<2$，令 $g(x)=x+\frac{2}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{2}{x}}=2\sqrt{2}$，当且仅当 $x=\sqrt{2}$ 时等号成立，此时 $g(x)$ 取得最小值 $2\sqrt{2}$，所以 $2x_1+x_2\geqslant2\sqrt{2}$，故 B 正确；对于 C，因为 x_1,x_2 是 $|\log_2 x|=k(0<k<1)$ 的两个根，所以 $-\log_2 x_1=\log_2 x_2$，即 $\log_2 x_1+\log_2 x_2=0$，所以 $x_1x_2=1$，由 x_3,x_4 是 $x^2-6x+9=k(0<k<1)$ 的两根，所以 $x_3+x_4=6$，所以 $x_1x_2+x_3+x_4=7$，故 C 错误；对于 D，由 $x_1x_2=1$，可得 $x_1+2x_2=\frac{1}{x_2}+2x_2(1<x_2<2)$，令 $h(x)=2x+\frac{1}{x}(1<x<2)$，可得函数 $h(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增，所以 $h(x)>h(1)=3$，即 $x_1+2x_2>3$，$h(x)<h(2)=\frac{9}{2}$，故 D 正确.



6. $\left(1,\frac{7}{6}\right]$　**解法 1**　由函数 $f(x)=x^2-2(a+1)x+4$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},3\right]$ 上有两个零点，则实数 a 满足 $\begin{cases}\frac{1}{2}<a+1<3,\\ \Delta=4(a+1)^2-4\times4>0,\\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-(a+1)+4\geqslant0,\\ f(3)=9-6(a+1)+4\geqslant0,\end{cases}$ 解得 $1<a\leqslant\frac{7}{6}$，所以实数 a 的取值范围是 $\left(1,\frac{7}{6}\right]$.

解法 2　函数 $f(x)=x^2-2(a+1)x+4$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},3\right]$ 上有两个零点，即 $x^2-2(a+1)x+4=0$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},3\right]$ 上有两个不同的解，即 $2(a+1)=x+\frac{4}{x}$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},3\right]$ 上有两个不同的解，转化成 $y=2(a+1)$ 与 $f(x)=x+\frac{4}{x}$ 的图象在区间 $\left[\frac{1}{2},3\right]$ 上有两个不同的交点，结合对勾函数的性质可知 $f(x)=x+\frac{4}{x}$ 在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上单调递减，在 $[2,3]$ 上单调递增，且 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{2}$，$f(2)=4$，$f(3)=\frac{13}{3}$，所以 $4<2(a+1)\leqslant\frac{13}{3}$，解得 $1<a\leqslant\frac{7}{6}$，则实数 a 的取值范围是 $\left(1,\frac{7}{6}\right]$.

7. $(9,+\infty)$　当 $x\geqslant0$ 时，方程可化为 $2x^2-(a-3)x-a+1=0$，即 $(2x-a+1)(x+1)=0$，则 $x=\frac{a-1}{2}$ 或 $x=-1$（舍）；当 $x<0$ 时，方程可化为 $-2x^2+(1-a)x-a+1=0$，要使原方程有三个根，则 $x\geqslant0$ 时有一根，$x<0$ 时有两根，则 $\frac{a-1}{2}\geqslant0$ 且 $\begin{cases}\Delta=(1-a)^2+8(1-a)>0,\\ \frac{1-a}{2}<0,\\ \frac{a-1}{2}>0,\end{cases}$ 解得 $a\geqslant1$ 且 $a>9$，所以实数 a 的取值范围为 $(9,+\infty)$.

8. 解：(1) 由 $g(x)=mx^2-2mx+n=m(x-1)^2+n-m$ 可知，函数 $g(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称，又 $m>0$，所以函数 $g(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，可得 $\begin{cases}g(1)=0,\\ g(2)=1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}n-m=0,\\ n=1,\end{cases}$ 解得 $m=1,n=1$.

(2) 易知 $f(x)=\frac{g(x)}{x}=x+\frac{1}{x}-2$，所以 $f(|\log_3 x|)+\frac{2a}{|\log_3 x|}-3a-1=0$ 即为 $|\log_3 x|+\frac{1}{|\log_3 x|}-2+\frac{2a}{|\log_3 x|}-3a-1=0$，即 $|\log_3 x|^2-3(a+1)|\log_3 x|+2a+1=0$，令 $|\log_3 x|=\lambda$，则 $\lambda\in(0,+\infty)$，原方程转化为 $\lambda^2-3(a+1)\lambda+2a+1=0$，则关于 x 的方程 $f(|\log_3 x|)+\frac{2a}{|\log_3 x|}-3a-1=0$ 有四个不同的实数解等价于关于 λ 的一元二次方程 $\lambda^2-3(a+1)\lambda+2a+1=0$ 有两个不相等的正实数根 λ_1,λ_2，需满足 $\begin{cases}\Delta=9(a+1)^2-4(2a+1)>0,\\ \lambda_1+\lambda_2=3(a+1)>0,\\ \lambda_1\lambda_2=2a+1>0,\end{cases}$ 解得 $a>-\frac{1}{2}$，所以实数 a 的取值范围为 $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

题组 24　用二分法求方程近似解

【核心笔记】

1. 运用二分法求函数的零点应具备的条件（练习运用：第 2,6,8 题）

(1) 函数图象在零点附近连续不断.

(2) 在该零点左右函数值异号.

只有满足上述两个条件,才可用二分法求函数零点.

2. 用二分法求方程的近似解,首先要选好计算的初始区间,这个区间既要包含所求的根,又要使其长度尽量小,其次要依据给定的精确度,及时检验所得区间的长度是否达到要求(达到给定的精确度),以决定是停止计算还是继续计算.(练习运用:第1,3,4,5,7,9题)

【答案详析】

1. C 因为函数 $f(x)=x^3-2x+2$ 图象连续不断,$f(-1)>0$,$f(-2)<0$,所以函数 $f(x)=x^3-2x+2$ 在区间 $(-2,-1)$ 上有零点,所以下一步应计算 $f(x_1)$,$x_1=\frac{-1-2}{2}=-\frac{3}{2}$.

2. C 根据题意,由二分法的定义,可得正零点所在区间不断缩小,当零点在区间 $(1.125,1.25)$ 上时,区间的长度为 $|1.125-1.25|=0.125>0.1$,故没有达到精确的要求,应该接着计算 $f\left(\frac{1.125+1.25}{2}\right)=f(1.1875)$ 的值.

3. B 由函数 $f(x)=x^2-\log_2 x-6$,得 $f(2)=4-1-6=-3<0$,$f(3)=9-\log_2 3-6=3-\log_2 3>0$,所以 $f(2)\cdot f(3)<0$,又因为函数 $f(x)=x^2-\log_2 x-6$ 的图象在区间 $[2,3]$ 上连续,所以函数 $f(x)$ 的一个零点的初始区间可以为 $[2,3]$.

4. C 由表格数据可知,$h(0.4375)<0$,$h(0.75)>0$,又因为函数 $h(x)$ 在 $[0.4375,0.75]$ 上连续,且函数 $h(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增,所以函数 $h(x)$ 在区间 $[0.4375,0.75]$ 上存在一个零点. 又因为 $0.75-0.4375=0.3125<0.5$,所以方程 $h(x)=0$ 的近似解(精确度为0.5)可以是区间 $[0.4375,0.75]$ 上的任意一个数,观察四个选项可知C正确.

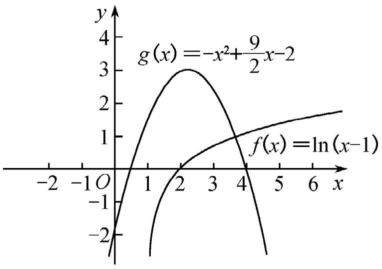
5. BC 函数 $f(x)=2^x+3x-7$ 显然在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,最多有一个零点,又因为 $f(1.422)<0$,$f(1.4375)>0$,所以函数的零点在区间 $(1.422,1.4375)$ 上,即方程 $2^x+3x-7=0$ 有实数解,故B正确;所以函数在区间 $(1.4065,1.422)$ 上没有零点,即 $h<0$,故A错误;因为 $f(1.375)<0$,$f(1.4375)>0$,所以函数的零点在区间 $(1.375,1.4375)$ 上,又因为 $1.4375-1.375=0.0625<0.1$,所以若精确度为0.1,则近似解可取为1.375,故C正确;因为函数的零点在区间 $(1.422,1.4375)$ 上,且 $1.4375-1.422=0.0155>0.01$,所以若精确度为0.01,则近似解不能取为1.4375,故D错误.

6. AB 由于 $f(0)>0$,$f(1)f(2)f(3)<0$,则当 $f(3)<0$ 时,有 $f(1)f(2)>0$,若 $f(1)>0$,$f(2)>0$,则 $f(x)$ 在 $(2,3)$ 上必有1个零点,而在 $(0,1)$ 及 $(1,2)$ 上有无零点及零点个数不能确定,若 $f(1)<0$,$f(2)<0$,则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上必有1个零点,而在 $(1,2)$ 及 $(2,3)$ 上有无零点及零点个数不能确定,因此 $f(3)>0$,且 $f(1)f(2)<0$,若 $f(1)<0$,$f(2)>0$,则 $f(0)f(1)<0$,$f(1)f(2)<0$,函数 $f(x)$ 的两个零点分别在 $(0,1)$ 和 $(1,2)$ 上,A正确;若 $f(1)>0$,$f(2)<0$,则 $f(2)f(3)<0$,$f(1)f(2)<0$,函数 $f(x)$ 的两个零点分别在 $(1,2)$ 和 $(2,3)$ 上,B正确;显然函数 $f(x)$ 的两个零点不可能分别在 $(0,1)$ 和 $(2,3)$ 上,否则 $f(1)<0$,$f(2)<0$,$f(1)f(2)>0$,矛盾,C错误;函数 $f(x)$ 在 $(0,3)$ 上不可能单调,否则函数 $f(x)$ 在 $(0,3)$ 上最多只有1个零点,矛盾,D错误.

7. 1.8 由题意可知,$f(1.75)=\lg 1.75+1.75-2\approx 0.243+1.75-2=-0.007<0$,$f(1.875)=\lg 1.875+1.875-2\approx 0.273+1.875-2=0.148>0$,又因为函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续,所以函数 $f(x)$ 在区间 $(1.75,1.875)$ 上有零点,约为 $\frac{1.75+1.875}{2}\approx 1.8$.

8. 6 设需进行 n 次计算,则 $\frac{0.4}{2^n}<0.01$,即 $2^n>\frac{0.4}{0.01}=40$,故 n 的最小值为6.

9. **解**:(1) 图象如下:



(2) $f(x)-g(x)=0$ 等价于 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的交点问题. 由图知 $f(3)<g(3)$,$f(4)>g(4)$,所以 $x_0\in(3,4)$. 因为 $f(3.5)=\ln 2.5<1$,$g(3.5)=1.5>1$,即 $f(3.5)<g(3.5)$,所以 $x_0\in(3.5,4)$. 又因为 $f(3.75)=\ln 2.75>1$,$g(3.75)=\frac{13}{16}<1$,即 $f(3.75)>g(3.75)$,所以 $x_0\in(3.5,3.75)$,而 $3.75-3.5=0.25<0.3$,所以 x_0 可取 $[3.5,3.75]$ 上的任意值.

(3) 方程 $M(x)=a$ 可转化为 $y=M(x)$ 的图象与直线 $y=a$ 的交点问题. 如图,因为 $g(1)=\frac{3}{2}$,$\ln 2.75=\ln\sqrt{2.75^2}<\ln\sqrt{e^3}=\ln e^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$,所以 $f(x_0)=\ln(x_0$

$-1)\leqslant\ln 2.75<\frac{3}{2}$，所以 $g(1)>f(x_0)$，又 $g(x)_{\max}=\frac{49}{16}$，所以当 $\frac{3}{2}<a<\frac{49}{16}$ 时，$y=M(x)$ 的图象与直线 $y=a$ 有三个交点，所以实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{3}{2},\frac{49}{16}\right)$.

题组 25　复合函数零点问题

【核心笔记】

1. 判断函数零点个数的方法(练习运用：第 1,3,4,6 题)

(1) 解方程法：令 $f(x)=0$，若能求出解，则有几个解就有几个零点；

(2) 零点存在定理法：利用该定理不仅要求函数在区间 (a,b) 上是连续不断的曲线，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，还必须结合函数的图象与性质(如单调性、奇偶性、周期性、对称性)才能确定函数有多少个零点或零点值所具有的性质；

(3) 数形结合法：转化为两个函数的图象的交点个数问题，先画出两个函数的图象，看其交点的个数，其中交点的横坐标有几个不同的值，就有几个不同的零点.

2. 判断函数零点所在区间的方法(练习运用：第 5,8 题)

(1) 当能直接求出零点时，就直接求出后进行判断；

(2) 当不能直接求出时，可根据零点存在定理判断；

(3) 当用零点存在定理也无法判断时，可画出图象判断.

3. 根据函数的零点或方程求解参数的值或范围的步骤(练习运用：第 1,2,7,9 题)

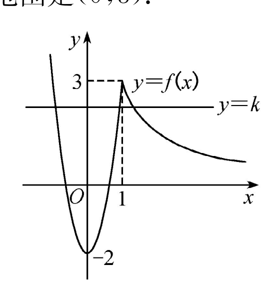
第一步，判断函数的单调性；

第二步，利用零点存在定理，得到参数所满足的不等式；

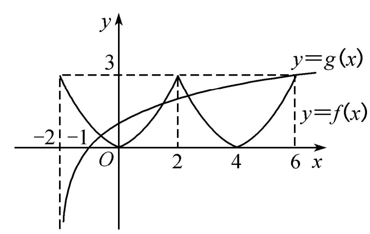
第三步，解不等式，即得参数的取值范围.

【答案详析】

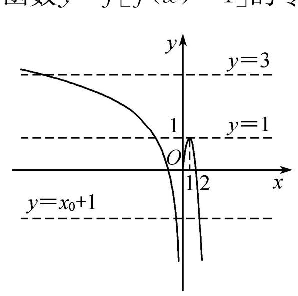
1. C　$f(x)=\begin{cases}5x^2-2, & x\leqslant 1,\\ \frac{3}{x}, & x>1\end{cases}$ 且 $g(x)=f(x)-k=0$ 有 3 个实数根，即 $y=f(x)$ 的图象和直线 $y=k$ 有 3 个交点，作出函数 $y=f(x)$ 的图象，如图所示. 若直线 $y=k$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象有 3 个交点，则 $0<k<3$，即 k 的取值范围是 $(0,3)$.



2. C　由 $f(2-x)=f(2+x)$，可得 $f(-x)=f(x+4)$，又 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的偶函数，则 $f(-x)=f(x)$，所以 $f(x+4)=f(x)$，即 $f(x)$ 的周期为 4，且函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 轴对称，由函数 $f(x)$ 在 $x\in[-2,0]$ 上的图象，得出 $f(x)$ 在 $[-2,6]$ 上的图象如图所示. 令 $g(x)=\log_a(x+2)(a>1)$，若在区间 $(-2,6]$ 内关于 x 的方程 $f(x)-\log_a(x+2)=0(a>1)$ 至少有 2 个不同的实数根，至多有 3 个不同的实数根，则函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)=\log_a(x+2)(a>1)$ 的图象在 $(-2,6]$ 上至少有 2 个不同的交点，至多有 3 个不同的交点，所以 $\begin{cases}g(2)\leqslant f(2),\\ g(6)>f(6),\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\log_a(2+2)\leqslant 3,\\ \log_a(6+2)>3,\end{cases}$ 解得 $\sqrt[3]{4}\leqslant a<2$.

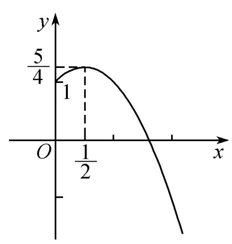


3. C　由 $\begin{cases}-x^2+2x=0,\\ x\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $x=0$ 或 $x=2$，构造函数 $g(x)=\ln(-x)+\frac{2}{x}(x<0)$，则 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，$g(-3)=\ln 3-\frac{2}{3}>1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}>0$，$g(-2)=\ln 2-1<0$，所以 $g(x)$ 存在唯一零点 $x_0\in(-3,-2)$，所以 $\begin{cases}\ln(-x)+\frac{2}{x}=0,\\ x<0,\end{cases}$ 有唯一解 $x_0\in(-3,-2)$. 令 $y=f[f(x)-1]=0$，得 $f(x)-1=0$ 或 $f(x)-1=2$ 或 $f(x)-1=x_0$，得 $f(x)=1$ 或 $f(x)=3$ 或 $f(x)=x_0+1\in(-2,-1)$，$x\geqslant 0$ 时，$f(x)=-x^2+2x=-(x-1)^2+1\leqslant 1$，作出 $f(x)$ 的大致图象如图所示，由图可知，函数 $y=f[f(x)-1]$ 的零点个数是 5.



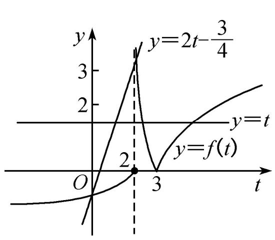
4. BCD　由 $f(x)=|x^2-1|-x^4+2x^2-k=0$，得 $k=|x^2-1|-x^4+2x^2$，设 $|x^2-1|=t$，$t\in[0,+\infty)$，则 $t^2=x^4-2x^2+1$，$k=t-t^2+1$，设 $g(t)=-t^2+t+1=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$，图象如图所示. 当 $k>\frac{5}{4}$ 时，$k=t-t^2$

$+1$ 无解，此时函数没有零点；当 $k=\frac{5}{4}$ 时，$t=\frac{1}{2}$，即 $|x^2-1|=\frac{1}{2}$，方程有 4 个解，即函数有 4 个零点；当 $1<k<\frac{5}{4}$ 时，方程有两解，设为 t_1,t_2 且 $0<t_1<\frac{1}{2}<t_2<1$，$|x^2-1|=t_1$ 有 4 个解，$|x^2-1|=t_2$ 有 4 个解，故函数共有 8 个零点；当 $k=1$ 时，$t=0$ 或 $t=1$，当 $t=0$ 时，$|x^2-1|=0$ 有 2 个解；当 $t=1$ 时，$|x^2-1|=1$ 有 3 个解，故函数有 5 个零点；当 $k<1$ 时，方程有 1 个解 $t>1$，此时 $|x^2-1|=t$ 有 2 个解，函数有 2 个零点. 综上所述，函数可能有 0,2,4,5,8 个零点.

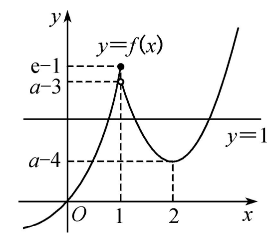


5. BCD　由题意知 $f(x)=\log_2 x+2x-11$，$g(x)=2^{2x}+2x-12$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 对于 C，$f(4)=2+8-11<0$，$f(5)=\log_2 5+10-11=\log_2 5-1>0$，$g(1)=4+2-12=-6<0$，$g(2)=16+4-12=8>0$，由零点存在定理知 $\alpha\in(4,5)$，$\beta\in(1,2)$，故 C 正确；对于 A,B，因为 $\alpha\in(4,5)$，$\beta\in(1,2)$，$f(x)$，$g(x)$ 均在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $f(\beta)<f(2)=-6<0$，$g(\alpha)>g(4)=252>0$，故 A 错误，B 正确；对于 D，由 $f(\alpha)=\log_2\alpha+2\alpha-11=0$，$g(\beta)=2^{2\beta}+2\beta-12=0$，则 $\log_2\alpha=11-2\alpha$，$2^{2\beta}=12-2\beta$，由 $\log_2 2^{2\beta}=\log_2(12-2\beta)$，得 $2\beta=\log_2(12-2\beta)$，令 $2t=12-2\beta$，则 $12-2t=\log_2(2t)$，即 $\log_2(2t)+2t-12=0$，因为 $f(x)=\log_2 x+2x-11$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $2\alpha=2t=12-2\beta$，因此 $\alpha+\beta=6$，故 D 正确.

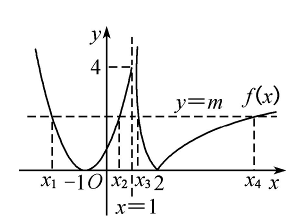
6. 4　令 $t=f(x)$，由 $F(x)=0$，可得 $f(t)-2t+\frac{3}{4}=0$，作 $y=f(t)$ 与 $y=2t-\frac{3}{4}$ 的图象，如图，由图象知有两个交点，分别设其横坐标为 t_1,t_2，则 $t_1=0$，$t_2\in(2,3)$，由 $f(x)=t_1=0$ 可知 $x=2$ 或 $x=3$，有两个根，显然，$f(x)=t_2\in(2,3)$ 有两个根. 综上，$F(x)=f[f(x)]-2f(x)+\frac{3}{4}=0$ 有 4 个根，即 $F(x)$ 有 4 个零点.



7. $(4,5)$　若函数 $g(x)=f(x)-1$ 有三个不同的零点，则方程 $f(x)-1=0$ 有 3 个不同的根，即 $y=f(x)$ 与 $y=1$ 的图象有 3 个不同的交点，作出 $y=f(x)$ 的图象，如图所示，则 $\begin{cases}1-4+a>1,\\2^2-8+a<1,\end{cases}$ 解得 $4<a<5$，所以实数 a 的取值范围为 $(4,5)$.



8. $\left(2,\frac{257}{16}\right]$　由 $f(x)$ 的解析式作出 $f(x)$ 的大致图象如图所示，方程 $f(x)=m$ 有 4 个不等实数根等价于 $f(x)$ 的图象与直线 $y=m$ 有 4 个不同的公共点，则 $0<m\leqslant 4$，不妨令 $x_1<x_2<x_3<x_4$，则由图可知，$x_1+x_2=-2$，$\frac{17}{16}\leqslant x_3<2<x_4\leqslant 17$，所以 $f(x_3)=-\log_2(x_3-1)$，$f(x_4)=\log_2(x_4-1)$，由 $-\log_2(x_3-1)=\log_2(x_4-1)$，得 $\frac{1}{x_3-1}=x_4-1$，所以 $x_1+x_2+x_3+x_4=-2+x_3+x_4=(x_3-1)+(x_4-1)=\frac{1}{x_4-1}+x_4-1$，设 $t=x_4-1(1<t\leqslant 16)$，则 $g(t)=t+\frac{1}{t}(1<t\leqslant 16)$，根据对勾函数单调性知 $g(t)=t+\frac{1}{t}$ 在区间 $(1,16]$ 上单调递增，所以 $g(t)\in\left(2,\frac{257}{16}\right]$，即 $x_1+x_2+x_3+x_4$ 的取值范围是 $\left(2,\frac{257}{16}\right]$.

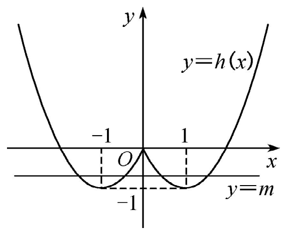


9. **解**：(1) 由题意 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，令 $x=y=0$，可得 $f(0)=f(0)+f(0)$，解得 $f(0)=0$，令 $x=y=1$，可得 $f(2)=2f(1)=-1$，令 $x=2$，$y=1$，可得 $f(3)=f(2)+f(1)=-\frac{3}{2}$.

(2) 任取 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，即 $x_2-x_1>0$，因为 $f(x+y)-f(x)=f(y)$，所以 $f(x+y)-f(x)=f[(x+y)-x]=f(y)$，令 $x_2=x+y$，$x_1=x$，则 $y=x_2-x_1$，可得 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1)$，又因为当 $x>0$ 时，$f(x)<0$，且 $x_2-x_1>0$，所以 $f(x_2-x_1)<0$，所

以 $f(x_2)-f(x_1)<0$，即 $f(x_2)<f(x_1)$，所以函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，所以 $f(x)$ 在 $[-8,10]$ 上单调递减，所以 $f(x)_{\max}=f(-8)$，$f(x)_{\min}=f(10)$，又因为 $f(10)=2f(5)=2[f(2)+f(3)]=2\times\left(-1-\frac{3}{2}\right)=-5$，由 $f(0)=f(1-1)=f(1)+f(-1)=0$，可得 $f(-1)=\frac{1}{2}$，所以 $f(-8)=2f(-4)=4f(-2)=8f(-1)=8\times\frac{1}{2}=4$，所以当 $-8\leqslant x\leqslant 10$ 时，$f(x)$ 的最大值为 4，最小值为 -5.

(3) 令 $y=-x$，代入 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，可得 $f(x)+f(-x)=f(0)=0$，所以 $f(-x)=-f(x)$，可得函数 $f(x)$ 为奇函数，则 $-f(|x|)=f(-|x|)$，则 $-2f(|x|)=2f(-|x|)$，所以 $g(x)=f(x^2-m)-2f(|x|)=f(x^2-m)+2f(-|x|)=f(x^2-m)+f(-|x|)+f(-|x|)=f(x^2-2|x|-m)$. 令 $g(x)=0$，则 $f(x^2-2|x|-m)=0=f(0)$，因为函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，所以 $x^2-2|x|-m=0$，即 $m=x^2-2|x|$. 令 $h(x)=x^2-2|x|=\begin{cases}x^2-2x, x\geqslant 0,\\ x^2+2x, x<0,\end{cases}$ 则函数 $h(x)$ 的图象如图所示，结合图象，可得当 $m\in(-1,0)$ 时，函数 $g(x)$ 有 4 个零点，即实数 m 的取值范围为 $(-1,0)$.



题组 26　指、对数函数模型的应用

【核心笔记】

1. 指数函数模型应用题的求解方法(练习运用：第 3，7 题)

可根据图象利用待定系数法确定函数解析式，然后把实际问题转化为解不等式问题进行求解.

2. 对数函数应用题的基本类型和求解策略(练习运用：第 1，2，5 题)

(1) 基本类型：已知对数函数解析式求解实际问题.

(2) 求解策略：首先根据实际情况求出函数解析式中的参数或给出具体情境，从中提炼出数据，代入解析式求值，然后根据数值回答其实际意义.

3. 求解函数模型不确定的实际问题的一般步骤(练习运用：第 3 题)

对于所研究的实际应用题，当函数模型不确定时，我们要去探索尝试，找到最适合的模型，一般步骤如下：

(1) 作图：根据已知数据画出散点图.

(2) 选择函数模型：一般是根据散点图的特征，联想哪些函数具有类似图象特征，找几个比较接近的函数模型尝试.

(3) 求出函数模型：求出(2)中找到的几个函数模型的解析式.

(4) 检验：将(3)中求出的几个函数模型进行比较、验证，得出最合适的函数模型.

(5) 利用所求出的函数模型解决问题.

【答案详析】

1. A　由条件可得 $\begin{cases}\ln p_0-\ln p_1=5\ 951.3k,\\ \ln p_0-\ln p_2=4\ 981.3k,\end{cases}$ 两式相减可得 $\ln\frac{p_2}{p_1}=970k$，即 $\frac{p_2}{p_1}=\mathrm{e}^{970k}=\mathrm{e}^{970\times 10^{-4}}=\mathrm{e}^{0.097}$.

2. B　设要经过 n 天，“进步“的值是“退步”的值的 10 倍，则 $\frac{(1+3\%)^n}{(1-3\%)^n}=10$，即 $\left(\frac{103}{97}\right)^n=10$，则 $n=\log_{\frac{103}{97}}10=\frac{\lg 10}{\lg 103-\lg 97}\approx\frac{1}{2.013-1.987}=\frac{1}{0.026}\approx 38$.

3. D　由该公司的年利润列表可知，年利润 y 随年份 x 增加而递增，并且随着 x 增大，递增速度越来越快，故选择指数型模型②. 由第二年和第三年的数据知，$\begin{cases}\frac{3}{2}=m\cdot n^2,\\ \frac{9}{4}=m\cdot n^3,\end{cases}$ 故 $\begin{cases}m=\frac{2}{3},\\ n=\frac{3}{2},\end{cases}$ 即 $y=\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}$，当 $y=\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}\geqslant 100$ 时，$\lg\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}\geqslant 2$，$x\geqslant\frac{2}{\lg 3-\lg 2}+1\approx 12.357$，故预计该公司的年利润首次超过 10 亿元的年份为 13.

4. B　由题意可知 $\theta_1=85$，$\theta_0=25$，当 $t=1$ 时，$\theta=75$，于是 $75=25+(85-25)\mathrm{e}^{-k}$，整理得 $\mathrm{e}^{-k}=\frac{5}{6}$；当 $\theta=45$，有 $45=25+(85-25)\mathrm{e}^{-kt}$，所以 $60\mathrm{e}^{-kt}=20$，故 $(\mathrm{e}^{-k})^t=\frac{1}{3}$，将 $\mathrm{e}^{-k}=\frac{5}{6}$ 代入可得 $\left(\frac{5}{6}\right)^t=\frac{1}{3}$，故 $t\ln\frac{5}{6}=\ln\frac{1}{3}$，故 $t=\frac{-\ln 3}{\ln 5-\ln 6}=\frac{\ln 3}{\ln 2+\ln 3-\ln 5}\approx\frac{1.099}{0.693+1.099-1.609}\approx 6.005$，即需要冷却的时间为 6.0 min.

5. CD　对于 A，由 $N=N_0\cdot 2^{-\frac{t}{12.43}}$，可得 $2^{-\frac{t}{12.43}}=\frac{N}{N_0}$，所以 $-\frac{t}{12.43}=\log_2\frac{N}{N_0}$，$t=-12.43\log_2\frac{N}{N_0}$，故 A

错误;对于B,将 $t=24.86$ 代入 $N=N_0\cdot 2^{-\frac{t}{12.43}}$,得 $N=N_0\cdot 2^{-2}=\frac{1}{4}N_0$,所以经过24.86年后,样本中的氚元素是原来的$\frac{1}{4}$,故B错误;对于C,将 $t=62.15$ 代入 $N=N_0\cdot 2^{-\frac{t}{12.43}}$,得 $N=N_0\cdot 2^{-5}=\frac{1}{32}N_0$,所以经过62.15年后,样本中的氚元素变为原来的$\frac{1}{32}$,故C正确;对于D,因为 x 年后,样本中氚元素的含量为 $0.4N_0$,所以 $N_0\cdot 2^{-\frac{x}{12.43}}=0.4N_0$,即 $2^{-\frac{x}{12.43}}=0.4$,$-\frac{x}{12.43}=\log_2 0.4=\log_2\frac{2}{5}=1-\log_2 5=1-\frac{\lg 5}{\lg 2}=1-\frac{1-\lg 2}{\lg 2}=2-\frac{1}{\lg 2}\approx-1.322$,所以 $x\approx-12.43\times(-1.322)\approx 16.432>16$,故D正确.

6. 9 由题意可得,经过 n 次过滤后该溶液的杂质含量为 $\left(1-\frac{1}{3}\right)^n\times 3\%=0.03\left(\frac{2}{3}\right)^n$,$n\in\mathbf{N}^*$,则 $0.03\left(\frac{2}{3}\right)^n\leqslant 0.1\%=0.001$,解得 $n\geqslant\log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{30}=-\log_{\frac{2}{3}}30=-\frac{\lg 30}{\lg\frac{2}{3}}=-\frac{\lg 3+\lg 10}{\lg 2-\lg 3}=\frac{\lg 3+1}{\lg 3-\lg 2}\approx 8.392$,因为 $n\in\mathbf{N}^*$,则 n 的最小值为9,故至少经过9次过滤才能达到市场要求.

7. 解:(1) 因为 $\theta(t)=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}$,且当茶水开始的温度是 $\theta_1=85$ ℃,室温是 $\theta_0=25$ ℃,$t=5$ min 时,$\theta=65$ ℃,所以 $65=25+(85-25)e^{-5k}$,所以 $e^{-5k}=\frac{2}{3}$,所以 $k=-\frac{1}{5}\ln\frac{2}{3}=-\frac{1}{5}(\ln 2-\ln 3)\approx 0.08$,所以 $\theta(t)=25+60e^{-0.08t}$.

(2) 由(1)可知 $\theta(t)=25+60e^{-0.08t}$,代入 $\theta=55$,得 $55=25+60e^{-0.08t}$,即 $e^{-0.08t}=\frac{1}{2}$,两边取以e为底的对数可得 $-0.08t=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$,则 $t=\frac{-\ln 2}{-0.08}=\frac{0.693}{0.08}\approx 9$,王大爷要等待约9 min.

8. 解:(1) 由题意得,当 $x\in[0,3)$ 时,设 $f(x)=m(x-2)^2+1$,因为曲线过点 $M(3,2)$,所以 $m+1=2$,则 $m=1$,所以 $f(x)=(x-2)^2+1=x^2-4x+5$. 当 $x\in[3,9]$ 时,把点 $M(3,2)$,$N(9,0)$ 分别代入 $y=\log_a(x-1)+b$,即 $\begin{cases}\log_a 2+b=2,\\ \log_a 8+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\ b=3,\end{cases}$ 所以

$$f(x)=\begin{cases}x^2-4x+5, & 0\leqslant x<3,\\ \log_{\frac{1}{2}}(x-1)+3, & 3\leqslant x\leqslant 9.\end{cases}$$

(2) 由条件得 $h(x)=2^{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+3-3}=2^{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}=\frac{1}{x-1}(3\leqslant x\leqslant 9)$,设 $Q\left(x,\frac{1}{x-1}\right)(3\leqslant x\leqslant 9)$,则 $|PQ|^2=(x-1-4)^2+\left(\frac{1}{x-1}-4\right)^2=(x-1)^2-8(x-1)+\left(\frac{1}{x-1}\right)^2-\frac{8}{x-1}+32$,设 $x-1=t(2\leqslant t\leqslant 8)$,则 $|PQ|^2=t^2-8t+\left(\frac{1}{t}\right)^2-\frac{8}{t}+32=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-8\left(t+\frac{1}{t}\right)+30$,函数 $u=t+\frac{1}{t}$ 在 $[2,8]$ 上单调递增,所以 $u\in\left[\frac{5}{2},\frac{65}{8}\right]$,$|PQ|^2=u^2-8u+30$,当 $u=4$,即 $x=3+\sqrt{3}$ 时,$|PQ|_{\min}=\sqrt{14}$.

题组27 函数思想与方程思想的应用

【核心笔记】

1. 函数的思想,是用运动和变化的观点,分析和研究数学中的数量关系,建立函数关系或构造函数,运用函数的图象和性质去分析、转化问题,从而使问题获得解决.(练习运用:第4,6,7题)

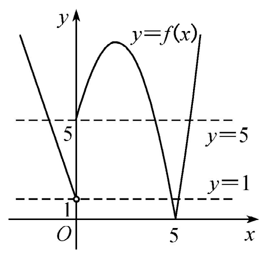
2. 方程的思想,就是分析数学问题中变量间的等量关系,建立方程或方程组,或者构造方程,通过解方程或方程组,或者运用方程的性质去分析、转化问题,使问题获得解决. 方程思想是动中求静,研究运动中的等量关系.(练习运用:第1,2题)

3. 函数和方程是密切相关的,对于函数 $y=f(x)$,当 $y=0$ 时,就转化为方程 $f(x)=0$,也可以把函数式 $y=f(x)$ 看做二元方程 $y-f(x)=0$.(练习运用:第4,5,8题)

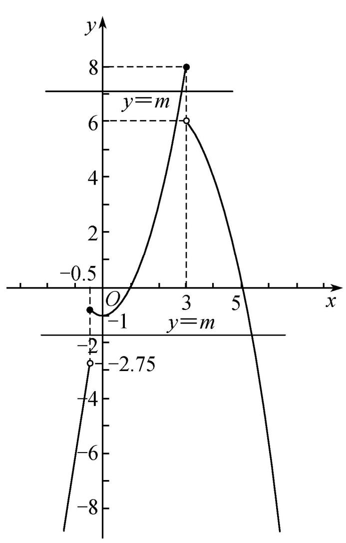
【答案详析】

1. D 对于A,若 $f(x)=x$,则 $2^x+x=x$,即 $2^x=0$,方程无解,故函数 $f(x)$ 不存在不动点;对于B,若 $f(x)=x$,则 $x^2-x+3=x$,即 $x^2-2x+3=0$,方程无解,故函数 $f(x)$ 不存在不动点;对于C,若 $f(x)=x$,则 $-|x-2|=x$,即 $\begin{cases}x\geqslant 2,\\ 2-x=x\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<2,\\ x-2=x,\end{cases}$ 两种情况均无解,故函数 $f(x)$ 不存在不动点;对于D,若 $f(x)=x$,则 $\lg x+3x-6=x$,即 $\lg x+2x-6=0$,设 $g(x)=\lg x+2x-6$,则 $g(1)=\lg 1+2-6=-4<0$,$g(3)=\lg 3+2\times 3-6=\lg 3>0$,则函数 $g(x)$ 在 $(1,3)$ 上存在零点,即方程 $f(x)=x$ 有解,故函数 $f(x)$ 存在不动点.

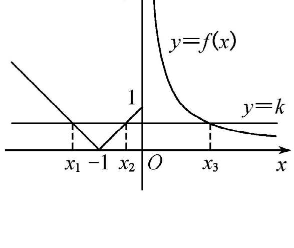
2. B 由方程 $[f(x)]^2-6f(x)+5=0$,解得 $f(x)=5$ 或 $f(x)=1$,结合 $f(x)$ 的图象,易知方程 $[f(x)]^2-6f(x)+5=0$ 的解有6个.



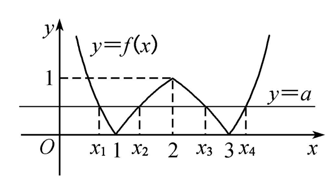
3. D 当 $x^2-1-(5x-x^2)\leqslant 2$,即 $-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 3$ 时,$f(x)=x^2-1$;当 $x^2-1-(5x-x^2)>2$,即 $x<-\dfrac{1}{2}$ 或 $x>3$ 时,$f(x)=5x-x^2$,作出 $f(x)$ 的图象如图所示.函数 $y=f(x)-m$ 的图象与 x 轴恰有 1 个公共点,转化为函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=m$ 恰有 1 个交点,由图象并结合各分段区间上的 $f(x)$ 的值,可得 $6\leqslant m\leqslant 8$ 或 $-\dfrac{11}{4}\leqslant m<-1$.



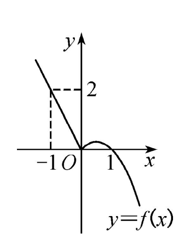
4. ACD 方程 $f(x)-k=0$ 的根即为 $y=k$ 与 $y=f(x)$ 的图象交点的横坐标,又 $f(x)=\begin{cases}|x+1|, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{x}, & x>0,\end{cases}$ 作出 $f(x)$ 的图象如图所示.对于 A,由数形结合可得,当 $k=1$ 时,方程 $f(x)-k=0$ 有 3 个不同的实数根,故 A 正确;对于 B,当 $k<0$ 时,由数形结合可得方程无解,故 B 错误;对于 C,由数形结合可知直线 $y=k$ 和 $y=f(x)$ 的图象有 3 个交点时,$k\in(0,1]$,故 C 正确;对于 D,假设 $x_1<x_2<x_3$,由数形结合可知 $x_1+x_2=-2$,$x_3\geqslant 1$,所以 $x_1+x_2+x_3\geqslant -1$,故 D 正确.



5. ABD 当 $2\leqslant x<4$ 时,$f(x)=|\log_2(4-x)|=\begin{cases}\log_2(4-x), & 2\leqslant x\leqslant 3,\\ -\log_2(4-x), & 3<x<4,\end{cases}$ 当 $0<x<2$ 时,$2<4-x<4$,$f(x)=f(4-x)=|\log_2 x|=\begin{cases}-\log_2 x, & 0<x\leqslant 1,\\ \log_2 x, & 1<x<2,\end{cases}$ 作出函数图象如图所示.对于 A,根据对称性知 $x_1+x_4=4$,$x_2+x_3=4$,故 $\sum\limits_{i=1}^{4}x_i=8$,故 A 正确;对于 B,$f(x)$ 的单调减区间为 $(0,1]$ 和 $[2,3]$,B 正确;对于 C,$[f(x)]^2-(b+1)f(x)+b=0$,即 $[f(x)-1][f(x)-b]=0$,解得 $f(x)=1$ 或 $f(x)=b$,当 $b=0$ 或 $b>1$ 时,$f(x)=b$ 有两个解,$f(x)=1$ 有 3 个解,共有 5 个解,C 错误;对于 D,$\left|\log_2\dfrac{1}{2}\right|=1$,根据图象知 $\dfrac{1}{2}<x_1<1<x_2<2<x_3<3<x_4<\dfrac{7}{2}$,且 $-\log_2 x_1=\log_2 x_2$,即 $\log_2 x_1+\log_2 x_2=\log_2(x_1x_2)=0$,$x_1x_2=1$,$x_3x_4+x_1^2+x_2^2=(4-x_2)(4-x_1)+x_1^2+x_2^2=x_1^2+\dfrac{1}{x_1^2}-4\left(x_1+\dfrac{1}{x_1}\right)+16+x_1x_2$,设 $t=x_1+\dfrac{1}{x_1}$,$x_1\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$,故 $2<t<\dfrac{5}{2}$,原式 $=t^2-2-4t+16+1=(t-2)^2+11\in\left(11,\dfrac{45}{4}\right)$,D 正确.



6. $[-2,0)\cup(4,6]$ 作出 $f(x)$ 的图象,如图所示.由 $[f(x)]^2-(m+1)f(x)+m<0$,得 $[f(x)-m][f(x)-1]<0$.当 $m=1$ 时,$[f(x)-1]^2<0$,此时不等式无解;当 $m<1$ 时,由 $[f(x)-m][f(x)-1]<0$,得 $m<f(x)<1$,要使不等式恰有两个整数解,因为 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1$,$f(0)=0$,$f(-1)=2>1$,所以整数解为 0 和 1,又 $f(1)=0$,$f(2)=-2$,所以 $-2\leqslant m<0$;当 $m>1$ 时,由 $[f(x)-m][f(x)-1]<0$,得 $1<f(x)<m$,若不等式恰有两个整数解,因为 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1$,所以整数解为 -1 和 -2,又 $f(-2)=4$,$f(-3)=6$,所以 $4<m\leqslant 6$.综上所述,实数 m 的取值范围为 $[-2,0)\cup(4,6]$.



7. 0　函数 $f(x)=e^x-\frac{1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，当 $x<0$ 时，$f(x)>0$ 恒成立，不存在零点；当 $x>0$ 时，$f(x)$ 单调递增，且 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$，$f(1)=e-1>0$，所以 $f(x)=e^x-\frac{1}{x}$ 的零点 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，$f(x_0)=e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0$，即 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，两边同时取自然对数，即 $x_0=-\ln x_0$，即 $\ln x_0=-x_0$，所以 $e^{x_0}+x_0\ln x_0=\frac{1}{x_0}+x_0\cdot(-x_0)=\frac{1}{x_0}-x_0^2$，所以 $m<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_0}-x_0^2\right)$，记 $h(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-x^2\right)$，$\frac{1}{2}<x<1$，显然，$h(x)$ 单调递减，所以 $h(1)<h(x)<h\left(\frac{1}{2}\right)$，所以 $0<h(x)<\frac{7}{8}$，所以整数 m 的最大值是 0.

8. **解：**$g(x)=\log_2(2x-1)+\log_2\frac{x}{x-m}-1$，所以 $\begin{cases}2x-1>0,\\ \frac{x}{x-m}>0,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}x>\frac{1}{2},\\ x(x-m)>0.\end{cases}$ 因为函数 $g(x)$ 有两个零点，所以 $\frac{(2x-1)x}{x-m}=2$ 在 $g(x)$ 的定义域内有两个解，即 $2x^2-3x+2m=0$ 在 $g(x)$ 的定义域内有两个解，若存在两解 x_1,x_2 满足上述条件，则 $x_1+x_2=\frac{3}{2}$，$x_1x_2=m$. 所以 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{9}{4}-2m=\frac{19}{16}$，解得 $m=\frac{17}{32}$. 对 $m=\frac{17}{32}$ 时，x_1,x_2 是否在函数 $g(x)$ 的定义域内进行检验. 由 $\begin{cases}x>\frac{1}{2},\\ x\left(x-\frac{17}{32}\right)>0,\end{cases}$ 可得 $g(x)$ 的定义域为 $\left(\frac{17}{32},+\infty\right)$. 对于方程 $2x^2-3x+\frac{17}{16}=0$ 的两个解 x_1,x_2，有 $x_1=\frac{6+\sqrt{2}}{8}=\frac{24+4\sqrt{2}}{32}>\frac{17}{32}$，$x_2=\frac{6-\sqrt{2}}{8}=\frac{24-4\sqrt{2}}{32}>\frac{24-4\times1.5}{32}>\frac{17}{32}$，满足题意. 所以 $m=\frac{17}{32}$.

综合提优（4.1～4.5）

1. C　由 $m=a^x$，得 $m^y=(a^x)^y=a^{xy}$. 又因为 $n=a^y$，所以 $n^x=(a^y)^x=a^{xy}$，所以 $m^yn^x=a^{xy}a^{xy}=a^{2xy}$，又 $m^yn^x=a^{\frac{4}{z}}$，则 $a^{2xy}=a^{\frac{4}{z}}$，可得 $2xy=\frac{4}{z}$，解得 $xyz=2$.

2. B　令 $g(x)=f(x)-1\,012=2\,023^{-x}+\log_{2\,023}\frac{1-x}{1+x}-2\,023^x$，定义域为 $(-1,1)$，考察函数 $y=2\,023^{-x}-2\,023^x$ 和函数 $y=\log_{2\,023}\frac{1-x}{1+x}=\log_{2\,023}\left[\frac{-(1+x)+2}{1+x}\right]=\log_{2\,023}\left(-1+\frac{2}{1+x}\right)$，由指数函数与对数函数的性质得 $g(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减，$g(-x)=f(-x)-1\,012=2\,023^x+\log_{2\,023}\frac{1+x}{1-x}-2\,023^{-x}=-\left[2\,023^{-x}+\log_{2\,023}\frac{1-x}{1+x}-2\,023^x\right]=-g(x)$，故 $g(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减，原不等式可化为 $g(4x+1)+g(2x+1)<0$，即 $g(4x+1)<g(-2x-1)$，得 $\begin{cases}4x+1>-2x-1,\\ -1<4x+1<1,\\ -1<2x+1<1,\end{cases}$ 解得 $-\frac{1}{3}<x<0$.

3. D　若 $1<a<2$，当 $x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=(a-1)^x$ 在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ 上单调递减，此时 $f(x)\in[\sqrt{a-1},+\infty)$；当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=x+\frac{a}{x}-2\geqslant2\sqrt{a}-2$，当且仅当 $x=\sqrt{a}>\frac{1}{2}$ 时，等号成立，又函数 $f(x)$ 的值域 D 满足 $D\subseteq\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$，则 $\begin{cases}\sqrt{a-1}\geqslant\frac{2}{3},\\ 2\sqrt{a}-2\geqslant\frac{2}{3},\\ 1<a<2,\end{cases}$ 解得 $\frac{16}{9}\leqslant a<2$. 若 $a=2$，则 $f(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant\frac{1}{2},\\ x+\frac{2}{x}-2, & x>\frac{1}{2},\end{cases}$ 当 $x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=1$；当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=x+\frac{2}{x}-2\geqslant2\sqrt{2}-2$，当且仅当 $x=\sqrt{2}$ 时，等号成立，又函数 $f(x)$ 的值域 $D=[2\sqrt{2}-2,+\infty)$，满足 $D\subseteq\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$，成立. 若 $a>2$，当 $x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=(a-1)^x$ 在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ 上单调递增，此时 $f(x)\in(0,\sqrt{a-1}]$，则 $(0,\sqrt{a-1}]\subseteq D$，而 $(0,\sqrt{a-1}]\subseteq\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$ 不成立，所以此时 $D\subseteq\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$ 不成立. 综上所述，$\frac{16}{9}\leqslant a\leqslant2$.

4. B　由 $\log_2a+\log_b3=\log_2b+\log_a2$，$\log_b3>\log_b2$ 变形可知 $\log_2a-\log_a2=\log_2b-\log_b3$，则 $\log_2a-\log_a2<\log_2b-\log_b2$，利用换底公式等价变形，得 $\log_2a-\frac{1}{\log_2a}<\log_2b-\frac{1}{\log_2b}$，令 $f(x)=x-\frac{1}{x}$，因为 y

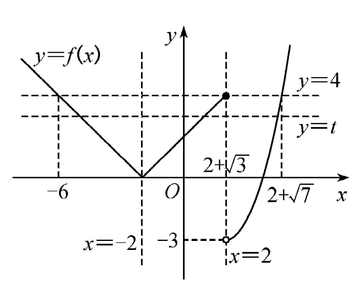
$=x$，$y=-\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以函数 $f(x)=x-\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\log_2 a<\log_2 b$，即 $a<b$，排除 C，D；其次，因为 $\log_2 b>\log_3 b$，得 $\log_2 a+\log_b 3>\log_3 b+\log_a 2$，即 $\log_2 a-\log_a 2>\log_3 b-\log_b 3$，即 $\log_2 a-\frac{1}{\log_2 a}>\log_3 b-\frac{1}{\log_3 b}$，同样利用 $f(x)=x-\frac{1}{x}$ 的单调性知，$\log_2 a>\log_3 b$，又因为 $\log_3 b=\log_{\sqrt{3}}\sqrt{b}>\log_2\sqrt{b}$，得 $\log_2 a>\log_2\sqrt{b}$，即 $a>\sqrt{b}$，所以 $\sqrt{b}<a<b$.

5. B　因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，$f(x)$ 的图象关于点 $(0,0)$ 对称，所以 $f(x)$ 为奇函数，$f(-x)=-f(x)$，又因为 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>-1$，即 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}+1>0$，所以 $\frac{f(x_1)+x_1-[f(x_2)+x_2]}{x_1-x_2}>0$. 令 $g(x)=f(x)+x$，则 $\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}>0$，所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 因为 $g(-x)=f(-x)-x=-f(x)-x=-[f(x)+x]=-g(x)$，所以 $g(x)$ 为奇函数. 由 $f(a^2-1)+f(a-1)+a^2+a>2$，得 $f(a^2-1)+f(a-1)+(a^2-1)+(a-1)>0$，所以 $f(a^2-1)+a^2-1>-[f(a-1)+(a-1)]$，则 $g(a^2-1)>-g(a-1)$，即 $g(a^2-1)>g(1-a)$，所以 $a^2-1>1-a$，解得 $a<-2$ 或 $a>1$.

6. BC　对于 A，不妨取 $x=-0.2$，则 $[|x|]=[0.2]=0$，而 $|[x]|=|-1|=1$，故 A 错误. 对于 B，不妨取 $x=3$，$y=1.2$，则 $[x-y]=[1.8]=1$，而 $[x]-[y]=3-1=2$，满足 $[x-y]<[x]-[y]$，故 B 正确. 对于 C，设 $x=a+b$，$y=c+d$，其中 a，c 和 b，d 分别为 x，y 的整数部分和小数部分，因为 $[x]=[y]$，则 $a=c$，故 $x-y=b-d$，又 b，d 同为小数，且符号相同，故 $b-d<1$，即 $x-y<1$，故 $\forall x,y\in\mathbf{R}$，若 $[x]=[y]$，则 $x-y<1$，即 C 正确. 对于 D，令 $y=[\lg x]$，$x\geqslant 2$，$x\in\mathbf{N}_+$，当 $2\leqslant x<10$，$x\in\mathbf{N}_+$ 时，$[\lg x]=0$；当 $10\leqslant x<100$，$x\in\mathbf{N}_+$ 时，$[\lg x]=1$；当 $100\leqslant x<1\,000$，$x\in\mathbf{N}_+$ 时，$[\lg x]=2$；…；当 $10^{n-1}\leqslant x<10^n$，$x\in\mathbf{N}_+$ 时，$[\lg x]=n-1$. 则当 $10\leqslant n<100$ 时，$[\lg 2]+[\lg 3]+\cdots+[\lg n]=[\lg 2]+[\lg 3]+\cdots+[\lg 9]+[\lg 10]+[\lg 11]+\cdots+[\lg n]=n-9$，又 $y=n-9$，$10\leqslant n<100$ 为单调递增函数，故 $n=99$ 时，$n-9$ 取得最大值 90；当 $100\leqslant n<1\,000$ 时，$[\lg 2]+[\lg 3]+\cdots+[\lg n]=[\lg 2]+[\lg 3]+\cdots+[\lg 99]+[\lg 100]+[\lg 101]+\cdots+[\lg n]=90+2(n-99)=2n-108$，又 $y=2n-108$，$100\leqslant n<1\,000$ 为单调递增函数，故当 $n=100$ 时，$2n-108$ 取得最小值 92，显然，不存在 $n\in\mathbf{N}_+$，使得 $[\lg 2]+[\lg 3]+\cdots+[\lg n]=91$，故 D 错误.

7. 6.5　根据题意可知，环境温度 $T_a=25$ ℃，初始温度 $T_0=80$ ℃，经过一定时间 t（单位：分钟）后的温度 T 满足 $T-T_a=\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{t}{h}}(T_0-T_a)$，因为茶水降至 75 ℃大约用时一分钟，即 $t=1$，$T=75$ ℃，所以 $75-25=\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{h}}(80-25)$，解得 $\frac{1}{h}=\log_{\frac{1}{\mathrm{e}}}\frac{50}{55}=\log_{\frac{1}{\mathrm{e}}}\frac{10}{11}$，则 $h=\frac{1}{\log_{\frac{1}{\mathrm{e}}}\frac{10}{11}}$，所以要使得该茶降至 55 ℃，即 $T=55$ ℃，则有 $55-25=\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{t}{h}}(80-25)$，得 $\frac{t}{h}=\log_{\frac{1}{\mathrm{e}}}\frac{30}{55}=\log_{\frac{1}{\mathrm{e}}}\frac{6}{11}$，故 $t=\left(\log_{\frac{1}{\mathrm{e}}}\frac{6}{11}\right)h=\frac{\log_{\frac{1}{\mathrm{e}}}\frac{6}{11}}{\log_{\frac{1}{\mathrm{e}}}\frac{10}{11}}=\frac{\lg\frac{6}{11}}{\lg\frac{10}{11}}=\frac{\lg 6-\lg 11}{\lg 10-\lg 11}=\frac{\lg 2+\lg 3-\lg 11}{1-\lg 11}\approx\frac{0.3+0.48-1.04}{1-1.04}=6.5$，所以大约需要等待 6.5 分钟.

8. $(0,4]$　$(-2+\sqrt{3},-2+\sqrt{7}]$　由题意得 $f(2)=4$. 设 $|x+2|=4(x<2)$，解得 $x=-6$. 设 $x^2-4x+1=0(x>2)$，解得 $x=2+\sqrt{3}$. 设 $x^2-4x+1=4(x>2)$，解得 $x=2+\sqrt{7}$. 作出 $y=f(x)$ 的图象，如图所示. 函数 $f(x)=t$ 有三个不同的解 x_1，x_2，x_3，不妨令 $x_1<x_2<x_3$，等价于函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=t$ 有 3 个交点，根据图象可得 $0<t\leqslant 4$，且 $x_1+x_2=-4$，$x_3\in(2+\sqrt{3},2+\sqrt{7}]$，所以 $x_1+x_2+x_3\in(-2+\sqrt{3},-2+\sqrt{7}]$.



9. 2^x-1（答案不唯一，$f(x)=a^x-1(a>1)$ 均满足）由②令 $x=y=0$，则 $f(0)=f^2(0)+2f(0)$，则 $f(0)=0$ 或 $f(0)=-1$. 令 $x=1$，$y=0$，则 $f(1)=f(1)f(0)+f(1)+f(0)$，故 $f(0)=0$ 或 $f(1)=-1$. 若 $f(0)=-1$，则由①知 $f(1)>f(0)=-1$，不符合条件，故 $f(0)=0$. 令 $y=-x$，则 $f(0)=f(x)f(-x)+f(x)+f(-x)$. 即 $[f(x)+1][f(-x)+1]=1$. 不妨设 $x>0$，则 $f(x)>0$，$f(x)+1>1$，故 $0<f(-x)+1<1$，

$-1<f(-x)<0$. 令 $g(x)=f(x)+1$,则$g(x)g(-x)=1$. 由此联想到指数函数,不妨设 $g(x)=2^x$,则 $f(x)=2^x-1$,满足条件①. $f(x+y)=2^{x+y}-1$,$f(x)f(y)+f(x)+f(y)=(2^x-1)(2^y-1)+2^x-1+2^y-1=2^{x+y}-2^x-2^y+1+2^x-1+2^y-1=2^{x+y}-1=f(x+y)$,满足条件②.

10. 解:(1) 当 $f(1)=1$ 时,$a=\frac{1}{2}$,因为 $f(x)\leqslant 2$,所以 $\log_2\left(1+\frac{1}{2}\times 2^x\right)\leqslant\log_2 4$,所以 $1+\frac{1}{2}\times 2^x\leqslant 4$,即 $2^x\leqslant 6$,所以 $x\leqslant\log_2 6$. 故不等式 $f(x)\leqslant 2$ 的解集为 $(-\infty,\log_2 6]$.

(2) 函数 $y=f(x)+x$ 有两个零点,即方程 $\log_2(1+a\cdot 2^x)+\log_2 2^x=0$ 有两个不相等的实根,所以 $\log_2(1+a\cdot 2^x)=-\log_2 2^x$,所以 $1+a\cdot 2^x=2^{-x}$,所以 $a=\frac{1}{2^{2x}}-\frac{1}{2^x}$. 令 $u=\frac{1}{2^x}(u>0)$,则 $a=u^2-u$,即方程 $a=u^2-u$ 在$(0,+\infty)$上只有两解. 令 $g(u)=u^2-u$,$u\in(0,+\infty)$,则 $g(u)_{\min}=g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$. 当$-\frac{1}{4}<a<0$ 时,直线 $y=a$ 和函数$g(u)=u^2-u(u>0)$的图象只有两个公共点,即函数 $y=f(x)+x$ 只有两个零点,所以实数 a 的取值范围是$\left(-\frac{1}{4},0\right)$.

(3) 因为 $a>0$,所以函数 $y=1+a\cdot 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,即函数 $f(x)=\log_2(1+a\cdot 2^x)$在定义域内单调递增,所以函数 $f(x)$在区间$[t,t+1]$上的最小值为 $f(t)=\log_2(1+a\cdot 2^t)$,最大值为 $f(t+1)=\log_2(1+a\cdot 2^{t+1})$,所以 $f(t)+f(t+1)=\log_2(1+a\cdot 2^t)+\log_2(1+a\cdot 2^{t+1})=\log_2[(1+a\cdot 2^t)(1+a\cdot 2^{t+1})]\leqslant\log_2 3$,所以$(1+a\cdot 2^t)(1+a\cdot 2^{t+1})\leqslant 3$ 对 $t\in[-1,0]$恒成立.
令 $h=2^t\left(\frac{1}{2}\leqslant h\leqslant 1\right)$,则 $2a^2h^2+3ah-2\leqslant 0$ 对 $h\in\left[\frac{1}{2},1\right]$,$a>0$ 恒成立. 因为 $y=2a^2h^2+3ah-2$ 在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上单调递增,所以$y_{\max}=2a^2+3a-2$,所以 $2a^2+3a-2\leqslant 0$,解得$-2\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$,又 $a>0$,所以 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$. 所以实数 a 的取值范围是$\left(0,\frac{1}{2}\right]$.

章末提优 · 真题精选

1. B　$y=4.2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,且$-0.3<0<0.3$,所以 $0<4.2^{-0.3}<4.2^0<4.2^{0.3}$,所以 $0<4.2^{-0.3}<1<4.2^{0.3}$,即 $0<a<1<b$. 因为 $y=\log_{4.2}x$ 在$(0,+\infty)$上单调递增,且 $0<0.3<1$,所以 $\log_{4.2}0.3<\log_{4.2}1=0$,即 $c<0$. 所以 $b>a>c$.

2. C　因为 $2^a=5$,$b=\log_8 3=\frac{1}{3}\log_2 3$,即 $2^{3b}=3$,所以 $4^{a-3b}=\frac{4^a}{4^{3b}}=\frac{(2^a)^2}{(2^{3b})^2}=\frac{5^2}{3^2}=\frac{25}{9}$.

3. C　由题意 $4.9=5+\lg V$,所以 $\lg V=-\frac{1}{10}$,则 $V=10^{-\frac{1}{10}}=\frac{1}{\sqrt[10]{10}}\approx\frac{1}{1.259}\approx 0.8$.

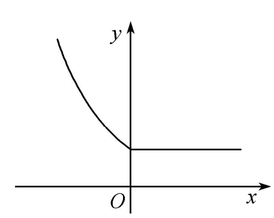
4. B　因为函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-a, & x<0,\\ e^x+\ln(x+1), & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,所以有$\begin{cases}-a\geqslant 0,\\ -a\leqslant e^0+\ln(0+1),\end{cases}$解得 $a\in[-1,0]$.

5. A　由(x_1,y_1),(x_2,y_2)是 $y=2^x$ 上的点,得$y_1=2^{x_1}$,$y_2=2^{x_2}$,$2^{x_1}+2^{x_2}\geqslant 2\sqrt{2^{x_1}\cdot 2^{x_2}}=2\sqrt{2^{x_1+x_2}}$,当且仅当 $x_1=x_2$ 时等号成立,故$\frac{y_1+y_2}{2}>2^{\frac{x_1+x_2}{2}}$,两边同时取对数可得,$\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>\frac{x_1+x_2}{2}$.

6. D　设 $x<0$,则$-x>0$,所以$f(-x)=e^{-x}-1$. 因为$f(x)$为奇函数,所以$-f(x)=e^{-x}-1$,即$f(x)=-e^{-x}+1$.

7. C　$f(x)$是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数,所以$f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)=f(\log_3 4)$. 因为 $\log_3 4>\log_3 3=1$,$0<2^{-\frac{3}{2}}<2^{-\frac{2}{3}}<2^0=1$,所以 $0<2^{-\frac{3}{2}}<2^{-\frac{2}{3}}<\log_3 4$. 又$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,所以$f(2^{-\frac{3}{2}})>f(2^{-\frac{2}{3}})>f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)$.

8. D　当 $x\leqslant 0$ 时,函数$f(x)=2^{-x}$是减函数,则$f(x)\geqslant f(0)=1$. 作出$f(x)$的大致图象如图所示,结合图象可知,要使 $f(x+1)<f(2x)$,则需$\begin{cases}x+1<0,\\ 2x<0,\\ 2x<x+1\end{cases}$ 或$\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\ 2x<0,\end{cases}$所以 $x<0$.



9. B　当 $x<0$ 时,因为 $e^x-e^{-x}<0$,所以此时$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{x^2}<0$,故排除 A,D;又 $f(1)=e-\frac{1}{e}>2$,故排除 C.

10. C　令$f(x)=0$,则方程 $a(e^{x-1}+e^{-x+1})=-x^2+$

$2x$ 有唯一解. 设 $h(x)=-x^2+2x$, $g(x)=e^{x-1}+e^{-x+1}$,则$h(x)$与 $g(x)$有唯一交点. 又 $g(x)=e^{x-1}+e^{-x+1}=e^{x-1}+\frac{1}{e^{x-1}}\geqslant 2$,当且仅当 $x=1$ 时取得最小值 2. 而 $h(x)=-(x-1)^2+1\leqslant 1$,此时 $x=1$ 时取得最大值 1, $ag(x)=h(x)$有唯一的交点,则 $a=\frac{1}{2}$.

11. D 由散点图可知,在 10 ℃至 40 ℃之间,发芽率 y 和温度 x 所对应的点(x,y)在一段对数函数的曲线附近,结合选项可知,$y=a+b\ln x$可作为发芽率 y 和温度 x 的方程类型.

12. C 由已知可得 $\frac{K}{1+e^{-0.23(t-53)}}=0.95K$,解得 $e^{-0.23(t-53)}=\frac{1}{19}$,两边取对数有 $-0.23(t-53)=-\ln 19$,解得 $t\approx 66$.

13. A 令 $g(x)=-(x-1)^2$,则 $g(x)$的图象开口向下,对称轴为直线 $x=1$. 因为 $\left|\frac{\sqrt{6}}{2}-1\right|-\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right|=\frac{\sqrt{6}}{2}-1-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2}-\frac{4}{2}$,而$(\sqrt{6}+\sqrt{3})^2-4^2=9+6\sqrt{2}-16=6\sqrt{2}-7>0$,所以 $\left|\frac{\sqrt{6}}{2}-1\right|-\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right|=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2}-\frac{4}{2}>0$,由二次函数性质知$g\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)<g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 因为 $\left|\frac{\sqrt{6}}{2}-1\right|-\left|\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right|=\frac{\sqrt{6}}{2}-1-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}-\frac{4}{2}$,而$(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-4^2=8+4\sqrt{3}-16=4\sqrt{3}-8=4(\sqrt{3}-2)<0$,即 $\left|\frac{\sqrt{6}}{2}-1\right|<\left|\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right|$,所以 $g\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)>g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 综上所述, $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<g\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)<g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 又 $y=e^x$为增函数,故 $a<c<b$,即 $b>c>a$.

14. A 由 $9^m=10$ 可得 $m=\log_9 10=\frac{\lg 10}{\lg 9}>1$,而 $\lg 9\lg 11<\left(\frac{\lg 9+\lg 11}{2}\right)^2=\left(\frac{\lg 99}{2}\right)^2<1=(\lg 10)^2$,所以$\frac{\lg 10}{\lg 9}>\frac{\lg 11}{\lg 10}$,即 $m>\lg 11$,所以 $a=10^m-11>10^{\lg 11}-11=0$,又 $\lg 8\lg 10<\left(\frac{\lg 8+\lg 10}{2}\right)^2=\left(\frac{\lg 80}{2}\right)^2<(\lg 9)^2$,所以$\frac{\lg 9}{\lg 8}>\frac{\lg 10}{\lg 9}$,即$\log_8 9>m$,所以 $b=8^m-9<8^{\log_8 9}-9=0$. 综上,$a>0>b$.

15. A 由题意可知 $a,b,c\in(0,1)$,$\frac{a}{b}=\frac{\log_5 3}{\log_8 5}=\frac{\lg 3}{\lg 5}\cdot\frac{\lg 8}{\lg 5}<\frac{1}{(\lg 5)^2}\left(\frac{\lg 3+\lg 8}{2}\right)^2=\left(\frac{\lg 3+\lg 8}{2\lg 5}\right)^2=\left(\frac{\lg 24}{\lg 25}\right)^2<1$,即 $a<b$;由 $b=\log_8 5$,得 $8^b=5$,由 $5^5<8^4$,得 $8^{5b}<8^4$,所以 $5b<4$,可得 $b<\frac{4}{5}$;由 $c=\log_{13}8$,得 $13^c=8$,由 $13^4<8^5$,得 $13^4<13^{5c}$,所以 $5c>4$,可得 $c>\frac{4}{5}$. 综上所述,得 $a<b<c$.

16. BC 因为产品的月利润为 $p(x)=-\frac{1}{5}x^2+6x-20=-\frac{1}{5}(x-15)^2+25(0\leqslant x\leqslant 16)$,所以当 $x=15$ 时,月利润有最大值为 25 万元,即在已经投入 9 万元时需再投入 6 万元,才能使月利润最大,故 B 正确,D 错误. 利润率 $y=\frac{p(x)}{x}\times 100\%=\frac{-\frac{1}{5}x^2+6x-20}{x}=-\left(\frac{1}{5}x+\frac{20}{x}\right)+6$,因为 $0<\frac{1}{5}x\leqslant\frac{16}{5}$,$\frac{20}{x}\geqslant\frac{5}{4}>0$,所以 $\frac{1}{5}x+\frac{20}{x}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{5}x\cdot\frac{20}{x}}=4$,即 $y=-\left(\frac{1}{5}x+\frac{20}{x}\right)+6\leqslant -4+6=2$,当且仅当$\frac{1}{5}x=\frac{20}{x}$,即当 $x=10$ 时,利润率有最大值为 2,即在已经投入 9 万元时再投入 1 万元,才能使利润率最大,故 A 错误,C 正确.

17. 64 因为$\frac{1}{\log_8 a}-\frac{1}{\log_a 4}=\frac{3}{\log_2 a}-\frac{1}{2}\log_2 a=-\frac{5}{2}$,所以$(\log_2 a+1)(\log_2 a-6)=0$,而 $a>1$,故 $\log_2 a=6$,解得 $a=64$.

18. 130 15 ①草莓和西瓜各一盒的价格为 $60+80=140>120$,则需支付 $140-10=130$(元);②设促销前顾客应付 y 元,由题意有$(y-x)80\%\geqslant 70\%y$,解得 $x\leqslant\frac{1}{8}y$,而促销活动条件是 $y\geqslant 120$,所以 $x_{\max}=\left(\frac{1}{8}y\right)_{\min}=\frac{1}{8}\times 120=15$.

阶段温习 3(第一章—第三章)

1. D 由题意可知,$M=\{x|1\leqslant x<5\}$,$N=\{x|-1<x<2\}$,故 $M\cap N=\{x|1\leqslant x<2\}$.

2. B 因为$\exists x\in[1,3]$,$x^2-ax+4<0$,所以当 $x\in[1,3]$时,$a>\left(x+\frac{4}{x}\right)_{\min}$,因为 $x+\frac{4}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$,当且仅当 $x=\frac{4}{x}$,即 $x=2$ 时等号成立,所以 $a>4$ 是 p 的充要条件,因为 $a>4$ 能推出 $a>3$,但 $a>3$ 不能推出 $a>4$,所以 $a>3$ 是 p 的一个必要不充分条件.

3. C 因为 $f(x)=(m^2-m-1)x^m$是幂函数,所以 m^2

$-m-1=1$，解得 $m=2$ 或 $m=-1$，当 $m=-1$ 时，$f(x)=x^{-1}$，此时 $f(x)$ 是奇函数，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，定义域是 $\{x \mid x\neq 0\}$，此时只有甲正确，乙、丙错误，故 $m=-1$ 不符合题意；当 $m=2$ 时，$f(x)=x^2$，此时 $f(x)$ 是偶函数，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，定义域是 $\mathbf{R}$. 此时只有甲错误，乙、丙正确，故 $m=2$ 符合题意.

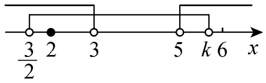
4. D　函数的定义域为 $\{x \mid x\neq -c\}$，由图可知 $-c>0$，则 $c<0$，由图可知 $f(0)=\frac{b}{c^2}<0$，所以 $b<0$，由 $f(x)=0$，得 $ax+b=0$，$x=-\frac{b}{a}$，由图可知 $-\frac{b}{a}>0$，得 $\frac{b}{a}<0$，所以 $a>0$.

5. AC　对于 A，若 $a=1$，$b=-1$，则 $\frac{1}{a}=1>-1=\frac{1}{b}$，所以 A 错误；对于 B，因为 $a>b$，$c>d$，所以由不等式的性质可得 $a+c>b+d$；对于 C，若 $a=-2$，$b=-1$，$c=1$，$d=2$，则 $ac=-2=bd$，所以 C 错误；对于 D，因为 $a<b<c<0$，所以 $c(a-b)>0$，$a(a+c)>0$，所以 $\frac{b+c}{a+c}-\frac{b}{a}=\frac{a(b+c)-b(a+c)}{a(a+c)}=\frac{c(a-b)}{a(a+c)}>0$，所以 $\frac{b}{a}<\frac{b+c}{a+c}$，所以 D 正确.

6. AD　已知 $3a+2b=1$，$a>0$，$b>0$. 对于 A，$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=(3a+2b)\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)=12+\frac{4b}{a}+\frac{9a}{b}\geqslant 12+2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{9a}{b}}=24$，当且仅当 $\frac{4b}{a}=\frac{9a}{b}$，即 $a=\frac{1}{6}$，$b=\frac{1}{4}$ 时，等号成立，则 $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}$ 的最小值为 24，A 正确；对于 B，$3a+2(b+1)=3\geqslant 2\sqrt{3a\cdot 2(b+1)}$，则 $a(b+1)\leqslant\frac{3}{8}$，当且仅当 $3a=2(b+1)$，即 $a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{1}{4}$ 时，等号成立，与 $a>0$，$b>0$ 矛盾，B 错误；对于 C，$\frac{4b^2+8}{a}=\frac{(1-3a)^2+8}{a}=9a+\frac{9}{a}-6\geqslant 2\sqrt{9a\cdot\frac{9}{a}}-6=12$，当且仅当 $9a=\frac{9}{a}$，即 $a=1$，$b=-1$ 时，等号成立，与 $a>0$，$b>0$ 矛盾，C 错误；对于 D，$a^2+b^2=a^2+\left(\frac{1-3a}{2}\right)^2=\frac{13a^2-6a+1}{4}=\frac{13\left(a-\frac{3}{13}\right)^2+\frac{4}{13}}{4}\geqslant\frac{1}{13}$，当且仅当 $a=\frac{3}{13}$，$b=\frac{2}{13}$ 时，等号成立，D 正确.

7. BD　因为 $f(x-1)$ 为偶函数，且函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上为增函数，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称，且 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上为减函数，所以 A 不正确，B 正确；因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上为增函数，在 $(-1,+\infty)$ 上为减函数，但没有明确函数是否连续，不能确定 $f(-1)$ 的值，所以 C 不正确；因为 $f(0)=f(-2)$，$f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{3}{2}\right)$，又 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上为增函数，所以 $f(-3)<f(-2)<f\left(-\frac{3}{2}\right)$，即 $f(-3)<f(0)<f\left(-\frac{1}{2}\right)$，所以 D 正确.

8. $\{k \mid 2<k\leqslant 6\}$　解不等式 $x^2-8x+15>0$，可得 $x<3$ 或 $x>5$，由 $2x^2-(2k+3)x+3k<0$ 得 $(2x-3)(x-k)<0$，因为关于 x 的不等式组 $\begin{cases}x^2-8x+15>0,\\2x^2-(2k+3)x+3k<0\end{cases}$ 的整数解的集合为 $\{2\}$，则 $(2\times 2-3)(2-k)<0$，可得 $k>2$，所以不等式 $(2x-3)(x-k)<0$ 的解集为 $\left\{x\,\middle|\,\frac{3}{2}<x<k\right\}$，关于 x 的不等式组 $\begin{cases}x^2-8x+15>0,\\2x^2-(2k+3)x+3k<0\end{cases}$ 的整数解的集合为 $\{2\}$，所以 $\{x \mid x<3$ 或 $x>5\}\cap\left\{x\,\middle|\,\frac{3}{2}<x<k\right\}$ 中只含唯一的整数 2，不含整数 6，如图所示，则 $2<k\leqslant 6$.



9. $(1,+\infty)$　由题设得 $f(x_1)-f(x_2)<2x_2-2x_1$，其中 $x_1<x_2$，可变形为 $f(x_1)+2x_1<f(x_2)+2x_2$，令 $g(x)=f(x)+2x$，则 $g(x_1)<g(x_2)$，即函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 不等式 $f\left(\frac{x}{2}\right)-f\left(1-\frac{x}{2}\right)+2x>2$，移项变形可得 $f\left(\frac{x}{2}\right)+x>f\left(1-\frac{x}{2}\right)+2-x$，即 $f\left(\frac{x}{2}\right)+x>f\left(1-\frac{x}{2}\right)+2\left(1-\frac{x}{2}\right)$，即 $g\left(\frac{x}{2}\right)>g\left(1-\frac{x}{2}\right)$，由于 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以不等式 $g\left(\frac{x}{2}\right)>g\left(1-\frac{x}{2}\right)$ 成立的条件是 $\frac{x}{2}>1-\frac{x}{2}$，解得 $x>1$，因此不等式的解集为 $(1,+\infty)$.

10. $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$　$\left[0,1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　(1)由 $f(x)=\sqrt{a}x^2-2\sqrt{a}x+b+1=\sqrt{a}(x-1)^2-\sqrt{a}+b+1$，所以函数 $f(x)=\sqrt{a}x^2-2\sqrt{a}x+b+1$ 在 $[1,3]$ 上单调递增，又函数是同域函数，得 $\begin{cases}f(1)=1,\\f(3)=3,\end{cases}$ 即

$\begin{cases}f(1)=\sqrt{a}-2\sqrt{a}+b+1=1,\\ f(3)=9\sqrt{a}-6\sqrt{a}+b+1=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\dfrac{1}{4},\\ b=\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 所以 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{3}{2}$.

(2) 由(1)得 $g(x)=k-\sqrt{\dfrac{1}{2}x^2-x}=k-\sqrt{\dfrac{1}{2}(x-1)^2-\dfrac{1}{2}}(k\geqslant 0)$,所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递增,设 $[c,d]$ 是函数 $g(x)$ 的同域区间,得 $\begin{cases}g(c)=c,\\ g(d)=d,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}k-\sqrt{\dfrac{1}{2}c^2-c}=c,\\ k-\sqrt{\dfrac{1}{2}d^2-d}=d,\end{cases}$ 得 $x^2-2(2k-1)x+2k^2=0$ 在 $(-\infty,0]$ 上的根为 c 和 d,则满足 $\begin{cases}\Delta=[2(2k-1)]^2-4\times 2k^2>0,\\ c+d=2(2k-1)<0,\\ c\cdot d=2k^2\geqslant 0,\\ k\geqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}k>1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{或}k<1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ k<\dfrac{1}{2},\\ k\geqslant 0,\end{cases}$

解得 $0\leqslant k<1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

11. 解:(1)当 $0\leqslant x\leqslant 4\ 000$ 时,$f(x)=4x-\dfrac{1}{2\ 000}x^2-0.8x-1\ 000=-\dfrac{1}{2\ 000}x^2+3.2x-1\ 000$;当 $4\ 000<x\leqslant 10\ 000$时,$f(x)=8\ 000+0.5x-\dfrac{6\ 075\ 000}{x}-0.8x-1\ 000=7\ 000-\dfrac{6\ 075\ 000}{x}-0.3x$,

所以 $f(x)=$

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{2\ 000}x^2+3.2x-1\ 000,\ 0\leqslant x\leqslant 4\ 000,\\ 7\ 000-\dfrac{6\ 075\ 000}{x}-0.3x,\ 4\ 000<x\leqslant 10\ 000.\end{cases}$$

(2) 当 $0\leqslant x\leqslant 4\ 000$ 时,$f(x)=-\dfrac{1}{2\ 000}x^2+3.2x-1\ 000$,当 $x=3\ 200$ 时,取得最大值 $f(3\ 200)=4\ 120$;当 $4\ 000<x\leqslant 10\ 000$ 时,$f(x)=7\ 000-\left(\dfrac{6\ 075\ 000}{x}+0.3x\right)\leqslant 7\ 000-2\sqrt{\dfrac{6\ 075\ 000}{x}\cdot 0.3x}=4\ 300$,当且仅当$\dfrac{6\ 075\ 000}{x}=0.3x$,即 $x=4\ 500$ 时取等号,因为 $4\ 300>4\ 120$,所以 $f(x)_{\max}=4\ 300$,该公司年销售量为 4 500 组时,年利润最大为4 300 万元.

12. 解:(1) 由题意 $f(x)=\begin{cases}ax^2+x,x\geqslant 0,\\ x-ax^2,x<0,\end{cases}$ 所以 $f(1)=a+1$,$f(2)=4a+2$,$f(2)-f(1)=3a+1\geqslant 0$,解得 $a\geqslant -\dfrac{1}{3}$,当 $a<-\dfrac{1}{3}$时,$f(x)$的最小值为 $4a+2$;当 $-\dfrac{1}{3}\leqslant a<0$ 时,$f(x)$的最小值为 $a+1$.

(2) 当 $a\geqslant 0$ 时,$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增,在(m,n)上既无最大值也无最小值;当 $a<0$ 时,$f(x)$在$\left(-\infty,\dfrac{1}{2a}\right)$,$\left(-\dfrac{1}{2a},+\infty\right)$上单调递减,在$\left(\dfrac{1}{2a},-\dfrac{1}{2a}\right)$上单调递增,又 $f\left(-\dfrac{1}{2a}\right)=-\dfrac{1}{4a}$,$f\left(\dfrac{1}{2a}\right)=\dfrac{1}{4a}$,令 $x-ax^2=-\dfrac{1}{4a}$,解得 $x=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2a}$,令 $ax^2+x=\dfrac{1}{4a}$,解得 $x=\dfrac{-1-\sqrt{2}}{2a}$,故要使 $f(x)$在(m,n)上既有最大值又有最小值,m,n 需满足 $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2a}\leqslant m<\dfrac{1}{2a}$,$-\dfrac{1}{2a}<n\leqslant\dfrac{-1-\sqrt{2}}{2a}$.

(3) 不等式 $f(x+a)<f(x)$ 的解集为 A,若$\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]\subseteq A$,则在$\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$上,函数 $y=f(x+a)$的图象应在 $y=f(x)$的下方. 当 $a>0$ 时,$y=f(x+a)$的图象是把 $y=f(x)$的图象向左平移 a 个单位长度,其图象不可能在 $y=f(x)$的图象下方;当 $a=0$ 时,显然不符;当 $a<0$ 时,结合图象,要使在$\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$上,函数 $y=f(x+a)$的图象应在 $y=f(x)$的下方,只要 $f\left(-\dfrac{1}{2}+a\right)<f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$即可,即 $-a\left(-\dfrac{1}{2}+a\right)^2+\left(-\dfrac{1}{2}+a\right)<-a\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}$,化简得 $a^2-a-1<0$,解得 $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<a<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$,又 $a<0$,所以 $a\in\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)$. 综上所述,$a$ 的取值范围为$\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)$.

第五章　三角函数

题组 28　弧度制下弧长和扇形面积公式的应用

【核心笔记】

1. 有关扇形的弧长 l,圆心角 $\alpha(0<\alpha<\pi)$,面积 S 的问题,一般是“知二求一”,解决此类题目的关键在于灵活运用弧长公式$l=\alpha r$,扇形面积公式 $S=\dfrac{1}{2}lr=\dfrac{1}{2}\alpha r^2$,运用方程思想和消元思想加以解决.(练习运用:第 1,2,3,5,6,7,8 题)

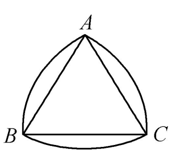
2. 扇形的周长和面积的最值问题:运用消元法,转化

为关于 r 的函数，再运用二次函数的性质或者基本不等式求得最值.(练习运用:第 4,9 题)

【答案详析】

1. B　由题意得,“弓”所在的弧长 $l=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}=\frac{5\pi}{8}$,所以其所对的圆心角 α 的绝对值为$\frac{\frac{5\pi}{8}}{\frac{5}{4}}=\frac{\pi}{2}$,所以两手之间的距离 $d=2R\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\times1.25\approx1.76$ 米.

2. C　如图,莱洛三角形的周长为$\frac{\pi}{2}$,可得$\overset{\frown}{AB}$,$\overset{\frown}{BC}$,$\overset{\frown}{AC}$的长均为$\frac{\pi}{6}$,则等边三角形的边长 $AB=BC=AC=\frac{\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}$,分别以点 A,B,C 为圆心,$\overset{\frown}{AB}$,$\overset{\frown}{BC}$,$\overset{\frown}{AC}$所对的扇形面积均为$\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{24}$,等边三角形 ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{16}$,所以莱洛三角形的面积是 $3\times\frac{\pi}{24}-2\times\frac{\sqrt{3}}{16}=\frac{\pi-\sqrt{3}}{8}$.

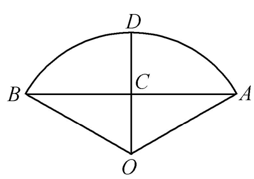


3. D　依题意,$AB=BC=\frac{l}{\theta}$,$BD=BE=\frac{l}{\theta}-m$,所以$\overset{\frown}{DE}=\left(\frac{l}{\theta}-m\right)\cdot\theta=l-\theta m$,所以该折扇的扇面 $ADEC$ 的面积为 $\frac{1}{2}l\cdot\frac{l}{\theta}-\frac{1}{2}(l-\theta m)\cdot\left(\frac{l}{\theta}-m\right)=\frac{m(2l-\theta m)}{2}$.

4. ABC　设扇形半径为 r,弧长为 l,圆心角为 α,所以扇形弧长为 $l=36-2r$,所以面积 $S=\frac{1}{2}lr=(18-r)r=-r^2+18r=-(r-9)^2+81$,当 $r=9$ 时,面积 S 有最大值,此时 $l=36-18=18$,圆心角 $\alpha=\frac{l}{r}=\frac{18}{9}=2$ rad,所对弦长为 $2r\sin\frac{\alpha}{2}=18\sin 1$.

5. $\frac{3\pi}{8}$　因为$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形,$C=90°$,$AC=1$,所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}$,$S_{扇形BCD}=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}\times1^2=\frac{\pi}{8}$,$S_{扇形ABA'}=\frac{1}{2}\times\frac{3\pi}{4}\times(\sqrt{2})^2=\frac{3\pi}{4}$,$S_{扇形DBC'}=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times1^2=\frac{\pi}{4}$,由题意 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle A'BC'}$,所以 $S_{阴影}=S_{\triangle ABC}+S_{扇形ABA'}-S_{扇形BCD}-S_{扇形DBC'}-S_{\triangle A'BC'}=\frac{1}{2}+\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3\pi}{8}$.

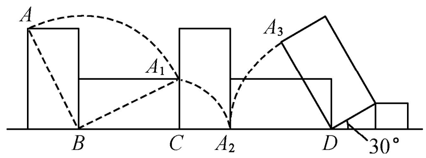
6. 9　设弧田的圆心为 O,弦为 AB,C 为 AB 的中点,OC 的延长线交弧于 D,如图所示,由题意可得$\angle AOB=\frac{2\pi}{3}$,$OA=4$,在 $\mathrm{Rt}\triangle AOC$ 中,易得$\angle AOC=\frac{\pi}{3}$,$\angle CAO=\frac{\pi}{6}$,$OC=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2}\times4=2$,可得矢为 $4-2=2$,由 $AC=OA\sin\frac{\pi}{3}=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$,可得弦 $AB=2AC=4\sqrt{3}$,所以弧田面积为$\frac{1}{2}\times(4\sqrt{3}\times2+2^2)=4\sqrt{3}+2$,因为$\frac{169}{64}<3=\frac{192}{64}<\frac{196}{64}$,则$\frac{13}{8}<\sqrt{3}<\frac{14}{8}$,从而$\frac{17}{2}<4\sqrt{3}+2<9$,因此所得弧田面积最接近的整数是 9.



7. $\frac{12\pi}{5}$　由题意得$\frac{\pi}{2}<2\alpha<2\beta<\pi$,则$\frac{\pi}{4}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$,又 $15\alpha=k_1\cdot2\pi$,$15\beta=k_2\cdot2\pi(k_1,k_2\in\mathbf{N}^*)$,$\frac{15\pi}{4}<15\alpha<15\beta<\frac{15\pi}{2}$,即$\frac{15\pi}{4}<k_1\cdot2\pi<k_2\cdot2\pi<\frac{15\pi}{2}$,所以 $k_1=2$,$k_2=3$,即 $\alpha=\frac{4\pi}{15}$,$\beta=\frac{6\pi}{15}$,$\alpha+\beta=\frac{2\pi}{3}$,第一次相遇的时间为 $2\pi\times\frac{3}{2\pi}=3$ 秒,第二次相遇的时间为出发后的第 $3\times2=6$ 秒,圆的半径为 1(cm),黑蚂蚁爬过的路程为 $6\times1\times\frac{6\pi}{15}=\frac{12\pi}{5}$(cm).

8. $\frac{7+3\sqrt{5}}{6}\pi$　如图,第一次是以点 B 为旋转中心,以 $BA=\sqrt{2^2+1}=\sqrt{5}$为半径旋转 90°,此次点 A 走过的路程是$\frac{\pi}{2}\times\sqrt{5}=\frac{\sqrt{5}\pi}{2}$.第二次是以点 C 为旋转中心,以 $CA_1=1$ 为半径旋转 90°,此次点 A 走过的路程是$\frac{\pi}{2}\times1=\frac{\pi}{2}$.第三次是以 D 为旋转中心,以 $DA_2=2$ 为半径旋转 60°,此次点 A 走过的路径是$\frac{\pi}{3}\times2=\frac{2\pi}{3}$.所以点

A 三次共走过的路程是$\frac{\sqrt{5}\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}=\frac{7+3\sqrt{5}}{6}\pi$.



9. 解:(1) 由题意得 $30=\theta(10+x)+2(10-x)$,故 $\theta=\frac{10+2x}{10+x}(0<x<10)$.

(2) 花坛的面积为$\frac{1}{2}\theta(10^2-x^2)=(5+x)(10-x)=-x^2+5x+50$,装饰总费用为 $9\times[30-2(10-x)]+8(10-x)=170+10x$,所以花坛的面积与装饰总费用的比 $y=\frac{-x^2+5x+50}{170+10x}(0<x<10)$. 令 $t=17+x$,则 $t\in(17,27)$,则 $y=\frac{39}{10}-\frac{1}{10}\left(t+\frac{324}{t}\right)\leqslant\frac{39}{10}-\frac{2}{10}\cdot\sqrt{t\cdot\frac{324}{t}}=\frac{3}{10}$,当且仅当 $t=\frac{324}{t}$,即 $t=18$ 时,y 取得最大值,最大值为$\frac{3}{10}$,此时 $x=1,\theta=\frac{12}{11}$. 故当 $x=1$ 时,花坛的面积与装饰总费用的比最大.

题组 29　三角函数的概念

【核心笔记】

1. 已知角 α 的终边求三角函数值的方法. 在角 α 的终边上任取一点 $P(x,y)$,利用正弦、余弦、正切函数的定义求相应的三角函数值. 注意三角函数值是一个实数,与点 P 在终边上的位置无关,只由角 α 的终边位置关系决定. 其中要熟记三角函数在各个象限的符号.(练习运用:第 1,2,6 题)

2. 利用同角三角函数的基本关系求值:(1) 利用 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 可实现正弦、余弦的互化,开方时要根据角 α 所在象限确定符号;利用$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$ 可以实现角 α 的弦切互化.(2) 应用公式时注意方程思想的应用:对于 $\sin\alpha+\cos\alpha$,$\sin\alpha\cos\alpha$,$\sin\alpha-\cos\alpha$ 这三个式子,利用$(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=1\pm2\sin\alpha\cos\alpha$,可以知一求二.(3) 注意公式逆用及变形应用:$1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$,$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$,$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$.(练习运用:第 3,5,7,8,9 题)

【答案详析】

1. C　依题意有 $\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{3}$,且 $x<0$,故 $x=-2\sqrt{2}$,$\tan\alpha=\frac{1}{x}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

2. A　因为角 α 的终边在第一象限,所以 $2k\pi<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,所以 $k\pi<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{\pi}{4}$,$k\in\mathbf{Z}$,所以$\frac{\alpha}{2}$为第一象限角或第三象限角. 当$\frac{\alpha}{2}$为第一象限角时,$\sin\frac{\alpha}{2}>0$,$\cos\frac{\alpha}{2}>0$,故$\frac{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}{\cos\frac{\alpha}{2}}=1+1=2$;当$\frac{\alpha}{2}$为第三象限角时,$\sin\frac{\alpha}{2}<0$,$\cos\frac{\alpha}{2}<0$,故$\frac{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}{\cos\frac{\alpha}{2}}=-1+(-1)=-2$. 所以$\frac{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}{\cos\frac{\alpha}{2}}$的取值集合为$\{-2,2\}$.

3. A　由 $\cos\alpha=\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,则$\cos^2\alpha=\sin\alpha$,又$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$,得$\frac{1}{\sin\alpha}+\cos^4\alpha=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha}+\sin^2\alpha=\frac{\sin\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha}+\sin^2\alpha=1+\sin\alpha+\sin^2\alpha=1+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=2$.

4. D　因为$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$,所以 $\sin\alpha>0$,$\cos\alpha<0$,故原式$=\cos\alpha\sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}}-\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=\cos\alpha\,\frac{1-\sin\alpha}{-\cos\alpha}-(\sin\alpha-\cos\alpha)=\sin\alpha-1-\sin\alpha+\cos\alpha=\cos\alpha-1$.

5. D　由已知可得 $m\cdot\csc^2x+\tan^2x=\frac{m}{\sin^2x}+\frac{\sin^2x}{\cos^2x}\geqslant15$,可得 $m\geqslant15\sin^2x-\frac{\sin^4x}{\cos^2x}$,因为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,所以 $\cos^2x\in(0,1]$,因为 $15\sin^2x-\frac{\sin^4x}{\cos^2x}=15(1-\cos^2x)-\frac{(1-\cos^2x)^2}{\cos^2x}=17-\left(\frac{1}{\cos^2x}+16\cos^2x\right)\leqslant17-2\sqrt{\frac{1}{\cos^2x}\cdot16\cos^2x}=9$,当且仅当 $\cos^2x=\frac{1}{4}$时,等号成立,故 $m\geqslant9$.

6. AC　因为角 α 的终边经过点$(1,2\sqrt{2})$,所以 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}}=\frac{1}{3}$,所以 $f(\cos\alpha)=\log_3\frac{1}{3}=-1$,$f(\sin\alpha)=\log_3\frac{2\sqrt{2}}{3}<\log_3 1=0$,$f[f(\cos\alpha)]=f(-1)=2^{-1}=\frac{1}{2}$,$f[f(\sin\alpha)]=f\left(\frac{3}{2}\log_3 2-1\right)=2^{\frac{3}{2}\log_3 2-1}\neq2$,故 A,C 正确,B,D

错误.

7. BD　对于 A,由题意,$\sin\alpha,\cos\alpha$ 是方程 $3x^2-x-m=0$ 的两根,则$\begin{cases}\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{3},\\ \sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{m}{3},\end{cases}$由 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$,得$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\dfrac{1}{9}$,即 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{9}$,解得 $\sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{4}{9}$,则$-\dfrac{m}{3}=-\dfrac{4}{9}$,解得 $m=\dfrac{4}{3}$,故 A 错误;对于 B,$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=1-2\times\left(-\dfrac{4}{9}\right)=\dfrac{17}{9}$,因为 $\alpha\in(0,\pi)$,所以 $\sin\alpha>0$,又 $\sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{4}{9}<0$,所以 $\cos\alpha<0$,则 $\sin\alpha-\cos\alpha>0$,因此 $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{17}{9}}=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$,故 B 正确;对于 C,由$\begin{cases}\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{3},\\ \sin x-\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{17}}{3},\end{cases}$解得$\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{1+\sqrt{17}}{6},\\ \cos\alpha=\dfrac{1-\sqrt{17}}{6},\end{cases}$则 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{9+\sqrt{17}}{8}$,故 C 错误;对于 D,$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)=\dfrac{1}{3}\times\left(-\dfrac{\sqrt{17}}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{17}}{9}$,故 D 正确.

8. $\dfrac{3}{5}$　由题意知,$2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$,又因为 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,将上式分子、分母同时除以$\cos^2\alpha$得$2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha-1}{\tan^2\alpha+1}$,代入 $\tan\alpha=2$ 可得 $2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha-1}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{2\times2-1}{2^2+1}=\dfrac{3}{5}$.

9. $\dfrac{19-\sqrt5}{5}$　-3　$d(A,B)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|=\left|-1-\dfrac{3}{5}\right|+\left|2-\dfrac{4}{5}\right|=\dfrac{14}{5}$,$\cos(A,B)=\dfrac{-1}{\sqrt5}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{\sqrt5}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{\sqrt5}{5}$,故余弦距离等于 $1-\cos(A,B)=1-\dfrac{\sqrt5}{5}$,即 A,B 之间的曼哈顿距离 $d(A,B)$和余弦距离和为 $\dfrac{14}{5}+1-\dfrac{\sqrt5}{5}=\dfrac{19-\sqrt5}{5}$. $\cos(M,N)=\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\sqrt{\sin^2\beta+\cos^2\beta}}+\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}\cdot\dfrac{\cos\beta}{\sqrt{\sin^2\beta+\cos^2\beta}}=\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{5}$,$\cos(M,Q)=\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\sqrt{\sin^2\beta+\cos^2\beta}}+\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}\cdot\dfrac{-\cos\beta}{\sqrt{\sin^2\beta+\cos^2\beta}}=\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{2}{5}$,故 $\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{3}{10}$,$\cos\alpha\cos\beta=-\dfrac{1}{10}$,则 $\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=-3$.

题组 30　利用诱导公式解决三角函数中的化简与求值问题

【核心笔记】

1. 利用诱导公式解决给角求值问题解题步骤:①负角化正;②大角化小角;③小角化锐角;④根据锐角三角函数求值.(练习运用:第 1,2,3,4 题)

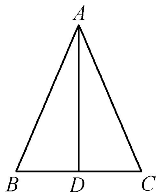
2. 解决条件中求值问题,首先要仔细观察条件与所求角之间、函数名称及有关运算之间的差异及联系,再将已知式进行变形(向所求式转化),或将所求式进行变形(向已知式转化).在诱导公式中,利用互余(互补)关系求值是最常见的问题,一般解题步骤:①定关系,确定已知角与所求角之间的关系;②定公式,选择要使用的诱导公式;③得结论,根据选择的诱导公式,得到已知值和所求值之间的关系,进而得到答案.(练习运用:第 4,5,6,7,8,9 题)

【答案详析】

1. B　依题意,$\sin\dfrac{5\pi}{3}=\sin\left(2\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt3}{2}$,$\cos\dfrac{5\pi}{3}=\cos\left(2\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$,即 $P\left(-\dfrac{\sqrt3}{2},\dfrac{1}{2}\right)$. 由三角函数的定义得 $\sin\alpha=\dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(-\frac{\sqrt3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\dfrac{1}{2}$,则 $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha=-\dfrac{1}{2}$.

2. D　因为 $0°<\alpha<90°$,$\cos(37°+\alpha)=\dfrac{1}{3}>0$,所以$37°<37°+\alpha<90°$,则 $\sin(37°+\alpha)=\dfrac{2\sqrt2}{3}$,则 $\tan(37°+\alpha)=2\sqrt2$,$\sin^2(53°-\alpha)=\sin^2[90°-(37°+\alpha)]=\cos^2(37°+\alpha)=\dfrac{1}{9}$,又 $\cos(143°-\alpha)=\cos[180°-(37°+\alpha)]=-\cos(37°+\alpha)=-\dfrac{1}{3}$,故原式$=2\sqrt2\times\dfrac{1}{9}-\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{3+2\sqrt2}{9}$.

3. A 如图,$\triangle ABC$ 为最美三角形,$\angle BAC=36^\circ$,$\angle ABC=\angle BCA=72^\circ$,易知$\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,取 BC 的中点 D,连接 AD,如图所示. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中,易知 $\cos\angle BCA=\cos 72^\circ=\dfrac{DC}{AC}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$,所以 $\sin 738^\circ=\sin(720^\circ+18^\circ)=\sin 18^\circ=\cos 72^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.



4. $41-14\pi$ $f(\cos 10)=f\left[\sin\left(10-\dfrac{7\pi}{2}\right)\right]=4\left(10-\dfrac{7\pi}{2}\right)+1=41-14\pi$.

5. $-\dfrac{3}{4}$ $f(x)=25x^2-30x+9=(5x-3)^2$,令 $f(x)=0$,得 $x=\dfrac{3}{5}$,所以 $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)=\dfrac{3}{5}$,即 $\sin\varphi=\dfrac{3}{5}$. 又因为 $\varphi\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$,所以 $\cos\varphi=-\sqrt{1-\sin^2\varphi}=-\dfrac{4}{5}$,所以 $\tan\varphi=\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=-\dfrac{3}{4}$,所以 $\tan(\pi+\varphi)=\tan\varphi=-\dfrac{3}{4}$.

6. 解:(1) 由于点 P 在单位圆上,且 α 是锐角,所以 $m>0$,$m^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$,则 $m=\dfrac{1}{2}$,所以 $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$,又 α 为锐角,则 $\alpha=\angle xOP=\dfrac{\pi}{3}$.

(2) 原式$=\dfrac{4\cos^3\alpha+2\cos^2\alpha+4\cos\alpha}{2+2\cos^2\alpha+\cos\alpha}=2\cos\alpha=1$.

(3) 由(1)可知 $\alpha=\angle xOP=\dfrac{\pi}{3}$,根据三角函数定义可得,$f(\theta)=\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$,因为 $f\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{4}>0$,且 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,因此 $\theta+\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}\right)$,所以 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$,所以 $\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta-\dfrac{5\pi}{6}\right)=\cos\left[\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{\pi}{2}\right]+\cos\left[\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)-\pi\right]=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{15}-1}{4}$.

7. 解:(1) $\sin\theta$,$\cos\theta$ 是关于 x 的方程 $x^2-ax+a=0$(其中 $a\in\mathbf{R}$)的两个实数根,所以$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=a,\\ \sin\theta\cos\theta=a,\end{cases}$ $\Delta=a^2-4a=a(a-4)\geqslant 0$,解得 $a\leqslant 0$ 或 $a\geqslant 4$,由 $\sin\theta+\cos\theta=a$ 两边平方得 $1+2\sin\theta\cos\theta=1+2a=a^2$,$a^2-2a-1=0$,解得 $a=1+\sqrt{2}$(舍)或 $a=1-\sqrt{2}$. 所以 $a=1-\sqrt{2}$.

(2) $\cos^3\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)+\sin^3\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)=a(1-a)=(1-\sqrt{2})\times\sqrt{2}=\sqrt{2}-2$.

(3) $\tan(\pi-\theta)-\dfrac{1}{\tan\theta}=-\tan\theta-\dfrac{1}{\tan\theta}=-\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)=-\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=-\dfrac{1}{a}=-\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$.

题组 31 三角函数的图象问题

【核心笔记】

1. 利用三角函数的图象解不等式,先作出三角函数在一个周期内的图象,再将不等式转化为函数的图象的位置关系,得到一个周期内的结论,进而得到不等式的解集.(练习运用:第 1,2 题)

2. 利用三角函数的图象,研究三角函数的周期性、单调性、最值(值域)、对称性等性质,往往先得到一个周期内的结论,进而结合周期性,得到所求三角函数的性质.(练习运用:第 6 题)

3. 利用三角函数的图象,确定方程解(函数零点)的个数,或根据解的个数,确定参数的取值范围. 往往结合函数的图象,运用数形结合的思想,将方程的解转化为函数图象的交点个数来求解.(练习运用:第 3,4,5,7,8,9 题)

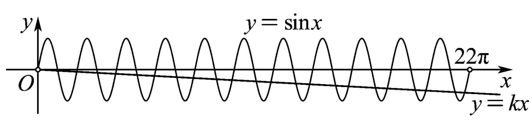
【答案详析】

1. A 因为函数 $f(x)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}+\varphi\right)$是偶函数,所以$-\dfrac{\pi}{4}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$,又$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=-\dfrac{\pi}{4}$,所以 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cos x$. 因为 $f(x)\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $\cos x\geqslant-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,解得$-\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,所以不等式 $f(x)\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$的解集为$\left[-\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi,\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$.

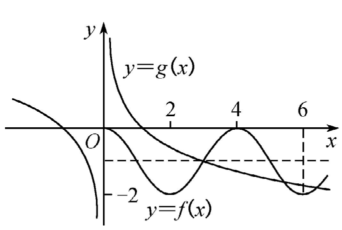
2. C 因为 $T=\pi$,所以 $\omega=2$. 由 $f(x)>3$,得 $\sin(2x+\varphi)>0$,所以 $2k\pi<2x+\varphi<\pi+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,即 $x\in\left(-\dfrac{\varphi}{2}+k\pi,-\dfrac{\varphi}{2}+\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$,$k\in\mathbf{Z}$,所以$\left(-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{3}\right)\subseteq\left(-\dfrac{\varphi}{2}+k\pi,-\dfrac{\varphi}{2}+\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$,$k\in\mathbf{Z}$. 因为 $0\in$

$\left(-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $k=0$，即 $x\in\left(-\frac{\varphi}{2},-\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$，所以$\begin{cases}-\frac{\pi}{12}\geqslant-\frac{\varphi}{2},\\-\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{2}\geqslant\frac{\pi}{3},\end{cases}$解得$\frac{\pi}{6}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{3}$.

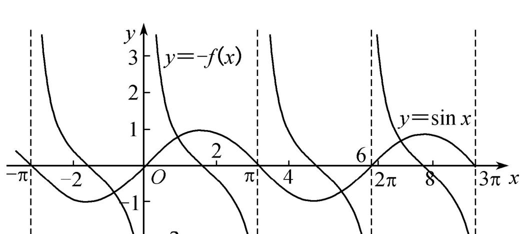
3. C　设$\frac{f(x_1)}{x_1}=\frac{f(x_2)}{x_2}=\cdots=\frac{f(x_n)}{x_n}=k$，则条件等价于 $f(x)=kx$ 的根的个数. 作出函数 $y=f(x)$ 和 $y=kx$ 的图象(如图)，由图象可知，当 $k<0$ 时，$y=kx$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象最多有 22 个交点；$k=0$ 时，有 21 个交点；$k>0$ 时，最多有 21 个交点，即 n 的最大值为 22.



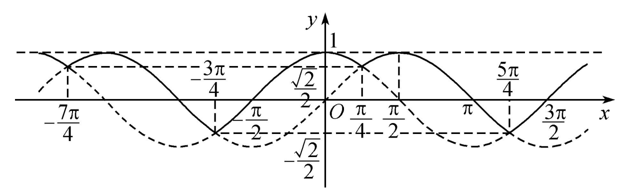
4. C　当 $x<0$ 时，函数 $f(x)=-\log_a(-x)$，则当 $x>0$ 时，函数 $g(x)=\log_a x$ 的图象与函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称. 又当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)-1$，画出 $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)-1,x\geqslant0$ 与 $g(x)=\log_a x(x>0)$的图象，如图所示. 要使得 $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)-1,x\geqslant0$ 与 $g(x)=\log_a x(x>0)$的图象至少有 3 个交点，则需满足 $0<a<1$ 且 $f(6)<g(6)$，$f(10)>g(10)$，即$\begin{cases}0<a<1,\\-2<\log_a 6,\\-2>\log_a 10,\end{cases}$解得$\frac{\sqrt{10}}{10}<a<\frac{\sqrt{6}}{6}$.



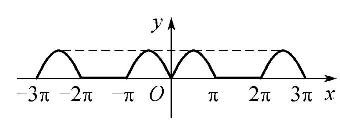
5. B　在同一坐标系中作出函数 $y=-f(x)$ 和 $y=\sin x$ 的图象(如图). 观察图象可知 $y=-f(x)$ 和 $y=\sin x$ 的图象在区间$[-3,2\pi]$上有 3 个零点，在区间$[-3,3\pi]$上有 4 个零点. 又 $m=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以 $m\geqslant3\pi$，所以 m 的最小值为 3π.



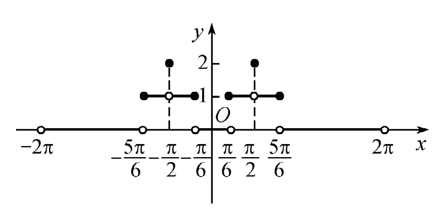
6. BC　如图，作出函数 $f(x)$ 的图象，由图可知，函数 $f(x)$的值域为$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，故 A 错误；函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π，故 B 正确；函数$f(x)$在$\left[-\frac{3\pi}{4},0\right]$上单调递增，故 C 正确；函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ 或 $x=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，故 D 错误.



7. ABD　函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，因为 $f(-x)=\sin|-x|+|\sin(-x)|=\sin|x|+|\sin x|=f(x)$，所以 $f(x)$为偶函数. 当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=\sin x+|\sin x|$，则 $f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)+|\sin(x+2\pi)|=\sin x+|\sin x|=f(x)$，当 $0<x\leqslant\pi$ 时，$f(x)=\sin x+\sin x=2\sin x$，当 $\pi<x\leqslant2\pi$ 时，$f(x)=\sin x-\sin x=0$，所以函数 $f(x)$的图象如下图所示.



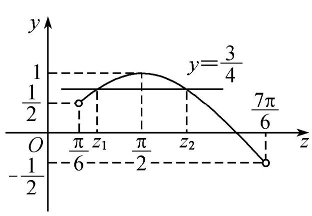
由 $g(x)=[f(x)]$可知，当 $x\geqslant0$ 时，$g(x+2\pi)=[f(x+2\pi)]=[f(x)]=g(x)$，当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$ 时，$g(x)=2$，当 $2k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant2k\pi+\frac{5\pi}{6}$，且 $x\neq2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$g(x)=1$，当 $2k\pi\leqslant x<2k\pi+\frac{\pi}{6}$ 或 $2k\pi+\frac{5\pi}{6}<x\leqslant2k\pi+2\pi,k\in\mathbf{Z}$ 时，$g(x)=0$，因为 $g(-x)=[f(-x)]=[f(x)]=g(x)$，所以 $g(x)$为偶函数，则函数 $g(x)$的图象如下图所示.



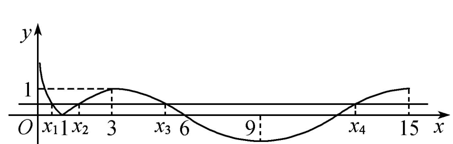
故 A，B 正确，C 错误. 对于方程$\frac{\pi}{2}\cdot g(x)=x$，当$g(x)=0$ 时，$x=0$，方程有一个实数根，当 $g(x)=1$ 时，$x=\frac{\pi}{2}$，此时 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\neq1$，方程没有实数根，当$g(x)=2$时，$x=\pi$，此时 $g(\pi)=0\neq2$，方程没有实数根，所以方程$\frac{\pi}{2}\cdot g(x)=x$ 只有一个实数根，故 D 正确.

8. $\frac{3}{4}$　由题意得 $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上恰有

2 个根,即 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上恰有 2 个根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$,当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时,$z=2x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right)$,如图,画出 $y=\sin z$ 在 $z\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right)$ 时的函数图象,由图知 z_1,z_2 关于 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称,故 $z_1+z_2=\pi$,即 $2x_1+\frac{\pi}{6}+2x_2+\frac{\pi}{6}=\pi$,解得 $x_1+x_2=\frac{\pi}{3}$,且 $\sin\left(2x_1+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}$,$\sin\left(2x_2+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}$,因为 $x_1=\frac{\pi}{3}-x_2$,所以 $\cos(x_1-x_2)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x_2\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}-2x_2\right)\right]=\sin\left(2x_2+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}$.



9. 1 (0,27) 作出函数 $f(x)=\begin{cases}|\log_3 x|, & 0<x<3,\\ \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right), & 3\leqslant x\leqslant 15\end{cases}$ 的图象,如图,因为 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)$,$x_1<x_2<x_3<x_4$,所以由图可知,$-\log_3 x_1=\log_3 x_2$,即 $x_1x_2=1$,$\frac{x_3+x_4}{2}=9$,且 $3<x_3<6$,所以 $(x_3-3)(x_4-3)=x_3x_4-3(x_3+x_4)+9=x_3(18-x_3)-45=-x_3^2+18x_3-45$,因为 $y=-x_3^2+18x_3-45$ 在 $(3,6)$ 上单调递增,所以 $0<y<27$,即 $(x_3-3)(x_4-3)$ 的取值范围是 $(0,27)$.



题组 32 三角函数的最值或范围问题

【核心笔记】

1. 求形如函数 $y=\frac{a\sin x+b}{c\sin x+d}$ 的值域,可以利用分离常变量来求解,也可以利用正弦函数的有界性,建立关于 y 的不等式,反解出 y 的取值范围.(练习运用:第 1 题)

2. 形如 $y=\sin^2 x+b\sin x+c(a\neq 0)$ 的三角函数,可利用换元法,令 $t=\sin x$,转化为关于 t 的二次函数来求最值(值域),注意 t 的取值范围.(练习运用:第 2,4,8,9 题)

3. 形如 $y=\sin(\omega x+\varphi)$,$y=\cos(\omega x+\varphi)$ 或 $y=\tan(\omega x+\varphi)$ 的三角函数,令 $t=\omega x+\varphi$,根据 x 的取值范围求出 t 的取值范围,再利用三角函数的单调性、有界性求出 $y=\sin t$,$y=\cos t$ 或 $y=\tan t$ 的最值(值域).(练习运用:第 3,5,6,7 题)

【答案详析】

1. A $f(x)=\frac{2\sin x-3}{\sin x-2}=2+\frac{1}{\sin x-2}$. 令 $\sin x=t$,则 $t\in[-1,1]$,令 $g(t)=2+\frac{1}{t-2}$,易知 $g(t)=2+\frac{1}{t-2}$ 在区间 $[-1,1]$ 上单调递减,所以 $f(x)$ 的最大值是 $g(-1)=\frac{5}{3}$.

2. A 因为函数 $f(x)=\sin\left(3\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{3}$,所以 $\frac{2\pi}{3\omega}=\frac{2\pi}{3}$,解得 $\omega=1$,所以 $f(x)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$. 当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 时,$3x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$,所以当 $3x+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$,即 $x=\frac{\pi}{3}$ 时,$f(x)$ 取得最小值,即 $f(x)_{\min}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. C 函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{3}$,由题意可得,$a,b$ 分别在同一周期内取得最小值的自变量的两侧,且 $b-a<T=\frac{2\pi}{3}$,$f(x)=2\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)\in[-2,1)$. 由 $2\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=-2$,得 $3x+\frac{\pi}{6}=\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $x=\frac{5\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$. 由 $2\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=1$,得 $3x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 或 $3x+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $x=\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$ 或 $x=\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$. 又 $f\left(\frac{\pi}{18}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$,若 $a=\frac{\pi}{18}$,则 $\frac{5\pi}{18}<b<\frac{\pi}{2}$,所以 $\frac{2\pi}{9}<b-a<\frac{4\pi}{9}$;若 $b=\frac{\pi}{2}$,则 $\frac{\pi}{18}<a<\frac{5\pi}{18}$,所以 $\frac{2\pi}{9}<b-a<\frac{4\pi}{9}$,即 $b-a$ 的取值范围是 $\left(\frac{2\pi}{9},\frac{4\pi}{9}\right)$.

4. CD 因为 $f(x)=\cos^2 x+2\sin x=-\sin^2 x+2\sin x+1=2-(\sin x-1)^2$,所以当 $\sin x=1$,即 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$ 时,$f(x)_{\max}=2$,又 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},\theta\right]$,所以 θ 的可能取值为 $\frac{2\pi}{3}$,π.

5. CD　因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 对称，所以 $\varphi+2\times\frac{\pi}{12}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，由于 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，故 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，又因为函数 $f(x)$ 的图象过点 $(0,1)$，所以 $1=A\sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}$，解得 $A=\sqrt{3}$. 于是 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}$. 又"对任意 $x_1\in[-1,2]$，存在 $x_2\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$，使得 $g(x_1)>f(x_2)$"等价于"$g(x)_{\min}>f(x)_{\min}$"，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 时，$\frac{\pi}{3}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{2\pi}{3}$，即 $\frac{3}{2}\leqslant\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\sqrt{3}$，即 $f(x)_{\min}=1$. 于是 $g(x)=\frac{3-m\cdot 3^x}{3^x}>1$，即 $\frac{3}{3^x}>1+m$，又 $x\in[-1,2]$，所以 $\frac{3}{3^x}\geqslant\frac{3}{3^2}=\frac{1}{3}$，所以 $m+1<\frac{1}{3}$，即 $m<-\frac{2}{3}$，所以实数 m 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$.

6. $[\sqrt{3},+\infty)$　因为函数 $y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+k$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象都在 x 轴上方，所以 $y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+k>0$ 对于 $x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 恒成立，所以 $k>-\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 对于 $x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 恒成立，因为 $x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $2x-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$，$\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in(-\sqrt{3},0)$，所以 $-\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in(0,\sqrt{3})$，所以 $k\geqslant\sqrt{3}$，所以实数 k 的取值范围为 $[\sqrt{3},+\infty)$.

7. $\left[\frac{12}{5},4\right)$　因为 $f(x)\geqslant f\left(\frac{\pi}{12}\right)$，所以 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{12}\omega+\varphi\right)=-1$，所以 $\frac{\pi}{12}\omega+\varphi=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{12}\omega+\frac{3\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $f(x)=\sin\left(\omega x+2k\pi-\frac{\pi}{12}\omega+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos\left[\omega\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\right]$. 当 $-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$ 时，$-\frac{5\pi\omega}{12}\leqslant\omega\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\leqslant\frac{\pi\omega}{4}(\omega>0)$. 因为 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$ 上恰有两个最值，且 $\left|-\frac{5\pi\omega}{12}\right|>\left|\frac{\pi\omega}{4}\right|$，所以 $\begin{cases}\omega>0,\\-2\pi<-\frac{5\pi\omega}{12}\leqslant-\pi,\\0<\frac{\pi\omega}{4}<\pi,\end{cases}$ 解得 $\frac{12}{5}\leqslant\omega<4$.

8. 解：(1) 因为 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$，故 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$，所以 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$，又 $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，故 $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，$\cos\theta>0$，$\sin\theta<0$，所以 $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$，即 $\sin\theta-\cos\theta=-\frac{\sqrt{7}}{2}$，$\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta)=-\frac{\sqrt{7}}{2}\times\frac{5}{8}=-\frac{5\sqrt{7}}{16}$.

(2) $t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，$\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，故 $\theta+\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$，故 $t\in[-1,\sqrt{2}]$，$f(\theta)=a(\sin\theta+\cos\theta)-\sin\theta\cos\theta=at-\frac{t^2-1}{2}=-\frac{1}{2}t^2+at+\frac{1}{2}$，设 $h(t)=-\frac{1}{2}t^2+at+\frac{1}{2}$，二次函数的对称轴为 $t=a$，当 $a<-1$ 时，$h(t)_{\max}=h(-1)=-a$；当 $-1\leqslant a\leqslant\sqrt{2}$ 时，$h(t)_{\max}=h(a)=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}$；当 $a>\sqrt{2}$ 时，$h(t)_{\max}=h(\sqrt{2})=\sqrt{2}a-\frac{1}{2}$. 综上所述，$g(a)=\begin{cases}-a, & a<-1,\\ \frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}, & -1\leqslant a\leqslant\sqrt{2},\\ \sqrt{2}a-\frac{1}{2}, & a>\sqrt{2}.\end{cases}$

9. 解：(1) 因为 $f(x)$ 的最小正周期为 π，$\omega>0$，所以 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得 $\omega=2$，因为函数 $f(x)$ 的图象经过点 $\left(\frac{\pi}{6},1\right)$，所以 $2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=1$，因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{6}$，解得 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，$g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos 2x$，因为 $g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$g(-x)=2\cos(-2x)=2\cos 2x=g(x)$，所以函数 $g(x)$ 为偶函数.

(2) 由(1)可知 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，$y=f^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+2t\cdot\sin 2x-3=4\cos^2 2x+2t\sin 2x-3=-4\sin^2 2x+2t\sin 2x+1$. 令 $a=\sin 2x\in[-1,1]$，则 $h(a)=-4a^2+2ta+1=-4\left(a-\frac{t}{4}\right)^2+\frac{t^2}{4}+1$，其图象开口向下，对称轴为 $a=\frac{t}{4}$. ①当 $-1<\frac{t}{4}<1$，即 $-4<t<4$ 时，

$h(a)$在$\left[-1,\frac{t}{4}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{t}{4},1\right]$上单调递减，可知$h(a)$在$[-1,1]$上的最大值为$\frac{t^2}{4}+1=6$，解得$t=\pm2\sqrt{5}$，不符合；②当$\frac{t}{4}\leqslant-1$，即$t\leqslant-4$时，$h(a)$在$[-1,1]$上单调递减，可知$h(a)$在$[-1,1]$上的最大值为$-4-2t+1=6$，解得$t=-\frac{9}{2}$；③当$\frac{t}{4}\geqslant1$，即$t\geqslant4$时，$h(a)$在$[-1,1]$上单调递增，可知$h(a)$在$[-1,1]$上的最大值为$-4+2t+1=6$，解得$t=\frac{9}{2}$. 综上所述，$t=\pm\frac{9}{2}$.

题组 33　两角和与差的正弦、余弦、正切公式

【核心笔记】

1. 两角和与差的余弦公式：要能熟练掌握公式，注意公式结构特征，使用时，往往需要将所求角表示为已知角的和与差的形式，再借助公式求解. 不仅要会正用，还要会逆用.（练习运用：第 1,2,3,6 题）

2. 两角和与差的正弦公式：要注意正弦公式和余弦公式的结构特征上的不同 $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$，$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$. 使用公式时，注意角的拆分变形的运用，如 $\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$，$2\alpha=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$等，注重整体思想的运用.（练习运用：第 4,5 题）

3. 两角和与差的正切公式：使用时，应注意正切函数的定义域，即$\left\{x\,\middle|\,x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，注意公式的正用、逆用，以及公式的变形，即 $\tan\alpha\pm\tan\beta$，$\tan\alpha\tan\beta$，$\tan(\alpha\pm\beta)$之间的转化关系.（练习运用：第 4,7 题）

4. 辅助角公式：$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$，其中 $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，常与三角函数的性质综合考查.（练习运用：第 8 题）

【答案详析】

1. B　角 θ 的终边经过点$(3,-4)$，则 $\tan\theta=\frac{-4}{3}$，将角 θ 的终边顺时针旋转$\frac{\pi}{4}$后得到角 β，则 $\tan\beta=\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta-1}{1+\tan\theta}=\frac{-\frac{4}{3}-1}{1-\frac{4}{3}}=7$.

2. D　因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{4}{5}$. 因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\pi$，所以 $0<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$，因为 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}<\sin\alpha=\frac{4}{5}$，若 $\alpha+\beta$ 为锐角，则 $\alpha+\beta<\alpha$ 与 $\alpha+\beta>\alpha$ 矛盾，所以 $\alpha+\beta$ 不可能是锐角，故 $\cos(\alpha+\beta)=-\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 $\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=\frac{-6\sqrt{2}+4}{15}$.

3. C　由 $\sin\alpha=\tan\beta(1+\cos\alpha)$，可得 $\sin\alpha\cos\beta=\sin\beta(1+\cos\alpha)$，即 $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\sin\beta$，所以 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\beta$. 又 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\alpha-\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\alpha-\beta=\beta$，即 $\alpha=2\beta$.

4. B　由 $\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)=0$，$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，可知 $\sin(\alpha-\beta)=-\cos(\alpha+\beta)\neq0$，则$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=-1$，即$\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=-1$，化简可得$\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-1$，将 $\tan\alpha-\tan\beta=m$ 代入可得 $\tan\alpha\tan\beta=m+1$，故 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{m}{2+m}$.

5. C　$\frac{2\cos10^\circ}{\sin70^\circ}-\tan20^\circ=\frac{2\cos10^\circ}{\sin70^\circ}-\frac{\sin20^\circ}{\cos20^\circ}=\frac{2\cos10^\circ-\sin(30^\circ-10^\circ)}{\sin70^\circ}=\frac{\frac{3}{2}\cos10^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin10^\circ}{\sin70^\circ}=\frac{\sqrt{3}\sin(10^\circ+60^\circ)}{\sin70^\circ}=\sqrt{3}$.

6. C　因为 $\sin\alpha\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，所以 $\sin\alpha\sin\alpha-\cos\alpha\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，所以$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{3}{5}$. 因为$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$，所以$\cos^2\alpha=\frac{4}{5}$，$\sin^2\alpha=\frac{1}{5}$，因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$，所以 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$. 由 $3\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)$，得$3\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\sin[(\alpha+\beta)+\alpha]$，即 $3\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-3\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$，所以 $\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha=2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$，所以$\tan(\alpha+\beta)=2\tan\alpha=1$. 又 $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$，所以 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

7. BC　因为 $\tan A$，$\tan B$ 是方程 $3x^2-6x+1=0$ 的两根，所以 $\tan A+\tan B=2$，$\tan A\cdot\tan B=\frac{1}{3}$，所以

$\tan A>0,\tan B>0$，则 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}=3$，所以 $\tan C=\tan[\pi-(A+B)]=-\tan(A+B)=-3<0$，又 $C\in(0,\pi)$，所以 $C\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，即 C 为钝角，则 $\triangle ABC$ 是钝角三角形，故 A 错误，B 正确；因为 $A+B<\frac{\pi}{2}$，所以 $A<\frac{\pi}{2}-B$ 且 $B<\frac{\pi}{2}-A$，所以 $\sin A<\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$，则 $\sin A<\cos B$，故 D 错误；$\sin B<\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)$，即 $\sin B<\cos A$，故 C 正确.

8. AB　$x_M=\frac{1}{2}(x_A+x_B)=\frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta)=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$，故 A 正确；$y_M=\frac{1}{2}(y_A+y_B)=\frac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)$，故 B 正确；$y_C=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$，故 C 错误；取 $\alpha=\frac{\pi}{6},\beta=\frac{7\pi}{3}$，则 $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{4}$，此时 $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)$，故 D 错误.

9. 2　2^{23}　因为 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$，所以 $\tan\alpha+\tan\beta=1-\tan\alpha\tan\beta$，即 $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha\tan\beta=1$. 所以 $(1+\tan\alpha)\cdot(1+\tan\beta)=1+\tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha\tan\beta=2$. 所以 $(1+\tan 1^\circ)(1+\tan 2^\circ)(1+\tan 3^\circ)\cdot\cdots\cdot(1+\tan 45^\circ)=2[(1+\tan 1^\circ)(1+\tan 44^\circ)]\cdot[(1+\tan 2^\circ)(1+\tan 43^\circ)]\cdots[(1+\tan 22^\circ)\cdot(1+\tan 23^\circ)]=2\times 2^{22}=2^{23}$.

题组 34　二倍角的正弦、余弦、正切公式

【核心笔记】

1. 利用二倍角公式求值，需要观察角度之间的关系，往往需要先通过诱导公式转化，再正用或逆用二倍角公式求解.（练习运用：第 1 题）

2. 解决三角函数给值求值的问题，关键在于寻找"已知角"与"所求角"之间的关系，先用"已知角"表示"所求角"，再运用二倍角公式求解，解题时，注意利用诱导公式和同角三角函数关系对已知式进行转化.（练习运用：第 2,3,4,6 题）

3. 解决倍角公式与三角函数的综合问题时，一般先利用两角和差公式、二倍角公式、辅助角公式等将三角函数式转化为正弦型三角函数，再根据正弦函数的图象与性质求解相关问题.（练习运用：第 4,5,7 题）

【答案详析】

1. C　因为 $\alpha\neq\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，所以 $\tan\alpha\neq 0$. 因为 α 的终边过点 $P(\tan\alpha,4)$，所以 $\tan\alpha=\frac{4}{\tan\alpha}$，解得 $\tan\alpha=\pm 2$. $\frac{\sin 2\alpha+1}{\cos 2\alpha+1}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha-1+1}=\tan\alpha+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tan^2\alpha$. 当 $\tan\alpha=2$ 时，$\frac{\sin 2\alpha+1}{\cos 2\alpha+1}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 2^2=\frac{9}{2}$；当 $\tan\alpha=-2$ 时，$\frac{\sin 2\alpha+1}{\cos 2\alpha+1}=-2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times(-2)^2=\frac{1}{2}$.

2. B　已知 $\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha=\frac{3}{5}$，又 $\tan\alpha\tan\beta=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{1}{2}$，即 $2\sin\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta$，所以 $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{5},\cos\alpha\cos\beta=\frac{2}{5}$. 所以 $\cos 2(\alpha+\beta)=2\cos^2(\alpha+\beta)-1=2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)^2-1=2\times\frac{1}{25}-1=-\frac{23}{25}$.

3. A　因为 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$，所以 $\tan[2(\alpha-\beta)]=\frac{2\tan(\alpha-\beta)}{1-\tan^2(\alpha-\beta)}=\frac{4}{3}$，故 $\tan(2\alpha-\beta)=\tan[2(\alpha-\beta)+\beta]=\frac{\tan[2(\alpha-\beta)]+\tan\beta}{1-\tan[2(\alpha-\beta)]\cdot\tan\beta}=1$. 由 $\tan\beta=-\frac{1}{7}$，所以 $\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，又 $\tan\alpha=\tan[(\alpha-\beta)+\beta]=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{7}\right)}=\frac{1}{3}$，所以 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，故 $2\alpha-\beta\in(-\pi,0)$，所以 $2\alpha-\beta=-\frac{3\pi}{4}$.

4. BD　$f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2 x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$. 对于 A，$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{6}\right)=0\neq\pm 1$，因此 $x=\frac{\pi}{12}$ 不是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴，故 A 错误；对于 B，$f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=$

$\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos 2x$，显然函数 $y=\cos 2x$ 是偶函数，故 B 正确；对于 C，因为 $x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $2x-\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]\subseteq\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$，所以此时函数 $f(x)$ 单调递减，故 C 错误；对于 D，$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0$，即 $2x-\frac{\pi}{6}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，故 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$，当 $x\in(0,10\pi)$ 时，k 的值可取 $0,1,2,3,\cdots,19$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,10\pi)$ 上有 20 个零点，故 D 正确.

5. $\frac{1}{3}$　由 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{13}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{13}\right)=3\cos 2\alpha\sin\frac{17\pi}{52}$ 得 $\sin\alpha\cos\frac{\pi}{13}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{13}+\cos\alpha\cos\frac{\pi}{13}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{13}=3(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cdot\sin\frac{17\pi}{52}$，即 $(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\sin\frac{\pi}{13}+\cos\frac{\pi}{13}\right)=3(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{13}\right)$，则 $\sin\frac{\pi}{13}+\cos\frac{\pi}{13}=3(\cos\alpha-\sin\alpha)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\frac{\pi}{13}+\cos\frac{\pi}{13}\right)$，即 $3\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=1$，所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$.

6. 解：(1) 原式

$=\dfrac{\left(5\sin^2\frac{\alpha}{2}+5\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)+4\sin\alpha+6\cos^2\frac{\alpha}{2}-8}{-\cos\alpha}$

$=\dfrac{5+4\sin\alpha+6\cos^2\frac{\alpha}{2}-8}{-\cos\alpha}=\dfrac{4\sin\alpha+6\cos^2\frac{\alpha}{2}-3}{-\cos\alpha}$

$=\dfrac{4\sin\alpha+3\cos\alpha}{-\cos\alpha}=-(4\tan\alpha+3)$. 因为 $\sin 2\alpha=\frac{4}{5}$，所以 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2}{5}$，可得 $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{2}{5}$，解得 $\tan\alpha=2$ 或 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$. 由于 $\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $\tan\alpha=2$. 所以原式 $=-11$.

(2) 由题意知 $\frac{5\pi}{4}\leqslant\alpha+\beta\leqslant 2\pi$，因为 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{2}}{10}$，所以 $\sin(\alpha+\beta)=-\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=-\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2}=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$，又因为 $\frac{\pi}{2}\leqslant 2\alpha\leqslant\pi$，$\sin 2\alpha=\frac{4}{5}$，所以 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$. 所以 $\sin(\beta-\alpha)=\sin[(\alpha+\beta)-2\alpha]=\sin(\alpha+\beta)\cos 2\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin 2\alpha=-\frac{7\sqrt{2}}{10}\times\left(-\frac{3}{5}\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right)\times\frac{4}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $\frac{\pi}{2}\leqslant\beta-\alpha\leqslant\frac{5\pi}{4}$，故 $\beta-\alpha=\frac{3\pi}{4}$.

7. 解：(1) $\cos 3\theta=\cos(2\theta+\theta)=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\sin^2\theta\cos\theta=2\cos^3\theta-\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$.

(2) 令 $\theta=18°$，由等式 $\sin 36°=\cos 54°$ 知，$\sin 2\theta=\cos 3\theta$，即 $2\sin\theta\cos\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$，显然 $\cos\theta\neq 0$，所以 $2\sin\theta=4\cos^2\theta-3$，即 $4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0$，解得 $\sin\theta=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$，又 $\sin\theta>0$，所以 $\sin\theta=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$，即 $\sin 18°=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

(3) 令 $t=x-\frac{\pi}{4}$，则 $x=t+\frac{\pi}{4}$，且 $t\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$，$y=\frac{-\cos 3t}{\cos t}+\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)+1=\frac{3\cos t-4\cos^3 t}{\cos t}+\sqrt{2}\cos t+1=-4\cos^2 t+\sqrt{2}\cos t+4$，令 $u=\cos t\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，$y=-4u^2+\sqrt{2}u+4$，又函数图象的开口向下，对称轴为直线 $t=\frac{\sqrt{2}}{8}$，所以函数 $y=-4u^2+\sqrt{2}u+4$ 在 $t\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$ 上单调递减，因此 $f(1)\leqslant f(t)<f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，即 $f(1)=\sqrt{2}$，$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3$，由二次函数的图象得 $f(x)$ 的值域为 $[\sqrt{2},3)$.

题组 35　三角函数求值问题

【核心笔记】

1. 已知角求三角函数值：一般化为特殊角来求解. 解题时要遵循先整体后局部的基本原则. 如果整体符合三角函数的公式，则整体变形，否则进行局部变形.（练习运用：第 1,3,4 题）

2. 解决给值求值问题（练习运用：第 2,5,7,9 题）

【答案详析】

1. A　因为 $4\sin 420°=4\sin 60°=2\sqrt{3}$，所以 $\tan(\alpha+80°)=\tan(\alpha+20°+60°)=\frac{\tan(\alpha+20°)+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\tan(\alpha+20°)}=2\sqrt{3}$，解得 $\tan(\alpha+20°)=\frac{\sqrt{3}}{7}$，故 $7\tan(\alpha+20°)=\sqrt{3}$.

2. D　由 $\sqrt{2}\sin\alpha=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$，得 $\sqrt{2}\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$，解得 $\tan\alpha=-1$，所以 $\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan^2\alpha-2}{\tan^2\alpha+1}=-\frac{1}{2}$.

3. AC　对于 A，$\frac{\sin 24°\cos 6°-\sin 66°\sin 6°}{\sin 21°\cos 39°-\cos 21°\sin 39°}=$

$\frac{\sin 24^\circ\cos 6^\circ-\cos 24^\circ\sin 6^\circ}{\sin(21^\circ-39^\circ)}=\frac{\sin(24^\circ-6^\circ)}{\sin(-18^\circ)}=\frac{\sin 18^\circ}{-\sin 18^\circ}=-1$，故 A 正确；$\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=-\cos 2\alpha=-\frac{1}{2}$，故 B 错误；原式 $=\frac{\cos 10^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}=\frac{4\left(\frac{1}{2}\cos 10^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right)}{2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}=\frac{4\sin(30^\circ-10^\circ)}{\sin 20^\circ}=4$，故 C 正确；因为 $\tan 60^\circ=\sqrt{3}=\frac{\tan 23^\circ+\tan 37^\circ}{1-\tan 23^\circ\tan 37^\circ}$，所以 $\tan 23^\circ+\tan 37^\circ=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan 23^\circ\tan 37^\circ$，所以 $\tan 23^\circ+\tan 37^\circ+\sqrt{3}\tan 23^\circ\tan 37^\circ=\sqrt{3}$，故 D 错误.

4. B　$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\alpha=\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{3}$，因为 α 为锐角，$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{5}}{3}$，所以 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=2\times\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4\sqrt{5}}{9}$.

5. A　因为 $B\left(\frac{12}{13},-\frac{5}{13}\right)$，所以 $|OB|=1$，圆 O 的半径为 1. 根据三角函数的定义，易得 $\sin\angle AOB=\frac{5}{13}$，$\cos\angle AOB=\frac{12}{13}$，又 $|BC|=1$，所以 $\triangle BOC$ 为等边三角形，则 $\alpha=\frac{\pi}{3}-\angle AOB$，且 α 为锐角，所以 $2\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sqrt{3}\sin\alpha-1=\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha=2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\angle AOB\right)=-\cos\angle AOB+\sqrt{3}\sin\angle AOB=\frac{5\sqrt{3}-12}{13}$.

6. $\frac{5\pi}{4}$　因为 $\cos 2\beta=2\cos^2\beta-1=-\frac{4}{5}$，所以 $\cos^2\beta=\frac{1}{10}$，又 $\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\cos\beta=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，所以 $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，$-\beta\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\alpha-\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\pi\right)$，又 $\cos(\alpha-\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{5}<0$，所以 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sin\alpha=\sin[(\alpha-\beta)+\beta]=\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta=-\frac{2\sqrt{2}}{10}-\frac{3\sqrt{2}}{10}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，结合 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 可知，$\alpha=\frac{5\pi}{4}$.

7. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　因为 $\frac{1+\cos 2\alpha}{2\cos\alpha+\sin 2\alpha}=\frac{1-\cos 2\beta}{\sin 2\beta}$，所以 $\frac{1+2\cos^2\alpha-1}{2\cos\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1-(1-2\sin^2\beta)}{2\sin\beta\cos\beta}$，所以 $\frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\sin^2\beta}{\sin\beta\cos\beta}$，因为 α,β 为锐角，所以有 $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$，所以 $\cos\alpha\cos\beta=\sin\beta(1+\sin\alpha)$，即 $\cos\alpha\cos\beta=\sin\beta+\sin\beta\sin\alpha$，所以 $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\sin\beta$，即 $\cos(\alpha+\beta)=\sin\beta$，因为 α,β 为锐角，所以有 $\alpha+\beta+\beta=\frac{\pi}{2}$，即 $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos\left(\alpha+2\beta+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. **解**：(1) 因为 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{10}>-\frac{1}{2}=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$，所以 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，所以 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-\frac{1}{25}=\frac{24}{25}$，$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{7}{25}$，所以 $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\cos 2\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\sin 2\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\frac{24}{25}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{7}{25}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{31\sqrt{2}}{50}$.

(2) 由 (1) 知，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{1}{7}$，又 $\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\tan(\beta-\alpha)=-\frac{2}{11}$，所以 $\tan\beta=\tan(\beta-\alpha+\alpha)=\frac{\tan(\beta-\alpha)+\tan\alpha}{1-\tan(\beta-\alpha)\tan\alpha}=\frac{\left(-\frac{2}{11}\right)+\left(-\frac{1}{7}\right)}{1-\left(-\frac{2}{11}\right)\times\left(-\frac{1}{7}\right)}=-\frac{1}{3}$，因为 $\tan\beta=-\frac{1}{3}>-\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan\frac{5\pi}{6}$，所以 $\beta\in\left(\frac{5\pi}{6},\pi\right)$，由倍角公式得 $\tan 2\beta=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=\frac{-\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}=-\frac{3}{4}$，所以 $\tan(\alpha+2\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan 2\beta}{1-\tan\alpha\tan 2\beta}=\frac{-\frac{1}{7}-\frac{3}{4}}{1-\left(-\frac{1}{7}\right)\times\left(-\frac{3}{4}\right)}=-1$，由 (1) 知，$\alpha\in\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$，所以 $\alpha+2\beta\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$，所以 $\alpha+2\beta=\frac{7\pi}{4}$.

9. **解**：(1) 由 $\tan 30^\circ=\frac{2\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 得 $\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}$，则 $f(30^\circ)=\frac{1}{2}(\cos 30^\circ+\cos 60^\circ)(\tan 45^\circ-$

$\tan 15^\circ)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)(1-\tan 15^\circ)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)(\sqrt{3}-1)=\frac{1}{2}$.

(2) $f(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\cos 2x)\left(\tan\frac{3}{2}x-\tan\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}x\right)+\cos\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}x\right)\right]\cdot\left(\frac{\sin\frac{3}{2}x}{\cos\frac{3}{2}x}-\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x}\right)=\cos\frac{3}{2}x\cos\frac{1}{2}x\cdot\frac{\sin\frac{3}{2}x\cos\frac{1}{2}x-\cos\frac{3}{2}x\sin\frac{1}{2}x}{\cos\frac{3}{2}x\cos\frac{1}{2}x}=\sin\frac{3}{2}x\cos\frac{1}{2}x-\cos\frac{3}{2}x\sin\frac{1}{2}x=\sin\left(\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}x\right)=\sin x$,

$f(6^\circ)f(42^\circ)f(66^\circ)f(78^\circ)$

$=\sin 6^\circ\sin 42^\circ\sin 66^\circ\sin 78^\circ$

$=\cos 84^\circ\cos 48^\circ\cos 24^\circ\cos 12^\circ$

$=\frac{\cos 84^\circ\cos 48^\circ\cos 24^\circ\cos 12^\circ\cdot 16\sin 12^\circ}{16\sin 12^\circ}$

$=\frac{\cos 84^\circ\cos 48^\circ\cos 24^\circ\cdot 8\sin 24^\circ}{16\sin 12^\circ}$

$=\frac{\cos 84^\circ\cos 48^\circ\cdot 4\sin 48^\circ}{16\sin 12^\circ}=\frac{\cos 84^\circ\cdot 2\sin 96^\circ}{16\sin 12^\circ}$

$=\frac{\sin 168^\circ}{16\sin 12^\circ}=\frac{1}{16}$.

(3) 由(2)知 $\sin\alpha+\sin\beta=1$,令 $t=\cos\alpha+\cos\beta$,则 $t^2+1=2+2\sin\alpha\sin\beta+2\cos\alpha\cos\beta=2+2\cos(\alpha-\beta)$,因为 $-1\leqslant\cos(\alpha-\beta)\leqslant 1$,所以 $0\leqslant t^2+1\leqslant 4$,解得 $-\sqrt{3}\leqslant t\leqslant\sqrt{3}$,即 $\cos\alpha+\cos\beta$ 的取值范围为 $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$.

题组 36 三角恒等变换与三角函数性质的综合问题

【核心笔记】

三角恒等变换与三角函数的综合问题:一般先利用两角和差公式、二倍角公式、辅助角公式等将三角函数式转化为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$ 或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)+b$ 的形式,再根据正弦或余弦函数的图象与性质求解相关问题.

【答案详析】

1. A $f(x)=2\cos^2(\omega x)+\sin(2\omega x)-1=\cos(2\omega x)+\sin(2\omega x)=\sqrt{2}\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$,因为 $f(x_1)=f(x_2)=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $\sin\left(2\omega x_1+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2\omega x_2+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$. 因为当 $x\in[0,2\pi]$时,$\sin x=\frac{1}{2}$有两个解$\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$,所以 $y=\sin x$与 $y=\frac{1}{2}$的图象相交时,两个交点的最近距离为$\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$,又 $|x_1-x_2|$ 的最小值为 $\frac{2\pi}{3}$,所以 $\left|2\omega x_1+\frac{\pi}{4}-\left(2\omega x_2+\frac{\pi}{4}\right)\right|_{\min}=\frac{2\pi}{3}$,则 $2\omega|x_1-x_2|_{\min}=\frac{2\pi}{3}$,即 $2\omega=1$,解得 $\omega=\frac{1}{2}$.

2. ACD 对于 A,当 $n=1$ 时,$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+2\cos^2x=\cos 2x+\cos 2x+1=2\cos 2x+1$,可得 $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=2\cos\frac{3\pi}{2}+1=1$,故 $f(x)$图象的一个对称中心为$\left(\frac{3\pi}{4},1\right)$,故 A 正确. 对于 B,当 n 为奇数时,若 $n=4k+1(k\in\mathbf{Z})$,则 $f(x)=\sin\left(2x+2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)+2\cos^2x=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+2\cos^2x=\cos 2x+\cos 2x+1=2\cos 2x+1$,此时函数 $f(x)$的最小正周期是 π;若 $n=4k-1(k\in\mathbf{Z})$,则 $f(x)=\sin\left(2x+2k\pi-\frac{\pi}{2}\right)+2\cos^2x=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+2\cos^2x=-\cos 2x+\cos 2x+1=1$,显然 $f(x)$没有最小正周期,故 B 错误. 对于 C,当 n 为偶数时,若 $n=4k(k\in\mathbf{Z})$,则 $f(x)=\sin(2x+2k\pi)+2\cos^2x=\sin 2x+\cos 2x+1=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$,$f(x)_{\max}=\sqrt{2}+1$;若 $n=4k+2(k\in\mathbf{Z})$,则 $f(x)=\sin(2x+2k\pi+\pi)+2\cos^2x=\sin(2x+\pi)+2\cos^2x=-\sin 2x+\cos 2x+1=\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$,$f(x)_{\max}=\sqrt{2}+1$,故 C 正确. 对于 D,由 C 可知,当 n 为偶数时,$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$ 或 $f(x)=\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$,因为 $x\in\left(\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right)$,所以 $2x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,故 $f(x)$ 在$\left(\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right)$上单调递减,故 D 正确.

3. $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ $\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$ 因为最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,所以 $\omega=2$,又因为 $\cos 2\varphi+\cos\varphi=0$,所以 $2\cos^2\varphi+\cos\varphi-1=0$,所以 $\cos\varphi=-1$ 或 $\cos\varphi=\frac{1}{2}$,又因为 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以 $\cos\varphi=\frac{1}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,所以 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$,令 $2x+\frac{\pi}{3}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$,$k\in\mathbf{Z}$,又因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,所以 $k=1$,所以对称中心为

$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$. 因为 $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{5}>0,0<\alpha<\pi$，所以 $\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\in\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$，若 $\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)>\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{3}{5}$，不符合，所以 $\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}=-\frac{4}{5}$，所以 $\sin\alpha=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$.

4. 解：(1) $f(x)=\sqrt{3}\cos^2x-\sin 2x-\sqrt{3}\sin^2x=\sqrt{3}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}-\sin 2x-\sqrt{3}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}=\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，令 $2x+\frac{\pi}{6}\in[-\pi+2k\pi,2k\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $x\in\left[-\frac{7\pi}{12}+k\pi,-\frac{\pi}{12}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{7\pi}{12}+k\pi,-\frac{\pi}{12}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

(2) 因为 $x_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，$f(x_0)=2\cos\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{6}{5}$，即 $\cos\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，所以 $\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$，所以 $\cos 2x_0=\cos\left[\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\cos\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\sin\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$.

5. 解：方案一：如图 1，连接 OC. 设 $\angle COP=\theta,\theta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，则 $AD=BC=\sin\theta,OB=\cos\theta$，又 $\tan\frac{\pi}{3}=\frac{AD}{OA}$，所以 $OA=\frac{AD}{\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}$，所以 $AB=OB-OA=\cos\theta-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}$，所以 $S_{四边形ABCD}=AB\cdot BC=\left(\cos\theta-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right)\cdot\sin\theta=\sin\theta\cdot\cos\theta-\frac{\sin^2\theta}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\sin 2\theta-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{6}$，又 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时，$(S_{四边形ABCD})_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

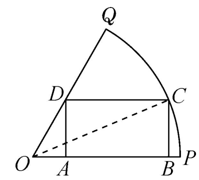


图 1

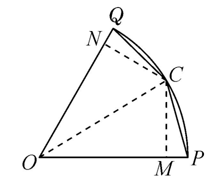
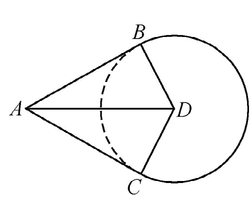


图 2

方案二：如图 2，连接 OC. 设 $\angle COP=\theta,\theta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，过点 C 作 $CM\perp OP,CN\perp OQ$，则 $CM=\sin\theta,CN=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$，所以 $S_{四边形OPCQ}=S_{\triangle OPC}+S_{\triangle OQC}=\frac{1}{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$，又 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时，$(S_{四边形OPCQ})_{\max}=\frac{1}{2}$. 因为 $|S_{四边形ABCD}-S_{四边形OPCQ}|=\left|\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}\right|=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$，而 $\frac{3-\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{3}=\frac{1-\sqrt{3}}{6}<0$，即 $|S_{四边形ABCD}-S_{四边形OPCQ}|<\frac{1}{3}$，所以截出的这两个四边形为“和谐四边形”.

综合提优(5.1～5.5)

1. C　如图，取优弧 BC 所在圆的圆心 D，连接 AD,BD,CD，则 $BD\perp AB,CD\perp AC$，则 $AD=4,BD=CD=2$，所以 $\angle BAD=\angle CAD=\frac{\pi}{6}$，则 $\angle BDC=\frac{2\pi}{3}$，$AB=AC=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，故优弧 BC 对应的圆心角为 $\frac{4\pi}{3}$，对应的扇形面积为 $\frac{1}{2}\times\frac{4\pi}{3}\times2^2=\frac{8\pi}{3}$，而 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2=2\sqrt{3}$，所以该封闭图形的面积为 $\frac{8\pi}{3}+S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}=\frac{8\pi}{3}+4\sqrt{3}$.



2. A　两个半圆的面积之比为 3，则半径之比为 $\sqrt{3}$，即 $\tan\angle BAC=\frac{\sqrt{3}}{3}$，又 $\angle BAC\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，故 $\angle BAC=\frac{\pi}{6}$，$\sin\angle DAB=\frac{3}{5}$，$\angle DAB\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，故 $\cos\angle DAB=\sqrt{1-\sin^2\angle DAB}=\frac{4}{5}$，$\cos\angle DAN=\cos\left(\angle DAB-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\angle DAB+\frac{1}{2}\sin\angle DAB=\frac{2\sqrt{3}}{5}+\frac{3}{10}$，$\cos\angle DNC=\cos 2\angle DAN=2\cos^2\angle DAN-1=2\left(\frac{2\sqrt{3}}{5}+\frac{3}{10}\right)^2-1=\frac{24\sqrt{3}+7}{50}$.

3. ACD 由于 $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}=f(x)$，则 $f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$，即 $f(x)$ 的图象关于 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称，A 正确；由于 $f(x+\pi)=\sqrt{\cos(x+\pi)}+\sqrt{\sin(x+\pi)}=\sqrt{-\cos x}+\sqrt{-\sin x}\neq f(x)$，B 错误；$f(x)=\sqrt{\cos x+\sin x+2\sqrt{\sin x\cos x}}=\sqrt{\sqrt{1+\sin 2x}+2\sqrt{\frac{1}{2}\sin 2x}}=\sqrt{\sqrt{1+\sin 2x}+\sqrt{2\sin 2x}}\geqslant\sqrt{\sqrt{1+0}+0}=1$，C 正确；$f(x)\leqslant\sqrt{\sqrt{1+1}+\sqrt{2}}=\sqrt{2\sqrt{2}}=\sqrt[4]{8}$，D 正确.

4. A 设 $g(m)=\cos 2x\cdot m+3\sin 2x$ 则当 $m\in[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$ 时，$g(m)_{\min}=g(\sqrt{3})$ 或 $g(m)_{\min}=g(-\sqrt{3})$，由题意可得 $\begin{cases}3\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x\geqslant\sqrt{6},\\3\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x\geqslant\sqrt{6},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\geqslant\sqrt{6},\\2\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\geqslant\sqrt{6},\end{cases}$ 则 $\begin{cases}2k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{4},\\2k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{4}\end{cases}$ $(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\begin{cases}k\pi+\frac{\pi}{24}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{7\pi}{24},\\k\pi+\frac{5\pi}{24}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{11\pi}{24}\end{cases}$ $(k\in\mathbf{Z})$，故 x 的取值范围是 $\left[k\pi+\frac{5\pi}{24},k\pi+\frac{7\pi}{24}\right](k\in\mathbf{Z})$.

5. $\left[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{2\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$ 由 $f(x)\leqslant\left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立知，$2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ 或 $\varphi=2k\pi-\frac{5\pi}{6}$，因为 $|\varphi|<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$ 或 $\varphi=-\frac{5\pi}{6}$. 当 $\varphi=\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，此时 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$，$f(\pi)=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)<f(\pi)$，不合题意，舍去；当 $\varphi=-\frac{5\pi}{6}$ 时，$f(x)=\sin\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)$，此时 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\pi-\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，$f(\pi)=\sin\left(2\pi-\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)>f(\pi)$，符合题意，所以 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)$，所以由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{5\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{2\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{2\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$.

6. $\frac{7}{8}$ 根据题意得 $\sin\alpha=\frac{\sin 20^\circ}{\tan 20^\circ-\sqrt{3}}=\frac{\sin 20^\circ\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ-\sqrt{3}\cos 20^\circ}=\frac{\sin 20^\circ\cos 20^\circ}{2\left(\frac{1}{2}\sin 20^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ\right)}=\frac{\sin 20^\circ\cos 20^\circ}{2\sin(-40^\circ)}=\frac{\sin 20^\circ\cos 20^\circ}{-2\sin 40^\circ}=\frac{\frac{1}{2}\sin 40^\circ}{-2\sin 40^\circ}=-\frac{1}{4}$，故 $\sin(2\alpha+90^\circ)=\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\times\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{7}{8}$.

7. $\sqrt{2}$ 令 $\begin{cases}x_1=\cos\alpha,\\y_1=\sin\alpha\end{cases}(\alpha\in[0,2\pi))$，$\begin{cases}x_2=\cos\beta,\\y_2=\sin\beta\end{cases}(\beta\in[0,2\pi))$，且 $\beta>\alpha$，则 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$B(\cos\beta,\sin\beta)$，由 $x_1y_2=x_2y_1$ 可得 $\cos\alpha\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta$，即 $\sin(\beta-\alpha)=0$，因为 $\alpha\neq\beta$，所以 $\beta-\alpha=\pi$，所以 $2x_1+x_2+2y_1+y_2=2\cos\alpha+\cos\beta+2\sin\alpha+\sin\beta=2\cos\alpha+\cos(\pi+\alpha)+2\sin\alpha+\sin(\pi+\alpha)=2\cos\alpha-\cos\alpha+2\sin\alpha-\sin\alpha=\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$，即当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，取得最大值 $\sqrt{2}$.

8. **解**：(1) $f(\theta)=\sin 2\theta-(2-m)(\sin\theta-\cos\theta)+8=\sin 2\theta-\sqrt{2}(2-m)\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+8$，当 $m=1$ 时，$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{6}-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)+8=\frac{1}{2}-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)+8=\frac{1}{2}+\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{6}+8=\frac{17+\sqrt{2}}{2}$.

(2) 设 $t=\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$，则 $t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，$2\sin\theta\cos\theta=-t^2+1$，$f(\theta)=Q(t)=-t^2-(2-m)t+9$，$t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，其对称轴为 $t=-1+\frac{m}{2}$. 当 $-1+\frac{m}{2}\geqslant 0$，即 $m\geqslant 2$ 时，$f(\theta)$ 的最小值为 $Q(-\sqrt{2})=7+2\sqrt{2}-\sqrt{2}m=7-3\sqrt{2}$，则 $m=5$；当 $-1+\frac{m}{2}<0$，即 $m<2$ 时，$f(\theta)$ 的最小值为 $Q(\sqrt{2})=7-2\sqrt{2}+\sqrt{2}m=7-3\sqrt{2}$，则 $m=-1$. 综上，$m=5$ 或 $m=-1$.

(3) 由 $\frac{8m-16}{\sin\theta-\cos\theta}>f(\theta)$ 对所有 $\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$ 都成立. 设 $t=\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$，则 $t\in(0,\sqrt{2}]$，所以

$\frac{8m-16}{t}>-t^2-(2-m)t+9$，$t\in(0,\sqrt{2}]$恒成立. 因为 $8-t^2>0$，所以 $m-2>t+\frac{1}{\frac{8}{t}-t}$在 $t\in(0,\sqrt{2}]$恒成立. 当 $t\in(0,\sqrt{2}]$时，$\frac{8}{t}-t$ 单调递减，则 $t+\frac{1}{\frac{8}{t}-t}$在$(0,\sqrt{2}]$上单调递增，所以当 $t=\sqrt{2}$时，$t+\frac{1}{\frac{8}{t}-t}$取得最大值 $\frac{7\sqrt{2}}{6}$，则 $m-2>\frac{7\sqrt{2}}{6}$，即 $m>\frac{7\sqrt{2}}{6}+2$，即 m 的取值范围为$\left(\frac{7\sqrt{2}}{6}+2,+\infty\right)$.

题组 37　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象与解析式的确定

【核心笔记】

1. 图象以及图象变换

(1) $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象可用“五点法”作简图得到，可通过变量代换 $z=\omega x+\varphi$ 计算五点坐标.

(2) 由函数 $y=\sin x$ 的图象通过变换得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象有两条途径：“先平移后伸缩”与“先伸缩后平移”.（练习运用：第 1,2,3,5,7,8,9,10 题）

2. 确定函数的解析式

(1) 代入法，把图象上的一个已知点代入（此时要注意该点在上升区间上还是在下降区间上）或把图象的最高点或最低点代入.

(2) 五点法：确定 φ 值时，往往以寻找“五点法”中的特殊点作为突破口.（练习运用：第 3,4,5,6 题）

【答案详析】

1. C　因为 $y=3\cos x=3\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$，将 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象上所有的点的横坐标变为原来的 2 倍（纵坐标不变）得到 $y=3\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象，再向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度得 $y=3\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$，即得到函数 $y=3\cos x$ 的图象.

2. C　因为直线 $x=-\frac{\pi}{3}$是函数 $f(x)=\cos x-b\sin x$ 图象的一条对称轴，所以 $f(0)=f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$，即 $1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}b$，解得 $b=\sqrt{3}$，所以 $f(x)=\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，则其周期为 2π，故 A 错误；当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$时，$x+\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$，则 $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，所以 $2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\in[-\sqrt{3},2]$，即函数 $f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的值域为$[-\sqrt{3},2]$，故 B 错误；由 $x+\frac{\pi}{3}\in[-\pi+2k\pi,2k\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$，得 $x\in\left[-\frac{4\pi}{3}+2k\pi,-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$，则函数 $f(x)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的单调递增区间为$\left[-\frac{4\pi}{3}+2k\pi,-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$，因为 $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)\subseteq\left[-\frac{4\pi}{3}+2k\pi,-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$，所以函数 $f(x)$在$\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$上单调递增，故 C 正确；将函数 $f(x)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$图象上的每一个点的纵坐标变为原来的$\frac{1}{2}$，再将所得到的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，则得到 $y=\frac{1}{2}\times2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$ 的图象，故 D 错误.

3. C　由图象可知函数 $f(x)$的最小正周期为 $T=\frac{5\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\pi$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$，又 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=1$，故 $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=1$，由于 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，故 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，将该函数图象上各点的横坐标缩短到原来的一半（纵坐标不变），再向右平移 $\theta(\theta>0)$个单位长度后，得到 $y=\sin\left(4x-4\theta+\frac{\pi}{3}\right)$的图象，因为该函数图象关于原点对称，即 $y=\sin\left(4x-4\theta+\frac{\pi}{3}\right)$为奇函数，故$-4\theta+\frac{\pi}{3}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $\theta=\frac{\pi}{12}-\frac{k\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，而 $\theta>0$，则 θ 的最小值为$\frac{\pi}{12}$.

4. C　由图象可得$\frac{T}{2}=\frac{13\pi}{12}-\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$，即 $T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，所以 $\omega=2$，$\frac{7\pi}{12}\times2+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $\varphi=2k\pi-\frac{2\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，因为$|\varphi|<\pi$，所以 $\varphi=-\frac{2\pi}{3}$，所以 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$，由 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant\pi$，得$-\frac{2\pi}{3}\leqslant2x_1-\frac{2\pi}{3}<2x_2-\frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{4\pi}{3}$，由 $f(x_1)=f(x_2)=-\frac{4}{5}$，结合图象可

得 $2x_1-\frac{2\pi}{3}+2x_2-\frac{2\pi}{3}=2\pi$，$x_1+x_2=\frac{5\pi}{3}$，所以 $x_2=\frac{5\pi}{3}-x_1$，所以 $\cos(x_2-x_1)=\cos\left(\frac{5\pi}{3}-2x_1\right)=-\cos\left(2x_1-\frac{2\pi}{3}\right)=-f(x_1)=\frac{4}{5}$.

5. BD　由函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\pi)$的部分图象，可得 $A=2$，$\frac{3}{4}\times\frac{2\pi}{\omega}=\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{3}$，所以 $\omega=2$，则 $f(x)=2\cos(2x+\varphi)$. 又 $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=2\cos\left(2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi\right)=2$，所以 $2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $\varphi=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $|\varphi|<\pi$，所以 $\varphi=-\frac{5\pi}{6}$，所以 $f(x)=2\cos\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)$，故 A 错误. 由 $f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)=2\cos\left(2x-\frac{7\pi}{6}\right)$，$f(-x)=2\cos\left(-2x-\frac{5\pi}{6}\right)=2\cos\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)=2\cos\left(2x-\frac{7\pi}{6}\right)$，所以 $f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=f(-x)$，故 B 正确；将函数 $f(x)$的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到 $g(x)=2\cos\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{5\pi}{6}\right]=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin 2x$ 的图象，则 $g(x)$为奇函数，故 C 错误；当 $x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{4}\right)$时，$2x\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{2}\right)$，因为 $y=\sin x$ 在 $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{2}\right)$上单调递减，所以函数 $g(x)$在区间 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{4}\right)$上单调递减，故 D 正确.

6. ABD　由题意可知，$f(x)$的最小正周期为 $T=4\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right)=\pi$，则 $\omega=2$，故 A 正确；由 $\begin{cases}2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2},\\2\times\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\varphi=k\pi,\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{6}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，则 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. 令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $-\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，函数 $f(x)$的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，当 $k=0$ 时，单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$，且 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{8}\right]\subseteq\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$，故 B 正确；由题意可得 $g(x)=\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$，则 $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(4\times\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，故 C 错误；将函数 $f(x)$的图象向左平移 $m(m>0)$个单位长度后可得 $h(x)=\sin\left[2(x+m)+\frac{\pi}{6}\right]=\sin\left(2x+2m+\frac{\pi}{6}\right)$的图象，且图象关于 y 轴对称，则 $2m+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $m=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，且 $m>0$，则 $m_{\min}=\frac{\pi}{6}$，故 D 正确.

7. $-\sqrt{3}$　将函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega\in\mathbf{R}$ 且 $\omega\neq 0)$的图象上所有点的横坐标变为原来的 2 倍，纵坐标保持不变，得到函数 $y=\sin\left(\frac{\omega}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象，所以 $g(x)=\cos(x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$与 $y=\sin\left(\frac{\omega}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\omega}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$为同一函数，故 $-\frac{\omega}{2}=1$，$\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$，即 $\omega=-2$，$\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以 $\tan\left(\frac{\pi}{3}\omega+\varphi\right)=\tan\left(-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$.

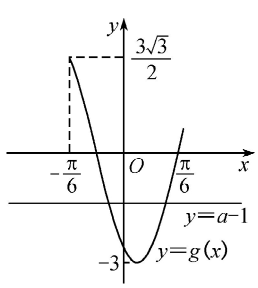
8. $\frac{\pi}{3}$　$f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x-1=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，将 $f(x)$图象向右平移 $\varphi\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$个单位长度后得到函数 $g(x)$的图象，即 $g(x)=2\sin\left[2(x-\varphi)+\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(2x-2\varphi+\frac{\pi}{6}\right)$，又 $|f(x_1)-g(x_2)|=4$，可得 $f(x_1)=2$，$g(x_2)=-2$ 或 $f(x_1)=-2$，$g(x_2)=2$. 不妨取 $f(x_1)=2$，$g(x_2)=-2$，则 $2x_1+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k_1\pi$，$k_1\in\mathbf{Z}$，$2x_2-2\varphi+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}+2k_2\pi$，$k_2\in\mathbf{Z}$，所以 $2x_1-2x_2=\pi-2\varphi+2(k_1-k_1)\pi$，所以 $|x_1-x_2|=\left|\frac{\pi}{2}-\varphi+(k_1-k_1)\pi\right|$，由 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，可得当 $k_1-k_1=0$ 时，$|x_1-x_2|$的最小值为 $\left|\frac{\pi}{2}-\varphi\right|=\frac{\pi}{6}$，可得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

9. 解：(1) 由题意得 $T=2\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=\pi$，所以 $\frac{T}{4}=\frac{\pi}{4}$，且 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，所以 $m=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$，$n=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}$，$p=\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{4}=\frac{13\pi}{12}$，且 $2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$，故

$m=\frac{\pi}{12},n=\frac{7\pi}{12},p=\frac{13\pi}{12},f(x)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

(2) $f(x)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象向右平移$\theta(\theta>0)$个单位长度,得到 $y=3\sin\left[2(x-\theta)-\frac{\pi}{6}\right]=3\sin\left(2x-2\theta-\frac{\pi}{6}\right)$的图象,再将图象上所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变),可得 $g(x)=3\sin\left(4x-2\theta-\frac{\pi}{6}\right)$的图象.因为 $g(x)$图象的一个对称中心为$\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$,所以 $4\times\frac{5\pi}{12}-2\theta-\frac{\pi}{6}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得 $\theta=\frac{3\pi}{4}-\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,因为$\theta>0$,所以当$k=1$时,$\theta$取得最小值为$\frac{\pi}{4}$.

(3) 当θ取最小值$\frac{\pi}{4}$时,$g(x)=3\sin\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)$,当$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$时,$4x-\frac{2\pi}{3}\in\left[-\frac{4\pi}{3},0\right]$,此时 $g(x)=3\sin\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)\in\left[-3,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$,如图,因为 $g(x)=a-1$恰有两个实数根,结合图象可知$-3<a-1\leqslant 0$,即$-2<a\leqslant 1$,所以 $a\in(-2,1]$.



10. 解:(1) $f(x)=\cos^2(\omega x)-\sqrt{3}\sin(\omega x)\cos(\omega x)-\frac{1}{2}(\omega>0)=\frac{1+\cos(2\omega x)}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2\omega x)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cos(2\omega x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2\omega x)=\cos\left(2\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$,因为$f(x)$最小正周期为$\pi$,所以 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$,得 $\omega=1$,所以 $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$,由 $2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得 $k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$,因为 $x\in[0,\pi]$,所以当 $k=0$时,$0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$,当 $k=1$ 时,$\frac{5\pi}{6}\leqslant x\leqslant\pi$,所以 $f(x)$在区间$[0,\pi]$上的单调递减区间为$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$和$\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$.

(2) 将 $f(x)$的图象先向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度,得到 $y=\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\cos 2x$,再将图象上的所有点的横坐标伸长为原来的 2 倍,得 $y=\cos x$ 的图象,所以$g(x)=\cos x$,方程 $2a[g(x)+\sin x]^2+2[g(x)-\sin x]-5a+1=0$,即为方程 $2a(\cos x+\sin x)^2+2(\cos x-\sin x)-5a+1=0$,令 $t=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$,所以 $x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$,所以 $t\in[0,1]$,因为$(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2=2$,所以$(\cos x+\sin x)^2=2-t^2$,所以原方程化为 $2a(2-t^2)+2t-5a+1=0$,所以 $a=\frac{2t+1}{2t^2+1}=\frac{t+\frac{1}{2}}{t^2+\frac{1}{2}}=\frac{t+\frac{1}{2}}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\left(t+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}}$,令 $s=t+\frac{1}{2}$,则 $s\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$,$a=\frac{s}{s^2-s+\frac{3}{4}}=\frac{1}{s+\frac{3}{4s}-1}$,因为 $p=s+\frac{3}{4s}$在$\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$上单调递减,在$\left[\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right]$上单调递增,所以当 $s=\frac{\sqrt{3}}{2}$时,$p_{\min}=\sqrt{3}$,则 $a_{\max}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$,因为当 $s=\frac{1}{2}$时,$p=2$,当 $s=\frac{3}{2}$时,$p=2$,所以 $a_{\min}=1$,所以实数 a 的取值范围为$\left[1,\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right]$.

题组 38　结合函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的性质求参数 A,ω,φ 的值或范围

【核心笔记】

1. 利用三角函数的奇偶性,求出φ.若$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A,\omega\neq 0)$,则①$f(x)$为偶函数的充要条件是 $\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$;②$f(x)$为奇函数的充要条件是 $\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$.若 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)(A,\omega\neq 0)$,则①$f(x)$为偶函数的充要条件是 $\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$;②$f(x)$为奇函数的充要条件是 $\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$.(练习运用:第 1 题)
2. 根据单调性确定参数的值(练习运用:第 4,5,6,8 题)
3. 对于可化为 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 或 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)$形式的三角函数,已知对称轴、对称中心,零点等求参数 ω,φ 的值或范围,常用整体法,将$\omega x+\varphi$ 看作一个整体,借助于正、余弦函数的图象与性质求解.(练习运用:第 2,3,5,7,9,10 题)

【答案详析】

1. C 因为 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,\varphi\in(0,\pi))$ 为奇函数，所以 $f(0)=0$，即 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，所以 $f(x)=-\sin\omega x$，当 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$时，则 $\omega x\in\left[-\frac{\omega\pi}{3},\frac{\omega\pi}{6}\right]$，所以$\begin{cases}-\frac{3\pi}{2}<-\frac{\omega\pi}{3}\leqslant-\frac{\pi}{2},\\ \frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\omega\pi}{6}<\frac{3\pi}{2},\end{cases}$解得 $3\leqslant\omega<\frac{9}{2}$.

2. B $f(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x)-\cos(\omega x)=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$，若函数 $f(x)$的最小正周期为 π，且 $\omega>0$，则$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得 $\omega=2$，可得 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$. 将 $f(x)$的图象向右平移 φ 个单位长度后得到函数 $g(x)$的图象，则 $g(x)=f(x-\varphi)=2\sin\left[2x-\left(2\varphi+\frac{\pi}{6}\right)\right]$，可得 $2\varphi+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以当 $k=0$ 时，正实数 φ 取得最小值$\frac{\pi}{6}$.

3. B $y=2\sin(2x-\varphi)$靠近原点的对称轴为 $x=x_0$，则 $2x_0-\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $x_0=\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，因为$|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$，则其离原点最近的对称轴为 $x_0=\frac{\varphi}{2}\pm\frac{\pi}{4}$，要为近轴函数，则$|x_0|\leqslant\frac{\pi}{6}$. 因为$\left|\pm\frac{\pi}{4}\right|>\frac{\pi}{6}$，所以 $\varphi>0$ 时，$x_0=\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}$，$\varphi<0$ 时，$x_0=\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}$，所以$\begin{cases}\left|\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right|\leqslant\frac{\pi}{6},\\ \varphi>0,\\ |\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}\left|\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right|\leqslant\frac{\pi}{6},\\ \varphi<0,\\ |\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2},\end{cases}$解得 $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$.

4. A 因为函数 $f(x)=\sqrt{2}\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)$在区间$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，所以$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}$，所以 $\omega\leqslant4$，因为 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，所以$\frac{\omega\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\leqslant\omega x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\omega\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$，若 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，则$\begin{cases}\frac{\omega\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\leqslant2k\pi,\\ \frac{\omega\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\geqslant2k\pi-\pi,\end{cases}$$k\in\mathbf{Z}$，解得 $8k-3\leqslant\omega\leqslant4k+\frac{1}{2}$，当 $k=0$ 时，$-3\leqslant\omega\leqslant\frac{1}{2}$，又因为 $0<\omega\leqslant4$，所以 $0<\omega\leqslant\frac{1}{2}$.

5. BC 由函数 $f(x)=4\cos x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=4\cos x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2x=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+1=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$，对于 A，由$f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=1$，可得点$\left(\frac{5\pi}{12},1\right)$为函数 $f(x)$图象的一个对称中心，所以 A 错误；对于 B，由 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$，可得 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{2\pi}{3}\right)+f\left(\frac{3\pi}{3}\right)=3$，且函数 $f(x)$的最小正周期为 $T=\pi$，所以 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\cdots+f\left(\frac{2\ 023\pi}{3}\right)=674\times\left[f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{2\pi}{3}\right)+f\left(\frac{3\pi}{3}\right)\right]+f\left(\frac{2\ 023\pi}{3}\right)=674\times3+f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\ 022+2\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+1=2\ 024$，所以 B 正确；对于 C，由函数 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$，令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得$-\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，当 $k=0$ 时，可得$-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}$，要使得$f(x)$在$[-m,m]$上单调递增，则满足$\begin{cases}-m\geqslant-\frac{\pi}{3},\\ m\leqslant\frac{\pi}{6},\end{cases}$且 $m>0$，解得 $0<m\leqslant\frac{\pi}{6}$，所以 C 正确；由函数 $y=f(tx)=2\sin\left(2tx+\frac{\pi}{6}\right)+1$ 的图象在$[0,\pi]$上恰有 3 个最高点，由 $x\in[0,\pi]$，得 $2tx+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},2t\pi+\frac{\pi}{6}\right]$，需满足$\frac{9\pi}{2}\leqslant2t\pi+\frac{\pi}{6}<\frac{13\pi}{2}$，解得$\frac{13}{6}\leqslant t<\frac{19}{6}$，所以 D 错误.

6. ACD 对于 A，因为$-f\left(-\frac{7\pi}{24}\right)=f\left(\frac{\pi}{24}\right)$，所以$\frac{-\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi}{24}}{2}=-\frac{\pi}{8}$是 $f(x)$的零点，所以$\left(-\frac{\pi}{8},0\right)$是 $f(x)$图象的一个对称中心，故 A 正确；对于 B，因为函数$f(x)$在区间$\left[-\frac{7\pi}{24},\frac{\pi}{24}\right]$上为单调函数，所以$\frac{T}{2}\geqslant\frac{\pi}{24}-\left(-\frac{7\pi}{24}\right)=\frac{\pi}{3}$，$T\geqslant\frac{2\pi}{3}$，故 B 错误；对于 C，因为

$f\left(\frac{\pi}{24}\right)=f\left(\frac{5\pi}{24}\right)$，所以 $x=\frac{\frac{\pi}{24}+\frac{5\pi}{24}}{2}=\frac{\pi}{8}$是 $f(x)$图象的一条对称轴，所以 $k\cdot\frac{T}{2}+\frac{T}{4}=\frac{\pi}{8}-\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $T=\frac{\pi}{2k+1}$，$k\in\mathbf{Z}$，因为 $T\geqslant\frac{2\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $T=\pi$，又 $\omega>0$，故 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，则 $f(x)=\cos(2x+\varphi)$，所以 $x=\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{2}=-\frac{3\pi}{8}$是$f(x)$图象的一条对称轴，故 C 正确；对于 D，因为 $x=\frac{\pi}{8}$是 $f(x)$图象的一条对称轴，所以 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=\pm1$，$0<\varphi<\pi$，$\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}+\varphi<\frac{5\pi}{4}$，所以 $\frac{\pi}{4}+\varphi=\pi$，解得 $\varphi=\frac{3\pi}{4}$，所以 $f(x)=\cos\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)$，因为 $y=\cos 2x$ 的图象向左平移$\frac{3\pi}{8}$个单位长度得 $y=\cos\left[2\left(x+\frac{3\pi}{8}\right)\right]=\cos\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)=f(x)$的图象，故 D 正确.

7. $[14,20)$　因为 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}$，所以$\frac{\pi}{3}\leqslant\omega x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{12}\omega+\frac{\pi}{3}$. 根据已知结合正弦函数的图象与性质可得，应满足$\frac{3\pi}{2}\leqslant\frac{\omega\pi}{12}+\frac{\pi}{3}<2\pi$，解得 $14\leqslant\omega<20$.

8. $\left(\frac{4}{5},1\right]$　$f(x)=2\sin\left(\frac{\omega x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\omega x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\omega x}{2}\cos\frac{\omega x}{2}+\sqrt{3}\cos^2\frac{\omega x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sin(\omega x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\omega x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$，$x\in\left(0,\frac{5\pi}{6}\right)$，$\omega>0$，故 $\omega x+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\omega\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)$，因为 $f(x)$在区间$\left(0,\frac{5\pi}{6}\right)$上只有 1 个零点，所以$\frac{5\omega\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\in(\pi,2\pi]$，解得 $\omega\in\left(\frac{4}{5},2\right]$. 当 $x\in\left(-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$时，$\omega x+\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{2\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{3},\frac{\omega\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)$，因为 $\omega\in\left(\frac{4}{5},2\right]$，所以$-\frac{2\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\in\left[-\pi,-\frac{\pi}{5}\right)$，$\frac{\omega\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{7\pi}{15},\frac{2\pi}{3}\right]$，要想当 $x\in\left(-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$时，$f(x)$单调递增，则$\begin{cases}-\frac{2\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\geqslant-\frac{\pi}{2},\\ \frac{\omega\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2},\end{cases}$解得 $\omega\leqslant1$. 综上，ω 的取值范围是 $\omega\in\left(\frac{4}{5},1\right]$.

9. 解：(1) 由题意知 $f(x)=\sin^4x+2\sin x\cos x-\cos^4x=\sin 2x+(\sin^2x-\cos^2x)(\sin^2x+\cos^2x)=\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，因为 $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}$，所以 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$，令 $\alpha-\frac{\pi}{4}=t$，则 $\alpha=t+\frac{\pi}{4}$，$\sin t=\frac{1}{3}$，因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $t\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$，由 $\sin^2t+\cos^2t=1$，得 $\cos^2t=\frac{8}{9}$，所以 $\cos t=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(t+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)=\cos t\cos\frac{\pi}{3}-\sin t\sin\frac{\pi}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$.

(2) 将函数 $f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{24}$个单位长度，得到 $g(x)=\sqrt{2}\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{24}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象，将函数 $g(x)$图象上各点的横坐标变为原来的$\frac{1}{\omega}(\omega>0)$(纵坐标不变)，得到函数 $h(x)=\sqrt{2}\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{3}\right)$. 令 $h(x)=0$，得 $2\omega x-\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $x=\frac{\pi}{6\omega}+\frac{k\pi}{2\omega}(k\in\mathbf{Z})$，又 $h(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$上没有零点，所以$\begin{cases}\frac{\pi}{6\omega}+\frac{k\pi}{2\omega}<\frac{\pi}{4},\\ \frac{\pi}{6\omega}+\frac{(k+1)\pi}{2\omega}>\frac{\pi}{2}\end{cases}(k\in\mathbf{Z})$，解得$\frac{2}{3}+2k<\omega<\frac{4}{3}+k$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $\omega>0$，所以当 $k=-1$ 时，$0<\omega<\frac{1}{3}$，当 $k=0$ 时，$\frac{2}{3}<\omega<\frac{4}{3}$，即 ω 的取值范围是$\left(0,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$.

10. 解：(1) 由题意，得 $f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=0$，解得 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$. 又 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，从而 $g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)$.

(2) 对任意 $x_1,x_2\in[0,t]$，且 $x_1<x_2$，$f(x_1)-f(x_2)<g(x_1)-g(x_2)$，则 $f(x_1)-g(x_1)<f(x_2)-g(x_2)$，即$f(x)-g(x)$在$[0,t]$上单调递增. 而$f(x)-g(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin 2x$，易得其单调递增区间为$\left[k\pi-\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{4}\right](k\in\mathbf{Z})$. 由于$[0,t]$

$\subseteq\left[k\pi-\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{4}\right](k\in\mathbf{Z})$，所以当 $k=0$ 时，$[0,t]\subseteq\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，从而 $t\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$，所以实数 t 的最大值为$\frac{\pi}{4}$.

(3) $y=g(\omega x)=\sin\left(2\omega x+\frac{5\pi}{6}\right)$，其最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{\omega}$. 而区间$\left[a,a+\frac{\pi}{4}\right]$的长度为$\frac{\pi}{4}$，要满足题意，则$\begin{cases}3T\leqslant\frac{\pi}{4},\\5T>\frac{\pi}{4},\end{cases}$所以$\frac{\pi}{20}<T=\frac{\pi}{\omega}\leqslant\frac{\pi}{12}$，解得 $\omega\in[12,20)$.

题组 39　三角函数模型的应用

【核心笔记】

解答三角函数应用题的基本步骤.

(1) 审清题意：三角函数应用题的语言形式多为文字语言和图形语言，阅读材料时要读懂题目所反映的实际问题的背景，领悟其中的数学本质，在此基础上分析出已知什么，求什么，提炼出数学语言.

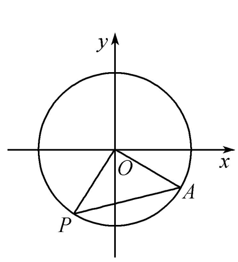
(2) 建立函数建模：整理数据，引入变量，找到变化规律，运用已经掌握的三角函数、物理学等相关知识建立函数关系式，建立 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 的模型.

(3) 解答函数模型：利用所学的三角函数知识，结合题目的要求，对得到的三角函数模型予以解答，求出结果.

(4) 得出结论，将所得结果翻译成实际问题的答案，并检验.

【答案详析】

1. A　由已知 $r=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2}=4$，$T=60$，经过 45 s 后，即旋转了 $\frac{3}{4}$ 个周期，因此 $\angle POA=\left(1-\frac{3}{4}\right)\times2\pi=\frac{\pi}{2}$，如图，所以 $|PA|=4\sqrt{2}$.



2. B　当 $x\in[6,16]$时，$\frac{\pi}{8}x-\frac{5\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$，由 $y=10\sin\left(\frac{\pi}{8}x-\frac{5\pi}{4}\right)+25=20$，得 $\sin\left(\frac{\pi}{8}x-\frac{5\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$，所以$\frac{\pi}{8}x-\frac{5\pi}{4}=-\frac{\pi}{6}$，$x=\frac{26}{3}\approx8.7$(时). 由 $y=10\sin\left(\frac{\pi}{8}x-\frac{5\pi}{4}\right)+25=30$，得 $\sin\left(\frac{\pi}{8}x-\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$，所以$\frac{\pi}{8}x-\frac{5\pi}{4}=\frac{\pi}{6}$，$x=\frac{34}{3}\approx11.3$(时). 故在 6 时～16 时中，观花的最佳时段约为 8.7 时～11.3 时.

3. ACD　对于 A，由图知 $f(t)_{\max}=8$，$f(t)_{\min}=2$，所以 $A=\frac{f(t)_{\max}-f(t)_{\min}}{2}=3$，$b=\frac{f(t)_{\max}+f(t)_{\min}}{2}=5$. 因为 $f(t)$的最小正周期 $T=12$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{6}$. 因为 $f(3)=3\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)+5=8$，所以 $\frac{\pi}{2}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=0$，所以 $f(t)=3\sin\frac{\pi}{6}t+5(0\leqslant t\leqslant24)$，故 A 正确；对于 B，令$\frac{\pi}{6}t=k\pi$，$(k\in\mathbf{Z})$，解得 $t=6k(k\in\mathbf{Z})$，当 $k=2$ 时，$t=12$，则$f(12)=3\sin2\pi+5=5$，则函数 $f(t)$的图象关于点(12，5)对称，故 B 错误；对于 C，$f(5)=3\sin\left(\frac{\pi}{6}\times5\right)+5=6.5$，故 C 正确；对于 D，$2t\in[0,6]$，则$t\in[0,3]$，令 $g(2t)=f(2t)-n=0$，则 $f(2t)=n$，令 $2t=m$，则根据图象知两零点 m_1，m_2 关于直线 $t=3$ 对称，则 $m_1+m_2=6$，即 $2t_1+2t_2=6$，则 $t_1+t_2=3$，则 $\tan\frac{\pi}{t_1+t_2}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，故 D 正确.

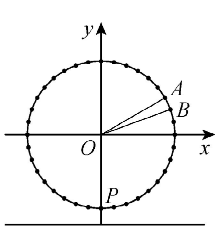
4. 3　由 $H(t)=\sin2\pi t+\frac{9}{10}\sin\omega\pi t(0<\omega<8)$，且 $H\left(\frac{5}{3}\right)\approx-0.866$，得 $H\left(\frac{5}{3}\right)=\sin\left(2\pi\times\frac{5}{3}\right)+\frac{9}{10}\sin\left(\omega\pi\times\frac{5}{3}\right)=\sin\frac{10\pi}{3}+\frac{9}{10}\sin\left(\frac{5\pi}{3}\omega\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{9}{10}\sin\left(\frac{5\pi}{3}\omega\right)\approx-0.866$，所以 $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\omega\right)=0$. 由图可知 $H(1)=\sin2\pi+\frac{9}{10}\sin\omega\pi=\frac{9}{10}\sin\omega\pi=0$，故 $\omega\pi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $\omega=k$，$k\in\mathbf{Z}$. 因为 $0<\omega<8$，且$\sin\left(\frac{5\pi}{3}\omega\right)=0$，所以 $\omega=3$ 或 $\omega=6$. 由图可知，1 不是 $H(x)$的周期，当 $\omega=6$ 时，$H(t)=\sin2\pi t+\frac{9}{10}\sin6\pi t$，此时$H(t+1)=\sin2\pi(t+1)+\frac{9}{10}\sin6\pi(t+1)=\sin2\pi t+\frac{9}{10}\sin6\pi t=H(t)$，周期为 1，不符合题意. 当 $\omega=3$ 时，$H(t)=\sin2\pi t+\frac{9}{10}\sin3\pi t$，易知 $H(t+1)\neq H(t)$，满足题意. 综上，$\omega=3$.

5. **解**：(1) 设该函数为 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B(A>$

$0,\omega>0,|\varphi|<\pi$)，其中 $x=1,2,\cdots,12$. 根据①可知这个函数的周期是 12；由②可知 $f(2)$ 最小，$f(8)$ 最大，且 $f(8)-f(2)=400$，故该函数的振幅为 200；由③可知 $f(x)$ 逐月递增，且 $f(2)=100$，所以 $f(8)=500$. 根据上述分析可得 $\frac{2\pi}{\omega}=12$，故 $\omega=\frac{\pi}{6}$. 由 $\begin{cases}-A+B=100,\\A+B=500,\end{cases}$ 解得 $A=200,B=300$. 当 $x=2$ 时，$f(x)$ 最小，当 $x=8$ 时，$f(x)$ 最大，故 $\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=-1$，且 $\sin\left(8\times\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=1$，可得 $\varphi=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 由 $|\varphi|<\pi$，得 $\varphi=-\frac{5\pi}{6}$. 所以入住客栈的游客人数与月份之间的函数关系式为 $f(x)=200\sin\left(\frac{\pi}{6}x-\frac{5\pi}{6}\right)+300(x=1,2,\cdots,12)$.

(2) 由条件可知 $200\sin\left(\frac{\pi}{6}x-\frac{5\pi}{6}\right)+300\geqslant400$，化简得 $\sin\left(\frac{\pi}{6}x-\frac{5\pi}{6}\right)\geqslant\frac{1}{2}$，即 $2k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{6}x-\frac{5\pi}{6}\leqslant2k\pi+\frac{5\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $12k+6\leqslant x\leqslant12k+10$，$k\in\mathbf{Z}$. 因为 $x\in\mathbf{N}^*$，且 $1\leqslant x\leqslant12$，所以 $x=6,7,8,9,10$，即客栈在 6，7，8，9，10 月份要准备 400 份以上的食物.

6. 解:(1) 如图，设座舱距离地面最近的位置为点 P，以轴心 O 为原点，与地面平行的直线为 x 轴建立直角坐标系.



设 $t=0$ min 时，游客甲位于点 $P(0,-55)$，以 OP 为终边的角为 $-\frac{\pi}{2}$. 根据摩天轮转一周大约需要 30 min，可知座舱转动的角速度约 $\frac{\pi}{15}$ rad/min，由题意可得 $H=55\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)+65,0\leqslant t\leqslant30$.

(2) 如图，甲、乙两人的位置分别用点 A,B 表示，则 $\angle AOB=\frac{2\pi}{48}=\frac{\pi}{24}$. 经过 t min 后甲距离地面的高度为 $H_1=55\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)+65$，点 B 相对于点 A 始终落后 $\frac{\pi}{24}$ rad，此时乙距离地面的高度为 $H_2=55\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{13\pi}{24}\right)+65$，则甲、乙距离地面的高度差 $h=|H_1-H_2|=55\left|\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{13\pi}{24}\right)\right|=55\left|\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{13\pi}{24}-\frac{\pi}{15}t\right)\right|$，利用 $\sin\theta+\sin\varphi=2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$，可得 $h=110\left|\sin\frac{\pi}{48}\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{48}\right)\right|$，$0\leqslant t\leqslant30$. 当 $\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{48}=\frac{\pi}{2}\left(\text{或}\frac{3\pi}{2}\right)$，即 $t\approx7.8$ (或 22.8) 时，h 的最大值为 $110\sin\frac{\pi}{48}\approx7.2$. 所以甲、乙两人距离地面的高度差的最大值约为 7.2 m.

综合提优(5.6～5.7)

1. A　$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象上每一点的横坐标变为原来的 2 倍得到 $g(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象，令 $x-\frac{\pi}{4}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $g(x)$ 图象的对称中心为 $\left(\frac{\pi}{4}+k\pi,0\right)(k\in\mathbf{Z})$，对于 A，令 $\frac{\pi}{4}+k\pi=\frac{5\pi}{4}$，解得 $k=1$，所以 $\left(\frac{5\pi}{4},0\right)$ 是 $g(x)$ 图象的一个对称中心，A 正确；对于 B，令 $\frac{\pi}{4}+k\pi=\frac{\pi}{8}$，解得 $k=-\frac{1}{8}$，B 错误；对于 C，令 $\frac{\pi}{4}+k\pi=-\frac{\pi}{4}$，解得 $k=-\frac{1}{2}$，C 错误；对于 D，令 $\frac{\pi}{4}+k\pi=-\frac{\pi}{16}$，解得 $k=-\frac{5}{16}$，D 错误.

2. C　将函数 $f(x)=\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6\omega}$ 个单位长度，得到函数 $y=g(x)=\sin\left[2\omega\left(x-\frac{\pi}{6\omega}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin(2\omega x)$ 的图象，若函数 $y=g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增，则 $\frac{2\pi\omega}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}$，解得 $\omega\leqslant\frac{3}{4}$，所以 ω 的最大值为 $\frac{3}{4}$.

3. B　由 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\in[-1,1]$，$f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f\left(\frac{4\pi}{3}\right)=2$，得 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$，$f\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-1$. 由对任意实数 $x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$，均有 $\left[f(x)-f\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]\cdot\left[f(x)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]<0$ 恒成立，可得对任意实数 $x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$，均有 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)>f(x)>f\left(\frac{4\pi}{3}\right)$，即 $T=2\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=2\pi$，则 $\omega=\frac{2\pi}{T}=1$，则 $\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

$(k\in\mathbf{Z})$,又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,故$\varphi=\frac{\pi}{6}$.

4. C 因为$t_1+t_2=2,t_2+t_3=5,t_3-t_1=T$,所以$T=3$,又$T=\frac{2\pi}{\omega}$,所以$\omega=\frac{2\pi}{3}$,则$y=\sin\left(\frac{2\pi}{3}t+\varphi\right)$,由$y>0.5$可得$\sin\left(\frac{2\pi}{3}t+\varphi\right)>0.5$,所以$2k\pi+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}t+\varphi<\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,所以$3k+\frac{1}{4}-\frac{3\varphi}{2\pi}<t<\frac{5}{4}-\frac{3\varphi}{2\pi}+3k,k\in\mathbf{Z}$,故$\left(3k+\frac{5}{4}-\frac{3\varphi}{2\pi}\right)-\left(3k+\frac{1}{4}-\frac{3\varphi}{2\pi}\right)=1$,所以在一个周期内阻尼器离开平衡位置的位移大于0.5 m的总时间为1 s.

5. BCD 由图可知$\frac{1}{4}T=\frac{7\pi}{2}-2\pi=\frac{3\pi}{2}$,故$T=6\pi$,所以$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{1}{3}$,$f(x)=2\sin\left(\frac{1}{3}x+\varphi\right)$,又$f(2\pi)=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=2$,所以$\varphi+\frac{2\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,即$\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$,又$|\varphi|<\pi$,所以$\varphi=-\frac{\pi}{6}$,所以$f(x)=2\sin\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)$,故A错误;令$f(x)=2\sin\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)\geqslant1$,则$\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得$\{x\mid 6k\pi+\pi\leqslant x\leqslant6k\pi+3\pi,k\in\mathbf{Z}\}$,故B正确;将$f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{2}$个单位长度,得$h(x)=2\sin\frac{1}{3}x$为奇函数,故C正确;由题意$g(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$,$x\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right]$,则$x-\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$,则$g(x)$单调递减,故D正确.

6. $\frac{53\pi}{12}$ 将函数$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度,再向上平移2个单位长度,得到$g(x)=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{6}\right]+2=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+2$的图象,因为$g(x_1)\cdot g(x_2)=16$,且$x_1,x_2\in[-2\pi,2\pi]$,所以$g(x_1)=g(x_2)=4$,则$2x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,即$x=k\pi+\frac{5\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$,因为$x_1,x_2\in[-2\pi,2\pi]$,所以$x_1,x_2\in\left\{-\frac{19\pi}{12},-\frac{7\pi}{12},\frac{5\pi}{12},\frac{17\pi}{12}\right\}$,当$x_1=\frac{17\pi}{12}$,$x_2=-\frac{19\pi}{12}$时,$2x_1-x_2$取得最大值,此时$2x_1-x_2=2\times\frac{17\pi}{12}-\left(-\frac{19\pi}{12}\right)=\frac{53\pi}{12}$.

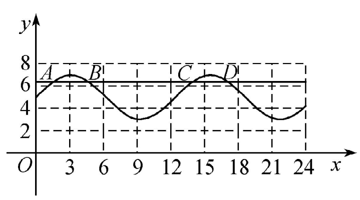
7. $\frac{33}{4}$ 由$f\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$知,$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$的图象关于$x=\frac{\pi}{3}$对称,又因为$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=0$,所以$\begin{cases}-\frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_1\pi,\\ \frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_2\pi+\frac{\pi}{2},\end{cases}$ $k_1,k_2\in\mathbf{Z}$,则$\begin{cases}\omega=\frac{3(2k+1)}{4},\\ \varphi=\frac{k'\pi}{2}+\frac{\pi}{4},\end{cases}$ $k,k'\in\mathbf{Z}$,其中$k=k_2-k_1,k'=k_2+k_1=2k_2-k$.由$|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$,得$k'$的值只能为$-1$或0,当$k'=-1$时,$\varphi=-\frac{\pi}{4}$,$k=2k_2+1,k_2\in\mathbf{Z}$;当$k'=0$时,$\varphi=\frac{\pi}{4}$,$k=2k_2,k_2\in\mathbf{Z}$.又$f(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{2}\right)$上有且只有一个最大值,所以$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}=\frac{2\pi}{5}\leqslant2T=\frac{4\pi}{\omega}$,得$0<\omega\leqslant10$,即$0<\frac{3(2k+1)}{4}\leqslant10$,所以$-\frac{1}{2}<k\leqslant\frac{37}{6}$.当$k=6$时,$\omega=\frac{39}{4}$,$\varphi=\frac{\pi}{4}$,此时$\frac{39}{4}x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{49\pi}{40},\frac{41\pi}{8}\right)$,此时有2个最大值,舍去;当$k=5$时,$\omega=\frac{33}{4}$,$\varphi=-\frac{\pi}{4}$,此时$\frac{33}{4}x-\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{23\pi}{40},\frac{31\pi}{8}\right)$,此时有1个最大值,成立,所以$\omega$的最大值为$\frac{33}{4}$.

8. 解:(1) 由图象可知,周期$T=2\left(\frac{11\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)=\pi$,所以$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$,因为点$\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$在函数图象上,所以$A\sin\left(2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi\right)=0$,即$\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\varphi\right)=0$,又$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,则$\frac{5\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}+\varphi<\frac{4\pi}{3}$,则$\frac{5\pi}{6}+\varphi=\pi$,即$\varphi=\frac{\pi}{6}$,因为点$(0,1)$在函数图象上,所以$A\sin\frac{\pi}{6}=1$,即$A=2$,故函数$f(x)$的解析式为$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

(2) 由题意可得$g(x)=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,设$h(x)=f(x)-g(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)$,$x_1,x_2\in[\pi-m,m]$,当$x_1>x_2$时,有$f(x_1)-f(x_2)<g(x_1)-g(x_2)$恒成立,即$f(x_1)-g(x_1)<f(x_2)-g(x_2)$恒成立,即$h(x_1)<h(x_2)$恒成立,所以$h(x)$在区间$[\pi-m,m]$上单调递减.令$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x-$

$\frac{\pi}{12}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得$\frac{7\pi}{24}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{19\pi}{24}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,因为 $\pi-m<m$,所以 $m>\frac{\pi}{2}$,则 $\pi-m<\frac{\pi}{2}$,故 $\begin{cases}\pi-m\geqslant\frac{7\pi}{24},\\ m\leqslant\frac{19\pi}{24},\end{cases}$ 解得 $\frac{\pi}{2}<m\leqslant\frac{17\pi}{24}$,所以 m 的最大值为$\frac{17\pi}{24}$.

9. 解:(1) 从数据和图形可得$\begin{cases}A+h=7.4,\\ -A+h=2.6,\end{cases}$ 得 $A=2.4,h=5,T=12.4,\varphi=0$. 由 $T=\frac{2\pi}{\omega}=12.4$,得 $\omega=\frac{5\pi}{31}$,所以这段曲线的函数解析式为 $y=2.4\sin\frac{5\pi}{31}x+5$ $(0\leqslant x<24)$.



(2) 货船需要的安全水深为 $4.2+2=6.2$ m,所以进港条件为 $y\geqslant6.2$. 如上图所示,在点 A 后或点 C 后可以进港. $y=2.4\sin\frac{5\pi}{31}x+5(0\leqslant x<24)$与 $y=6.2$ 的图象在区间$[0,24]$上有四个交点 A,B,C,D. 令 $2.4\sin\frac{5\pi}{31}x+5=6.2$,即 $\sin\frac{5\pi}{31}x=\frac{1}{2}$,因此由$\frac{5\pi}{31}x=\frac{\pi}{6}$及$\frac{5\pi}{31}x=\frac{5\pi}{6}$得 $x_A=\frac{31}{30}$(时)$=1$ 时 2 分,$x_B=\frac{31}{6}$(时)$=5$ 时 10 分. 由函数的周期性得 $x_C=1$ 时 2 分$+12$ 时 24 分$=13$ 时 26 分,$x_D=5$ 时 10 分$+12$ 时 24 分$=17$ 时34 分. 因此,货船可以在 1 时 2 分后进港,早晨 5 时 10 分前出港,或在下午 13 时 26 分后进港,下午 17 时 36 分前出港,每次可以在港口停留约 4 小时.

章末提优 · 真题精选

1. A **解法 1** 由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x-\frac{\pi}{6}\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2}$得 $2k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant2k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.

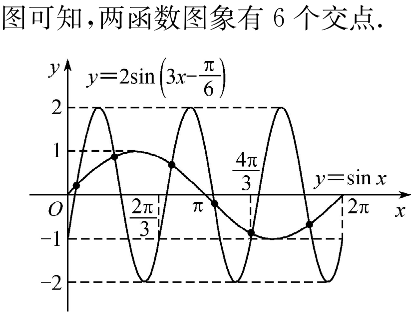
解法 2 当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$x-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$,此时函数$f(x)$单调递增,故 A 正确;当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时,$x-\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$,此时函数$f(x)$不单调递增,故 B 错误;当$x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$时,$x-\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{5\pi}{6},\frac{4\pi}{3}\right)$,此时函数$f(x)$单调递减,故 C 错误;当 $x\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$时,$x-\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{4\pi}{3},\frac{11\pi}{6}\right)$,此时函数$f(x)$不单调递增,故 D 错误.

2. B 由题意可知,x_1 为 $f(x)$的最小值点,x_2 为 $f(x)$的最大值点,则$|x_1-x_2|_{\min}=\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$,即 $T=\pi$,且 $\omega>0$,所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$.

3. B $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度得到 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$,再将所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍,纵坐标不变得到 $y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$.

4. D 依题意,$\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,则 $T=\pi$,所以 $\omega=\pm2$. 当 $\omega=2$ 时,$f(x)=\sin(2x+\varphi)$,且 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=-1$. 所以$\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,所以 $\varphi=2k\pi+\frac{7\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$,所以 $f(x)=\sin\left(2x+2k\pi+\frac{7\pi}{6}\right)=\sin\left(2x+\frac{7\pi}{6}\right)$,所以 $f\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\left[2\times\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+\frac{7\pi}{6}\right]=\frac{\sqrt{3}}{2}$;当 $\omega=-2$ 时,$f(x)=\sin(-2x+\varphi)$,且 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=-1$,所以$-\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,所以 $\varphi=2k\pi+\frac{11\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$,所以 $f(x)=\sin\left(-2x+2k\pi+\frac{11\pi}{6}\right)=\sin\left(-2x+\frac{11\pi}{6}\right)$,$f\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\left[-2\times\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+\frac{11\pi}{6}\right]=\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 综上,$f\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. C 因为函数 $y=\sin x$ 的最小正周期为 $T=2\pi$,函数 $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{3}$,所以在 $x\in[0,2\pi]$上,函数 $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$有三个周期的图象,在坐标系中结合五点法画出两函数图象,如图所示. 由图可知,两函数图象有 6 个交点.



6. C **解法 1** 由已知得 $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=2(\cos\alpha-\sin\alpha)\sin\beta$，即 $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=0$，即 $\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha-\beta)=0$，所以 $\tan(\alpha-\beta)=-1$.

解法 2 设 $\beta=0$，则 $\sin\alpha+\cos\alpha=0$，取 $\alpha=-\frac{\pi}{4}$，排除 A，B；再取 $\alpha=0$，则 $\sin\beta+\cos\beta=2\sin\beta$，取 $\beta=\frac{\pi}{4}$，排除 D.

解法 3 $\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\beta\right]=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\beta+\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\beta=2\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\beta$，所以 $\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\beta=\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\beta$，$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\beta-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\beta=0$，即 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}-\beta\right)=0$，所以 $\sin\left(\alpha-\beta+\frac{\pi}{4}\right)=\sin(\alpha-\beta)\cos\frac{\pi}{4}+\cos(\alpha-\beta)\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\alpha-\beta)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\alpha-\beta)=0$，$\sin(\alpha-\beta)=-\cos(\alpha-\beta)$，即 $\tan(\alpha-\beta)=-1$.

7. B $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}$，则 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$，所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{2}{3}$，所以 $\cos(2\alpha+2\beta)=1-2\sin^2(\alpha+\beta)=1-2\times\frac{4}{9}=\frac{1}{9}$.

解后反思 三角函数式的化简和求值要遵循“三看”原则：一看角，二看名，三看式子结构与特征，要注意观察条件中角之间的联系（和、差、倍、互余、互补等），寻找式子和三角函数公式之间的联系点.

8. BC 对于 A，令 $f(x)=\sin 2x=0$，解得 $x=\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，即为 $f(x)$ 的零点，令 $g(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$，解得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$，即为 $g(x)$ 的零点，显然 $f(x)$，$g(x)$ 零点不同，故 A 错误；对于 B，显然 $f(x)_{\max}=g(x)_{\max}=1$，故 B 正确；对于 C，根据周期公式，$f(x)$，$g(x)$ 的周期均为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，故 C 正确；对于 D，根据正弦函数的性质，$f(x)$ 的对称轴满足 $2x=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，$g(x)$ 的对称轴满足 $2x-\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$，显然 $f(x)$，$g(x)$ 图象的对称轴不同，故 D 错误.

9. 3 因为 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，所以 $f(T)=\cos\left(\omega\cdot\frac{2\pi}{\omega}+\varphi\right)=\cos(2\pi+\varphi)=\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 又 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，即 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，又 $x=\frac{\pi}{9}$ 为 $f(x)$ 的零点，所以 $\frac{\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\omega=3+9k$，$k\in\mathbf{Z}$，因为 $\omega>0$，所以当 $k=0$ 时，$\omega_{\min}=3$.

10. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 对照图形有 $\omega x_A+\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，$\omega x_B+\varphi=\frac{5\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，两式相减，得 $\omega(x_B-x_A)=\frac{2\pi}{3}$，即 $\frac{\pi}{6}\omega=\frac{2\pi}{3}$，求得 $\omega=4$，所以 $f(x)=\sin(4x+\varphi)$. 又图象过点 $\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$ 且 $f(x)$ 在该点的附近单调递增，所以 $4\times\frac{2\pi}{3}+\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\varphi=2k\pi-\frac{8\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，所以 $f(x)=\sin\left(4x+2k\pi-\frac{8\pi}{3}\right)$，即 $f(x)=\sin\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)$，所以 $f(\pi)=\sin\left(4\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

易错警示 $\frac{2\pi}{3}$ 为三角函数的上升零点，所以应有 $4\times\frac{2\pi}{3}+\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，而不是 $4\times\frac{2\pi}{3}+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，否则问题就容易多解.

11. ②③ 对于命题①，$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$，$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}-2=-\frac{5}{2}$，则 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)\neq f\left(\frac{\pi}{6}\right)$，所以函数 $f(x)$ 的图象不关于 y 轴对称，命题①错误；对于命题②，函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，定义域关于原点对称，$f(-x)=\sin(-x)+\frac{1}{\sin(-x)}=-\sin x-\frac{1}{\sin x}=-\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)=-f(x)$，所以函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称，命题②正确；对于命题③，因为 $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\cos x+\frac{1}{\cos x}$，

$f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\cos x+\frac{1}{\cos x}$，则$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$，所以函数$f(x)$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{2}$对称，命题③正确；对于命题④，当$-\pi<x<0$时，$\sin x<0$，则$f(x)=\sin x+\frac{1}{\sin x}<0<2$，命题④错误.

阶段温习 4（第一章—第四章）

1. A　由$x^2+2x-3>0$解得$x<-3$或$x>1$，则$M=(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$，则$\complement_{\mathbf{R}}M=[-3,1]$，因为$-x^2+1\leqslant1$，所以$0<y=2^{-x^2+1}\leqslant2$，则$N=(0,2]$，所以$(\complement_{\mathbf{R}}M)\cap N=(0,1]$.

2. A　因为对任意$x_1\neq x_2$都有$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$成立，不妨令$x_1<x_2$，则$x_1-x_2<0$，所以$f(x_1)-f(x_2)>0$，即$f(x_1)>f(x_2)$，可知函数$f(x)$单调递减，因为$f(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{3}-a\right)x+1, & x<1,\\ a^x, & x\geqslant1\end{cases}$满足对任意$x_1\neq x_2$都有$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$成立，所以$\begin{cases}\frac{1}{3}-a<0,\\ 0<a<1,\\ \frac{1}{3}-a+1\geqslant a,\end{cases}$解得$\frac{1}{3}<a\leqslant\frac{2}{3}$. 因为$\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$是$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$的真子集，所以“$a\in\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$”是“$f(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{3}-a\right)x+1, & x<1,\\ a^x, & x\geqslant1\end{cases}$满足对任意$x_1\neq x_2$都有$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$成立”的充分不必要条件.

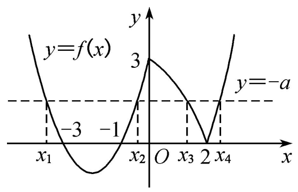
3. D　因为幂函数$f(x)=x^n$的图象过点$(2,8)$，所以$8=2^n$，解得$n=3$，即$f(x)=x^3$，故$f(x)$在$\mathbf{R}$上为增函数，因为$2^{0.3}>2^0=1$，$0<0.3^2<0.3^0=1$，$\log_2 0.3<\log_2 1=0$，所以$a=f(2^{0.3})>b=f(0.3^2)>c=f(\log_2 0.3)$.

4. B　设x天后的“进步值”是“退步值”的5倍，则$\frac{1.01^x}{0.99^x}=5$，即$\left(\frac{101}{99}\right)^x=5$，两边同时取常用对数得$\lg\left(\frac{101}{99}\right)^x=\lg 5$，化简得$\lg\left(\frac{101}{99}\right)^x=x\lg\frac{101}{99}=x(\lg 101-\lg 99)=\lg 5$，所以$x=\frac{\lg 5}{\lg 101-\lg 99}=\frac{1-\lg 2}{\lg 101-\lg 99}\approx\frac{1-0.3010}{2.0043-1.9956}\approx80$. 故当“进步值”是“退步值”的5倍时，大约经过了80天.

5. B　由$y=\log_a x+a^{x-1}+2$的图象恒过定点(k,b)，可得$k=1$，$b=3$，则$m+n=2$. $\frac{9}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{m}+\frac{1}{n}\right)(m+n)=\frac{1}{2}\left(10+\frac{9n}{m}+\frac{m}{n}\right)\geqslant\frac{1}{2}\left(10+2\sqrt{\frac{9n}{m}\cdot\frac{m}{n}}\right)=8$，当且仅当$m=3n$时等号成立，由$\begin{cases}m+n=2,\\ m=3n,\end{cases}$解得$m=\frac{3}{2}$，$n=\frac{1}{2}$. 故当$m=\frac{3}{2}$，$n=\frac{1}{2}$时，$\frac{9}{m}+\frac{1}{n}$的最小值为8.

6. BD　对于A，解不等式$(2x-1)(1-x)<0$，得$x<\frac{1}{2}$或$x>1$，故A错误. 对于B，函数$y=x+\sqrt{2-x}$的定义域为$(-\infty,2]$，$y=x+\sqrt{2-x}=-(\sqrt{2-x})^2+\sqrt{2-x}+2=-\left(\sqrt{2-x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\leqslant\frac{9}{4}$，当且仅当$\sqrt{2-x}=\frac{1}{2}$，即$x=\frac{7}{4}$时取等号，则值域为$\left(-\infty,\frac{9}{4}\right]$，故B正确. 对于C，令$\sqrt{x^2+4}=t\geqslant2$，函数$y=t+\frac{1}{t}$在$[2,+\infty)$上单调递增，则当$t=2$，即$x=0$时，$y_{\min}=\frac{5}{2}$，故C错误. 对于D，当$k=0$时，$1>0$恒成立；当$k\neq0$时，有$\begin{cases}k>0,\\ \Delta=k^2-4k<0,\end{cases}$解得$0<k<4$，因此$k$的取值范围是$[0,4)$，故D正确.

7. BCD　由函数$f(x)=\begin{cases}|2^x-4|, & x>0,\\ x^2+4x+3, & x\leqslant0,\end{cases}$知函数$f(x)$在$(-\infty,-2]$上单调递减，在$[-2,0]$上单调递增，在$(0,2]$上单调递减，在$[2,+\infty)$上单调递增，由$g(x)=0$，得$f(x)=-a$，在同一坐标系内作出函数$y=f(x)$的图象与直线$y=-a$，如图，由函数$g(x)=f(x)+a$有四个零点$x_1,x_2,x_3,x_4$，且$x_1<x_2<x_3<x_4$，得$f(x)+a=0$有四个解，即函数$y=f(x)$的图象与直线$y=-a$有四个交点，观察图象知，$0<-a<3$，即$-3<a<0$，A错误；由于函数$y=x^2+4x+3$的图象对称轴为$x=-2$，则点$(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$关于直线$x=-2$对称，$x_1+x_2=-4$，B正确；由$0<|2^x-4|<3$，得$1<2^x<7$，解得$0<x<\log_2 7$，因此$0<x_3<2<x_4<\log_2 7$，由$|2^{x_3}-4|=|2^{x_4}-4|$，得$4-2^{x_3}=2^{x_4}-4$，即$2^{x_4}+2^{x_3}=8$，D正确；由$8=2^{x_4}+2^{x_3}>2\sqrt{2^{x_4}\cdot2^{x_3}}=2\sqrt{2^{x_3+x_4}}$，得$2^{x_3+x_4}<16$，解得$x_3+x_4<4$，C正确.



8. $[8,+\infty)$　令 $t=-x^2+ax+15,x\in\left[\frac{1}{4},4\right]$，则 $y=\log_2 t$ 在定义域上单调递增．因为函数 $f(x)=\log_2(-x^2+ax+15)$ 在 $\left[\frac{1}{4},4\right]$ 上单调递增，所以 $t=-x^2+ax+15$ 在 $\left[\frac{1}{4},4\right]$ 上单调递增，且 $t=-x^2+ax+15>0$ 在 $\left[\frac{1}{4},4\right]$ 上恒成立，则 $\begin{cases}\frac{a}{2}\geqslant 4,\\-\frac{1}{16}+\frac{1}{4}a+15>0,\end{cases}$ 解得 $a\geqslant 8$，故实数 a 的取值范围是 $[8,+\infty)$．

9. 2　$(-\infty,2)\cup(5,+\infty)$　由函数 $f(x)=-2\,024x^3+\frac{c}{e^x+1}$ 的图象关于点 $(0,1)$ 成中心对称，得 $f(x)+f(-x)=2$，即 $-2\,024x^3+\frac{c}{e^x+1}+2\,024x^3+\frac{c}{e^{-x}+1}=2$，整理得 $\frac{c(e^x+1)}{e^x+1}=2$，解得 $c=2$，故函数 $f(x)=-2\,024x^3+\frac{2}{e^x+1}$，因为函数 $y=-2\,024x^3$，$y=\frac{2}{e^x+1}$ 在 $\mathbf{R}$ 上都单调递减，因此函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减．令 $g(x)=f(x)-1=-2\,024x^3+\frac{2}{e^x+1}-1$，由函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,1)$ 成中心对称，得 $g(x)$ 的图象关于 $(0,0)$ 对称，且 $g(x)=f(x)-1=-2\,024x^3+\frac{2}{e^x+1}-1$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，所以由 $f(-t^2)+f(7t-10)>2$，得 $f(7t-10)-1>-f(-t^2)+1$，即 $g(7t-10)>-g(-t^2)=g(t^2)$，于是 $t^2>7t-10$，即 $t^2-7t+10>0$，解得 $t<2$ 或 $t>5$，所以实数 t 的取值范围是 $(-\infty,2)\cup(5,+\infty)$．

10. 解：(1) 由条件 $f(x)=\log_a\frac{2-x}{x-6}$ 可知 $\frac{2-x}{x-6}>0$，解得 $2<x<6$，故函数 $f(x)$ 的定义域为 $(2,6)$，由 $f(3)=-1$，可知 $\log_a\frac{1}{3}=-1$，得到 $a=3$，即 $f(x)=\log_3\frac{2-x}{x-6}$，不等式 $f(x)>1$，即 $\frac{2-x}{x-6}>3$，解得 $5<x<6$，所以不等式 $f(x)>1$ 的解集为 $\{x|5<x<6\}$．

(2) 由(1)可知 $A=\{x|5<x<6\}$，设 $t=2^x+2^{-x}$，则当 $x\in[0,1]$ 时，$2^x\in[1,2]$，因为对勾函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，故 $t=2^x+2^{-x}\in\left[2,\frac{5}{2}\right]$，则 $g(x)=(2^x+2^{-x})^2-m(2^x+2^{-x})-1=t^2-mt-1$．设 $h(t)=t^2-mt-1$，由题意知 $A=(5,6)$ 为 $t\in\left[2,\frac{5}{2}\right]$ 时 $h(t)$ 的值域的子集，当 $\frac{m}{2}\leqslant 2$，即 $m\leqslant 4$ 时，$h(t)$ 在 $\left[2,\frac{5}{2}\right]$ 上单调递增，故 $\begin{cases}h(2)=3-2m\leqslant 5,\\h\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{21}{4}-\frac{5}{2}m\geqslant 6,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant m\leqslant -\frac{3}{10}$；当 $2<\frac{m}{2}<\frac{5}{2}$，即 $4<m<5$ 时，$h(t)$ 在 $\left[2,\frac{5}{2}\right]$ 上的最大值为 $h(2)$，$h\left(\frac{5}{2}\right)$ 中的较大者，令 $h(2)=3-2m\geqslant 6$，所以 $m\leqslant -\frac{3}{2}$，与 $4<m<5$ 矛盾，令 $h\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{21}{4}-\frac{5}{2}m\geqslant 6$，所以 $m\leqslant -\frac{3}{10}$，与 $4<m<5$ 矛盾，故此时 $m\in\varnothing$；当 $\frac{5}{2}\leqslant\frac{m}{2}$，即 $m\geqslant 5$ 时，$h(t)$ 在 $\left[2,\frac{5}{2}\right]$ 上单调递减，则 $\begin{cases}h(2)=3-2m\geqslant 6,\\h\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{21}{4}-\frac{5}{2}m\leqslant 5,\end{cases}$ 解得 $m\in\varnothing$．综上，实数 m 的取值范围为 $\left[-1,-\frac{3}{10}\right]$．