

初中数学

小题才王做[®]

恩波教育研究中心 编

提 优 版

八年级上
· 苏科版 ·

本册主编 康叶红 朱奎祥 渠东剑
编 委 陈敏婕 杭正弘 康叶红
何姝晴 朱松林 张寿彬

— 目录 —

CONTENTS

课时训练篇

第1章 三角形

课时训练 1	三角形中的线段和角(1)	1
课时训练 2	三角形中的线段和角(2)	3
课时训练 3	全等三角形	5
课时训练 4	全等三角形的判定(1)	7
课时训练 5	全等三角形的判定(2)	9
课时训练 6	全等三角形的判定(3)	11
课时训练 7	全等三角形的判定(4)	13
课时训练 8	全等三角形的判定(5)	15
课时训练 9	全等三角形的判定(6)	17
课时训练 10	线段垂直平分线与角平分线(1)	19

课时训练 11	线段垂直平分线与角平分线(2)	21
课时训练 12	等腰三角形(1)	23
课时训练 13	等腰三角形(2)	25
课时训练 14	等腰三角形(3)	27
课时训练 15	等腰三角形(4)	29

第2章 实数的初步认识

课时训练 16	平方根(1)	31
课时训练 17	平方根(2)	33
课时训练 18	立方根	35
课时训练 19	实数(1)	37
课时训练 20	实数(2)	39
课时训练 21	实数(3)	41
课时训练 22	近似值	43

第3章 勾股定理

课时训练 23	勾股定理的探究(1)	45
课时训练 24	勾股定理的探究(2)	47
课时训练 25	勾股定理的逆定理	49
课时训练 26	勾股定理的简单应用(1)	51
课时训练 27	勾股定理的简单应用(2)	53

第4章 平面直角坐标系

课时训练 28	点的位置与坐标系(1)	55
课时训练 29	点的位置与坐标系(2)	57
课时训练 30	图形变换与坐标变化(1)	59
课时训练 31	图形变换与坐标变化(2)	61
课时训练 32	图形变换与坐标变化(3)	63

第5章 一次函数

课时训练 33	变量与函数(1)	65
课时训练 34	变量与函数(2)	67
课时训练 35	一次函数的概念(1)	69
课时训练 36	一次函数的概念(2)	71
课时训练 37	一次函数的图象与性质(1)	73
课时训练 38	一次函数的图象与性质(2)	75
课时训练 39	一次函数的图象与性质(3)	77
课时训练 40	一次函数的图象与性质(4)	79
课时训练 41	用一次函数解决问题(1)	81
课时训练 42	用一次函数解决问题(2)	83
课时训练 43	一次函数与二元一次方程	85

专题强化篇

强化训练

强化训练 1	构造全等三角形解决问题	87
强化训练 2	等腰三角形的性质与判定	89
强化训练 3	实数的大小比较	91
强化训练 4	数形结合和方程思想在勾股定理中应用	92
强化训练 5	平面直角坐标系与一次函数、几何图形	94

素养提升

素养提升 1	抽象能力	97
素养提升 2	推理能力	99
素养提升 3	几何直观	102
素养提升 4	创新意识	104
素养提升 5	模型观念与应用意识	106

阶段检测篇

(见活页)

第1章检测卷	109
第2章检测卷	113
第3章检测卷	117
第4章检测卷	121
第5章检测卷	125
期中检测卷	129
期末检测卷	135

答案全解精析(另册)

附:提优小帮手·期末加油站

I n d e x 索引

第 1 章 三角形

提优点 1	三角形的三边关系	P1T6, P2T5, T7
提优点 2	三角形的中线、高线、角平分线与三角形的面积	P3T8, P4T7
提优点 3	全等三角形的性质	P5T7, P6T3, T7
提优点 4	几何变换与全等(平移、旋转)	P7T7, P18T1
提优点 5	共角或等角中的全等	P10T6, P15T6
提优点 6	一线三等角的 K 字形全等	P7T5, P9T7
提优点 7	垂直平分线与角平分线的性质	P19T3, P21T7
提优点 8	等腰三角形的性质与判定	P23T5, T7, P25T2, P27T8
提优点 9	平行线加角平分线的等腰模型	P26T2, T4, P29T5
提优点 10	直角三角形中的两条性质	P29T3, P30T8
提优点 11	分类讨论思想	P24T4, T5, P28T3

第 2 章 实数的初步认识

提优点 1	平方根与立方根	P31T3, P34T4, P35T8
提优点 2	实数及其运算	P39T13, P40T9
提优点 3	实数的大小比较	P37T7, P39T9
提优点 4	规律类与阅读理解类问题	P32T9, P36T12, P42T8

第 3 章 勾股定理

提优点 1	勾股定理及其逆定理	P45T9, P47T8, P50T8
提优点 2	数形结合思想	P46T1, P50T4
提优点 3	勾股定理的应用	P51T3, T5, P52T4
提优点 4	方程思想	P45T3, P52T2

第 4 章 平面直角坐标系

提优点 1	象限内点的坐标特征	P55T2, T4, T7, T8, P56T3
提优点 2	图形变换与坐标变化	P59T2, P61T2, T5, P63T3
提优点 3	网格、作图与面积	P56T7, P59T6, P62T5
提优点 4	平面直角坐标系中简单几何问题	P56T6, P62T3, T4
提优点 5	规律类与阅读理解类问题	P58T3, P60T5, P61T6

第 5 章 一次函数

提优点 1	函数图象信息的解读	P67T2, T4, P68T3, T5
提优点 2	一次函数的表达式	P70T3, T7, P71T6
提优点 3	一次函数的图象与性质	P73T2, P77T7, P79T2
提优点 4	一次函数与简单几何问题	P77T5, P80T3
提优点 5	一次函数的应用	P81T2, T4, P83T1, T4
提优点 6	数形结合思想	P85T3, P86T6

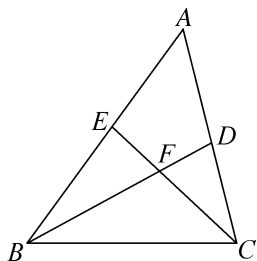
第1章 三角形

课时训练1 三角形中的线段和角(1)

(时间:20 min)

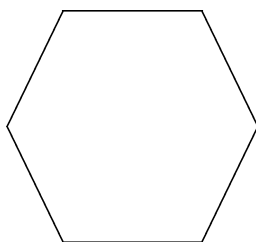
基础巩固

- 小李想做一个三角形的框架,他有两根长度分别为 12 cm 和 10 cm 的细木条,需要将其中一根木条分为两段与另一根组成一个三角形.如果不考虑损耗和接头部分,那么小李应该选择分为两段的木条是 ()
A. 12 cm 的木条 B. 10 cm 的木条
C. 两根都可以 D. 两根都不行
- 下列说法不正确的是 ()
A. 三角形按角分,可分为锐角三角形、直角三角形和钝角三角形
B. 三角形按边分,可分为等腰三角形和等边三角形
C. 等边三角形一定是锐角三角形
D. 等腰直角三角形既是等腰三角形又是直角三角形
- (2024 徐州市睢宁县期中)如图,以 BC 为边的三角形的个数为_____.

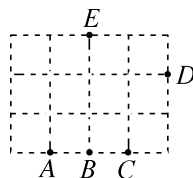


- 如图是用木棍首尾顺次相接组成的六边形,但六边形始终无法固定形态.若要使该六边形稳定,则至少需要再钉上_____

根木棍.



(第4题)

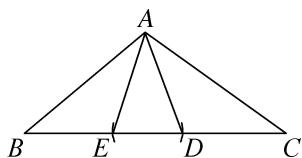


(第5题)

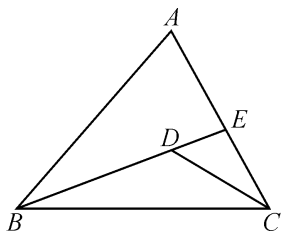
- 如图,方格中的 A, B, C, D, E 称为格点(网格线的交点),以这五个格点中的任意三点为三角形的顶点画三角形,其中直角三角形有_____个.
- 若一个等腰三角形的两边长分别为 4 cm 和 9 cm,则它的周长为_____cm.
- 若三角形两边的长分别为 2 和 7,且第三边的长为奇数,则第三边的长为_____.
- 已知等腰三角形的周长为 14 cm,底边长与腰长的比为 3 : 2,求这个等腰三角形各边的长.

拓展提优

1. (2024 无锡市宜兴市期中)如图,在 $\triangle ABC$ 中,以点 B 为圆心, AB 长为半径画弧,交边 BC 于点 D ,以点 C 为圆心, AC 长为半径画弧,交边 BC 于点 E . 若 $\angle B = 40^\circ$, $\angle C = 36^\circ$,则关于 AD, AE, BE, CD 的大小关系正确的是 ()



- A. $AD = AE$ B. $AD < AE$
C. $BE = CD$ D. $BE < CD$
2. 同一平面内有 5 个点,每 3 个点都不在同一条直线上,以其中任意 3 点组成的三角形共有 ()
- A. 3 个 B. 5 个
C. 8 个 D. 10 个
3. 如图,若把有一条公共边的两个三角形称为一对“共边三角形”,则图中以 BC 为公共边的“共边三角形”有 ()



- A. 2 对 B. 3 对
C. 4 对 D. 6 对
4. 下列长度的三条线段与长度为 5 的线段首尾依次相连能组成四边形的是 ()
- A. 1, 1, 1 B. 1, 1, 8
C. 1, 2, 2 D. 2, 2, 2
5. 已知三角形的三条边长均为整数,其中有一边长为 4,但不是最短边,则这样的三角形共有 _____ 个.
6. (2024 苏州市姑苏区期中)如图,图 1 中有 1

个三角形,在图 1 中的三角形内部(不含边界)取一点,连接该点与三角形的 3 个顶点得到图 2,图 2 中共有 4 个三角形.若在图 2 中的一个小三角形内部(不含边界)取一点,连接该点与该小三角形的 3 个顶点得到图 3. 在虚线框中画出图 3,图 3 中共有 _____ 个三角形.(写出所有可能的值)

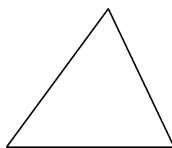


图 1

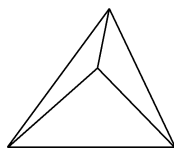


图 2

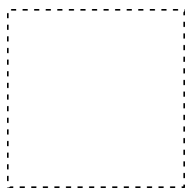
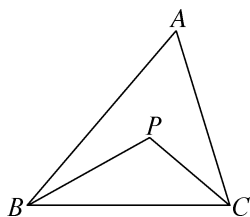


图 3

7. 已知 a, b, c 是一个三角形三条边的长.
- (1) 小明认为“代数式 $|a + b - c| + |b - a - c| - |a - c + b|$ 的值总是正数”,小明的看法对吗? 请说明理由.
- (2) 取一组你喜欢的 a, b, c 的整数值,并求出(1)中代数式的值.

8. 如图, P 为 $\triangle ABC$ 内任意一点,试说明:
 $AB + AC > PB + PC$.



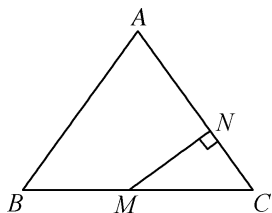
第3章 勾股定理

课时训练 23 勾股定理的探究(1)

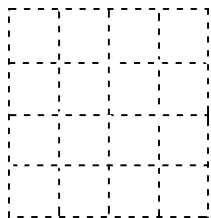
(时间:20 min)

基础巩固

- 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, 周长为 60, 斜边长与一条直角边长之比为 13 : 5, 则 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的斜边长为 ()
A. 5 B. 10 C. 13 D. 26
- 已知直角三角形的面积为 15, 两条直角边的和为 11, 则其斜边长的平方为 ()
A. 61 B. 62 C. 63 D. 64
- 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB=6$, $BC=8$, AD 为 $\angle BAC$ 的平分线, 将 $\triangle ADC$ 沿直线 AD 翻折得到 $\triangle ADE$, 则 DE 的长为 ()
A. 4 B. 5 C. 6 D. 7
- 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB=17$, $AC=10$, 边 BC 上的高 $AD=8$, 则边 BC 的长为_____.
- 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=5$, $BC=6$, M 为 BC 的中点, $MN \perp AC$ 于点 N , 则 MN 的长是_____.



(第5题)

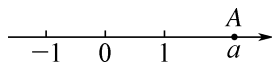


(第6题)

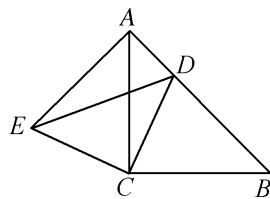
- 如图, 正方形网格中的每个小正方形的边长都是 1, 任意连接这些小正方形的顶点, 可得到一些线段. 请在图中画出 $AB=\sqrt{2}$, $AC=\sqrt{5}$, $AD=\sqrt{13}$ 这样的线段.

- 如图, A 是数轴上表示实数 a 的点.

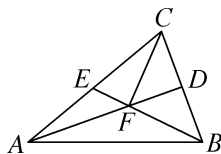
- 请用直尺和圆规在数轴上作出表示实数 $\sqrt{2}$ 的点 P . (保留作图痕迹, 不写作法)
- 利用数轴比较 $\sqrt{2}$ 和 a 的大小, 并说明理由.



- 如图, $\triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 均是等腰直角三角形, $\angle ACB = \angle ECD = 90^\circ$, D 为边 AB 上一点.
- 求证: $\triangle ACE \cong \triangle BCD$.
- 若 $AD=5$, $BD=12$, 求 DE 的长.



- 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $AD \perp BC$ 于点 D , $\angle CBE=45^\circ$, BE 分别交 AC , AD 于点 E , F , 连接 CF .
- 判断 $\triangle BCF$ 的形状, 并说明理由.
- 若 $AF=BC$, 求证: $BF^2 + EF^2 = AE^2$.



拓展提优

1. 如图 1, 以直角三角形的各边为边分别向外作正方形, 再把较小的两张正方形纸片按图 2 所示的方式放置在最大的正方形内. 若已知图中阴影部分的面积, 则一定能求出 ()

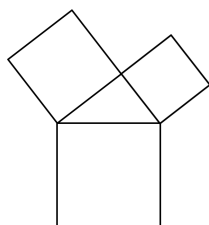


图 1

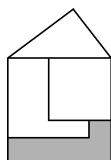
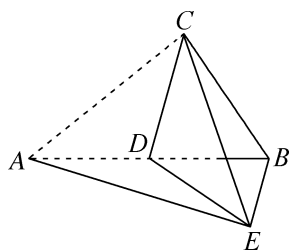


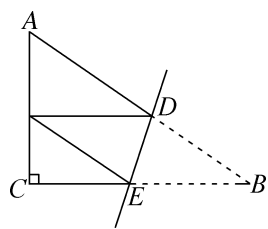
图 2

- A. 直角三角形的面积
B. 最大正方形的面积
C. 较小的两个正方形重叠部分的面积
D. 最大正方形与直角三角形的面积之和
2. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 3$, $AC = 4$, D 是 AB 的中点, 将 $\triangle ACD$ 沿 CD 翻折得到 $\triangle ECD$, 连接 AE , BE , 则线段 BE 的长为 ()

- A. $\frac{7}{5}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{3}$ D. 2



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$, $BC = 8$, D, E 分别是边 AB 和边 CB 上的点, 把 $\triangle BDE$ 沿着直线 DE 折叠. 若点 B 落在边 AC 上, 则 CE 的取值范围是 _____.
4. 阅读与应用: 下面是小敏写的数学日记的一部分, 请你认真阅读, 并完成相应的任务.

无理数与线段长

今天我们借助勾股定理, 在数轴上找到了一些特殊的无理数对应的点, 认识了“数轴上的点与实数一一对应”这一事实.

回顾梳理: 要在数轴上找到表示 $\pm\sqrt{2}$ 的点, 关键是在数轴上构造线段 $OA = OA' = \sqrt{2}$. 如图 1, 正方形的边长为 1 个单位长度, 以原点 O 为圆心, 对角线长为半径画弧与数轴分别交于点 A, A' , 则点 A 对应的数为 $\sqrt{2}$, 点 A' 对应的数为 $-\sqrt{2}$. 类似地, 我们可以在数轴上找到表示 $\pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{10}, \dots$ 的点.

拓展思考: 如图 2, 改变图 1 中正方形的位置, 用类似的方法作图, 可在数轴上构造出线段 OB 与 OB' , 其中 O 仍为原点, 点 B, B' 分别在原点的右侧、左侧, 可由线段 OB 与 OB' 的长得到点 B, B' 所表示的无理数. 按照这样的思路, 只要构造出特定长度的线段, 就能在数轴上找到无理数对应的点.

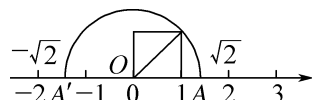


图 1

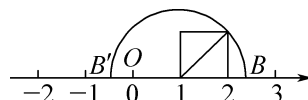


图 2

任务:

- (1) “拓展思考”中, 线段 OB 的长为 _____, OB' 的长为 _____; 点 B 表示的数为 _____, 点 B' 表示的数为 _____.
- (2) 请在图 3 所示的数轴上, 画图确定表示 $2 - \sqrt{10}$ 的点 M .

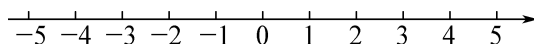


图 3

课时训练 40 一次函数的图象与性质(4)

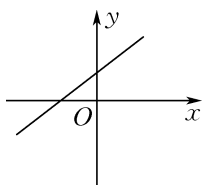
(时间:30 min)

基础巩固

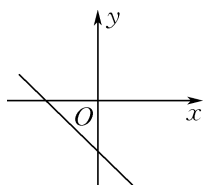
1. 已知点 $A(2, m)$, $B(3, n)$ 都在一次函数 $y = (\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{2}$ 的图象上, 则 m 与 n 的关系为 ()

A. $m > n$ B. $m < n$ C. $m \geq n$ D. $m \leq n$

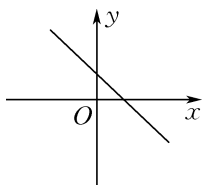
2. 已知一次函数 $y = kx + b$ (k, b 为常数, 且 $k \neq 0$), y 随 x 的增大而减小, 且 $kb < 0$, 则该一次函数在平面直角坐标系内的大致图象是 ()



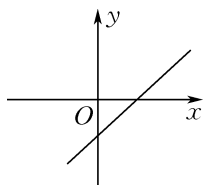
A



B



C



D

3. 将函数 $y = -2x$ 的图象向下平移后得到直线 AB . 若直线 AB 经过点 (m, n) , 且 $2m + n + 6 = 0$, 则直线 AB 对应的函数表达式为_____.
4. 已知下表中的点 (x, y) 都在函数 $y = x + n$ 的图象上, 现有下列结论: ① y 随 x 的增大而增大; ② 当 $x > 0$ 时, $y > 2$; ③ 关于 x 的方程 $x + n = 0$ 的解为 $x = -2$. 其中正确的结论有_____ (填序号).

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	...
y	...	-2	-1	0	1	2	3	4	...

5. 将一次函数 $y = -2x + 4$ 的图象绕原点 O 逆时针旋转 90° , 所得到的图象对应的函数

表达式是_____.

6. 有一个一次函数的图象, 小丽、小明两位同学分别说出了它的一些特点:

小丽: y 随 x 的增大而减小.

小明: 当 $x > 2$ 时, $y < 0$.

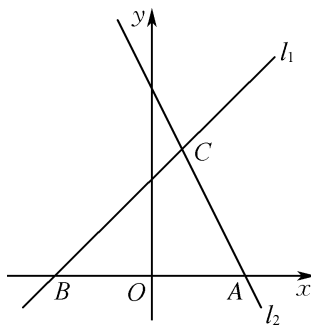
请你写出满足小丽、小明两位同学说法的一个一次函数表达式:_____.

7. 已知一次函数 $y = (3 + k)x - 2k^2 + 18$.

- (1) 当 k 取何值时, 其图象经过原点?
- (2) 当 k 取何值时, y 随 x 的增大而减小?
- (3) 当 k 的取值范围为多少时, 其图象与 y 轴的交点在 x 轴的上方?
- (4) 当 k 取何值时, 其图象平行于直线 $y = -2x$?

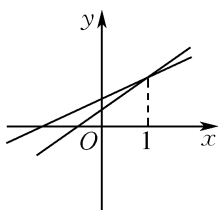
8. 如图, 直线 $l_1: y = x + 3$ 与过点 $A(3, 0)$ 的直线 l_2 交于点 $C(1, m)$, 与 x 轴交于点 B .

- (1) 求直线 l_2 的函数表达式.
- (2) 点 M 在直线 l_1 上, $MN \parallel y$ 轴, 交直线 l_2 于点 N . 若 $MN = AB$, 求点 M 的坐标.

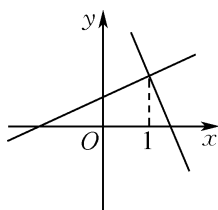


拓展提优

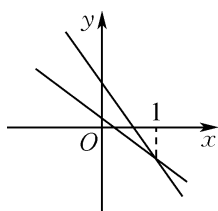
1. 已知一次函数 $y_1 = ax + b$ 和 $y_2 = bx + a$ ($a \neq b$), 则函数 y_1 和 y_2 的图象可能是 ()



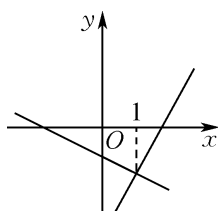
A



B



C

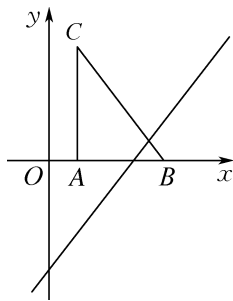


D

2. 在平面直角坐标系中, 过点 $(-2, 3)$ 的直线 l 经过第一、二、三象限. 若点 $(0, a)$, $(-1, b)$, $(c, -1)$ 都在直线 l 上, 则下列判断正确的是 ()

- A. $a < b$ B. $a < 3$
C. $b < 3$ D. $c < -2$

3. 如图, 把 $\text{Rt}\triangle ABC$ 放在平面直角坐标系中, 其中 $\angle CAB = 90^\circ$, $BC = 5$, 点 A, B 的坐标分别为 $(1, 0), (4, 0)$. 将 $\triangle ABC$ 沿 x 轴向右平移, 当点 C 落在直线 $y = 2x - 6$ 上时, 线段 BC 扫过的面积为 ()

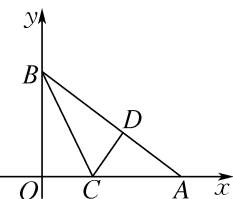


- A. 4 B. 8 C. 16 D. $8\sqrt{2}$

4. 如图, 直线 $y = -\frac{3}{4}x + 6$

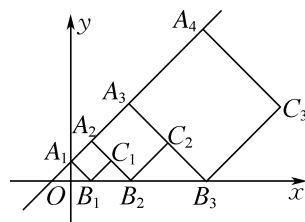
分别与 x 轴、 y 轴交于点 A, B , 点 C 在线段 OA 上, 线段 OB 沿 BC

所在的直线翻折, 点 O 落在边 AB 上的点



D 处, 则直线 BC 的函数表达式为 _____.

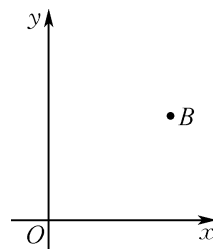
5. 若把一次函数 $y = kx + b$ 的图象先绕着原点旋转 180° , 再向左平移 2 个单位长度后, 恰好经过点 $A(-4, 0)$ 和点 $B(0, 2)$. 则原一次函数的表达式是 _____.
6. 正方形 $A_1B_1C_1A_2$, 正方形 $A_2B_2C_2A_3$, 正方形 $A_3B_3C_3A_4$ 按如图所示的方式放置. 点 A_1, A_2, A_3, A_4 和点 B_1, B_2, B_3 分别在直线 $y = kx + b$ ($k > 0$) 和 x 轴上. 已知点 $A_1(0, 1), B_1(1, 0)$, 则点 C_3 的坐标是 _____.



7. 如图, 在平面直角坐标系中, 已知点 B 的坐标为 $(6, 4)$.

- (1) 请用直尺(不带刻度)和圆规作一条直线 AC , 它与 x 轴和 y 轴的正半轴分别交于点 A 和点 C , 且使 $\angle ABC = 90^\circ$, $\triangle ABC$ 与 $\triangle AOC$ 的面积相等(不要求写作法, 保留作图痕迹).

- (2) 问: (1) 中这样的直线 AC 是否唯一? 若唯一, 请说明理由; 若不唯一, 请在图中画出所有这样的直线 AC , 并写出与之对应的函数表达式.

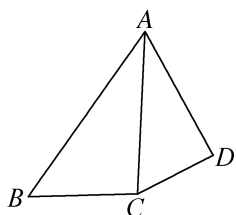


专题强化篇

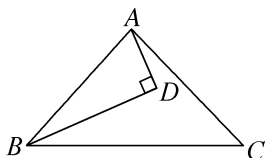
强化训练 1 构造全等三角形解决问题

(时间:35 min)

- 如图,在四边形 $ABCD$ 中,对角线 AC 平分 $\angle BAD$, $AB > AD$, 下列结论正确的是()
A. $AB - AD > CB - CD$
B. $AB - AD = CB - CD$
C. $AB - AD < CB - CD$
D. $AB - AD$ 与 $CB - CD$ 的大小关系不确定



(第1题)



(第2题)

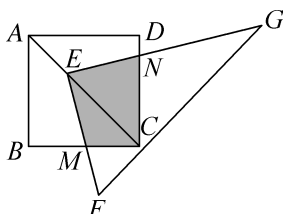
- 如图, BD 是 $\angle ABC$ 的平分线, $AD \perp BD$, 垂足为 D . 若 $\angle DAC = 15^\circ$, $\angle C = 50^\circ$, 则 $\angle BAD$ 的度数为()
A. 35° B. 45° C. 55° D. 65°
- 如图, 点 E 在正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 上, 且 $EC = 2AE$, 直角三角形 FEG 的两直角边 EF, EG 分别交边 BC, DC 于点 M, N . 若正方形 $ABCD$ 的边长为 a , 则重叠部分四边形 $EMCN$ 的面积为()

A. $\frac{2}{3}a^2$

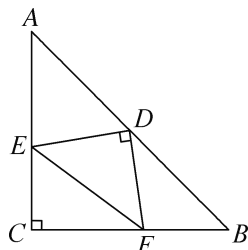
B. $\frac{1}{4}a^2$

C. $\frac{5}{9}a^2$

D. $\frac{4}{9}a^2$



(第3题)



(第4题)

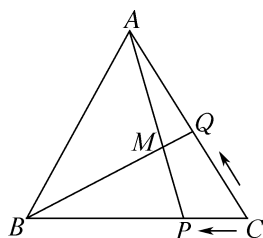
- 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = BC$, $\angle ACB = 90^\circ$, D 是边 AB 的中点, 点 E 在边 AC 上, 点 F

在边 BC 上, $DE \perp DF$, $AE = 4$, $BF = 3$, 则 EF 的长为()

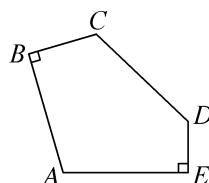
- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

- 如图, 等边三角形 ABC 的边长为 8 cm, 点 P 从点 C 出发, 以 1 cm/s 的速度向点 B 匀速运动, 同时点 Q 也从点 C 出发, 以 2 cm/s 的速度向点 A 匀速运动, AP, BQ 交于点 M , 当点 Q 到达点 A 时, P, Q 两点停止运动. 设 P, Q 两点运动的时间为 t s. 若 $\angle AMQ = 60^\circ$, 则 t 的值是()

- A. 1 B. 2 C. $\frac{8}{3}$ D. 3

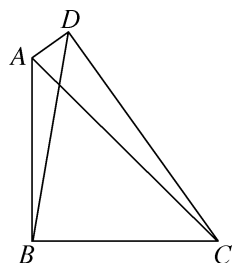


(第5题)

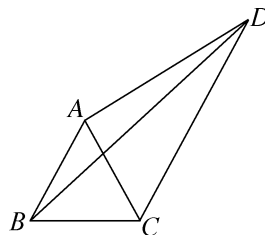


(第6题)

- 如图, 在五边形 $ABCDE$ 中, $\angle ABC = \angle AED = 90^\circ$, $AB = CD = AE = BC + DE = 2$, 则五边形 $ABCDE$ 的面积为_____.
- 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, $AB = CB$, 连接 AC, BD . 若 $BD = 7$ cm, 则 $S_{\text{四边形} ABCD} =$ _____ cm^2 .



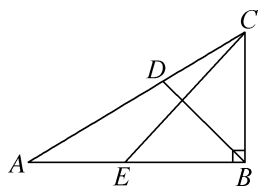
(第7题)



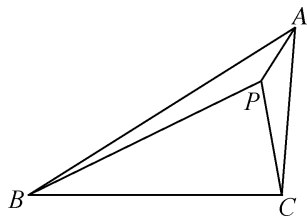
(第8题)

- 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, AC, BD 为对角线, $\triangle ABC$ 为等边三角形, $\angle ADC = 30^\circ$, $AD = 2$, $BD = 3$, 则 CD 的长为_____.

9. 如图,在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, D, E 分别是边 AC, AB 上的两点,且 $CD=AE$,连接 BD, CE . 若 $BC=6, AB=8$,则 $BD+CE$ 最小值的平方是_____.



(第9题)



(第10题)

10. 如图,已知 P 是 $\triangle ABC$ 内一点, $\angle PBC=30^\circ, \angle PBA=8^\circ$,且 $\angle PAB=\angle PAC=22^\circ$,则 $\angle APC$ 的度数为_____.

11. 【问题探究】

- (1) 如图1,在锐角三角形 ABC 中,分别以 AB, AC 为边向外作等腰三角形 ABE 和等腰三角形 ACD ,使 $AE=AB, AD=AC, \angle BAE=\angle CAD$,连接 BD, CE ,试猜想 BD 与 CE 的大小关系,并说明理由.

【深入探究】

- (2) 如图2,在四边形 $ABCD$ 中, $AB=7\text{ cm}, BC=3\text{ cm}, \angle ABC=\angle ACD=\angle ADC=45^\circ$,求 BD 的长.
- (3) 如图3,在(2)的条件下,当 $\triangle ACD$ 在线段 AC 的左侧时,求 BD 的长.

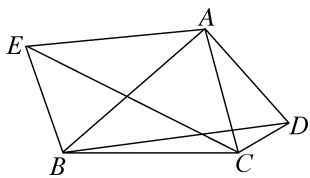


图1

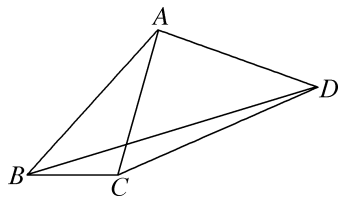


图2

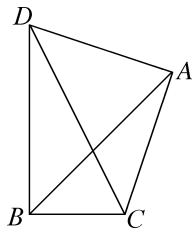


图3

12. 小明遇到这样一个问题:如图1,在 $\triangle ABC$ 中, $AB=8, AC=6, AD$ 是中线,求 AD 的取值范围. 他的做法是:延长 AD 至点 E ,使 $DE=AD$,连接 BE . 证明 $\triangle BDE \cong \triangle CDA$,经过推理和计算使问题得到解决. 请根据小明的做法解决下列问题:

- (1) 如图2, AD 是 $\triangle ABC$ 的中线,在 AD 上取一点 E ,连接 BE ,且 $BE=AC$,延长 BE 交 AC 于点 F . 求证: $AF=EF$.

- (2) 如图3,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=90^\circ, D$ 为 BC 的中点, $\angle EDF=90^\circ$. 求证: $BE^2 + CF^2 = EF^2$.

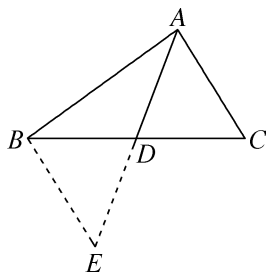


图1

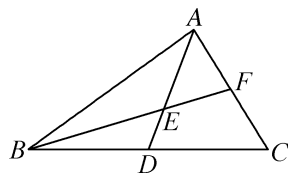


图2

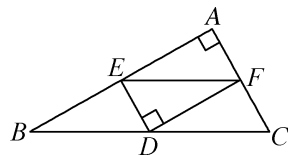


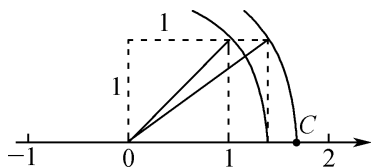
图3

强化训练 4 数形结合和方程思想在勾股定理中的应用

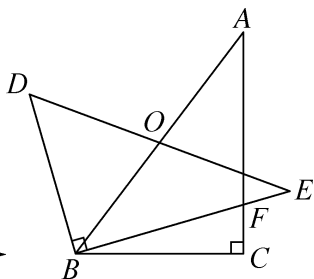
(时间: 35 min)

1. 如图, 数轴上点 C 所表示的数是 ()

A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 1.5



(第1题)



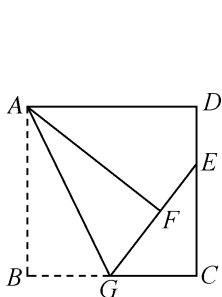
(第2题)

2. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 已知两条直角边 $AC=4$, $BC=3$. 将 $\triangle ABC$ 绕斜边中点 O 旋转, 使直角顶点与点 B 重合, 得到与 $\triangle ABC$ 全等的 $\triangle EDB$, 边 BE 和 AC 相交于点 F , 则 EF 的长是 ()

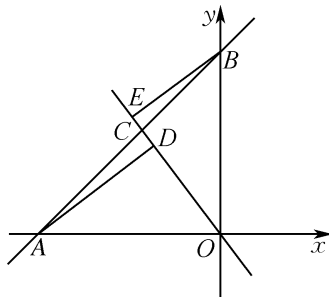
A. $\frac{7}{8}$ B. 1 C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{2}{3}$

3. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, $AB=6$, G 是 BC 的中点. 将 $\triangle ABG$ 沿 AG 所在的直线翻折到 $\triangle AFG$, 延长 GF 交 DC 于点 E , 则 DE 的长为 ()

A. 1 B. 1.5 C. 2 D. 2.5



(第3题)



(第4题)

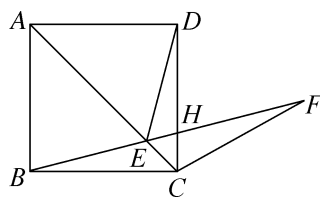
4. 如图, 直线 $y=x+b$ ($b>0$) 分别交 x 轴、 y 轴于点 A , B , 直线 $y=kx$ ($k<0$) 与直线 $y=x+b$ ($b>0$) 交于点 C , 点 C 在第二象限, 过 A , B 两点分别作 $AD \perp OC$ 于点 D , $BE \perp OC$ 于点 E , 且 $BE+BO=8$, $AD=4$, 则 ED 的长为 ()

A. 2 B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. 1

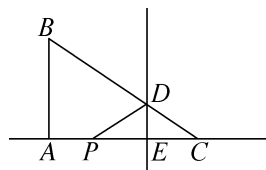
5. 如图, 在正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 上取一点 E , 使得 $\angle CDE=15^\circ$, 连接 BE 并延长至点 F , 使 $CF=CB$, BF 与 CD 相交于点 H . 已知 $AB=\sqrt{6}$, 现有下列四个结论:

① $\angle CBE=15^\circ$; ② $AE=\sqrt{3}+1$; ③ $S_{\triangle DEC}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; ④ $CE+DE=EF$. 其中正确的结论

有 _____ (填序号).



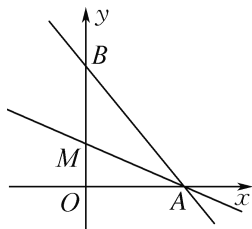
(第5题)



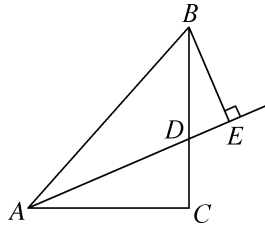
(第6题)

6. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle A=90^\circ$, $AC=12$, $AB=9$, $DE \perp AC$, $CD=\frac{1}{3}BC$, $CE=\frac{1}{3}AC$, P 是直线 AC 上一点. 把 $\triangle CDP$ 沿 DP 所在的直线翻折, 点 C 落在直线 DE 上的点 H 处, 则 CP 的长为 _____.

7. 如图, 在平面直角坐标系中, 直线 $y=-\frac{4}{3}x+8$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A , B , $\angle BAO$ 的平分线与 y 轴交于点 M , 则 OM 的长为 _____.



(第7题)



(第8题)

8. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AB=4$,

$BC=3$, D 为直线 BC 上的动点, 连接 AD , 过点 B 作 $BE \perp AD$ 所在直线于点 E . 若 $\frac{AE}{AD} = \frac{1}{2}$, 则 BE 的长为_____.

9. 如图 1, 在长方形 $ABCD$ 中, 已知 $AB=20$, $AD=12$, 动点 P 从点 D 出发, 以每秒 2 个单位长度的速度沿线段 DC 向终点 C 运动, 连接 AP . 设点 D 关于 AP 的对称点为 E , 点 P 的运动时间为 t s.

- (1) 如图 2, 射线 PE 恰好经过点 B , 试求此时 t 的值.
- (2) 当射线 PE 与边 AB 交于点 Q 时.
 - ① 请直接写出 AQ 长的取值范围.
 - ② 是否存在这样的 t 值, 使得 $QE = QB$? 若存在, 求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由.

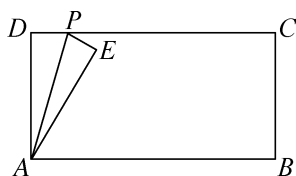


图 1

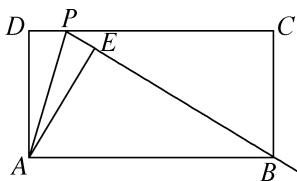


图 2



备用图 1



备用图 2

10. 某班级在探究“将军饮马问题”时抽象出数学模型: 直线 l 同侧有两个定点 A, B , 在直线 l 上存在点 P , 使得 $PA+PB$ 的值最小. 解法: 如图 1, 作点 A 关于直线 l 的对称点 A' , 连接 $A'B$, 则 $A'B$ 与直线 l 的交点 P , 使得 $PA+PB$ 的值最小, 且 $PA+PB$ 的最小值为 $A'B$ 的长.

请利用上述模型解决下列问题.

【几何应用】

- (1) 如图 2, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = BC = 2$, E 是 AB 的中点, P 是边 BC 上一动点, 则 $PA+PE$ 的最小值为_____.

【代数应用】

- (2) 求代数式 $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{(3-x)^2+9}$ ($0 \leq x \leq 3$) 的最小值.

【几何拓展】

- (3) 如图 3, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 2$, $\angle A = 30^\circ$. 若在边 AB, AC 上各取一点 M, N , 使 $CM+MN$ 的值最小, 则最小值是_____.

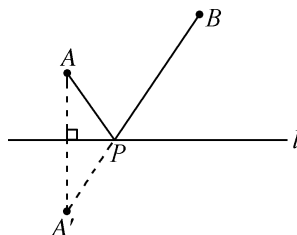


图 1

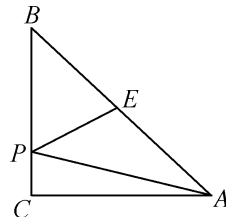


图 2

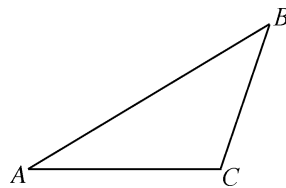


图 3

素养提升1 抽象能力

(时间:30 min)

1. 若 $\sqrt{5} < a < \sqrt[3]{216}$, 则整数 a 的值不可能为 ()

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

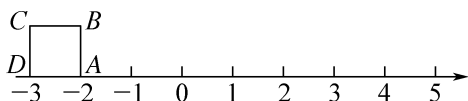
2. 类比平方根和立方根, 我们定义 n 次方根为: 一般地, 如果 $x^n = a$, 那么 x 叫作 a 的 n 次方根, 其中 $n > 1$, 且 n 是正整数. 例如: 因为 $(\pm 3)^4 = 81$, 所以 ± 3 叫作 81 的四次方根, 记作 $\pm \sqrt[4]{81} = \pm 3$; 因为 $(-2)^5 = -32$, 所以 -2 叫作 -32 的五次方根, 记作 $\sqrt[5]{-32} = -2$. 下列说法不正确的是 ()

A. 负数 a 没有偶数次方根
B. 任何实数 a 都有奇数次方根

C. $\sqrt[2^{025}]{a^{2^{025}}} = a$

D. $\sqrt[2^{024}]{a^{2^{024}}} = a$

3. 正方形 $ABCD$ 在数轴上的位置如图所示, 点 A, D 对应的数分别为 -2 和 -3 . 若正方形 $ABCD$ 绕着顶点顺时针方向在数轴上连续无滑动翻转, 则在数轴上与 2 024 对应的点是 ()



A. D B. C C. B D. A

4. 在古希腊时期, 有一天毕达哥拉斯走在街上, 在经过铁匠铺时, 他听到铁匠打铁的声音非常好听, 于是驻足倾听, 他发现铁匠打铁节奏很有规律, 这种声音的节奏比例被毕达哥拉斯用数学的方式表达出来, 后来人们将这个数 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 称为“黄金分割数”. 设

$a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, 记 $S_1 = \frac{1}{1+a} +$

$\frac{1}{1+b}$, $S_2 = \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2}$, $S_3 = \frac{1}{1+a^3} +$

$\frac{1}{1+b^3}$, $\dots$, $S_{100} = \frac{1}{1+a^{100}} + \frac{1}{1+b^{100}}$, 则 $S_1 +$

$S_2 + S_3 + \dots + S_{100}$ 的值为 ()

A. $100\sqrt{5}$ B. $200\sqrt{2}$

C. 100 D. 5 050

5. 我们已经学习了利用“夹逼法”估算 $\sqrt{n}$ 的值, 现在用 a_n 表示距离 $\sqrt{n}$ (n 为正整数) 最近的正整数. 例如: a_1 表示距离 $\sqrt{1}$ 最近的正整数, 所以 $a_1 = 1$; a_2 表示距离 $\sqrt{2}$ 最近的正整数, 所以 $a_2 = 1$; a_3 表示距离 $\sqrt{3}$ 最近的正整数, 所以 $a_3 = 2$ ……利用这些发现得到以下结论:

① $a_8 = 3$;

② $a_n = 3$ 时, n 的值有 5 个;

③ $a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_{11} - a_{12} = 0$;

④ $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{20}} = 8$;

⑤ 当 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 100$ 时, n 的值为 2 550.

其中, 正确的结论有 ()

A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

6. 若 $\sqrt{2-xy} + (1-y)^2 = 0$, 则 $\frac{1}{xy} +$

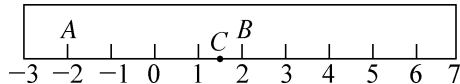
$\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{1}{(x+2)(y+2)} + \dots +$

$\frac{1}{(x+2\ 024)(y+2\ 024)}$ 的值为_____.

7. 若 $\sqrt{102.01} = 10.1$, 则 $\pm \sqrt{1.020\ 1} =$ _____;

若 $\sqrt[3]{2.14} \approx 1.289$, 且 $\sqrt[3]{-x} = 12.89$, 则 $x =$ _____.

8. 如图,在长方形纸条上有一条数轴,其中点 A 表示的数为 -2 ,点 B 表示的数为 2 ,点 C 表示的数为 $\sqrt{2}$,若先将纸条关于点 B 对折,再将对折后的纸片沿某点折叠后使得点 A 与点 B 重合,经过两次折叠后数轴上与点 C 重合的点所表示的数是 x . 当 $x > 2$ 时, x 的值为_____.



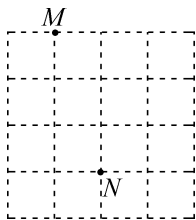
9. 对实数 x, y 定义一种新运算“ $\triangle$ ”,规定:
 $\triangle(x, y) = ax + bxy - 2$ (其中 a, b 均为非零常数),这里等式右边是通常的四则运算. 例如: $\triangle(5, 7) = 5a + 35b - 2$. 若 $\triangle(2, 3) = -5$, $\triangle(-4, 4) = 2$,则下列结论中正确的是_____ (填序号).
- ① $a = -3, b = \frac{1}{2}$;
 - ② 若 $\triangle(d, d) = -3d$,则 $\triangle(d, d) = \pm 6$;
 - ③ 若 $\triangle(p, q) = -6$,则 p, q 有且仅有 3 组正整数解;
 - ④ 如果 $\triangle(nx, y) = \triangle(ny, x)$,那么 $n = 0$ 或 $x = y$.
10. 已知 $x = \sqrt[3]{4(\sqrt{5}+1)} - \sqrt[3]{4(\sqrt{5}-1)}$,则 $x^3 + 12x$ 的算术平方根是_____.
11. 设 x 是实数,我们用 $\{x\}$ 表示不小于 x 的最小整数. 例如: $\{3.1\} = 4, \{-2.7\} = -2, \{2\} = 2, \{-3\} = -3$. 在此规定下任一实数都能写出如下形式: $x = \{x\} - m$, 其中 $0 \leq m < 1$.
- (1) 求 $\{x\}$ 与 $x, x+1$ 的大小关系.
 - (2) 根据(1)中的关系式,求满足 $\{2x-1\} = -3$ 的 x 的取值范围.
12. 阅读下面材料:随着人们认识的不断深入,毕达哥拉斯学派逐渐承认 $\sqrt{2}$ 不是有理数,并给出了证明,假设 $\sqrt{2}$ 是有理数,则存在两个互质的正整数 p, q ,使得 $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$,于是 $p = \sqrt{2}q$,两边平方得 $p^2 = 2q^2$. 因为 $2q^2$ 是偶数,所以 p^2 是偶数,而只有偶数的平方才是偶数,所以 p 也是偶数. 因此可设 $p = 2s$,代入上式,得 $4s^2 = 2q^2$,即 $q^2 = 2s^2$,所以 q 也是偶数,所以 p 和 q 都是偶数,不互质,这与假设 p, q 互质矛盾,这个矛盾说明, $\sqrt{2}$ 不能写成分数的形式,即 $\sqrt{2}$ 不是有理数. 请你用类似的方法,证明 $\sqrt[3]{2}$ 不是有理数.

素养提升 2 推理能力

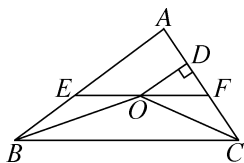
(时间: 40 min)

1. 如图, 点 M, N 在 4×4 方格纸中的格点上, 若以 MN 为边, 在方格纸中取一点 P (点 P 在格点上), 使得 $\triangle MNP$ 为等腰三角形, 则点 P 的个数为 ()

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6



(第1题)



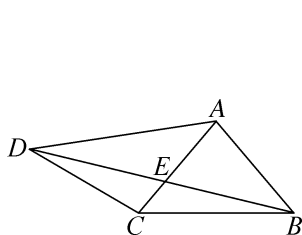
(第2题)

2. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线相交于点 O , 过点 O 作 $EF \parallel BC$ 交 AB 于点 E , 交 AC 于点 F , 过点 O 作 $OD \perp AC$ 于点 D . 给出下列四个结论: ① $\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A$; ② $\angle EBO = \frac{1}{2} \angle AEF$; ③ $\angle DOC + \angle OCB = 90^\circ$; ④ 设 $OD = m$, $AE + AF = n$, 则 $S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} mn$. 其中正确的结论有 ()

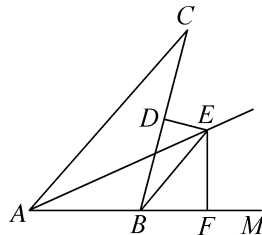
A. 1 个 B. 2 个
C. 3 个 D. 4 个

3. 我们把 $M = \{1, 3, x\}$ 叫作集合 M , 其中 1, 3, x 叫作集合 M 的元素. 集合中的元素具有确定性 (如 x 必然存在), 互异性 (如 $x \neq 1$, $x \neq 3$), 无序性 (即改变元素的顺序, 集合不变). 若集合 $N = \{x, 1, 3\}$, 我们说 $M = N$. 已知集合 $A = \{0, |x|, y\}$, 集合 $B = \{x, xy, \sqrt{x-y}\}$. 若 $A = B$, 则 $x + y$ 的值是 ()
- A. 4 B. 2 C. 0 D. -2

4. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AC$, $\angle ABC + \angle ADC = 90^\circ$, $BD = 2CD$, 则 $\angle BAC - \angle BDC =$ _____.

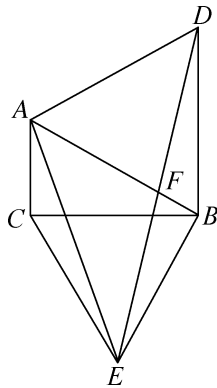


(第4题)

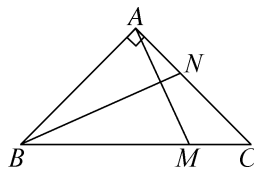


(第5题)

5. (2024 南通市海安市期中) 如图, AE 是 $\angle CAM$ 的平分线, 点 B 在射线 AM 上, 线段 BC 的垂直平分线交 AE 于点 E , 交 BC 于点 D , $EF \perp AM$. 若 $\angle ACB = 26^\circ$, $\angle CBE = 25^\circ$, 则 $\angle AED =$ _____.
6. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$, $\triangle ABD$, $\triangle BCE$ 均为等边三角形, DE , AB 交于点 F , $AF = 3\sqrt{6}$, 则 $\triangle ACE$ 的面积为 _____.



(第6题)



(第7题)

7. 如图, 在等腰直角三角形 ABC 中, $\angle BAC = 90^\circ$, M, N 分别为边 BC, AC 上的动点, 且 $AN = CM$, $AB = \sqrt{2}$. 当 $AM + BN$ 的值最小时, CM 的长为 _____.

8. (2025 淮安市期末)【问题背景】

如图 1, 在 $\triangle ABD$ 中, AC 是中线, $AB=4$, $AC=3$, $AD=\sqrt{52}$. 求 BD 的长.

(1) 下面是小明的解题过程, 请完成填空:

解: 如图 2, 延长中线 AC 至点 E , 使得 $EC=AC=3$, 连接 DE .

因为 AC 是中线,

所以 $BC=CD$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EDC$ 中,

$$\begin{cases} AC=EC, \\ \angle ACB=\angle ECD, \\ BC=DC, \end{cases}$$

所以 $\triangle ABC \cong \triangle EDC$ ().

所以 $ED=AB=4$.

在 $\triangle ADE$ 中, 因为 $AE^2 + DE^2 = 6^2 + 4^2 = 52 = AD^2$,

所以 $\angle AED = 90^\circ$.

所以 $CD^2 = CE^2 + DE^2 = 25$.

所以 $CD=5$.

所以 $BD=$.

解后反思: 题目中出现“中点”“中线”等条件, 可考虑延长中线构造全等三角形, 运用转化思想, 把分散的已知条件和所求的结论集中到同一个三角形之中.

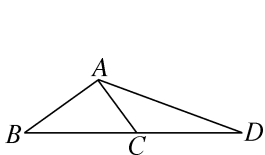


图 1

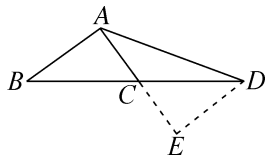


图 2

【类比分析】

(2) 如图 3, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, E 是 BC 的中点. 若 AE 是 $\angle BAD$ 的平分线, 试猜想线段 AB, AD, DC 之间的数量关系, 并证明你的猜想.

【学以致用】

(3) 如图 4, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$,

$AC=4$, D 为 AC 中点, 点 E 在边 AB 上且 $BE=3$, 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 所在的直线折叠到 $\triangle FDE$. 若射线 EF 恰好经过 BC 的中点 O , 请你参照小明的思路, 求出 AE 的长度.

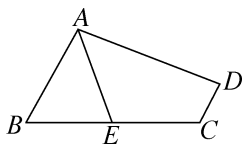


图 3

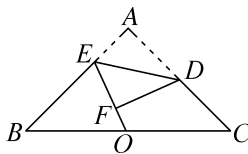


图 4

9. 【问题发现】

(1) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC=BC$, 直线 MN 经过点 C , 且 $AD \perp MN$ 于点 D , $BE \perp MN$ 于点 E .

① 当直线 MN 绕点 C 旋转到图 1 的位置时, 请直接写出 DE, AD, BE 之间的等量关系.

② 当直线 MN 绕点 C 旋转到图 2 的位置时, DE, AD, BE 之间的等量关系是否发生变化? 若发生变化, 请写出结论并证明; 若无变化, 请说明理由.

【拓展探究】

(2) 如图 3, $\angle ABC = \angle CAD = 90^\circ$, $AB=4$, $AC=AD$, 求 $\triangle BAD$ 的面积.

【解决问题】

- (3) 如图 4, 在等边三角形 DEF 中, A, C 分别为边 DE, DF 上的动点, $AE = 2CD$, 连接 AC , 以 AC 为边在 $\triangle DEF$ 内作等边三角形 ABC , 连接 BF , 当点 A 从点 E 向点 D 运动 (不与点 D 重合) 时, $\angle CFB$ 的度数变化吗? 若不变, 请求出它的度数; 若变化, 请说明它是怎样变化的.

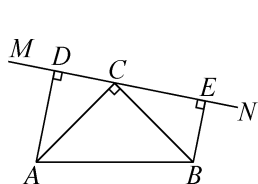


图 1

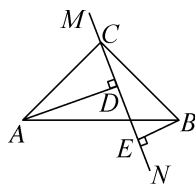


图 2

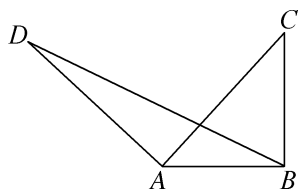


图 3

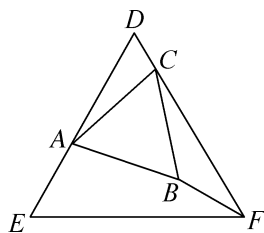


图 4

- (1) 请用无刻度的直尺和圆规在图 1 中作出直线 l_2 并标注出点 C 和点 D (不写作法, 保留作图痕迹), 直线 l_2 的函数表达式为 _____.
- (2) E 为直线 l_1 上一动点, 若有 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}S_{\triangle ADE}$, 请求出点 E 的坐标.
- (3) F 为直线 l_1 上一动点, G 为 y 轴上一动点, 若 $\triangle FGD$ 是以 FG 为直角边的等腰直角三角形, 则点 F 的坐标为 _____.

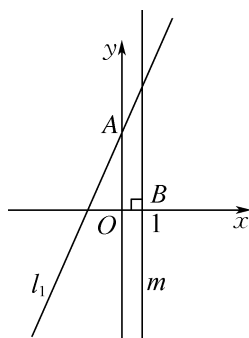
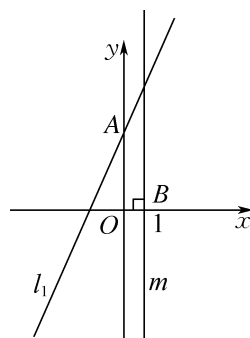


图 1



备用图

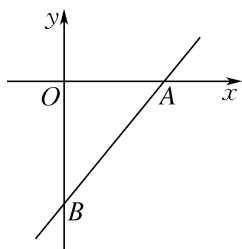
10. (2025 扬州市邗江区期末) 如图, 直线 $l_1: y = 2x + 4$ 与 y 轴交于点 A , 直线 l_2 和直线 l_1 关于过点 $B(1, 0)$ 且与 x 轴垂直的直线 m 成轴对称, 直线 l_2 和直线 l_1 交于点 C , 直线 l_2 与 x 轴交于点 D .

素养提升3 几何直观

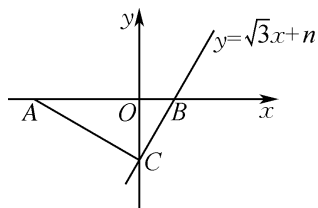
(时间:30 min)

1. 如图,一次函数 $y = \frac{4}{3}x - 4$ 的图象与 x 轴、 y 轴分别交于点 A, B , 过点 A 作直线将 $\triangle ABO$ 分成周长相等的两部分, 则直线 l 的函数表达式为 ()

- A. $y = 2x - 6$ B. $y = 2x - 3$
C. $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ D. $y = x - 3$

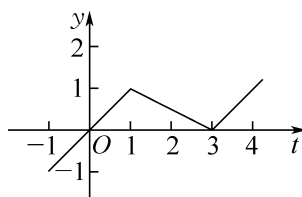
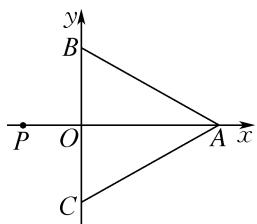


(第1题)

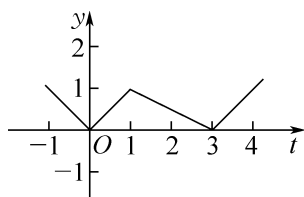


(第2题)

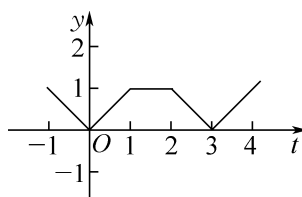
2. 如图, 已知点 $A(-4, 0)$, 直线 $y = \sqrt{3}x + n$ 分别与 x 轴、 y 轴交于点 B, C , 连接 AC . 若 $\angle ACB = 90^\circ$, 则 n 的值为 ()
3. (2025 常州市期末) 定义: P 是平面内某一点, Q 是图形 W 上任意一点, 将 P, Q 两点间距离的最小值称为点 P 与图形 W 的“点图距”. 如图, 在等边三角形 ABC 中, 点 A 的坐标为 $(3, 0)$, 点 B, C 在 y 轴上. 记动点 $P(t, 0)$ 与等边三角形 ABC 的“点图距”为 y , 则 y 随 t 变化的图象是 ()



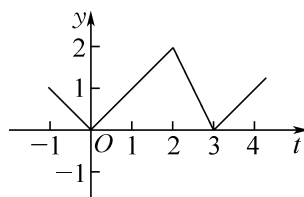
A



B



C

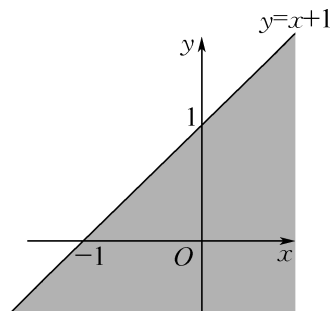


D

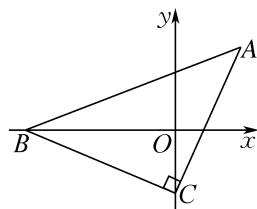
4. 要研究使 x, y 满足 $x + 1 - y \geq 0$ 的范围问题时, 我们可以借助观察 $y = x + 1$ 的图象解决. 如图, 阴影部分为满足 $x + 1 - y \geq 0$ 的区域. 若 x, y 满足条件

$$\begin{cases} x - y \geq 0, \\ x + y - 2 \leq 0, \\ y \geq 0, \end{cases} \text{ 令 } M =$$

$2x - 5y$, 则 M 的取值范围为_____.



(第4题)



(第5题)

5. (2025 苏州市期末) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 B 在 x 轴负半轴上, 点 C 在 y 轴负半轴上. 若点 A 的纵坐标始终为 4, 则点 O 到直线 AB 的距离的最大值是_____.
6. 一次函数 $y = 2x + b$ 的图象经过点 $M(1, 3)$, 且与 x 轴、 y 轴分别交于 A, B 两点. 将该直线绕点 A 顺时针旋转 45° 至直线 l , 则直线 l 的函数表达式为_____.

7. 李同学探索 $\sqrt{86}$ 的近似值的过程如下:

因为面积为 86 的正方形的边长是 $\sqrt{86}$,且
 $9 < \sqrt{86} < 10$,

所以设 $\sqrt{86} = 9 + x$,其中 $0 < x < 1$,

画出示意图,如图所示.

根据示意图,可得 $S_{\text{正方形}} = 81 + 2 \times 9x + x^2$.

又因为 $S_{\text{正方形}} = 86$,所以 $81 + 2 \times 9x + x^2 = 86$.

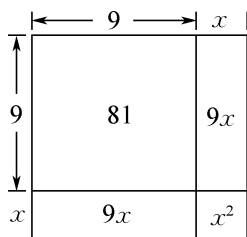
当 $x^2 < 1$ 时,可忽略 x^2 ,

所以 $81 + 18x \approx 86$,解得 $x \approx 0.28$.

所以 $\sqrt{86} \approx 9.28$.

(1) 填空: $\sqrt{157}$ 的整数部分的值为_____.

(2) 仿照上述方法,探究 $\sqrt{157}$ 的近似值(画出示意图,标明数据,并写出求解过程,结果精确到 0.01).



8. 如图 1,在平面直角坐标系中, $\triangle ABC$ 的顶点 $A(-4,0)$, $B(0,4)$, $C(t,0)$, $AD \perp BC$ 于点 D ,交 y 轴正半轴于点 E .

(1) 当 $t=1$ 时,求点 E 的坐标.

(2) 如图 2,连接 DO ,求 $\angle ADO$ 的度数.

(3) 如图 3,已知点 $P(0,3)$, $C(t,0)$,若 $PQ \perp PC$, $PQ=PC$,求点 Q 的坐标(用含 t 的式子表示).

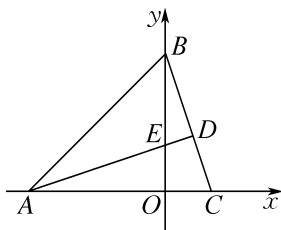


图 1

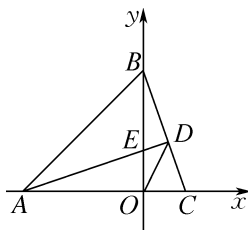


图 2

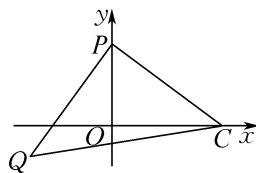
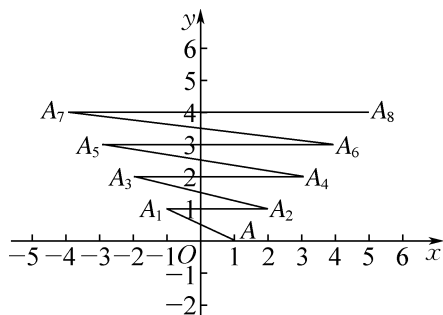


图 3

素养提升 4 创新意识

(时间: 35 min)

1. 如图, 在平面直角坐标系中有一点 $A(1, 0)$, 点 A 第一次跳动至点 $A_1(-1, 1)$, 第二次向右跳动 3 个单位长度至点 $A_2(2, 1)$, 第三次跳动至点 $A_3(-2, 2)$, 第四次向右跳动 5 个单位长度至点 $A_4(3, 2)$ ……以此规律跳动下去, 点 A_{2024} 的坐标是 ()



- A. $(1\ 012, 1\ 011)$ B. $(1\ 013, 1\ 012)$
 C. $(-1\ 011, 1\ 011)$ D. $(-1\ 013, 1\ 012)$
2. 阅读理解: 如图 1, 在平面内选一定点 O , 引一条有方向的射线 Ox , 再选定一个单位长度, 那么平面上任意一点 M 的位置可由 $\angle MOx$ 的度数 θ 与 OM 的长度 m 确定, 有序数对 (θ, m) 称为点 M 的“极坐标”, 这样建立的坐标系称为“极坐标系”. 应用: 在图 2 的极坐标系下, 如果正六边形的边长为 2, 有一边 OA 在射线 Ox 上, 则正六边形顶点 C 的极坐标应记为 ()

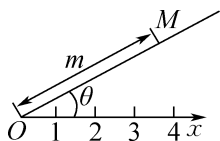


图 1

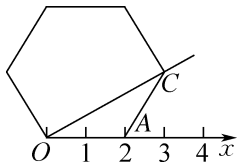


图 2

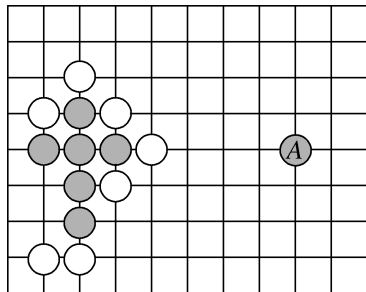
- A. $(30^\circ, 2)$ B. $(45^\circ, 4)$
 C. $(30^\circ, 2\sqrt{3})$ D. $(50^\circ, 2\sqrt{3})$
3. 在平面直角坐标系中, 对于任意三点 $A, B,$

C 的“矩面积”, 给出如下定义: “水平底” a : 任意两点横坐标差的最大值, “铅垂高” h : 任意两点纵坐标差的最大值, 则“矩面积” $S = ah$. 例如: 三点坐标分别为 $A(1, 2), B(3, 1), C(-2, -2)$, 则“水平底” $a = 5$, “铅垂高” $h = 4$, “矩面积” $S = ah = 20$. 若 $D(1, 2), E(-2, 1), F(0, t)$ 三点的“矩面积”不小于 21, 则 t 的取值范围为 ()

- A. $t \geq 9$ 或 $t \leq -6$ B. $6 \leq t \leq 9$
 C. $t \geq 8$ 或 $t \leq -5$ D. $-5 \leq t \leq 8$

4. 在平面直角坐标系中, 点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 之间的距离 $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, 由此可求得代数式 $\sqrt{x^2 - 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 8x + 25}$ 的最小值为 _____.

5. 五子棋和象棋、围棋一样, 深受广大棋友的喜爱. 五子棋的规则是: 在棋盘中, 由黑方先行, 轮流弈子, 在任一方向(横向、竖向或斜线方向)上先连成五子者为胜. 如图是两个五子棋爱好者甲和乙的部分对弈图(甲执黑子先行, 乙执白子后走), 观察棋盘, 若点 A 的位置记作 $(8, 4)$, 以 O 为原点, 建立适当的平面直角坐标系, 则甲必须将棋子落在 _____ (填坐标), 才不会让乙在短时间内获胜.



6. 【阅读材料】

建系法:通过构建平面直角坐标,借助点坐标、函数等方法,可以把几何关系转化成代数关系.

【初步运用】

- (1) 如图 1,边长分别为 6,4,2 的三个正方形拼接在一起,它们的底边在同一直线上,则图中阴影部分(直角梯形)的面积为多少?

解决这道题目的方法有很多,其中一种就是“建系法”,请补全以下解题思路.

解题思路:

- ①如图 2,以 B 为坐标原点,直线 BC 为 x 轴,直线 AB 为 y 轴,建立平面直角坐标系.

- ②由题意,得点 A 的坐标为 $(0,6)$,点 G 的坐标为 $(6,4)$,点 F 的坐标为 _____,点 H 的坐标为 $(12,0)$.

- ③由点 A 和点 H 的坐标可以求出直线 AH 的函数表达式为 _____.

- ④因为点 M 的横坐标为 6,且点 M 在直线 AH 上,所以将横坐标代入即可求出其纵坐标.

- ⑤同理可求出点 N 的坐标,从而得到线段 GM 和线段 FN 的长,从而求出阴影部分直角梯形的面积为 _____.

【迁移探究】

如图 3,在长方形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAB = 90^\circ$, $AB = CD = 4$, $AD = BC = 6$, $AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$, E 是边 AD 上的一点, $AE = AB$, BE 交 AC 于点 F .

- (2) 请用“建系法”求四边形 $EFCD$ 的面积.(要求:建立直角坐标系时,把长方

形的边放在坐标轴上,并把长方形置于第一象限)

- (3) 在(2)建立的平面直角坐标系的基础上, P 是长方形边 AB , AD , CD 上的一个动点,沿着 $B \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow C$ 的方向移动, Q 是点 P 在运动过程中关于 x 轴的对称点.请问在点 P 的运动过程中,是否存在某一时刻使得 $\triangle QBF$ 是一个等腰三角形?若存在,请直接写出此时点 Q 的坐标;若不存在,请说明理由.

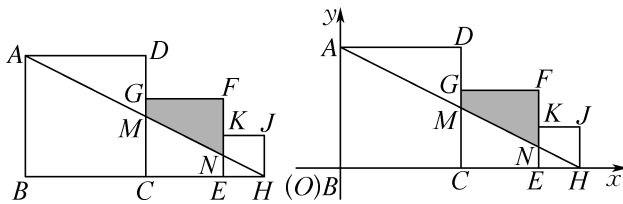


图 1

图 2

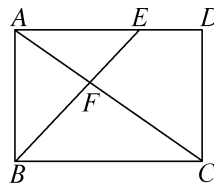
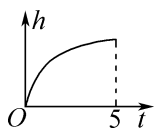
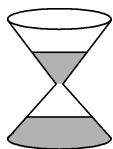


图 3

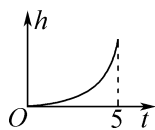
素养提升 5 模型观念与应用意识

(时间: 35 min)

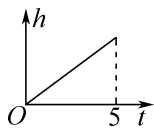
1. 如图, 现有一个计时沙漏, 开始时盛满沙子, 沙子从上部均匀下漏, 经过 5 min 漏完, 则该沙漏中沙面下降的高度 h (cm) 与下漏时间 t (min) 之间的函数图象大致是 ()



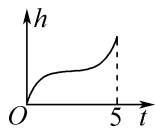
A



B

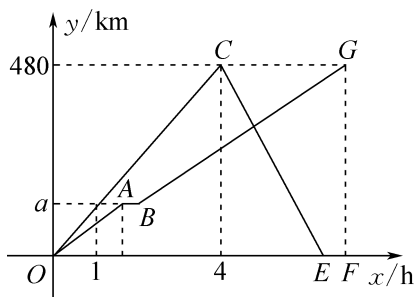


C



D

2. (2025 连云港市期末) 已知甲、乙两地相距 480 km, 一辆出租车从甲地出发往返于甲、乙两地, 一辆货车沿同一条公路从乙地前往甲地, 两车同时出发, 货车途经服务区时, 停下来装完货物后, 发现此时与出租车相距 120 km, 货车改变速度继续出发 $\frac{2}{3}$ h 后与出租车相遇. 出租车到达乙地后立即按原路返回, 结果比货车早 15 min 到达甲地. 如图是两车距各自出发地的距离 y (km) 与货车行驶时间 x (h) 之间的函数图象, 则下列说法错误的是 ()

A. $a = 120$ B. 点 F 的坐标为 $(8, 0)$

C. 出租车从乙地返回甲地的速度为 128 km/h

D. 出租车返回的过程中, 货车出发 $\frac{125}{17}$ h 或 $\frac{123}{15}$ h 时都与出租车相距 12 km

3. “漏刻”是我国古代一种利用水流计时的工具(如图 1), 综合实践小组用甲、乙两个竖直放置的透明容器和一根装有节流阀(控制水的流速)的软管, 制作了类似“漏刻”的简易计时装置(如图 2). 上午 9:00, 综合实践小组在甲容器里加满水, 经过实验得到甲容器的水面高度 h (cm) 与流水时间 t (min) 之间的关系如图 3 所示, 下列说法错误的是 ()



图 1

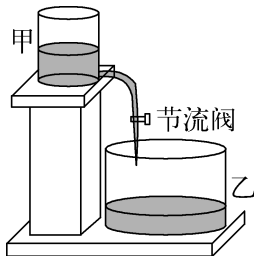


图 2

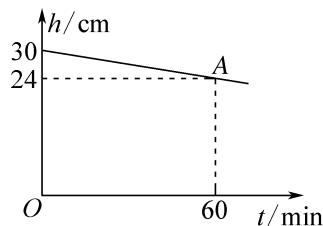


图 3

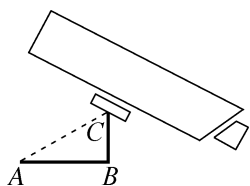
A. 甲容器的初始水面高度为 30 cm

B. 14:00 甲容器的水流光

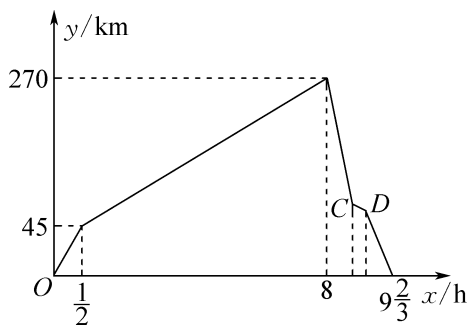
C. 甲容器的水面高度 h (cm) 与流水时间 t (min) 的函数表达式为 $h = -0.1t + 30$

D. 11:00 时甲容器的水面高度为 12 cm

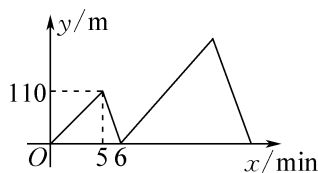
4. 如图,在某监控区域的警示图标中,摄像头支架的图案由水平、竖直方向的 AB, BC 两条线段构成.若 BC 的长度为 8 cm ,点 A, C 之间的距离比 AB 长 2 cm ,则 AB 的长度为_____ cm .



5. 甲、乙两车从 A 地出发到 B 地,甲车先行半小时后,乙车开始出发.甲车到达 B 地后,立即掉头沿着原路以原速的 $\frac{4}{3}$ 倍返回(掉头的时间忽略不计),掉头 1 h 后甲车发生故障便停下来,故障排除后,甲车继续以加快后的速度向 A 地行驶.两车之间的距离 $y(\text{km})$ 与甲车出发的时间 $x(\text{h})$ 之间的部分函数关系如图所示.在行驶过程中,甲车排除故障所需时间为_____ h .



6. A, B, C 三地依次在同一直线上,甲、乙两人同时从 A 地出发前往 C 地,已知当甲行走到 B 地时发现重要物品放在乙那保管,于是甲立即返回与乙相遇,相遇以后甲、乙继续前往 C 地,最终甲比乙提前 8 min 到达 C 地.若中途停留的时间忽略不计,且在整个行走过程中,甲、乙均保持各自速度匀速行走,甲、乙两人之间的距离 $y(\text{m})$ 与乙行走的时间 $x(\text{min})$ 之间的函数关系如图所示,则 B, C 两地的距离为_____ m .



7. (2025 苏州四市期末)如图 1,底面积为 36 cm^2 的空长方体容器内水平放置着由两个实心圆柱体组成的“几何体”,现向容器内均匀注水,注满为止,在注水过程中,水面高度 $h(\text{cm})$ 与注水时间 $t(\text{s})$ 之间的关系如图 2 所示.若“几何体”下方圆柱体的底面积为 12 cm^2 ,则“几何体”上方圆柱体的底面积为_____ cm^2 .

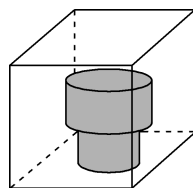


图 1

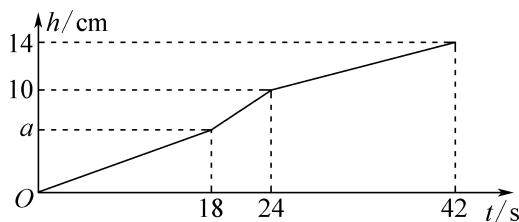
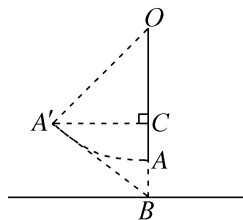


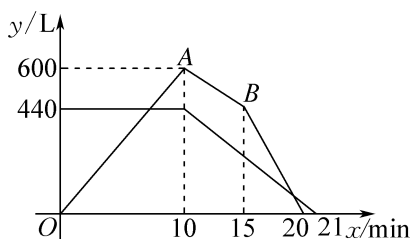
图 2

8. 如图,当秋千 OA 静止时,最低点 A 离地面的距离 AB 为 0.7 m ,当秋千摆动到 OA' 位置时,点 A' 与点 B 的距离 $A'B$ 为 2.5 m ,点 A' 水平移动的距离 $A'C$ 为 2 m .求秋千 OA 的长.

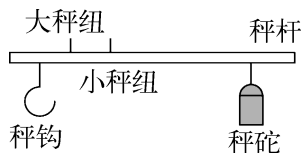


9. 现有甲、乙两个容器,每个容器都装有进水管和出水管,甲容器原来没有水,乙容器原有一定的水量. 首先打开甲容器的进水管注水,第 10 min 同时打开甲、乙两容器的出水管排水,第 15 min 关闭甲容器的进水管,直到甲、乙两容器水排完. 甲、乙两容器中的水量 y_1, y_2 (L) 与时间 x (从甲容器注水开始计时,单位: min) 的函数关系如图所示. 请结合图象信息,解答下列问题:

- (1) 甲容器进水管的注水速度是 _____ L/min;
乙容器出水管的排水速度是 _____ L/min.
- (2) 求甲容器出水管的排水速度及线段 AB 对应的函数表达式.
- (3) 当 $x =$ _____ 时,两容器中的水量差为 180 L.



10. (2025 常州市期末) 如图, 杠杆是我国传统的称重工具, 它利用秤砣到秤纽的水平距离, 得出秤钩上所挂物体的质量.



- (1) 当提小秤组称重时, 秤钩上所挂物体的质量 y_1 (kg) 是秤砣到小秤组的水平距离 x (cm) 的一次函数, 所记录的若干次称重数据如下表所示.

x	2	4	6	8	10
y_1	1	1.5	2	2.5	3

- ① y_1 与 x 之间的函数表达式为 _____;
- ② 若秤砣到小秤组的最大水平距离为

30 cm, 求提小秤组可称的最大物重.

- (2) 在(1)的条件下, 若秤砣到小秤组的最大水平距离为 30 cm, 当物重大于提小秤组可称的最大物重, 则提大秤组称重, 此时秤钩上所挂物体的质量 y_2 (kg) 是秤砣到大秤组的水平距离 m (cm) 的一次函数. 已知大、小秤组的水平距离为 6 cm, 提大秤组称 9 kg, 14 kg 物重的秤砣位置分别与提小秤组称 2 kg, 3 kg 物重的秤砣位置重合, 求提大秤组可称的最大物重.