

高中数学

小题才王做[®]

巅峰版

必修第一册SJ

主 编 恩波教育研究中心
编 委 宋克金 刘伟华 崔华梅
孙续桂 贾琳娜 袁庆萍



南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学小题狂做. 必修 第一册 SJ 巅峰版 / 恩波
教育研究中心主编. —南京: 南京大学出版社, 2024.
6(2025.5 重印). —ISBN 978-7-305-28149-5
I. G634.603

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2024RN0851 号

出版发行 南京大学出版社
社 址 南京市汉口路 22 号 邮 编 210093

GAOZHONG SHUXUE XIAOTI KUANGZUO • BIXIU DI-YI CE SJ • DIANFENGBAN

书 名 高中数学小题狂做·必修第一册 SJ·巅峰版
主 编 恩波教育研究中心
责任编辑 刘 琦 编辑热线 025-83530763

印 刷 南京地海印刷有限公司
开 本 880 mm×1230 mm 1/16 开 印张 13 字数 288 千
版 次 2024 年 6 月第 1 版 2025 年 5 月第 2 次印刷
ISBN 978-7-305-28149-5
定 价 47.80 元

网 址 <http://www.njupco.com>
官方微博 <http://weibo.com/njupco>
官方微信 njupress
销售咨询热线 025-83594756

-
- * 版权所有,侵权必究
 - * 凡购买南大版图书,如有印装质量问题,请与所购
图书销售部门联系调换

CONTENTS 目录

第1章 集 合

1.1 集合的概念与表示	
题组1 集合的概念与表示	1
1.2 子集、全集、补集	
题组2 由集合间的关系求参数范围问题	2
1.3 交集、并集	
题组3 含有参数的集合问题	3
题组4 集合中的新定义、应用探索问题	4
综合提优(1.1~1.3)	5
章末提优·真题精选	6

第2章 常用逻辑用语

2.1 命题、定理、定义	
2.2 充分条件、必要条件、充要条件	
题组5 充分条件、必要条件、充要条件的判断及关系的探求	7
题组6 与充分条件和必要条件相关的参数范围问题	8
2.3 全称量词命题与存在量词命题	
题组7 与全称量词命题和存在量词命题相关的参数范围问题	9
综合提优(2.1~2.3)	10
章末提优·真题精选	11
阶段温习1(第1章)	12

第3章 不 等 式

3.1 不等式的基本性质	
题组8 利用不等式性质证明不等式	13
3.2 基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} (a, b \geq 0)$	
题组9 基本不等式在最值问题中的应用	14
3.3 从函数观点看一元二次方程和一元二次不等式	
题组10 不等式的解法、三个“二次”(二次函数、二次方程、二次不等式)的综合应用	15
题组11 一元二次不等式恒成立与有解问题	16
综合提优(3.1~3.3)	17
章末提优·真题精选	18
阶段温习2(第1章~第2章)	19

第4章 指数与对数

4.1 指 数	
题组12 实数指数幂的运算性质的应用	20
4.2 对 数	
题组13 对数的运算性质	21
综合提优(4.1~4.2)	22
章末提优·真题精选	23
阶段温习3(第1章~第3章)	24

第5章 函数概念与性质

5.1 函数的概念和图象	
5.2 函数的表示方法	
题组 14 函数的概念与表示	25
5.3 函数的单调性	
题组 15 函数的单调性	26
5.4 函数的奇偶性	
题组 16 函数的奇偶性	27
综合提优(5.1~5.4)	28
章末提优·真题精选	29
阶段温习 4(第1章~第4章)	30

第6章 幂函数、指数函数和对数函数

6.1 幂函数	
题组 17 幂函数的图象与性质	31
题组 18 对勾函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}$ ($a\neq 0$) 模型及应用	32
6.2 指数函数	
题组 19 指数型函数问题	33
6.3 对数函数	
题组 20 对数型函数问题	34
综合提优(6.1~6.3)	36
章末提优·真题精选	37
阶段温习 5(第1章~第5章)	38

第7章 三角函数

7.1 角与弧度	
题组 21 弧度制下弧长和扇形面积公式的应用	39
7.2 三角函数概念	
题组 22 三角函数的概念	41
题组 23 三角函数中的化简与求值	42
题组 24 三角函数的最值或范围问题	44
综合提优(7.1~7.2)	45
7.3 三角函数的图象与性质	
题组 25 三角函数的图象问题	46
题组 26 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象与解析式的确定	47
题组 27 结合函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的性质求参数 A, ω, φ 的值或范围	49
7.4 三角函数应用	
题组 28 三角函数模型的应用	51
综合提优(7.3~7.4)	53
章末提优·真题精选	55
阶段温习 6(第1章~第6章)	56

第8章 函数应用

8.1 二分法与求方程近似解	
题组 29 函数的零点及方程根的分布问题	57
题组 30 复合函数零点问题	58
题组 31 函数思想与方程思想的应用	59
题组 32 用二分法求方程近似解	60
8.2 函数与数学模型	
题组 33 二次函数模型、分段函数模型及应用	62
题组 34 指、对数函数模型的应用	64
章末提优·真题精选	66
阶段温习 7(第1章~第7章)	67
核心笔记与答案详析(另册,赠送)	
小帮手:压轴题特训(另册,赠送)	

第1章 集 合

1.1 集合的概念与表示



智能错题本

★重点

题组1 集合的概念与表示

建议用时:40分钟 答案见 P1

- [2025 安徽江南十校联考]已知集合 $A = \{x | 2mx - 3 > 0\}$, 若 $1 \notin A$ 且 $3 \in A$, 则实数 m 的取值范围是 ()
A. $\left\{m \mid \frac{1}{2} < m \leq \frac{3}{2}\right\}$ B. $\left\{m \mid \frac{1}{2} \leq m < \frac{3}{2}\right\}$
C. $\left\{m \mid m > \frac{3}{2}\right\}$ D. $\left\{m \mid m \leq \frac{1}{2}\right\}$
- [2024 广东佛山南海月考]已知集合 $A = \{x | (a^2 - 1)x^2 + (a + 1)x + 1 = 0\}$ 中只有一个元素, 则实数 a 的所有可能值的乘积为 ()
A. $-\frac{5}{3}$ B. -1
C. 1 D. $\frac{5}{3}$
- [2024 河南商丘名校期中联考]集合 $A = \left\{y \mid y = \frac{4}{x+3}, x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}\right\}$ 中的元素个数为 ()
A. 3 B. 4
C. 5 D. 6
- [2024 江西部分学校联考]已知集合 $A = \{x | x = 3k - 1, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x | x = 3k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, $C = \{x | x = 3k, k \in \mathbf{Z}\}$, 且 $a \in A, b \in B, c \in C$, 则 ()
A. $2a \notin B$ B. $2b \notin A$
C. $a + b \in C$ D. $b + c \in A$
- 已知集合 A 满足条件: 若 $a \in A$, 则 $\frac{1+a}{1-a} \in A$, 那么集合 A 中所有元素的乘积为 ()
A. -1 B. 1
C. 0 D. ± 1
- [多选题]一次函数 $y = 2x - 3$ 与 $y = x - 2$ 的图象的交点组成的集合为 ()
A. $\{1, -1\}$
B. $\{(1, -1)\}$
C. $\left\{(x, y) \mid \begin{cases} y = 2x - 3, \\ y = x - 2 \end{cases}\right\}$
D. $\left\{\begin{cases} x = 1, \\ y = -1 \end{cases}\right\}$
- [多选题]已知集合 $M = \{m | m = a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbf{Q}\}$, 则下列四个元素中属于 M 的元素的是 ()
A. $1 + \sqrt{2}\pi$
B. $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$
C. $\frac{1}{2 + \sqrt{2}}$
D. $\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}$
- [2024 湖北鄂西北六校期中联考]已知集合 $A = \{a + 2, 2a^2 + a\}$, 若 $3 \in A$, 则实数 a 的值是_____.
- 由实数 $x, -x, |x|, \sqrt{x^2}$ 及 $-\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合, 最少含有_____个元素, 最多含有_____个元素.
- [2025 福建福州八中期中]已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 5\}$, 则 $C = \{x | x = 2a - b, a \in A, b \in B\}$ 中的元素个数为_____.



1.2 子集、全集、补集

题组2 由集合间的关系求参数范围问题

★重点

建议用时:40 分钟 答案见 P2

- 集合 $M = \{1, 2, a, a^2 - 3a - 1\}$, $N = \{-1, 3\}$, 若 $3 \in M$ 且 $N \not\subseteq M$, 则 a 的取值为 ()
A. -1 B. 4
C. -1 或 -4 D. -4 或 1
- [2025 安徽芜湖期中] 已知集合 $A = \{0, a+b, \frac{a}{b}\}$, $B = \{0, 1-b, 1\}$, 若 $A = B$, 则 $a+2b =$ ()
A. -2 B. 2 C. -1 D. 1
- 若集合 $A = \{(x, y) \mid \begin{cases} y = x - 1, \\ y = (k+2)x^2 + (2k+1)x \end{cases}\}$ 有且仅有 2 个子集, 则实数 k 的最小值为 ()
A. -2 B. -1
C. 1 D. 2
- [多选题] 已知集合 $A = \{x \mid 1 < x < 2\}$, $B = \{x \mid 2a - 3 < x < a - 2\}$, 下列说法错误的是 ()
A. 不存在实数 a , 使得 $A = B$
B. 存在实数 a , 使得 $A \subseteq B$
C. 当 $a = 4$ 时, $A \subseteq B$
D. 当 $0 \leq a \leq 4$ 时, $B \subseteq A$
- [2022 江苏扬州大桥中学学情调研(一)] 已知集合 $A = \{x \mid ax < 1\}$, $B = \{2, \sqrt{2}\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 a 的取值范围是_____.
- 已知集合 $A = \{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 4\}$, $B = \{x \mid 2a \leq x \leq a + 3\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 a 的取值范围是_____.
- [2025 江苏徐州一中阶段性检测] 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $M = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 4x + a = 0\}$, $N = \{x \in \mathbf{R} \mid (x-3)(x^2 + 3x - 4) = 0\}$.
(1) 若 $a = 5$, 存在集合 P , 使得 $M \subsetneq P \subsetneq N$, 求出这样的集合 P .
(2) 是否存在集合 M, N , 满足 $M \subseteq N$? 若存在, 求实数 a 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.



综合提优(1.1~1.3)

答案见 P4

1. [2024 辽宁沈阳期末] 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{Q} | (x - \sqrt{2})(x^2 - 1) = 0\}$, $B = \{1, \sqrt{3}\}$, 则 $A \cup B =$ ()

A. $\{-1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ B. $\{-1, 1, \sqrt{3}\}$
C. $\{1, \sqrt{3}\}$ D. $\{1\}$

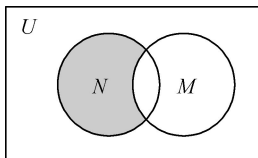
2. [2024 北京西城期末] 已知集合 $A = \{x | -2 < x < 4\}$, $B = \{x | -2 < x < 5\}$, 若 $a \notin A$, 且 $a \in B$, 则 a 的取值范围是 ()

A. $\{x | -2 < x < 4\}$ B. $\{x | 4 < x < 5\}$
C. $\{x | 4 \leq x \leq 5\}$ D. $\{x | 4 \leq x < 5\}$

3. [2023 江苏淮阴中学期中] 已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, 若 A 是 U 的子集, 且同时满足: ①若 $x \in A$, 则 $2x \notin A$; ②若 $x \in \complement_U A$, 则 $2x \notin \complement_U A$. 则集合 A 的个数为 ()

A. 8 B. 16
C. 20 D. 24

4. [多选题, 2022 广东东莞期末] 图中阴影部分的集合表示正确的是 ()



A. $N \cap (\complement_U M)$
B. $M \cap (\complement_U N)$
C. $[\complement_U (M \cap N)] \cap N$
D. $(\complement_U M) \cap (\complement_U N)$

5. [多选题, 2025 福建福州十校期中] 已知全集 $U = \{x | x < 10, x \in \mathbf{N}\}$, $A \subseteq U$, $B \subseteq U$, $A \cap (\complement_U B) = \{1, 5\}$, $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{3, 7, 9\}$, $A \cap B = \{4\}$, 则下列选项正确的是 ()

A. $8 \notin B$
B. $\{5\} \subseteq A$
C. $7 \in \complement_U (A \cup B)$
D. A 的不同真子集个数为 8

6. [新定义题] [多选题, 2025 陕西榆林期末] 给定数集 M , 若对于任意 $x, y \in M$, 都有 $x +$

$y \in M$, 且 $x - y \in M$, 则称集合 M 为闭集合.

下列说法错误的是 ()

- A. 自然数集是闭集合
B. 无理数集是闭集合
C. 集合 $M = \{x | x = 3k, k \in \mathbf{Z}\}$ 为闭集合
D. 若集合 M_1, M_2 为闭集合, 则 $M_1 \cup M_2$ 也为闭集合

7. [新定义题] 对于非空数集 A , 若其最大元素为 M , 最小元素为 m , 则称集合 A 的幅值为 $T_A = M - m$, 若集合 A 中只有一个元素, 则 $T_A = 0$.

(1) 若 $A = \{2, 3, 4, 5\}$, 求 T_A ;

(2) 若 $A = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$, $A_i = \{a_i, b_i, c_i\} \subseteq A$, $A_i \cap A_j = \emptyset (i, j = 1, 2, 3, i \neq j)$, $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A$, 求 $T_{A_1} + T_{A_2} + T_{A_3}$ 的最大值, 并写出取最大值时的一组 A_1, A_2, A_3 .



章末提优 · 真题精选

答案见 P5

1. [2024 新课标全国 I 卷, 1] 已知集合 $A = \{x | -5 < x^3 < 5\}$, $B = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 A. $\{-1, 0\}$ B. $\{2, 3\}$
 C. $\{-3, -1, 0\}$ D. $\{-1, 0, 2\}$
2. [2024 北京卷, 1] 已知集合 $M = \{x | -3 < x < 1\}$, $N = \{x | -1 \leq x < 4\}$, 则 $M \cup N =$ ()
 A. $\{x | -1 \leq x < 1\}$ B. $\{x | x > -3\}$
 C. $\{x | -3 < x < 4\}$ D. $\{x | x < 4\}$
3. [2024 全国甲卷理, 1] 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $B = \{x | \sqrt{x} \in A\}$, 则 $\complement_A(A \cap B) =$ ()
 A. $\{1, 4, 9\}$ B. $\{3, 4, 9\}$
 C. $\{1, 2, 3\}$ D. $\{2, 3, 5\}$
4. [2023 全国乙卷文, 1] 设全集 $U = \{0, 1, 2, 4, 6, 8\}$, 集合 $M = \{0, 4, 6\}$, $N = \{0, 1, 6\}$, 则 $M \cup (\complement_U N) =$ ()
 A. $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ B. $\{0, 1, 4, 6, 8\}$
 C. $\{1, 2, 4, 6, 8\}$ D. U
5. [2023 新高考卷 II, 2] 设集合 $A = \{0, -a\}$, $B = \{1, a-2, 2a-2\}$, 若 $A \subseteq B$, 则 $a =$ ()
 A. 2 B. 1 C. $\frac{2}{3}$ D. -1
6. [2023 全国甲卷理, 1] 设全集 $U = \mathbf{Z}$, 集合 $M = \{x | x = 3k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, $N = \{x | x = 3k + 2, k \in \mathbf{Z}\}$, $\complement_U(M \cup N) =$ ()
 A. $\{x | x = 3k, k \in \mathbf{Z}\}$
 B. $\{x | x = 3k - 1, k \in \mathbf{Z}\}$
 C. $\{x | x = 3k - 2, k \in \mathbf{Z}\}$
 D. $\emptyset$
7. [2023 全国乙卷理, 2] 设集合 $U = \mathbf{R}$, 集合 $M = \{x | x < 1\}$, $N = \{x | -1 < x < 2\}$, 则 $\{x | x \geq 2\} =$ ()
 A. $\complement_U(M \cup N)$ B. $N \cup \complement_U M$
 C. $\complement_U(M \cap N)$ D. $M \cup \complement_U N$
8. [2022 北京卷, 1] 已知全集 $U = \{x | -3 < x < 3\}$, 集合 $A = \{x | -2 < x \leq 1\}$, 则 $\complement_U A =$ ()
 A. $\{x | -2 < x \leq 1\}$
 B. $\{x | -3 < x < 2 \text{ 或 } 1 \leq x < 3\}$
 C. $\{x | -2 \leq x < 1\}$
 D. $\{x | -3 < x \leq -2 \text{ 或 } 1 < x < 3\}$
9. [2020 全国卷 III 理, 1] 已知集合 $A = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{N}^*, y \geq x\}$, $B = \{(x, y) | x + y = 8\}$, 则 $A \cap B$ 中元素的个数为 ()
 A. 2 B. 3 C. 4 D. 6

第2章 常用逻辑用语

2.1 命题、定理、定义

2.2 充分条件、必要条件、充要条件

题组5 充分条件、必要条件、充要条件的判断及关系的探求

★重点

建议用时:40分钟 答案见P5

- [2024 广东部分名校期末]“ $ac=bc$ ”是“ $a=b$ ”的 ()
 - 充分不必要条件
 - 必要不充分条件
 - 充要条件
 - 既不充分也不必要条件
- [2025 山东大联考调考]已知 $n \in \mathbf{N}^*$ 且 $n > 2$, 则“ n 为质数”是“ $n+1$ 为合数”的 ()
 - 充分不必要条件
 - 必要不充分条件
 - 充要条件
 - 既不充分也不必要条件
- [2025 江西质量检测]已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 则“ $ab > 1$ ”是“ $(a-1)(b-1) > 0$ ”的 ()
 - 充分不必要条件
 - 必要不充分条件
 - 充要条件
 - 既不充分也不必要条件
- 下列条件中, 使 $\begin{cases} x > 0, \\ x-2 < 0 \end{cases}$ 成立的充分不必要条件是 ()
 - $0 < x < 1$
 - $0 < x < 2$
 - $0 < x < 3$
 - $-1 < x < 1$
- [2023 湖北鄂东南省级示范高中教育教学改革联盟期中]已知“若 $a \geq b$, 则 $c > d$ ”与“若 $a < b$, 则 $e \leq f$ ”都是真命题, 则“ $c \leq d$ ”是“ $e \leq f$ ”的 ()
 - 充分条件
 - 必要条件
 - 充要条件
 - 既不充分也不必要条件
- [多选题, 2024 湖北 A9 高中联盟期中联考]下列“若 p , 则 q ”形式的命题中, q 是 p 的必要条件的是 ()
 - 若 $x=1$, 则 $x^2=1$
 - 若 $x^2 \neq y^2$, 则 $x \neq y$
 - 若 mn 为无理数, 则 m, n 为无理数
 - 若四边形的对角线互相垂直, 则这个四边形是菱形
- [多选题]在下列条件中, 能成为“使二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为正数”的必要不充分条件是 ()
 - $b^2-4ac \geq 0$
 - $ac > 0$
 - $ab < 0$ 且 $ac > 0$
 - $b^2-4ac \geq 0, \frac{b}{a} < 0, \frac{c}{a} > 0$
- [2025 河北保定六校联盟期中]已知集合 $A = \{x | x = m^2 - n^2, m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}\}$.
 - 判断 5, 12, 14, 21 是否属于 A;
 - 集合 $B = \{x | x = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, 判断“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的什么条件(充要条件、充分不必要条件、必要不充分条件、既不充分也不必要条件), 并说明理由;
 - 写出集合 A 中的所有偶数.

阶段温习 1(第 1 章)

☞答案见 P8

1. **【新定义题】** 当两个集合中有一个集合为另一集合的子集时称这两个集合之间构成“全食”,当两个集合有公共元素,但互不为对方子集时称这两集合之间构成“偏食”. 对于集合 $A = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$, $B = \{x | ax^2 + 1 = 0, a \leq 0\}$, 若 A 与 B 构成“全食”或构成“偏食”, 则 a 的取值集合为_____.
2. 集合 $P = \{x | x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}$, $Q = \{x | x = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, $R = \{x | x = 4k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, 且 $a \in P, b \in Q$, 则有 ()
- A. $a + b \in P$
 B. $a + b \in Q$
 C. $a + b \in R$
 D. $a + b$ 不属于 P, Q, R 中的任意一个
3. 已知 $S \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4\}$, 若 $S \cap B \neq \emptyset$, 那么符合条件的集合 S 的个数是 ()

- A. 4 B. 10 C. 11 D. 12
4. **【信息阅读题】** 在 1872 年,“戴金德分割”结束了持续 2000 多年的数学史上的第一次危机. 所谓戴金德分割,是指将有理数集 $\mathbf{Q}$ 划分为两个非空子集 A 与 B , 且满足 $A \cup B = \mathbf{Q}$, $A \cap B = \emptyset$, A 中的每一个元素都小于 B 中的每一个元素,则称这样的 A 与 B 为戴金德分割,请给出一组满足 A 无最大值且 B 无最小值的戴金德分割_____.
5. 已知集合 $A = \left\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - kx + \frac{k+4}{2} \leq 0, k \in \mathbf{R}\right\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} | 1 \leq x \leq 4\}$, 若 $A \subseteq B$, 则 k 的取值范围为 ()
- A. $\left(4, \frac{36}{7}\right]$ B. $\left(-2, \frac{36}{7}\right]$
 C. $\left(-\infty, \frac{36}{7}\right]$ D. $(-2, 4]$

第3章 不等式

3.1 不等式的基本性质

题组8 利用不等式性质证明不等式

★重点

建议用时:40分钟 答案见 P8

1. [2024 吉林长春吉大附中实验学校月考]

(1) 已知 $a > b > 0, c < d < 0, e < 0$, 求证: $\frac{e}{a-c} >$

$$\frac{e}{b-d};$$

(2) 证明: $\sqrt{a} - \sqrt{a-2} < \sqrt{a-1} - \sqrt{a-3} (a \geq 3)$.

2. (开放题) [2025 东北三省六校第一次月考]

若 $a > b > 0, c < d < 0, |b| > |c|$.

(1) 求证: $b+c > 0$.

(2) 求证: $\frac{b+c}{(a-c)^2} < \frac{a+d}{(b-d)^2}$.

(3) 在(2)的不等式中, 能否找到一个代数式, 满足 $\frac{b+c}{(a-c)^2} < \text{所求式} < \frac{a+d}{(b-d)^2}$? 若能, 请直接写出该代数式; 若不能, 请说明理由.

3. [2024 河南 TOP 二十名校调研] 如果向一杯糖水里加糖, 糖水变甜了, 这其中蕴含着著名的糖水不等式: $\frac{y}{x} < \frac{y+m}{x+m} (x > y > 0, m > 0)$.

(1) 证明糖水不等式;

(2) 已知 a, b, c 是三角形的三边, 求证: $\frac{a}{b+c} +$

$$\frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

4. [2022 湖北育才中学月考] 已知 $a > b > c$, 且 $a+b+c=0$.

(1) 求证: $\frac{c}{a-c} > \frac{c}{b-c}$;

(2) 求证: $-2 < \frac{c}{a} < 0$.

第4章 指数与对数

4.1 指数

题组12 实数指数幂的运算性质的应用

★重点

建议用时:40分钟 答案见 P16

- [2025 安徽江淮名校期中]已知 $\sqrt[3]{a^4} \cdot a^{\frac{1}{4}}$.
 $a^{\frac{5}{12}}=4$, 则 $a=$ ()
A. 2 B. -2
C. 4 D. 2 或 -2
- [2022 广东广州二中期中]已知 $2^x=7^{2y}=A$,
且 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$, 则 A 的值是 ()
A. 7 B. $7\sqrt{2}$ C. $\pm 7\sqrt{2}$ D. 98
- [2025 浙江绍兴会稽联盟期中]在算式 $2^a + 2^b + 2^c + \left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1}{2}\right)^q = 21\frac{5}{8}$ 中, a, b, c, p, q 是五个非负整数, 且 $a > b > c, p > q$, 则 $b + p =$ ()
A. 6 B. 5 C. 4 D. 3
- [多选题, 2025 河南漯河高级中学月考]已知 $a^{-\sqrt{3}} + a^{\sqrt{3}} = 3$, 则下列各式正确的是 ()
A. $a^{2\sqrt{3}} + a^{-2\sqrt{3}} = 7$
B. $a^{3\sqrt{3}} + a^{-3\sqrt{3}} = 18$
C. $a^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + a^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{5}$
D. $a^{-2\sqrt{3}}\sqrt{a^{\sqrt{3}}} + \frac{1}{a^{-2\sqrt{3}}\sqrt{a^{\sqrt{3}}}} = 4\sqrt{5}$
- [新定义题] [多选题, 2024 江苏淮安期中]规定 a, b 之间的一种运算, 记作 (a, b) , 若 $a^c = b$, 则 $(a, b) = c$, 则下列说法正确的是 ()
A. $(4, 6) = 2 \times (2, 3)$
B. $(2, 2) = 1$
C. $(4, 5) + (4, 6) = (4, 30)$
D. 若 $a > 1, b > 1$, 则 $(a, b) + (b, a) \geq 2$
- [2024 重庆巴蜀中学期中]已知 x_1 和 x_2 是方程 $9^x - 3^{x+2} + 3 = 0$ 的两根, 则 $\frac{9^{x_1} + 9^{x_2}}{x_1 + x_2} =$ _____.
- [2024 江西抚州期中]已知 $a > 0, b > 8$, 则 $\frac{a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} - \frac{\sqrt[3]{a^5}}{a\sqrt[3]{a}} + \sqrt{4 - 4b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}} =$ _____.
- [2025 江苏中华中学期中]化简求值:
(1) 计算 $\sqrt[3]{(-4)^3} - \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 0.25^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^{-4}$;
(2) 计算 $2a^{\frac{2}{3}}\sqrt{b}(-6\sqrt{ab}^{\frac{1}{3}}) \div (-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}) + 8a^0\sqrt{b^3} \div (-2b^{\frac{1}{2}})$ (式中字母均是正数);
(3) 已知 $x + x^{-1} = 3$, 求 $\frac{x - x^{-1}}{x^3 + x^{-3} - 2}$ 的值.
- 若 a, b 为不等于 1 的正数, 并且实数 x, y, z 满足关系式 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. 求证:
(1) 若 $a^x = b^y$, 则 $a^x = (ab)^z$;
(2) 若 $a^x = (ab)^z$, 则 $b^y = (ab)^z$.

第6章 幂函数、指数函数和对数函数

6.1 幂函数

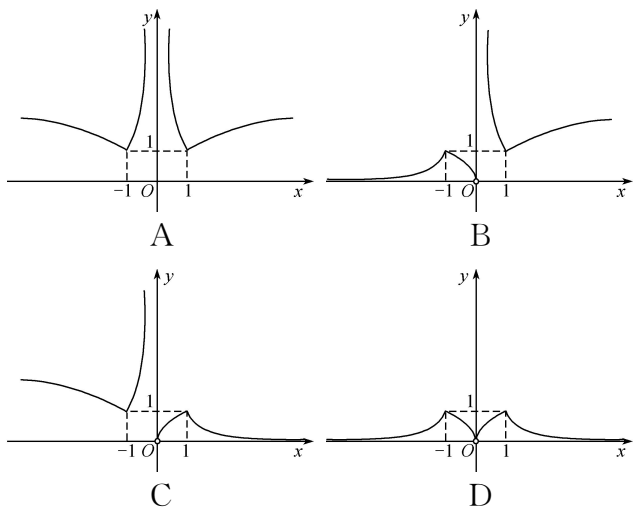
题组 17 幂函数的图象与性质

建议用时:40分钟 答案见 P29

1. [2023 河南郑州航空育人中学月考] 已知幂函数 $f(x) = (m^2 - 2m - 2)x^{2-m}$ 满足 $f(2) < f(3)$, 则函数 $g(x) = 2x + m - \sqrt{x-m}$ 的值域为 ()

- A. $[-\frac{25}{8}, +\infty)$ B. $[-3, +\infty)$
C. $[-1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

2. [2022 浙江名校联盟期中联考] 对 $a, b \in \mathbf{R}$, 记 $\max\{a, b\} = \begin{cases} a, & a \geq b, \\ b, & a < b, \end{cases}$ 函数 $f(x) = \max\{\sqrt{|x|}, x^{-2}\}$ 的图象可能是 ()



3. [2025 福建福州期中] 若幂函数 $f(x) = (m^2 - 3m - 3)x^m$ 对任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 成立, 则下列说法正确的是 ()

- A. $m=4$ B. $m=4$ 或 $m=-1$
C. $f(x)$ 是奇函数 D. $f(x)$ 是偶函数

4. [2024 重庆西南大学附中期中] 已知 $a = 2^{\frac{4}{3}}$, $b = 4^{\frac{2}{5}}$, $c = 3^{\frac{2}{3}}$, 则 ()

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$
C. $b < c < a$ D. $c < a < b$

5. [多选题, 2025 福建泉州七中期末] 已知幂函数 $f(x) = (a - \frac{3}{a} - 1)x^a$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调

递减, 若 $y = x^2 + (a+b)x - 3$ 在 $(-1, 1)$ 上不单调, 则实数 b 的可能取值为 ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 3

6. [多选题, 2025 广东珠海期中] 已知函数 $f(x) = (m^2 - m - 1)x^{m^2+m-3}$ 是幂函数, 对任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 均满足 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$. 若 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $f(a) +$

$f(b) < 0$, 则下列结论可能成立的有 ()

- A. $a+b > 0, ab < 0$ B. $a+b < 0, ab > 0$
C. $a+b < 0, ab < 0$ D. $a+b > 0, ab > 0$

7. [2024 山东临沂期中] 已知幂函数 $y = f(x)$ 的图象过点 $(2, 8)$, 且满足 $f(mx^2) + 8f(4-3x) \geq 0$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是_____.

8. [2025 吉林延边州期末] 已知幂函数 $f(x) = (m^2 - 5m + 5)x^{m-2}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且函数 $g(x) = f(x) - (2a-6)x$ 在区间 $[1, 3]$ 上单调递减, 则实数 a 的取值范围是_____.

9. [2023 湖北孝感期末] 已知幂函数 $f(x) = (p^2 - 3p + 3)x^{p^2 - \frac{3}{2}p - \frac{1}{2}}$ 是其定义域上的增函数.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式.

(2) 若函数 $h(x) = x + af(x)$, $x \in [1, 9]$, 是否存在实数 a , 使得 $h(x)$ 的最小值为 0? 若存在, 求出 a 的值; 若不存在, 请说明理由.

(3) 若函数 $g(x) = b - f(x+3)$, 是否存在实数 $m, n (m < n)$, 使函数 $g(x)$ 在 $[m, n]$ 上的值域为 $[m, n]$? 若存在, 求出实数 b 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

第7章 三角函数

7.1 角与弧度

题组 21 弧度制下弧长和扇形面积公式的应用

★重点

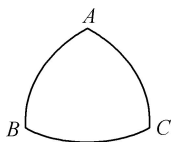
建议用时:40 分钟 答案见 P40

1. [2022 安徽界首中学期末]《掷铁饼者》取材于希腊现实生活中的体育竞技活动,刻画的是一名强健的男子在掷铁饼过程中最具有表现力的瞬间. 现在把掷铁饼者张开的双臂近似看成一张拉满弦的“弓”,掷铁饼者的手臂长约为 $\frac{\pi}{4}$ 米,肩宽约为 $\frac{\pi}{8}$ 米,“弓”所在圆的半径约为 1.25 米,则掷铁饼者双手之间的距离约为 ($\sqrt{2} \approx 1.41$) ()



- A. 1.01 米 B. 1.76 米
C. 2.04 米 D. 2.94 米

2. [2024 山东潍坊期中]数学中处处存在着美,莱洛三角形就给人以对称的美感. 莱洛三角形的画法如下:先画等边三角形 ABC ,再分别以点 A, B, C 为圆心,线段 AB 长为半径画圆弧,便得到莱洛三角形(如图所示). 若莱洛三角形的周长为 $\frac{\pi}{2}$,则其面积是 ()



- A. $\frac{\pi - \sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{\pi + \sqrt{3}}{8}$
C. $\frac{\pi - \sqrt{3}}{8}$ D. $\frac{\pi + \sqrt{3}}{4}$

3. [2024 江苏泗阳中学第二次调研]扇子是引风用品,夏令必备之物. 我国传统扇文化源远流长,是中华文化的一个组成部分. 历史上最早的扇子是一种礼仪工具,后来慢慢演变为纳凉、娱乐、观赏的生活用品和工艺品. 扇子的种类较多,受大众喜爱的有团扇和折

扇. 如图 1 是一把折扇,是用竹木做扇骨,用特殊纸或绫绢做扇面而制成的. 完全打开后的折扇为扇形(如图 2),若图 2 中 $\angle ABC = \theta$, D, E 分别在 BA, BC 上, $AD = CE = m$, $\widehat{AC}$ 的长为 l ,则该折扇的扇面 $ADEC$ 的面积为 ()

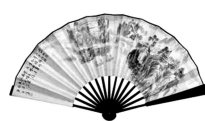


图 1

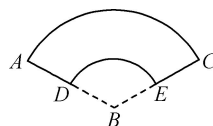


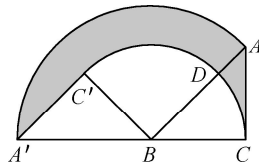
图 2

- A. $\frac{m(l - \theta)}{2}$ B. $\frac{m(l - \theta m)}{2}$
C. $\frac{m(2l - \theta)}{2}$ D. $\frac{m(2l - \theta m)}{2}$

4. [多选题, 2024 四川南山中学月考]若扇形的周长为 36, 当这个扇形面积最大时, 下列结论正确的是 ()

- A. 扇形的圆心角为 2 rad
B. 扇形的弧长为 18
C. 扇形的半径为 9
D. 扇形圆心角所对弦长为 $9\sin 1$

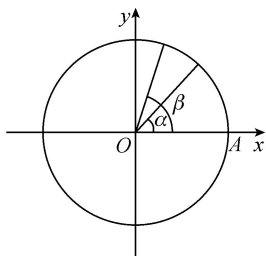
5. [2025 重庆南开中学月考]如图, 已知 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $C = 90^\circ$, $AC = 1$, 在平面内 $\triangle ABC$ 绕点 B 逆时针旋转到 $\triangle A'BC'$, 使 C, B, A' 在同一直线上, 则图中阴影部分的面积为 _____.



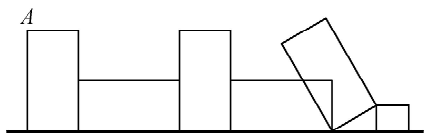
6. [2024 广东广州第二中学期中]《九章算术》是我国古代数学成就的杰出代表作, 其中《方田》章给出计算弧田面积所用的经验公式为: 弧田面积 $= \frac{1}{2}(\text{弦} \times \text{矢} + \text{矢}^2)$. 弧田是

由圆弧及其所对的弦所围成的. 公式中“弦”指圆弧所对弦长,“矢”等于半径长与圆心到弦的距离之差,现有圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$,半径等于4米的弧田,按照上述经验公式计算所得弧田面积(单位:平方米)最接近的整数是_____.

7. [2023 福建泉州期末]如图,在半径为1 cm的圆周上,一只红蚂蚁和一只黑蚂蚁同时从点A(1,0)出发,按逆时针匀速爬行,设红蚂蚁每秒爬过 α 弧度,黑蚂蚁每秒爬过 β 弧度(其中 $0 < \alpha < \beta < \pi$),两只蚂蚁第2秒时均爬到第二象限,第15秒时又都回到点A.若两只蚂蚁的爬行速度大小保持不变,红蚂蚁从点A顺时针匀速爬行,黑蚂蚁同时从点A逆时针匀速爬行,则它们从出发后到第二次相遇时,黑蚂蚁爬过的路程为_____ cm.

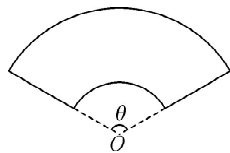


8. [2025 江西宜春中学调研]如图,长为2,宽为1的矩形木块,在桌面上作无滑动翻滚,翻滚到第三面后被一小木块挡住,使木块底与桌面成 30° 角,则点A走过的路程是_____.



9. [2025 湖南郴州期末]某单位拟建一个扇环形花坛(如图所示),该花坛是由以点O为圆心的两个同心圆弧和通过点O的两条线段围成的.按设计要求扇环形花坛的周长为30 m,其中大圆弧所在圆的半径为10 m.设小圆弧所在圆的半径为 x m,圆心角(正角)为 θ 弧度.

- (1) 求 θ 关于 x 的函数关系式;
- (2) 已知在花坛的边缘(实线部分)进行装饰时,直线部分的装饰费用为4元/m,弧线部分的装饰费用为9元/m.设花坛的面积与装饰总费用的比为 y ,求 y 关于 x 的函数关系式,并求出 x 为何值时, y 取得最大值.



第8章 函数应用

8.1 二分法与求方程近似解

题组 29 函数的零点及方程根的分布问题

★重点

建议用时:40分钟 答案见 P60

1. [2023 安徽安庆期末] 已知函数 $f(x) = \ln x + x - 2$ 的零点为 x_0 , 则下列说法错误的是 ()
- A. $x_0 \in (1, 2)$ B. $x_0 e^{x_0} = e^2$
C. $(2 - x_0)^{x_0} < 1$ D. $x_0^{2-x_0} < 1$
2. [2024 安徽部分学校 12 月段测] 已知函数 $f(x) = x + 1, g(x) = (x + 1)^2, h(x) = x^2 - (t + 1)x, t \in \mathbf{R}$, 设 $M(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq g(x), \\ g(x), & f(x) < g(x), \end{cases}$ 则关于 x 的方程 $h(M(x)) + t = 0$ 的实根个数的最小值为 ()
- A. 0 B. 1
C. 2 D. 3
3. [2025 北京海淀期中] 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(2024x) > 2024f(x)$, 则 ()
- A. $f(x)$ 有两个正零点
B. $f(x)$ 有一正一负两个零点
C. $f(x)$ 有两个负零点
D. $f(x)$ 无零点
4. [2024 江苏沙洲中学期中] 若函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - m, & x < 1, \\ x^2 - 4mx + 3m^2, & x \geq 1 \end{cases}$ 有 3 个零点, 则实数 m 的取值范围是 ()
- A. $[\frac{1}{3}, 1)$
B. $(-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$
C. $[1, 2)$
D. $[\frac{1}{3}, 1) \cup [2, +\infty)$
5. [多选题, 2025 黑龙江牡丹江一中期中] 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_2 x|, & 0 < x \leq 2, \\ x^2 - 6x + 9, & x > 2, \end{cases}$ 若方程 $f(x) = k$ 有四个不同的零点 x_1, x_2, x_3, x_4 且 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 则下列结论正确的是 ()
- A. $0 < k < 1$ B. $2x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{2}$
C. $x_1 x_2 + x_3 + x_4 = 6$ D. $3 < x_1 + 2x_2 < \frac{9}{2}$
6. [2024 辽宁丹东期中] 已知函数 $f(x) = x^2 - 2(a + 1)x + 4$ 在区间 $[\frac{1}{2}, 3]$ 上有两个零点, 则实数 a 的取值范围是_____.
7. [2024 上海虹口期末统考] 设 $a \in \mathbf{R}$, 若关于 x 的方程 $2x|x| - (a - 2)x + |x| - a + 1 = 0$ 有 3 个不同的实数解, 则 a 的取值范围为_____.
8. [2024 山东济南三中期末] 已知函数 $g(x) = mx^2 - 2mx + n (m > 0, n > 0)$ 在 $x \in [1, 2]$ 上的最大值为 1, 最小值为 0. 设 $f(x) = \frac{g(x)}{x}$.
- (1) 求实数 m, n 的值;
- (2) 若关于 x 的方程 $f(|\log_3 x|) + \frac{2a}{|\log_3 x|} - 3a - 1 = 0$ 有四个不同的实数解, 求实数 a 的取值范围.