

课时训练篇

第1章 三角形

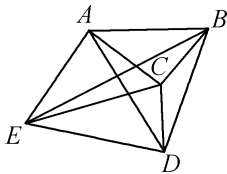
课时训练1 三角形中的线段和角(1)

【基础巩固】

1. A
2. B 提示:三角形按边分,可分为不等边三角形和等腰三角形,故B错误.
3. 4 4. 3 5. 3
6. 22 提示:若腰长为4 cm,则三边长分别为4 cm, 4 cm, 9 cm, 因为 $4+4<9$, 所以不能构成三角形, 舍去; 若腰长为9 cm, 则三边长分别为4 cm, 9 cm, 9 cm, 能构成三角形, 所以周长为22 cm.
7. 7
8. 解: 设底边长和腰长分别是 $3x$ cm, $2x$ cm, 则 $7x=14$, 解得 $x=2$. 所以这个等腰三角形的各边长分别为6 cm, 4 cm, 4 cm.

【拓展提优】

1. D 提示: 因为 $\angle C < \angle B$, 所以 $AB < AC$. 因为 $AB=BD$, $AC=EC$, 所以 $BD < EC$, 即 $BE+ED < ED+CD$, 所以 $BE < CD$.
2. D 提示: 如图, 一共能组成10个三角形, 分别是 $\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle ABE$, $\triangle ACD$, $\triangle ACE$, $\triangle ADE$, $\triangle BCD$, $\triangle BCE$, $\triangle BDE$, $\triangle CDE$.



3. B 提示: 根据题意, 得以BC为公共边的“共边三角形”有 $\triangle BDC$ 与 $\triangle BEC$, $\triangle BDC$ 与 $\triangle BAC$, $\triangle BEC$ 与 $\triangle BAC$, 共3对.
4. D 提示: 因为 $1+1+1=3 < 5$, 所以此三条线段与长度为5的线段不能组成四边形, 故选项A不符合题意; 因为 $1+1+5=7 < 8$, 所以此三条线段与长度为5的线段不能组成四边形, 故选项B不符合题意; 因为 $1+2+2=5$, 所以此三条线段与长度为5的线段不能组成四边形, 故选项C不符合题意; 因为 $2+2+2=6 > 5$, 所以此三条线段与长度为5的

线段能组成四边形, 故选项D符合题意.

5. 8 提示: 因为4不是最短边, 所以分为两类: 当4是中间边时, 有(2, 4, 5), (3, 4, 5), (3, 4, 6); 当4是最长边时, 有(1, 4, 4), (2, 3, 4), (2, 4, 4), (3, 3, 4), (3, 4, 4), 综上所述, 共有8个.
6. 7或9 提示: 共有两种情况: ①如图1, 两点不在同一直线上, 分别连接三个顶点, 共有7个三角形; ②如图2, 两点在同一直线上, 分别连接三个顶点, 共有9个三角形.

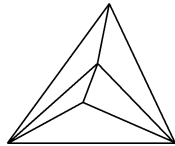


图1

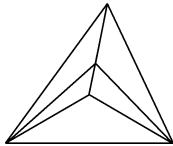


图2

7. 解: (1) 小明的看法是对的. 理由如下:
根据三角形的三边关系, 得 $a+b > c$, $a+c > b$, 所以原式 $= (a+b-c) + (-b+a+c) - (a-c+b) = a-b+c$. 因为 $a+c > b$, 所以 $a-b+c > 0$. 所以代数式 $|a+b-c| + |b-a-c| - |a-c+b|$ 的值总是正数, 即小明的看法是对的.
(2) 答案不唯一. 例如: $a=2, b=3, c=4$, 则 $a-b+c=2-3+4=3$, 所以原代数式的值为3.
8. 解: 延长BP交AC于点D. 根据三角形的三边关系, 得 $AB+AD > BD$, $CD+PD > PC$, 所以 $AB+AD+CD+PD > BD+PC$, 即 $AB+AC+PD > BP+PD+PC$. 所以 $AB+AC > PB+PC$.

课时训练2 三角形的线段和角(2)

【基础巩固】

1. C 2. C 3. C
4. A 提示: 因为BD是 $\triangle ABC$ 的中线, 所以 $AD=CD$, 所以周长之差为 $(AB+AD+BD) - (BC+CD+BD) = AB-BC = 5-3=2$.
5. 80
6. 10 提示: 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B=50^\circ$, $\angle C=30^\circ$, 所以 $\angle BAC=100^\circ$. 由作图可知, AF平分 $\angle BAC$, 所以

$(x+m)$ 的整数部分, a 为 $(x+m)$ 的小数部分, 所以 $\langle x+m \rangle = n+m+1$. 又因为 $\langle x \rangle + m = n+1+m = n+m+1$, 所以 $\langle x+m \rangle = \langle x \rangle + m$.

综上所述, $\langle x+m \rangle = \langle x \rangle + m$.

第3章 勾股定理

课时训练 23 勾股定理的探究(1)

【基础巩固】

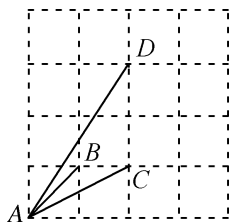
1. D 2. A

3. B 提示: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 由勾股定理, 得 $AC=10$. 由折叠, 得 $AE=AC=10$, 所以 $BE=4$. 设 $DE=x$, 则 $BD=BC-DC=BC-DE=8-x$. 在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中, 由勾股定理, 得 $(8-x)^2+4^2=x^2$, 解得 $x=5$. 所以 DE 的长为 5.

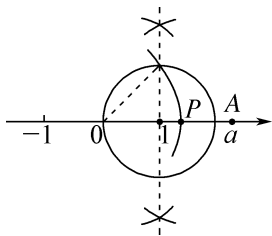
4. 21 或 9 提示: 当高 AD 在 $\triangle ABC$ 内部时, $BC=21$; 当高 AD 在 $\triangle ABC$ 的外部时, $BC=9$.

5. $\frac{12}{5}$ 提示: 连接 AM . 因为 $AB=AC=5$, M 为 BC 的中点, 所以 $AM \perp CM$, $BM=CM=\frac{1}{2}BC=3$. 在 $\text{Rt}\triangle ABM$ 中, 根据勾股定理, 得 $AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=4$. 又因为 $S_{\triangle AMC}=\frac{1}{2}MN \cdot AC=\frac{1}{2}AM \cdot CM$, 所以 $MN=\frac{AM \cdot CM}{AC}=\frac{12}{5}$.

6. 解: 如图所示(答案不唯一).



7. 解: (1) 如图, 点 P 即为所求.



(2) $a > \sqrt{2}$. 理由如下:

在数轴上, 位于右侧的数大于位于左侧的数, 所以由(1)中所作的图, 可知 $a > \sqrt{2}$.

8. (1) 证明: 因为 $\triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 均是等腰直角三角形, $\angle ACB = \angle ECD = 90^\circ$, 所以 $AC=BC$, $EC=DC$, 所以 $\angle DCB = \angle ACB - \angle ACD = \angle ECD - \angle ACD = \angle ECA$. 在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BCD$

中, $\begin{cases} AC=BC, \\ \angle ECA = \angle DCB, \\ EC=DC, \end{cases}$ 所以 $\triangle ACE \cong \triangle BCD$ (SAS).

$\triangle BCD$ (SAS).

(2) 解: 由(1)知 $\triangle ACE \cong \triangle BCD$, 所以 $AE=BD=12$, $\angle EAC = \angle DBC$. 因为 $\triangle ACB$ 是等腰直角三角形, 所以 $\angle EAC = \angle DBC = \angle CAB = 45^\circ$, 所以 $\angle EAD = 90^\circ$. 在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, 根据勾股定理, 得 $AD^2 + AE^2 = DE^2$, 即 $5^2 + 12^2 = DE^2$, 所以 $DE=13$.

9. 解: (1) $\triangle BCF$ 为等腰直角三角形. 理由如下:

因为 $AB=AC$, $AD \perp BC$, 所以 $BD=CD$, 所以 AD 垂直平分 BC , 所以 $BF=CF$, 所以 $\angle BCF = \angle CBF = 45^\circ$, 所以 $\angle CFB = 180^\circ - \angle BCF - \angle CBF = 90^\circ$, 所以 $\triangle BCF$ 为等腰直角三角形.

(2) 在线段 BF 上取一点 H , 使 $BH=FE$, 连接 CH . 因为 $\triangle BCF$ 为等腰直角三角形, $AD \perp BC$, 易得 $\angle AFE = \angle DFB = \angle DBF = 45^\circ$. 在 $\triangle CHB$ 和 $\triangle AEF$ 中,

$\begin{cases} BH=FE, \\ \angle CBH = \angle AFE, \\ BC=FA, \end{cases}$ 所以 $\triangle CHB \cong \triangle AEF$ (SAS), 所以 $AE=CH$, $\angle AEF = \angle CHB$.

因为 $\angle AEF + \angle CEF = 180^\circ$, $\angle CHB + \angle CHE = 180^\circ$, 所以 $\angle CEF = \angle CHE$, 所以 $CE=CH$. 因为 $\angle CFB = 90^\circ$, 即 $CF \perp EH$, 所以 $EF=FH$. 由(1)可知 $CF=BF$. 在 $\text{Rt}\triangle CFH$ 中, 由勾股定理, 得 $CF^2 +$

$$FH^2=CH^2, \text{ 所以 } BF^2+EF^2=AE^2.$$

【拓展提优】

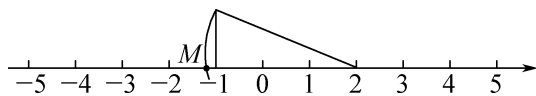
1. C 提示: 设直角三角形的斜边长为 c , 较长直角边为 b , 较短直角边为 a . 由勾股定理, 得 $c^2=a^2+b^2$, 阴影部分的面积为 $c^2-b^2-a(c-b)=a^2-ac+ab=a(a+b-c)$. 由题图可知, 较小两个正方形重叠部分的宽为 $a-(c-b)$, 长为 a , 则面积为 $a(a+b-c)$. 所以若已知题图中阴影部分的面积, 则一定能求出较小两个正方形重叠部分的面积.

2. A 提示: 延长 CD 交 AE 于点 H , 过点 C 作 $CF \perp AB$ 于点 F . 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 由勾股定理, 得 $AB=5$. 因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC \cdot BC=\frac{1}{2}AB \cdot CF$, 所以 $\frac{1}{2} \times 3 \times 4=\frac{1}{2} \times 5 \times CF$, 所以 $CF=\frac{12}{5}$. 因为 D 为 AB 的中点, $\angle ACB=90^\circ$, 所以 $AD=BD=CD$. 由翻折的性质, 可知 $AC=CE$, 所以 $CH \perp AE$, 所以 $AH=HE$. 易证 $\text{Rt}\triangle CDF \cong \text{Rt}\triangle ADH$ (AAS), 所以 $AH=CF$, 所以 $AE=2AH=2CF=\frac{24}{5}$. 由翻折的性质, 可知 $DE=AD=DB$, 所以 $\angle DAE=\angle DEA$, $\angle DBE=\angle DEB$. 又因为 $\angle DAE+\angle DBE+\angle DEA+\angle DEB=180^\circ$, 所以 $\angle AEB=\angle DEA+\angle DEB=90^\circ$, 所以 $\triangle ABE$ 为直角三角形. 所以 $BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=\sqrt{5^2-\left(\frac{24}{5}\right)^2}=\frac{7}{5}$.

3. $\frac{7}{4} \leq CE \leq 4$ 提示: 设点 B 的对应点为 F , $CE=x$, 则 $BE=8-x$. 由题意, 得 $EF=BE=8-x$. 设 $CF=m$. 在 $\text{Rt}\triangle CEF$ 中, 由勾股定理, 得 $CF^2=EF^2-CE^2$, 即 $m^2=(8-x)^2-x^2=64-16x$. 因为 $0 \leq m \leq 6$, 所以 $0 \leq 64-16x \leq 36$, 解得 $\frac{7}{4} \leq x \leq 4$, 即 $\frac{7}{4} \leq CE \leq 4$. (也可以通过观察图形, 当点 B 落在点 A 时, CE 取得最小值, 此时由勾股定理可知, CE 的长为 $\frac{7}{4}$; 当点 B 落在点 C 时, CE 取得最大值 4.)

4. 解: (1) $\sqrt{2}+1$ $\sqrt{2}-1$ $\sqrt{2}+1$ $1-\sqrt{2}$
(2) 因为 $2-\sqrt{10}<0$, 所以点 M 在数轴的负半轴. 如图, 以表示的数为 2 的点为圆心, 在圆心的左侧, 作出以 1 个单位长度和 3 个单位长度为直角边的直角三角形, 其斜

边长为 $\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$, 然后以 $\sqrt{10}$ 为半径画弧, 与数轴负半轴相交的点 M 即为所求.



课时训练 24 勾股定理的探究(2)

【基础巩固】

1. B 2. C 3. D

4. C 提示: 由题意, 易得 $AC=BC=2$. 所以阴影部分的面积之和为 $\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2+S_{\triangle ACB}-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2=\pi+2-\pi=2$.

5. ①③

6. 1 提示: 设正方形 A, B, C, D 的边长分别为 a, b, c, d , 长方形 E 的长为 m , 宽为 n . 由题意可知, $m=2n, a^2=5, b^2=23, c^2=8$. 由勾股定理, 得 $m^2=a^2+b^2, n^2=c^2-d^2$. 因为 $m=2n$, 所以 $m^2=4n^2$, 所以 $a^2+b^2=4(c^2-d^2)$, 即 $5+23=4(8-d^2)$, 解得 $d^2=1$. 所以正方形 D 的面积为 1.

7. $\sqrt{S_1-S_2}-\sqrt{S_2}$ 提示: 由题意, 得 $EF=DG=\sqrt{DC^2-CG^2}=\sqrt{S_1-S_2}$. 由割补, 可知 $AE=IC=\sqrt{S_2}$, 所以 $AF=EF-AE=\sqrt{S_1-S_2}-\sqrt{S_2}$.

8. (1) 证明: 因为 $AC \perp BD$, 所以 $\angle ACB=\angle ACD=90^\circ$. 因为 $\angle CAD=45^\circ$, 所以 $\angle ADC=90^\circ-\angle CAD=45^\circ=\angle CAD$, 所以 $AC=DC$. 又因为 $AB=DE$, 所以 $\text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle DEC$ (HL).

(2) $\perp$

(3) 证明: 因为 $\triangle ABC \cong \triangle DEC$, 所以 $DE=AB=c, DC=AC=b, EC=BC=a$.

由题图, 得 $S_{\text{阴影}}=S_{\triangle BCE}+S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ABD}-S_{\triangle ABE}$, 所以 $\frac{1}{2}BC \cdot EC+\frac{1}{2}AC \cdot$

$DC=\frac{1}{2}AB \cdot DF-\frac{1}{2}AB \cdot EF=\frac{1}{2}AB \cdot$

$(DF-EF)=\frac{1}{2}AB \cdot DE$, 即 $\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2=$

$\frac{1}{2}c^2$, 所以 $a^2+b^2=c^2$.

课时训练 40 一次函数的图象与性质(4)

【基础巩固】

1. B 2. C

3. $y = -2x - 6$ 提示: 设直线 AB 对应的函数表达式为 $y = -2x + b$. 把 $x = m, y = n$ 代入, 可得 $-2m + b = n$, 即 $b = 2m + n$. 因为 $2m + n + 6 = 0$, 所以 $2m + n = -6$, 所以 $b = -6$. 所以直线 AB 对应的函数表达式为 $y = -2x - 6$.

4. ①②③

5. $y = \frac{1}{2}x + 2$ 提示: 因为一次函数 $y = -2x + 4$ 的图象与坐标轴的交点分别为 $(2, 0), (0, 4)$, 而这两点绕原点 O 逆时针旋转 90° 后, 对应点的坐标分别为 $(0, 2), (-4, 0)$, 所以旋转后所得到的图象对应的函数表达式为 $y = \frac{1}{2}x + 2$.

6. $y = -x + 2$ (答案不唯一)

7. 解: (1) 将点 $(0, 0)$ 代入 $y = (3 + k)x - 2k^2 + 18$, 得 $0 = -2k^2 + 18$, 解得 $k = \pm 3$. 又因为 $y = (3 + k)x - 2k^2 + 18$ 是一次函数, 所以 $3 + k \neq 0$, 即 $k \neq -3$, 所以 $k = 3$.

(2) 由题意, 得 $3 + k < 0$, 所以 $k < -3$.

(3) 由题意, 得当 $x = 0$ 时, $y = -2k^2 + 18 > 0$, 解得 $-3 < k < 3$.

(4) 由题意, 得 $3 + k = -2$, 解得 $k = -5$.

8. 解: (1) 因为直线 $l_1: y = x + 3$ 过点 $C(1, m)$, 所以 $m = 4$, 所以点 $C(1, 4)$. 设直线 l_2 的函数表达式为 $y = kx + b (k \neq 0)$. 因为直线 l_2 过点 A, C , 所以

$$\begin{cases} 3k + b = 0, \\ k + b = 4, \end{cases} \text{解得}$$

$$\begin{cases} k = -2, \\ b = 6. \end{cases} \text{所以直线 } l_2 \text{ 的函数表达式为}$$

$$y = -2x + 6.$$

(2) 由条件, 得点 $B(-3, 0)$, 所以 $AB = 6$. 由题意, 可设点 $M(t, t + 3)$, 则由(2)可得, 点 $N(t, 6 - 2t)$. 因为 $MN = AB$, 所以

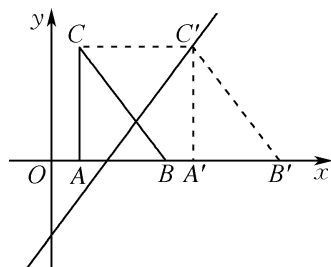
$|(t + 3) - (6 - 2t)| = 6$, 解得 $t = 3$ 或 $t = -1$. 所以点 M 的坐标为 $(3, 6)$ 或 $(-1, 2)$.

【拓展提优】

1. A

2. D 提示: 设直线 l 的函数表达式为 $y = mx + n (m \neq 0)$. 因为直线 l 经过第一、二、三象限, 所以 $m > 0$. 因为点 $(-2, 3)$ 在直线 l 上, 所以 $3 = -2m + n$, 即 $n = 2m + 3$. 所以一次函数的表达式为 $y = mx + 2m + 3$. 当 $x = 0$ 时, $a = 2m + 3$, 因为 $m > 0$, 所以 $a = 2m + 3 > 3$, 故 B 错误; 当 $x = -1$ 时, $b = -m + 2m + 3 = m + 3$, 因为 $m > 0$, 所以 $b = m + 3 > 3$, 故 C 错误; 因为 $m > 0$, 所以 $2m + 3 > m + 3$, 即 $a > b$, 故 A 错误; 当 $y = -1$ 时, $cm + 2m + 3 = -1$, 即 $(c + 2)m = -4$, 因为 $m > 0$, 所以 $c + 2 < 0$, 即 $c < -2$, 故 D 正确.

3. C 提示: 如图, 由题意, 得 $AB = 3$. 因为 $\angle CAB = 90^\circ, BC = 5$, 所以 $AC = 4$, 所以 $A'C' = 4$. 因为点 C' 在直线 $y = 2x - 6$ 上, 所以 $2x - 6 = 4$, 解得 $x = 5$, 即 $OA' = 5$, 所以 $CC' = 5 - 1 = 4$. 所以线段 BC 扫过的面积为 $4 \times 4 = 16$.



4. $y = -x + 6$ 提示: 由题意, 得点 $A(8, 0), B(0, 6)$. 所以 $OB = 6, OA = 8$, 所以 $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 10$. 由折叠的性质, 可知 $BD = OB = 6, OC = CD$, $\angle BDC = \angle BOC = 90^\circ$, 所以 $AD = AB - BD = 4$. 设 $OC = CD = x$, 则 $AC = OA - OC = 8 - x$. 因为在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $AC^2 = CD^2 + AD^2$, 即 $(8 - x)^2 = x^2 + 4^2$, 解得 $x = 3$. 所以 $OC = CD = 3$, 所以点 $C(3, 0)$. 设直线 BC 的函数表达式为 $y = kx + 6$, 所以 $0 = 3k + 6$, 解得 $k = -2$. 所以直线 BC 的函数表达式为 $y = -2x + 6$.

5. $y = \frac{1}{2}x - 1$ 提示: 设直线 AB 的函数表达式为

$y = mx + n$. 将点 $A(-4, 0)$, $B(0, 2)$ 代入, 得

$$\begin{cases} -4m + n = 0, \\ n = 2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} m = \frac{1}{2}, \\ n = 2, \end{cases} \text{ 所以直线 } AB \text{ 的函数}$$

表达式为 $y = \frac{1}{2}x + 2$. 将直线 AB 向右平移 2 个单

位长度后得到的函数表达式为 $y = \frac{1}{2}(x - 2) + 2$,

即 $y = \frac{1}{2}x + 1$, 再将 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 绕着原点旋转 180°

后得到的函数表达式为 $-y = -\frac{1}{2}x + 1$, 即 $y =$

$\frac{1}{2}x - 1$, 所以原一次函数的表达式是 $y = \frac{1}{2}x - 1$.

6. (11, 4)

7. 解: (1) 作图如图 1 或图 2 所示.

(2) 不唯一.

如图 1, 易知点 $B(6, 4)$, $A(6, 0)$, $C(0, 4)$. 设直线 AC 的函数表达式为 $y = kx + b$

$$(k \neq 0), \text{ 则 } \begin{cases} 6k + b = 0, \\ b = 4, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k = -\frac{2}{3}, \\ b = 4. \end{cases} \text{ 所以}$$

直线 AC 的函数表达式为 $y = -\frac{2}{3}x + 4$.

如图 2, 设点 $A(a, 0)$. 因为 $\triangle AOC \cong \triangle ABC$,

所以 $OA = BA$, 即 $a = \sqrt{(6-a)^2 + 4^2}$, 解得

$a = \frac{13}{3}$, 所以点 $A(\frac{13}{3}, 0)$. 设点 $C(0, c)$. 因为

$CO = CB$, 所以 $c = \sqrt{(c-4)^2 + 6^2}$, 解得 $c =$

$\frac{13}{2}$, 所以点 $C(0, \frac{13}{2})$. 设直线 AC 的函数表达

$$\text{式为 } y = mx + n (m \neq 0), \text{ 则 } \begin{cases} \frac{13}{3}m + n = 0, \\ n = \frac{13}{2}, \end{cases} \text{ 解}$$

$$\text{得 } \begin{cases} m = -\frac{3}{2}, \\ n = \frac{13}{2}. \end{cases} \text{ 所以直线 } AC \text{ 的函数表达式为}$$

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2}.$$

综上所述, 直线 AC 的函数表达式为 $y =$

$$-\frac{2}{3}x + 4 \text{ 或 } y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2}.$$

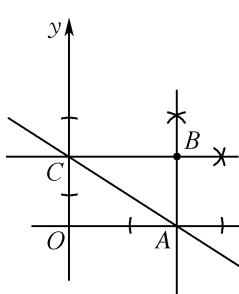


图 1

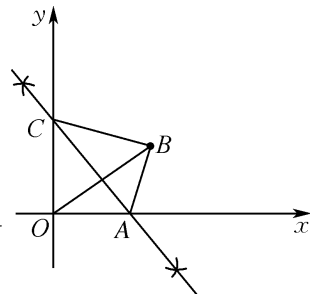


图 2

课时训练 41 用一次函数解决问题(1)

【基础巩固】

1. B

2. 15 提示: 设一次函数的表达式为 $y = kx + b$. 根据

$$\text{表格, 可得 } \begin{cases} b = 18, \\ k + b = 21, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k = 3, \\ b = 18, \end{cases} \text{ 所以一次函数}$$

的表达式为 $y = 3x + 18$. 令 $y = 63$, 得 $3x + 18 = 63$, 解得 $x = 15$. 所以他使用的流量共超出 15 GB.

3. 解: (1) 设乙种头盔的单价为 x 元, 则甲种头盔的单价为 $(x + 11)$ 元. 根据题意, 得 $20(x + 11) + 30x = 2\,920$, 解得 $x = 54$, 则 $x + 11 = 65$.

答: 甲、乙两种头盔的单价分别是 65 元, 54 元.

(2) 设购买 m (m 为正整数) 只甲种头盔. $(40 - m)$ 只乙种头盔的总费用为 W . 则 $W = 0.8 \times 65m + (54 - 6) \times (40 - m) = 4m + 1\,920$. 因为 $4 > 0$, 所以 W 随 m 的增大而增大. 由条件, 得 $\frac{1}{2}(40 - m) \leq m < 40$,

解得 $\frac{40}{3} \leq m < 40$. 因为 m 为正整数, 所以 m 的最小值为 14. 故当 $m = 14$ 时, $W_{\text{最小值}} = 4 \times 14 + 1\,920 = 1\,976$.

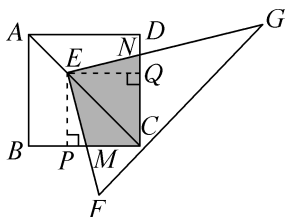
答: 应购买 14 只甲种头盔, 能使此次购买头盔的总费用最小, 最小费用为 1 976 元.

4. 解: (1) $y_A = \begin{cases} 0.9x (0 < x \leq 300), \\ 0.7x + 60 (x > 300); \end{cases}$

专题强化篇

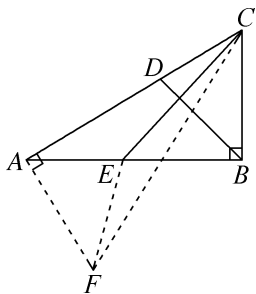
强化训练 1 构造全等三角形解决问题

1. A 提示:在 AB 上截取 $AE=AD$, 连接 CE . 易证 $\triangle AEC \cong \triangle ADC$, 所以 $CE=CD$, 所以 $AB-AD=AB-AE=BE$. 根据三角形三边之间的关系, 可知 $BE > CB-CE=CB-CD$, 即 $AB-AD > CB-CD$.
2. D 提示:延长 AD 交 BC 于点 E . 根据外角的性质, 可知 $\angle BED = \angle DAC + \angle C = 65^\circ$. 易证 $\triangle BAD \cong \triangle BED$, 所以 $\angle BAD = \angle BED = 65^\circ$.
3. D 提示:如图, 过点 E 分别作 $EP \perp BC$ 于点 P , $EQ \perp CD$ 于点 Q . 因为四边形 $ABCD$ 是正方形, 所以 $\angle BCD = 90^\circ$. 又因为 $\angle EPM = \angle EQN = 90^\circ$, 所以 $\angle PEQ = 90^\circ$, 所以 $\angle PEM + \angle MEQ = 90^\circ$. 因为 $\triangle FEG$ 是直角三角形, 所以 $\angle NEF = \angle QEN + \angle MEQ = 90^\circ$, 所以 $\angle PEM = \angle QEN$. 因为 AC 是 $\angle BCD$ 的平分线, $EP \perp BC$, $EQ \perp CD$, 所以 $EP = EQ$, 所以四边形 $PCQE$ 是正方形, $\triangle EPM \cong \triangle EQN$ (ASA), 所以 $S_{\triangle EPM} = S_{\triangle EQN}$, 所以 $S_{\text{四边形}EMCN} = S_{\triangle EQN} + S_{\text{四边形}EMCQ} = S_{\triangle EPM} + S_{\text{四边形}EMCQ} = S_{\text{正方形}PCQE}$. 因为正方形 $ABCD$ 的边长为 a , 所以 $AC = \sqrt{2}a$. 因为 $EC = 2AE$, 所以 $EC = \frac{2\sqrt{2}}{3}a$, 所以 $EP = PC = \frac{2}{3}a$, 所以 $S_{\text{正方形}PCQE} = \frac{2}{3}a \cdot \frac{2}{3}a = \frac{4}{9}a^2$.



4. B 提示:连接 CD . 因为 $AC=BC$, $\angle ACB=90^\circ$, 所以 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, 所以 $\angle A = \angle B = 45^\circ$. 因为 D 为边 AB 的中点, 所以 $CD=AD$, CD 平分 $\angle BCA$, $CD \perp AB$, 所以 $\angle DCF = 45^\circ$. 因为 $DE \perp DF$, 所以 $\angle CDF + \angle EDC = 90^\circ$. 因为 $\angle ADE + \angle EDC = 90^\circ$, 所以 $\angle ADE = \angle CDF$. 易证 $\triangle ADE \cong \triangle CDF$, 所以 $CF = AE = 4$. 所以 $AC = BC = BF + CF = 7$, 所以 $CE = AC - AE = 3$. 在 $\text{Rt}\triangle CEF$ 中, 由勾股定理, 得 $EF = \sqrt{CE^2 + CF^2} = 5$.

5. C 提示:由条件, 得 $AC=AB=8$ cm, $\angle BAC = \angle C = 60^\circ$. 根据题意, 得 $CP=t$ cm, $CQ=2t$ cm, 所以 $AQ = (8-2t)$ cm. 因为 $\angle ABQ + \angle BAP = \angle AMQ = 60^\circ$, $\angle CAP + \angle BAP = \angle BAC = 60^\circ$, 所以 $\angle ABQ = \angle CAP$. 易证 $\triangle ABQ \cong \triangle CAP$, 所以 $AQ=CP$, 即 $8-2t=t$, 解得 $t = \frac{8}{3}$.
6. 4 提示:延长 DE 至点 F , 使 $EF=BC$, 连接 AC , AD , AF . 因为 $AB=CD=AE=BC+DE$, $\angle ABC = \angle AED = 90^\circ$, 由题中条件, 可得 $\text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle AEF$, $\triangle ACD \cong \triangle AFD$, 所以 $S_{\text{五边形}ABCDE} = 2S_{\triangle ADF} = 2 \times \frac{1}{2} DF \cdot AE = 4$.
7. $\frac{49}{2}$ 提示:延长 DC 至点 E , 使 $CE=AD$, 连接 BE . 因为 $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, 所以 $\angle BAD + \angle BCD = 360^\circ - \angle ABC - \angle ADC = 180^\circ$. 因为 $\angle BCD + \angle BCE = 180^\circ$, 所以 $\angle BAD = \angle BCE$. 易证 $\triangle ABD \cong \triangle CBE$, 所以 $BE = BD = 7$ cm, $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CBE}$, $\angle ABD = \angle CBE$. 因为 $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 90^\circ$, 所以 $\angle CBE + \angle DBC = \angle DBE = 90^\circ$. 所以 $S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} BD \cdot BE = \frac{49}{2} \text{ cm}^2$.
8. $\sqrt{5}$ 提示:以 CD 为边向右侧作等边三角形 CDE , 连接 AE , 则 $\angle ADE = 90^\circ$. 由条件, 易证 $\triangle ACE \cong \triangle BCD$, 所以 $AE=BD$. 在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, 根据勾股定理, 得 $DE = \sqrt{AE^2 - AD^2} = \sqrt{BD^2 - AD^2} = \sqrt{5}$, 所以 $CD=DE=\sqrt{5}$.
9. 136 提示:如图, 过点 A 作 $AF \perp AC$, 且使 $FA=BC=6$, 连接 EF , CF . 则 $\angle FAC = 90^\circ$, 即 $\angle FAE + \angle BAC = 90^\circ$. 因为 $\angle BAC + \angle BCD = 90^\circ$, 所以 $\angle FAE = \angle BCD$. 因为 $FA=BC$, $AE=CD$, 所以 $\triangle FAE \cong \triangle BCD$ (SAS), 所以 $FE=BD$, 所以 $BD+CE=FE+CE \geq CF$. 当 C, E, F 三点共线时, 等号成立, 即 $BD+CE$ 的最小值为 CF 的长. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 由勾股定理, 得 $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 100$. 在 $\text{Rt}\triangle AFC$ 中, 由勾股定理, 得 $CF^2 = AF^2 + AC^2 = 136$.



10. 142° 提示:在 AC 的延长线上截取 $AF=AB$, 连接 BF, PF , 延长 AP 交 BC 于点 D , 交 BF 于点 E . 易证 $\triangle APB \cong \triangle APF$, 所以 $PB=PF$, $\angle AFP = \angle ABP = 8^\circ$, 所以 AP 垂直平分 BF . 因为 $\angle BPE = \angle PAB + \angle ABP = 30^\circ$, $\angle FPE = \angle PAC + \angle AFP = 30^\circ$, 所以 $\angle BPF = \angle BPE + \angle FPE = 60^\circ$. 又因为 $PB=PF$, 所以 $\triangle BPF$ 是等边三角形. 所以 $\angle PBF = \angle PFB = 60^\circ$. 因为 $\angle PBC = 30^\circ$, 所以 $\angle CBF = 30^\circ = \angle PBC$, 所以 BC 垂直平分 PF , 所以 $PC=CF$, 所以 $\angle CPF = \angle CFP = 8^\circ$, 所以 $\angle DPC = \angle FPE + \angle CPF = 38^\circ$, 所以 $\angle APC = 180^\circ - \angle DPC = 142^\circ$.

11. 解: (1) $BD=CE$. 理由如下:

因为 $\angle BAE = \angle CAD$, 所以 $\angle BAE + \angle BAC = \angle CAD + \angle BAC$, 即 $\angle EAC = \angle BAD$. 在

$\triangle EAC$ 和 $\triangle BAD$ 中, $\begin{cases} AE=AB, \\ \angle EAC=\angle BAD, \text{ 所以} \\ AC=AD, \end{cases}$

$\triangle EAC \cong \triangle BAD$, 所以 $BD=CE$.

(2) 以 A 为直角顶点向 AB 左侧作等腰直角三角形 BAE , 使 $\angle BAE = 90^\circ$, $AE=AB=7$ cm, 连接 EC . 所以 $BE = \sqrt{AE^2 + AB^2} = 7\sqrt{2}$ cm, $\angle ABE = \angle AEB = 45^\circ$. 因为 $\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$, 所以 $AC=AD$, $\angle CAD = 90^\circ$, 所以 $\angle EAC = \angle BAD$. 同(1)可证 $\triangle EAC \cong \triangle BAD$, 所以 $BD=EC$. 因为 $\angle CBE = \angle ABC + \angle ABE = 90^\circ$, 在 $\text{Rt}\triangle CBE$ 中, 由勾股定理, 得 $EC = \sqrt{BE^2 + BC^2} = \sqrt{107}$ cm. 所以 $BD=EC = \sqrt{107}$ cm.

(3) 过点 A 在线段 AC 的右侧作 $AE \perp AB$ 于点 A , 交 BC 的延长线于点 E , 则 $\angle BAE = 90^\circ$. 因为 $\angle ABC = 45^\circ$, 所以 $\angle E = \angle ABC = 45^\circ$, 所以 $AE=AB=$

7 cm. 在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, 由勾股定理, 得 $BE = \sqrt{AB^2 + AE^2} = 7\sqrt{2}$ cm. 因为 $\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$, 所以 $\angle DAC = 90^\circ = \angle BAE$, 所以 $\angle EAC = \angle BAD$. 同(1)可证 $\triangle EAC \cong \triangle BAD$, 所以 $BD=EC=BE-BC=(7\sqrt{2}-3)$ cm.

12. 证明: (1) 延长 AD 至点 G , 使 $DG=AD$, 连接 BG . 因为 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线, 所以 $BD=CD$. 在 $\triangle BDG$ 和 $\triangle CDA$ 中, $\begin{cases} BD=CD, \\ \angle BDG=\angle CDA, \text{ 所以} \triangle BDG \cong \triangle CDA \\ GD=AD, \end{cases}$

(SAS), 所以 $\angle G = \angle CAD$, $GB=AC$. 因为 $BE=AC$, 所以 $BE=GB$, 所以 $\angle G = \angle BEG$. 因为 $\angle BEG = \angle AEF$, 所以 $\angle AEF = \angle G = \angle CAD$, 所以 $AF=EF$.

(2) 延长 ED 至点 G , 使 $DG=ED$, 连接 CG, FG . 因为 $\angle EDF = 90^\circ$, 所以 FD 垂直平分 EG , 所以 $EF=GF$. 因为 D 为边 BC 的中点, 所以 $BD=CD$. 同(1)可证 $\triangle BDE \cong \triangle CDG$ (SAS), 所以 $BE=CG$, $\angle B = \angle GCD$. 因为 $\angle BAC = 90^\circ$, 所以 $\angle B + \angle ACB = 90^\circ$, 所以 $\angle GCD + \angle ACB = 90^\circ$, 即 $\angle GCF = 90^\circ$. 由勾股定理, 得 $CG^2 + CF^2 = GF^2$, 所以 $BE^2 + CF^2 = EF^2$.

强化训练 2 等腰三角形的性质与判定

1. C 提示:如图, 延长 BD, AC 交于点 H , 设 AD 交 BE 于点 O . 因为 $AD \perp BH$, 所以 $\angle ADB = \angle ADH = 90^\circ$, 所以 $\angle ABD + \angle BAD = 90^\circ$, $\angle H + \angle HAD = 90^\circ$. 因为 AD 是 $\angle BAC$ 的平分线, 所以 $\angle BAD = \angle HAD$, 所以 $\angle ABD = \angle H$, 所以 $AB=AH$. 因为 $AD \perp BH$, 所以 $BD=DH$. 因为 $AC=DC$, 所以 $\angle CDA = \angle CAD$. 因为 $\angle CAD + \angle H = 90^\circ$, $\angle CDA + \angle CDH = 90^\circ$, 所以 $\angle CDH = \angle H$, 所以 $CD=CH=AC$. 因为 E 为 AC 的中点, 所以 $AE=EC$. 所以 $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABH}$, $S_{\triangle CDH} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABH}$. 因为 $S_{\triangle OBD} - S_{\triangle AOE} = S_{\triangle ADB} - S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ADH} -$

(2) 画图如图 1 所示. $>$

(3) 画图如图 2 所示. $<$

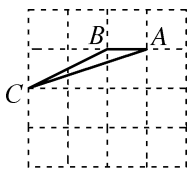


图 1

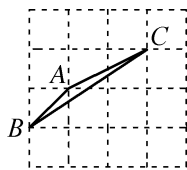


图 2

6. 解: (1) 因为 $\sqrt{9}=3$, 所以 $7-\sqrt{11}-\sqrt{9}=4-\sqrt{11}>0$, 所以 $7-\sqrt{11}>\sqrt{9}$.

(2) $(3a-1)-(2a+1)=a-2$. 当 $a-2>0$, 即 $a>2$ 时, $3a-1>2a+1$; 当 $a-2=0$, 即 $a=2$ 时, $3a-1=2a+1$; 当 $a-2<0$, 即 $a<2$ 时, $3a-1<2a+1$.

强化训练 4 数形结合和方程思想 在勾股定理中的应用

1. C 2. A

3. C 提示: 连接 AE. 根据翻折的性质, 得 $AB=AF$, $\angle AFG=\angle AFE=\angle B=90^\circ$. 因为四边形 ABCD 是正方形, 所以 $AB=AD$, $\angle B=\angle D=90^\circ$, 所以 $AF=AD$, $\angle AFE=\angle D=90^\circ$. 易证 $\text{Rt}\triangle AFE\cong\text{Rt}\triangle ADE$, 所以 $FE=DE$. 设 $DE=FE=x$, 则 $EC=6-x$. 因为 G 为 BC 的中点, 所以 $GF=BG=CG=3$, 所以 $GE=x+3$. 在 $\text{Rt}\triangle ECG$ 中, 根据勾股定理, 得 $(6-x)^2+3^2=(x+3)^2$, 解得 $x=2$. 所以 DE 的长为 2.

4. D 提示: 因为点 $A(-b, 0)$, $B(0, b)$, $b>0$, 所以 $OA=OB=b$. 易证 $\triangle OAD\cong\triangle BOE$, 所以 $OD=BE$, $OE=AD=4$. 因为 $BE+BO=8$, 所以 $BO=8-BE$. 在 $\text{Rt}\triangle OBE$ 中, 根据勾股定理, 得 $BO^2=BE^2+OE^2$, 即 $(8-BE)^2=BE^2+4^2$, 所以 $BE=3$. 所以 $OD=3$, 所以 $ED=OE-OD=4-3=1$.

5. ①②④ 提示: 因为四边形 ABCD 是正方形, 所以 $BC=CD$, $\angle BCE=\angle DCE=45^\circ$. 易证 $\triangle BCE\cong\triangle DCE(\text{SAS})$, 所以 $\angle CBE=\angle CDE=15^\circ$, 故①正确; 过点 D 作 $DM\perp AC$ 于点 M, 因为 $\angle CDE=15^\circ$, $\angle ADC=90^\circ$, 所以 $\angle ADE=75^\circ$, 因为 $\angle DAE=45^\circ$, 所以 $\angle AED=60^\circ$, 所以 $\angle EDM=30^\circ$, 所以 $DE=2ME$, 因为 $AD=AB=\sqrt{6}$, 所以 $AM=DM=$

$\frac{\sqrt{2}}{2}AB=\sqrt{3}$, 在 $\text{Rt}\triangle DME$ 中, $DM^2=DE^2-ME^2$, 即 $3=4ME^2-ME^2$, 所以 $ME=1$, 所以 $AE=AM+ME=\sqrt{3}+1$, 故②正确; 易得 $CM=DM=\sqrt{3}$, 所以 $CE=CM-ME=\sqrt{3}-1$, 所以 $S_{\triangle DEC}=\frac{1}{2}\times(\sqrt{3}-1)\times\sqrt{3}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$, 故③错误; 在 EF 上取一点 G, 使 $EG=CE$, 连接 CG, 因为 $\angle BEC=180^\circ-\angle CBE-\angle ACB=120^\circ$, 所以 $\angle CEG=60^\circ$, 所以 $\triangle CEG$ 是等边三角形. 所以 $\angle CGE=60^\circ$, $CE=GC$. 因为 $CF=CB=CD$, 所以 $\angle F=\angle CBE=\angle CDE=15^\circ$, 所以 $\angle GCF=\angle CGE-\angle F=45^\circ$, 所以 $\angle ECD=\angle GCF$. 易证 $\triangle DEC\cong\triangle FGC(\text{SAS})$, 所以 $DE=FG$. 因为 $EF=EG+FG$, 所以 $EF=CE+DE$, 故④正确.

6. 10 或 $\frac{5}{2}$ 提示: 当点 P 在点 E 的左侧时, 点 H 在 ED 的延长线上. 由折叠的性质, 得 $PC=PH$, $DC=DH$. 由条件, 得 $BC=15$, $CD=5$, $CE=4$, $DE=\sqrt{CD^2-CE^2}=3$, 所以 $DH=CD=5$, 所以 $EH=ED+DH=8$. 设 $CP=x$, 则 $PH=x$, $PE=x-4$. 由勾股定理, 得 $PH^2-PE^2=EH^2$, 即 $x^2-(x-4)^2=64$, 解得 $x=10$. 当点 P 在点 E 的右侧时, 点 H 在 DE 的延长线上. 易得 $EH=DH-DE=2$. 设 $CP=PH=x$, 则 $PE=CE-CP=4-x$. 同理可得 $PH^2-PE^2=EH^2$, 即 $x^2-(4-x)^2=4$, 解得 $x=\frac{5}{2}$. 综上所述, CP 的长为 10 或 $\frac{5}{2}$.

7. 3 提示: 过点 M 作 $MH\perp AB$ 于点 H, 则 $\angle BHM=\angle AHM=90^\circ=\angle AOM$. 易证 $\triangle AHM\cong\triangle AOM$, 所以 $AH=AO$, $HM=OM$. 易求得点 $A(6, 0)$, $B(0, 8)$, 即 $AO=6$, $OB=8$, 所以 $AB=10$. 因为 $AH=AO=6$, 所以 $BH=AB-AH=4$. 设 $HM=OM=x$, 则 $MB=8-x$. 在 $\text{Rt}\triangle BMH$ 中, $BH^2+HM^2=MB^2$, 即 $4^2+x^2=(8-x)^2$, 解得 $x=3$. 所以 $OM=3$.

8. $\sqrt{14}$ 或 $\sqrt{2}$ 提示: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AB=4$, $BC=3$, 所以 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{7}$. 分以下情况讨论: ①如图 1, 当点 D 在 BC 的延长线上, 因为 $\frac{AE}{AD}=\frac{1}{2}$, 所以 $AE=DE$. 因为 $BE\perp AD$, 所以

$BD = AB = 4$, 所以 $CD = BD - BC = 1$. 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, 由勾股定理, 得 $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = 2\sqrt{2}$. 所以 $AE = DE = \frac{1}{2}AD = \sqrt{2}$. 在 $\text{Rt}\triangle BED$ 中, 由勾股定理, 得 $BE = \sqrt{BD^2 - DE^2} = \sqrt{14}$. ②如图 2, 当点 D 在线段 BC 上时, 因为 $AE > AD$, 即 $\frac{AE}{AD} > 1$, 所以此情况不符合题意. ③如图 3, 当点 D 在线段 CB 的延长线上时, 因为 $\frac{AE}{AD} = \frac{1}{2}$, 所以 $AE = DE$. 因为 $BE \perp AD$, 所以 $BD = AB = 4$, 所以 $CD = BD + BC = 7$. 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, 由勾股定理, 得 $AD = \sqrt{CD^2 + AC^2} = 2\sqrt{14}$. 所以 $AE = DE = \frac{1}{2}AD = \sqrt{14}$. 在 $\text{Rt}\triangle BED$ 中, 由勾股定理, 得 $BE = \sqrt{BD^2 - DE^2} = \sqrt{2}$. 综上所述, BE 的长为 $\sqrt{14}$ 或 $\sqrt{2}$.

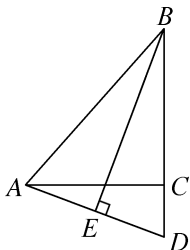


图 1

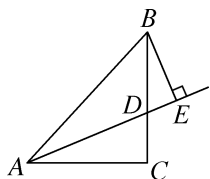


图 2

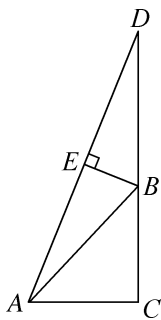


图 3

9. 解: (1) 因为四边形 $ABCD$ 为长方形, 所以 $CD = AB = 20$, $BC = AD = 12$, $AB \parallel CD$, 所以 $\angle DPA = \angle PAB$. 由轴对称的性质, 得 $\angle DPA = \angle EPA$, 所以 $\angle EPA = \angle PAB$, 所以 $PB = AB = 20$. 在 $\text{Rt}\triangle PCB$ 中, 由勾股定理, 得 $PC = \sqrt{PB^2 - BC^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$, 所以 $PD = CD - PC = 4 = 2t$, 所以 $t = 2$.
- (2) ① $12 \leq AQ \leq 20$. 提示: 同(1)可证, $AQ = PQ$. 由(1)可知, 当 $t = 2$ 时, 点 Q 与点 B 重合, 此时 AQ 的长最大, 最大值为 $AQ = AB = 20$. 当 $PQ \perp$

AB 时, PQ 的长最小, 即 AQ 的长最小, 此时易知四边形 $ADPQ$ 为正方形, 最小值为 $AQ = AD = 12$, 所以 $12 \leq AQ \leq 20$.

②存在. 分两种情况: 当点 E 在长方形 $ABCD$ 内部时, 如图 1, 同(1)可证, $PQ = AQ$. 所以 $QE = PQ - PE = AQ - DP = AQ - 2t$. 因为 $QE = QB$, 所以 $AQ - 2t = AB - AQ$, 即 $2AQ - 2t = 20$, 所以 $AQ = 10 + t$, 所以 $QE = AQ - 2t = 10 - t$. 由轴对称的性质, 得 $\angle D = \angle AEP = \angle AEQ = 90^\circ$, $AE = AD = 12$. 在 $\text{Rt}\triangle AEQ$ 中, 由勾股定理, 得 $AQ^2 - QE^2 = AE^2$, 即 $(10 + t)^2 - (10 - t)^2 = 12^2$, 解得 $t = 3.6$. 当点 E 在长方形 $ABCD$ 的外部时, 如图 2, 易得 $QE = PE - PQ = DP - AQ = 2t - AQ$. 因为 $QE = QB$, 所以 $2t - AQ = AB - AQ$, 所以 $AB = 2t$, 所以 $t = 10$ (此时点 P 与点 C 重合). 综上所述, 当 t 的值为 3.6 或 10 时, $QE = QB$.

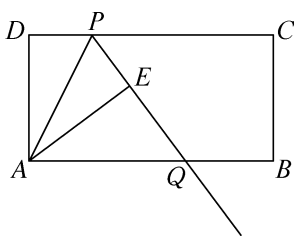


图 1

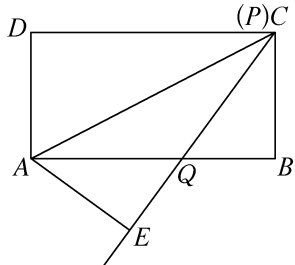


图 2

10. (1) $\sqrt{10}$
- (2) 解: 构造图形如图 1 所示, $AB = BD = 3$, $AC = 1$, $AP = x$, $CA \perp AB$ 于点 A , $DB \perp AB$ 于点 B , 则 $PC + PD = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{(3-x)^2 + 9}$. 所以代数式 $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{(3-x)^2 + 9}$ ($0 \leq x \leq 3$) 的最小值就是 $PC + PD$ 的最小值. 作点 C 关于直线 AB 的对称点 C' , 过点 C' 作 $C'E \perp DB$ 交 DB 的延长线于点 E , 连接 $C'D$, 交 AB 于点 P , 此时 $PC + PD$ 的值最小. 由条件, 易得 $C'E = AB = 3$, $DE = 4$. 根据勾股定理, 得

$C'D = \sqrt{C'E^2 + DE^2} = 5$, 所以 $PC + PD$ 的最小值为 5, 即所求代数式的最小值是 5.

(3) $\sqrt{3}$ 提示: 如图 2, 作点 C 关于直线 AB 的对称点 C' , 过点 C' 作 $C'N \perp AC$ 于点 N , 交 AB 于点 M , 连接 AC' , CC' , 则易知 $CM + MN$ 的最小值为 $C'N$ 的长. 根据对称的性质, 得 $AC' = AC = 2$, $\angle C'AB = \angle CAB = 30^\circ$. 所以 $\angle C'AC = 60^\circ$, 所以 $\triangle C'AC$ 为等边三角形. 又因为 $C'N \perp AC$, 所以 $\angle AC'N = \frac{1}{2} \angle AC'C = 30^\circ$. 所以 $AN = \frac{1}{2} AC' = 1$. 所以 $C'N = \sqrt{AC'^2 - AN^2} = \sqrt{3}$, 即 $CM + MN$ 的最小值是 $\sqrt{3}$.

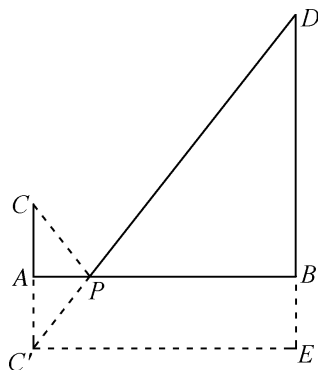


图 1

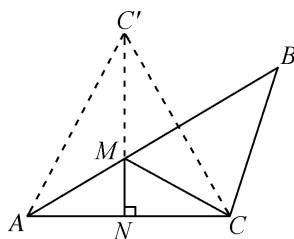


图 2

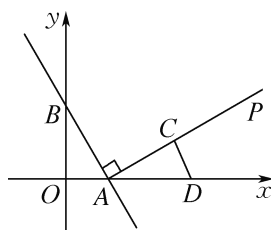


图 1

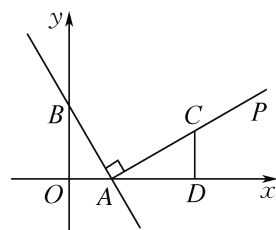


图 2

3. C 提示: 分别作点 $C(-2,0)$ 关于 y 轴的对称点 $G(2,0)$, 关于直线 $y = x + 4$ 的对称点 D , 连接 DG 交 AB 于点 E , 交 y 轴于点 F , 连接 AD , 则此时 $\triangle CEF$ 的周长最小, 最小值为线段 DG 的长. 易知点 $A(-4,0)$, $B(0,4)$, 所以 $OA = OB$, $\triangle AOB$ 是等腰直角三角形, 所以 $\angle BAC = 45^\circ$. 因为点 C, D 关于 AB 对称, 所以 $\angle DAB = \angle BAC = 45^\circ$, 所以 $\angle DAC = 90^\circ$. 因为点 $C(-2,0)$, 所以 $AD = AC = OA - OC = 2$, 所以点 $D(-4,2)$. 由点 $D(-4,2)$, $G(2,0)$ 可得直线 DG 的函数表达式为 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. 令 $x = 0$, 得 $y = \frac{2}{3}$, 所以点 $F(0, \frac{2}{3})$. 由

$$\begin{cases} y = x + 4, \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = -\frac{5}{2}, \\ y = \frac{3}{2}. \end{cases} \text{ 所以点 } E(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}).$$

4. B 提示: $\triangle BOD$ 和 $\triangle ABC$ 都是等边三角形, 所以 $BO = BD$, $BA = BC$, $\angle OBD = \angle ABC = 60^\circ$, 所以 $\angle OBA = \angle DBC$, 所以 $\triangle BOA \cong \triangle BDC$ (SAS), 故 ① 正确; 因为 $\triangle BOA \cong \triangle BDC$, 所以 $\angle BDC = \angle BOA = 90^\circ$, 因为 $\angle ODB = 60^\circ$, 所以 $\angle ODC = \angle ODB + \angle BDC = 150^\circ$, 故 ② 错误; 延长 CD 交 x 轴于点 E , 因为 $\angle EOB = 90^\circ$, $\angle BOD = 60^\circ$, 所以 $\angle DOE = 30^\circ$, 因为 $\angle ODC = 150^\circ$, 所以 $\angle ODE = 30^\circ$, 所以 $\angle AEC = \angle DOE + \angle ODE = 60^\circ$, 所以 CD 所在直线与 x 轴所夹的锐角, 度数始终不变, 故 ③ 正确; 因为 $\triangle BOA \cong \triangle BDC$, 所以 $CD = AO$, 所以 CD 的长为定值, 所以随着点 B 的向上移动, 线段 CD 的值不变, 故 ④ 错误.

5. 12 提示: 根据题图象可知, 当点 P 在 BC 上运动时, BP 不断增大, 且最大值为 5, 所以 $BC = 5$. 由于 M 是曲线部分的最低点, 所以此时 BP 的长度为点 P 在 AC 上运动时的最小值, 即 $BP \perp AC$ 时, $BP = 4$. 此时根据勾股定理, 得 $PC = \sqrt{BC^2 - BP^2} =$

强化训练 5 平面直角坐标系与一次函数、几何图形

1. B 提示: 当 $OP = t$ 时, 点 P 的坐标为 $(t, 0)$, 点 Q 的坐标为 $(9 - 2t, 6)$. 所以直线 PQ 的函数表达式为 $y = \frac{2}{3-t}x + \frac{2t}{t-3}$. 整理, 得 $(y-2)t = 3y - 2x$. 因为当 $y = 2, x = 3$ 时, 无论 t 取何值, 该等式均成立, 所以线段 PQ 始终经过点 $(3, 2)$.

2. D 提示: 根据题意, 易得点 $A(1,0)$, $B(0,2)$, 所以 $OA = 1, OB = 2$. 所以 $AB = \sqrt{5}$. 因为 $AP \perp AB$, C 是射线 AP 上一点, 所以 $\angle BAC = 90^\circ$, 即 $\angle OAB + \angle CAD = 90^\circ$. 因为 $\angle OAB + \angle OBA = 90^\circ$, 所以 $\angle CAD = \angle OBA$. 若以 C, D, A 为顶点的三角形与 $\triangle AOB$ 全等, 则 $\angle ACD = 90^\circ$ 或 $\angle ADC = 90^\circ$, 即 $\triangle DCA \cong \triangle AOB$ 或 $\triangle CDA \cong \triangle AOB$. 如图 1, 当 $\triangle DCA \cong \triangle AOB$ 时, $DA = AB = \sqrt{5}$, 所以 $OD = OA + DA = \sqrt{5} + 1$; 如图 2, 当 $\triangle CDA \cong \triangle AOB$ 时, $DA = OB = 2$, 所以 $OD = OA + DA = 3$. 综上所述, OD 的长为 3 或 $\sqrt{5} + 1$.

提示:连接 OA, AB . 由条件,得 $OA = AB = \sqrt{2}$, $OB = 2$, $\triangle AOB$ 为等腰直角三角形,所以 $\angle AOB = \angle ABO = 45^\circ$. ①如图 2,当点 C 在 x 轴负半轴上时,易知点 D 位于第四象限.连接 BD . 因为 $\angle CAD = \angle OAB = 90^\circ$,所以 $\angle CAD - \angle OAD = \angle OAB - \angle OAD$,即 $\angle OAC = \angle BAD$. 又因为 $OA = AB$, $AC = AD$,所以 $\triangle OAC \cong \triangle BAD$,所以 $\angle AOC = \angle ABD$, $OC = BD$. 因为 $\angle AOB = 45^\circ$,所以 $\angle ABD = \angle AOC = 180^\circ - \angle AOB = 135^\circ$. 当 $\triangle ABD$ 为等腰三角形时, $AB = BD = \sqrt{2}$,所以 $OC = \sqrt{2}$,所以点 $C(-\sqrt{2}, 0)$. ②如图 3,当点 C 在 x 轴正半轴上时,易知点 D 位于第一象限.同理可证 $\triangle OAC \cong \triangle BAD$. 当 $\triangle ABD$ 为等腰三角形,即 $\triangle OAC$ 为等腰三角形时,分三种情况:当 $OC = AC$ 时,易得点 $C_1(1, 0)$;当 $OC = OA = \sqrt{2}$ 时,易得点 $C_2(\sqrt{2}, 0)$;当 $OA = AC$ 时,点 C 与点 B 重合,所以点 $C_3(2, 0)$. 综上所述,点 C 的坐标为 $(-\sqrt{2}, 0)$ 或 $(1, 0)$ 或 $(\sqrt{2}, 0)$ 或 $(2, 0)$.

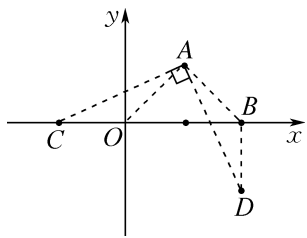


图 2

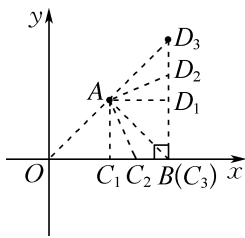


图 3

素养提升 1 抽象能力

- 1. A** 提示:因为 $\sqrt[3]{216} = 6$, $\sqrt{5} < a < \sqrt[3]{216}$, 所以 $\sqrt{5} < a < 6$. 因为 $2 < \sqrt{5} < 3$, 所以整数 a 的值可能为 3 或 4 或 5, 所以整数 a 的值不可能为 2.
- 2. D** 提示:因为任何实数的偶数次都是非负数, 所以负数 a 没有偶数次方根, 故选项 A 正确; 因为任何实数 a 都有奇数次方根, 故选项 B 正确; 因为 $a^{2 \cdot 25} = a^{2 \cdot 25}$, 所以 $\sqrt[2 \cdot 25]{a^{2 \cdot 25}} = a$, 故选项 C 正确; 因为 $(\pm a)^{2 \cdot 24} = a^{2 \cdot 24}$, 所以 $\sqrt[2 \cdot 24]{a^{2 \cdot 24}} = |a|$, 故选项 D 不正确.
- 3. B** 提示:因为正方形 $ABCD$ 在数轴上点 A, D 对应的数分别为 $-2, -3$, 所以正方形 $ABCD$ 的边长为 1. 所以转动时点 A 对应的数依次是 $-2, 2, 6, \dots$; 点 B 对应的数依次是 $-1, 3, 7, \dots$; 点 C 对应的数依次是 $0, 4, 8, \dots$; 点 D 对应的数依次是 $1, 5, 9, \dots$. 因

为 $2\,024 \div 4 = 506$, 故与 $2\,024$ 对应的点是 C .

- 4. C** 提示:因为 $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, b = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, 所以 $ab = 1$.

因为 $S_1 = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} = \frac{1+b+1+a}{(1+a)(1+b)} = \frac{2+a+b}{1+a+b+ab} = \frac{2+a+b}{2+a+b} = 1$, $S_2 = \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} = \frac{1+b^2+1+a^2}{(1+a^2)(1+b^2)} = \frac{2+a^2+b^2}{1+a^2+b^2+a^2b^2} = \frac{2+a^2+b^2}{2+a^2+b^2} = 1$, $S_3 = \frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} = \frac{1+b^3+1+a^3}{(1+a^3)(1+b^3)} = \frac{2+a^3+b^3}{1+a^3+b^3+a^3b^3} = \frac{2+a^3+b^3}{2+a^3+b^3} = 1$, $\dots, S_n = \frac{1}{1+a^n} + \frac{1}{1+b^n} = \frac{1+b^n+1+a^n}{(1+a^n)(1+b^n)} = \frac{2+a^n+b^n}{1+a^n+b^n+a^n b^n} = \frac{2+a^n+b^n}{2+a^n+b^n} = 1$, 所以 $S_{100} = 1$, 所以 $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{100} = 1 + 1 + \dots + 1 = 100$.

- 5. C** 提示:因为 a_8 表示距离 $\sqrt{8}$ 最近的正整数, 所以 $a_8 = 3$, 故①正确; 当 $a_n = 3$ 时, n 为 $7, 8, 9, 10, 11, 12$ 一共有 6 个, 故②错误; 因为 $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 2, a_5 = 2, a_6 = 2, a_7 = 3, a_8 = 3, a_9 = 3, a_{10} = 3, a_{11} = 3, a_{12} = 3$, 所以 $a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_{11} - a_{12} = 0$, 故③正确; 由 $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 2, a_5 = 2, a_6 = 2, a_7 = 3, a_8 = 3, a_9 = 3, a_{10} = 3, a_{11} = 3, a_{12} = 3, \dots$ 可得有 2 个 1, 4 个 2, 6 个 3, 8 个 4, $\dots$ 所以 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{20}} = 1 \times 2 + 4 \times \frac{1}{2} + 6 \times \frac{1}{3} + 8 \times \frac{1}{4} = 8$, 故④正确; 因为 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 100 = 50 \times 2 = 2 \times 1 + 4 \times \frac{1}{2} + 6 \times \frac{1}{3} + \dots + 100 \times \frac{1}{50}$, 所以 $n = 2 + 4 + 6 + \dots + 100 = 2\,550$, 故⑤正确.

- 6. $\frac{2\,025}{2\,026}$** 提示:根据题意,得 $\begin{cases} 2-xy=0, \\ 1-y=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$ 所以原式 $= \frac{1}{2 \times 1} + \frac{1}{3 \times 2} + \frac{1}{4 \times 3} + \dots + \frac{1}{2\,026 \times 2\,025} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2\,025} - \frac{1}{2\,026} = 1 - \frac{1}{2\,026} = \frac{2\,025}{2\,026}$.

- 7. $\pm 1.01 \quad -2\,140$**
- 8. $4 + \sqrt{2}$** 提示:因为第一次将纸条关于点 B 对折, 所以第一次对折后与点 A 重合的点表示的数为 $2 + [2 - (-2)] = 6$, 与点 C 重合的点表示的数为 $2 +$

$(2-\sqrt{2})=4-\sqrt{2}$. 因为第二次再将对折后的纸片沿某点折叠后使得点 A 与点 B 重合, 所以折点表示的数为 $\frac{2+6}{2}=4$, 所以第二次对折后与点 C 重合的点表示的数为 $4+[4-(4-\sqrt{2})]=4+\sqrt{2}$, 所以 x 的值为 $4+\sqrt{2}$.

9. ①②③④ 提示: 根据题意, 得 $\begin{cases} 2a+6b-2=-5, \\ -4a-16b-2=2, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a=-3, \\ b=\frac{1}{2}, \end{cases}$ 故①正确; 根据题意, 得 $\triangle(d, d) =$

$-3d+\frac{1}{2}d^2-2=-3d$, 整理, 得 $d^2=4$, 解得 $d=\pm 2$, 则 $\triangle(d, d)=\pm 6$, 故②正确; 根据题意, 得

$\triangle(p, q)=-6$, 即 $-3p+\frac{1}{2}pq-2=-6$, 整理, 得

$p=\frac{8}{6-q}$, 当 $p=2$ 时, $q=2$; 当 $p=4$ 时, $q=4$; 当

$p=8$ 时, $q=5$, 所以 p, q 有且仅有 3 组正整数解, 故③正确; 如果 $\triangle(nx, y)=\triangle(ny, x)$, 则 $-3nx+$

$\frac{1}{2}nxy-2=-3ny+\frac{1}{2}nxy-2$, 所以 $3nx-3ny=$

0 , 即 $n(x-y)=0$, 所以 $n=0$ 或 $x-y=0$, 即 $n=0$ 或 $x=y$, 故④正确.

10. $2\sqrt{2}$ 提示: 设 $\sqrt[3]{\sqrt{5}+1}=a, \sqrt[3]{\sqrt{5}-1}=b$, 则 $a^3=\sqrt{5}+1, b^3=\sqrt{5}-1$. 又因为 $4=(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)=a^3b^3$, 所以 $x=\sqrt[3]{a^3b^3a^3}-\sqrt[3]{a^3b^3b^3}=a^2b-ab^2$, $x^2=a^4b^2-2a^3b^3+a^2b^4$, 故原式 $=x(x^2+12)=(a^2b-ab^2)(a^4b^2-2a^3b^3+a^2b^4+3a^3b^3)=(a^2b-ab^2)(a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4)=ab(a-b)a^2b^2(a^2+b^2+ab)=a^3b^3(a^3-b^3)=4\times(\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1)=8$. 所以其算术平方根是 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

11. 解: (1) 因为 $x=\{x\}-m$, 所以 $m=\{x\}-x$. 又因为 $0\leq m<1$, 所以 $x\leq\{x\}<x+1$.

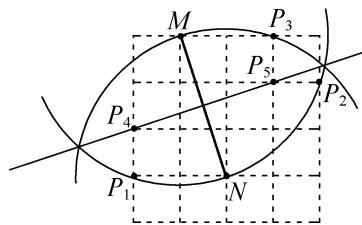
(2) 因为 $\{2x-1\}=-3, 2x-1\leq\{2x-1\}<2x-1+1$, 所以 $2x-1\leq-3<2x-1+1$, 解得 $-\frac{3}{2}<x\leq-1$.

12. 证明: 假设 $\sqrt[3]{2}$ 是有理数, 则存在两个互质的正整数 m, n , 使得 $\sqrt[3]{2}=\frac{n}{m}$, 于是 $n=\sqrt[3]{2}m$, 两边立方得 $n^3=2m^3$. 因为 $2m^3$ 是偶数, 所

以 n^3 是偶数, 所以 n 是偶数. 设 $n=2t$ (t 是正整数), 则 $n^3=8t^3$, 即 $8t^3=2m^3$, 所以 $4t^3=m^3$, 所以 m 也是偶数, 所以 m, n 都是偶数, 不互质, 与假设 p, q 互质矛盾, 所以假设错误, 所以 $\sqrt[3]{2}$ 不是有理数.

素养提升 2 推理能力

1. C 提示: 如图, 当 $MP=MN$ 时, 以点 M 为圆心, 以 MN 长为半径画弧, 则点 P_1, P_2 即为所求; 当 $NP=NM$ 时, 以点 N 为圆心, 以 NM 长为半径画弧, 则点 P_3 即为所求; 当 $PM=PN$ 时, 作线段 MN 的垂直平分线, 则点 P_4, P_5 即为所求. 综上所述, 使得 $\triangle MNP$ 为等腰三角形的点 P 的个数为 5.



2. D 提示: 因为 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线相交于点 O , 所以 $\angle OBC=\frac{1}{2}\angle ABC, \angle OCB=\frac{1}{2}\angle ACB$,

所以 $\angle OBC+\angle OCB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$, 因为

$\angle OBC+\angle OCB=180^\circ-\angle BOC, \angle ABC+\angle ACB=180^\circ-\angle A$, 所以 $180^\circ-\angle BOC=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A)$,

所以 $\angle BOC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$, 故①正确; 因为 $EF\parallel$

BC , 所以 $\angle AEF=\angle EBC$, 因为 OB 平分 $\angle EBC$,

所以 $\angle EBO=\frac{1}{2}\angle EBC$, 所以 $\angle EBO=\frac{1}{2}\angle AEF$,

故②正确; 因为 $OD\perp AC$ 于点 D , 所以 $\angle ODC=$

90° , 所以 $\angle DOC+\angle OCD=90^\circ$, 因为 OC 平分 $\angle BCD$, 所以 $\angle OCB=\angle OCD$, 所以 $\angle DOC+$

$\angle OCB=90^\circ$, 故③正确; 因为 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的

平分线相交于点 O , 所以点 O 到 BA 和 BC 的距离相等, 点 O 到 BC 和 AC 的距离相等, 所以点 O 到 AB 的距离等于 OD 的长, 即点 O 到 AE 的距离等于 m ,

所以 $S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}AE\cdot m+\frac{1}{2}AF\cdot m=\frac{1}{2}m(AE+$

$AF)=\frac{1}{2}mn$, 故④正确.

得 $\triangle DFQ \cong \triangle FGP$ (AAS), 所以 $DQ = FP$, $QF =$

$$PG, \text{ 所以 } \begin{cases} 4-t=n-(2t+4), \\ 2t+4=-t, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} t=-\frac{4}{3}, \\ n=\frac{20}{3}. \end{cases} \text{ 所以}$$

点 F 的坐标为 $(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$. 综上所述, 点 F 的坐标

为 $(-4, -4)$ 或 $(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$.

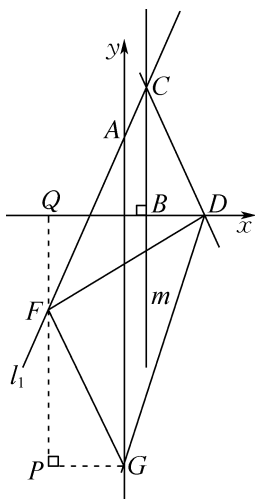


图 4

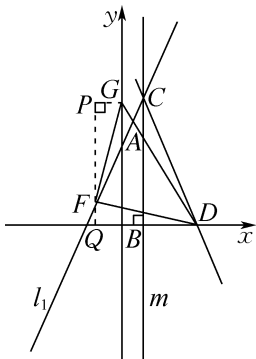
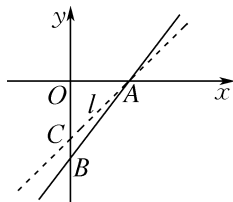


图 5

素养提升 3 几何直观

1. D 提示: 如图, 若直线 AC 把 $\triangle ABO$ 分成周长相等的两部分, 则 $AO + OC = AB + BC$. 易得点 $A(3, 0)$, $B(0, -4)$, 所以 $OA = 3$, $OB = 4$, 所以 $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 5$. 因为 $AO + OC = AB + BC$, 所以 $3 + OC = 5 + 4 - OC$, 所以 $OC = 3$, 所以点 $C(0, -3)$. 设直线 AC 的函数表达式为 $y = kx + b$. 把点 $A(3, 0)$, $C(0, -3)$ 代入, 得 $\begin{cases} 3k + b = 0, \\ b = -3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = 1, \\ b = -3. \end{cases}$ 所以直线 AC 的函数表达式为 $y = x - 3$.



2. D 提示: 根据题意, 易得点 $C(0, n)$, $B(-\frac{\sqrt{3}}{3}n, 0)$,

所以 $OC = -n$, $OB = -\frac{\sqrt{3}}{3}n$. 在 $\text{Rt}\triangle BOC$ 中, 根据

勾股定理, 得 $BC^2 = OB^2 + OC^2 = \frac{4}{3}n^2$. 因为点

$A(-4, 0)$, 所以 $OA = 4$. 所以 $AB = OA + OB = 4 -$

$\frac{\sqrt{3}}{3}n$. 在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中, 根据勾股定理, 得 $AC^2 =$

$OA^2 + OC^2 = 4^2 + (-n)^2$. 在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, 根据勾

股定理, 得 $AC^2 = AB^2 - BC^2 = (4 - \frac{\sqrt{3}}{3}n)^2 - \frac{4}{3}n^2$.

所以 $4^2 + (-n)^2 = (4 - \frac{\sqrt{3}}{3}n)^2 - (-\frac{2\sqrt{3}}{3}n)^2$, 解得

$n = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 或 $n = 0$ (舍去). 所以 n 的值为 $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

3. B 提示: 因为点 $P(t, 0)$, 点 B, C 在 y 轴上, 所以当 $t < 0$ 时, 点 $P(t, 0)$ 与等边三角形 ABC 的“点图距”为 PO 的长, 所以 $y = -t$. 当 $t > 0$ 时, 因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形, $OA \perp BC$, 点 A 的坐标为 $(3, 0)$, 所以 $\angle OAB = \angle OAC = 30^\circ$, $OA = 3$, 所以 $AB = 2OB$. 在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中, 由勾股定理, 得 $AB^2 - OB^2 = OA^2$, 即 $(2OB)^2 - OB^2 = 3^2$, 所以 $OC = OB = \sqrt{3}$, $AC = BC = AB = 2\sqrt{3}$. 过点 P 作 $PD \perp AB$ 于点 D . 当 $OP = PD$ 时, 因为 $\angle BAO = 30^\circ$, 所以 $AP = 2PD = 2OP$. 因为 $OA = PA + OP = 3$, 所以 $OP = PD = 1$, $AP = 2$, 所以此时动点 $P(t, 0)$ 与等边三角形 ABC 的“点图距” $y = 1$. ①当 $0 \leq OP \leq 1$ 时, $OP < PD$, 所以动点 $P(t, 0)$ 与等边三角形 ABC 的“点图距”为 OP 的长, 此时 $y = t$ ($0 \leq t \leq 1$); ②当 $1 < OP \leq 3$ 时, $OP > PD$, 所以动点 $P(t, 0)$ 与等边三角形 ABC 的“点图距”为 PD 的长, 因为 $PD = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{2}(OA - OP) = \frac{1}{2}(3 - t) = -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2}$, 所以 $y = -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2}$ ($1 < t \leq 3$); ③当 $t > 3$ 时, 动点 $P(t, 0)$ 与等边三角形 ABC 的“点图距”为 AP 的长, 所以 $y = AP = OP - OA = t - 3$ ($t > 3$). 综上所述

$$\text{述, } y = \begin{cases} -t & (t < 0), \\ t & (0 \leq t \leq 1), \\ -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2} & (1 < t \leq 3), \\ t - 3 & (t > 3). \end{cases}$$

4. $-3 \leq M \leq 4$ 提示: 由题意可知下图阴影部分 ($\triangle OAB$ 所在的区域) 为 x, y 满足题设条件的区

域, 联立 $\begin{cases} y = x, \\ y = -x + 2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \end{cases}$ 即点 $B(1, 1)$. 对

E 的坐标为 $(0,1)$.

(2) 如图 1, 过点 O 分别作 $OM \perp AD$ 于点 M , $ON \perp BC$ 于点 N . 因为 $\triangle AOE \cong \triangle BOC$, 所以 $S_{\triangle AOE} = S_{\triangle BOC}$, 且 $AE = BC$. 因为 $OM \perp AE$, $ON \perp BC$, 所以 $OM = ON$, 所以 OD 平分 $\angle ADC$. 因为 $AD \perp BC$, 所以 $\angle ADC = 90^\circ$, 所以 $\angle ADO = \frac{1}{2} \angle ADC = 45^\circ$.

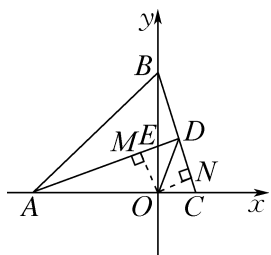


图 1

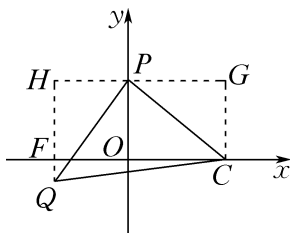


图 2

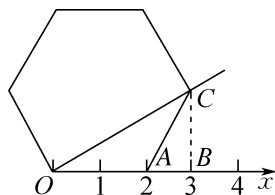
(3) 如图 2, 过点 P 作 $GH \parallel x$ 轴, 过点 C 作 $CG \perp GH$ 于点 G , 过点 Q 作 $QH \perp GH$ 于点 H , 交 x 轴于点 F . 因为点 $P(0,3)$, $C(t,0)$, 所以 $CG = FH = 3$, $PG = OC = t$. 因为 $\angle QPC = 90^\circ$, 所以 $\angle CPG + \angle QPH = 90^\circ$. 因为 $\angle QPH + \angle PQH = 90^\circ$, 所以 $\angle CPG = \angle PQH$. 又因为 $\angle H = \angle G = 90^\circ$, $PQ = CP$, 所以 $\triangle PCG \cong \triangle QPH$ (AAS), 所以 $PH = CG = 3$, $QH = PG = t$, 所以 $FQ = QH - FH = t - 3$, 所以点 $Q(-3, 3-t)$.

素养提升 4 创新意识

1. B 提示: 因为点 $A_1(-1,1)$, $A_2(2,1)$, $A_3(-2,2)$, $A_4(3,2)$, $A_5(-3,3)$, $A_6(4,3)$, $A_7(-4,4)$, $A_8(5,4)$, $\dots$, $A_{2n-1}(-n,n)$, $A_{2n}(n+1,n)$ (n 为正整数), 若 $2n = 2\ 024$, 则 $n = 1\ 012$, 所以点 $A_{2\ 024}$ 的坐标为 $(1\ 013, 1\ 012)$.

2. C 提示: 如图, 过点 C 作 $CB \perp x$ 轴于点 B . 因为六边形是正六边形, 所以 $\angle BAC = 60^\circ$, $AO = AC = 2$, 所以 $\angle ACB = 30^\circ$, $\angle AOC = \angle ACO = 30^\circ$, 所以在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, $AB = \frac{1}{2}AC = 1$, $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} =$

$\sqrt{3}$. 在 $\text{Rt}\triangle BCO$ 中, $OC = 2BC = 2\sqrt{3}$, 所以正六边形的顶点 C 的极坐标应记为 $(30^\circ, 2\sqrt{3})$.



3. C 提示: 因为点 $D(1,2)$, $E(-2,1)$, $F(0,t)$, 所以“水平底”为 $1 - (-2) = 3$. 当 $t \leq 1$ 时, “铅垂高”为 $2 - t$, 所以 $3(2 - t) \geq 21$, 解得 $t \leq -5$; 当 $1 < t \leq 2$ 时, “铅垂高”为 $2 - 1 = 1$, 所以 $3 \times 1 = 3 < 21$, 故此情况不存在; 当 $t > 2$ 时, “铅垂高”为 $t - 1$, 所以 $3(t - 1) \geq 21$, 解得 $t \geq 8$. 综上所述, t 的取值范围是 $t \geq 8$ 或 $t \leq -5$.

4. 5 提示: 因为 $\sqrt{x^2 - 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 8x + 25} = \sqrt{(x-1)^2 + 1^2} + \sqrt{(x-4)^2 + 3^2}$, 所以原式表示点 $(x,0)$ 到点 $(1,1)$ 和点 $(4,-3)$ 的距离之和. 由两点之间线段最短可知点 $(x,0)$ 在以点 $(1,1)$ 和点 $(4,-3)$ 为端点的线段上时, 原式的值最小, 最小值为点 $(1,1)$ 到点 $(4,-3)$ 的距离. 利用距离公式可得原式的最小值为 5.

5. $(1,7)$ 或 $(5,3)$

6. 解: (1) $(10,4)$ $y = -\frac{1}{2}x + 6$ 8

(2) 如图 1, 以 B 坐标为原点, 直线 BC 为 x 轴, 直线 AB 为 y 轴, 建立平面直角坐标系. 因为 $AB = CD = 4$, $AD = BC = 6$, $AE = AB$, 所以点 $A(0,4)$, $C(6,0)$, $D(6,4)$, $E(4,4)$, 则直线 AC 的函数表达式为 $y = -\frac{2}{3}x + 4$, 直线 BE 的函数表达式为

$$y = x. \text{ 联立, 得 } \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + 4, \\ y = x, \end{cases} \text{ 解得}$$

$$\begin{cases} x = \frac{12}{5}, \\ y = \frac{12}{5}. \end{cases} \text{ 所以点 } F\left(\frac{12}{5}, \frac{12}{5}\right). \text{ 所以 } S_{\text{四边形}EFCD} =$$

$$S_{\triangle ACD} - S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 - \frac{1}{2} \times 4 \times \left(4 - \frac{12}{5}\right) = \frac{44}{5}.$$

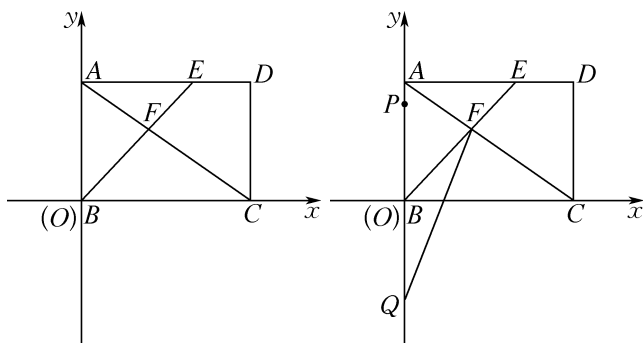


图 1

图 2

(3) 存在. 点 Q 的坐标为 $(0, -\frac{12\sqrt{2}}{5})$ 或 $(6, -\frac{18}{5})$. 提示: 因为点 $F(\frac{12}{5}, \frac{12}{5})$, $B(0, 0)$,

所以 $BF = \sqrt{(\frac{12}{5})^2 + (\frac{12}{5})^2} = \frac{12\sqrt{2}}{5}$. ① 当点 P 在边 AB 上时, 如图 2, 因为 $\triangle QBF$ 是一个等腰三角形, $\angle FBQ = 135^\circ$, 所以 $BQ = BF$. 因为点 Q, P 关于 x 轴对称, 所以 $BP = BQ = BF = \frac{12\sqrt{2}}{5}$, 所以点

$Q(0, -\frac{12\sqrt{2}}{5})$. ② 当点 P 在边 AD 上时, $BQ \geq$

$AB = 4$, $FQ \geq 4 + \frac{12}{5} = \frac{32}{5}$, 且 $BQ < FQ$, 此时 $\triangle BFQ$

不可能为等腰三角形. ③ 当点 P 在边 CD 上时, 要使 $\triangle QBF$ 为等腰三角形, 只可能 $FQ = BQ$. 设点

$Q(6, t)$, 则 $FQ^2 = (\frac{12}{5} - t)^2 + (6 - \frac{12}{5})^2$, $BQ^2 = 6^2 + t^2$. 所以 $(\frac{12}{5} - t)^2 + (6 - \frac{12}{5})^2 = 6^2 + t^2$, 解得 $t = -\frac{18}{5}$. 所以点 $Q(6, -\frac{18}{5})$. 综上所述, 点 Q 的坐标为 $(0, -\frac{12\sqrt{2}}{5})$ 或 $(6, -\frac{18}{5})$.

素养提升 5 模型观念与应用意识

1. B

2. D 提示: 结合图象, 可得点 $C(4, 480)$. 易得出租车的速度为 120 km/h, 所以 $a = 120$, 故选项 A 正确. 根据货车停下来装完货物后, 发现此时与出租车相距 120 km, 可得此时出租车距离乙地为 $120 + 120 = 240$ (km), 所以出租车距离甲地为 $480 - 240 = 240$ (km). 此时行驶的时间为 $240 \div 120 = 2$ (h), 所以点 $B(2, 120)$. 根据货车继续出发 $\frac{2}{3}$ h 后与出租

车相遇, 可得 $\frac{2}{3} \times (\text{出租车的速度} + \text{货车的速度}) =$

120 . 所以货车的速度为 $120 \div \frac{2}{3} - 120 = 60$ (km/h), 所以

直线 BG 的函数表达式为 $y = 60x + b$, 把点 $B(2, 120)$ 代入, 得 $b = 0$, 当 $y = 480$ 时, $x = 8$, 所以点 $G(8, 480)$, 所以点 $F(8, 0)$, 故选项 B 正确. 根据题

意, 得 $EF = \frac{1}{4}$, 所以 $OE = \frac{31}{4}$, 所以点 $E(\frac{31}{4}, 0)$, 所

以出租车返回时的速度为 $480 \div (\frac{31}{4} - 4) = 128$ (km/h),

故选项 C 正确. 设在出租车返回的过程中, 货车出发 t h 时与出租车相距 12 km, 此时货车距离乙地为

$60t$ km, 出租车距离乙地为 $128(t - 4) = (128t - 512)$ km. ① 当出租车和货车第二次相遇前相距

12 km 时, 可得 $60t_1 - (128t_1 - 512) = 12$, 解得 $t_1 = \frac{125}{17}$; ② 当出租车和货车第二次相遇后相距 12 km

时, 可得 $(128t_2 - 512) - 60t_2 = 12$, 解得 $t_2 = \frac{131}{17}$. 故

在出租车返回的过程中, 货车出发 $\frac{125}{17}$ h 或 $\frac{131}{17}$ h 时

与出租车相距 12 km. 故选项 D 错误.

3. D 提示: 由图 3 可知, 甲容器的初始水面高度为 30 cm, 故选项 A 正确; 水面每小时下降的高度为 6 cm, $30 \div 6 = 5$ (h), $9 + 5 = 14$, 即 $14:00$ 甲容器的水流光, 故选项 B 正确; 设 $h = kt + b$, 因为点 $(0, 30)$ 和

点 $(60, 24)$ 在该函数图象上, 所以 $\begin{cases} b = 30, \\ 60k + b = 24, \end{cases}$ 解

得 $\begin{cases} k = -0.1, \\ b = 30. \end{cases}$ 即甲容器的水面高度 h 与流水时间 t

的函数表达式为 $h = -0.1t + 30$, 故选项 C 正确;

$11:00$ 时甲容器的水面高度为 $-0.1 \times (11 - 9) \times 60 + 30 = 18$ (cm), 故选项 D 错误.

4. 15

5. $\frac{1}{4}$ 提示: 设去时甲的速度为 x km/h, 乙的速度为

y km/h, 则有 $\begin{cases} \frac{1}{2}x = 45, \\ 8x - 7.5y = 270, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 90, \\ y = 60. \end{cases}$ 所以

甲返回时的速度为 $\frac{4}{3} \times 90 = 120$ (km/h). 设甲车排

除故障的时间为 a h, 则有 $120(\frac{2}{3} - a) + 60 \times \frac{2}{3} =$

$$BP, \text{ 所以 } \begin{cases} 3=xt, \\ t=4-t, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} t=2, \\ x=1.5. \end{cases}$$

综上所述,当 $x=1, t=1$ 或 $x=1.5, t=2$ 时, $\triangle ACP$ 与 $\triangle BPQ$ 全等.

27. 解: (1) $5:9$

(2) 28

(3) $24 \div 4 = 6$. 设 $AC = x$. 根据题意, 得 $(x+3)^2 + 3^2 = (6-x)^2$, 解得 $x=1$. 所以该

风车状图案的面积是 $\frac{1}{2} \times (3+1) \times 3 \times 4 = 24$.

(4) $\frac{40}{3}$ 提示: 将四边形 $MNKT$ 的面积设为 x ,

将其余八个全等的三角形面积一个设为 y . 因为正方形 $ABCD$ 、正方形 $EFGH$ 、正方形 $MNKT$ 的面积分别为 $S_1, S_2, S_3, S_1 + S_2 + S_3 = 40$, 所以 $S_1 = 8y + x, S_2 = 4y + x, S_3 = x$, 所以 $S_1 + S_2 + S_3 = 3x + 12y = 40$, 所以 $x + 4y = \frac{40}{3}$, 所以 $S_2 = x + 4y = \frac{40}{3}$.

(5) $a^2 + b^2 - ab = c^2$. 理由如下:

由题意, 得大正三角形面积 = 三个全等三角形面积 + 小正三角形面积, 所以 $\frac{1}{2}(a+b) \cdot k(a+b) = 3 \times \frac{1}{2}b \cdot ka + \frac{1}{2}c \cdot ck$, 所以 $(a+b)^2 = 3ab + c^2$, 所以 $a^2 + b^2 - ab = c^2$.

期末检测卷

1. C 2. D 3. A 4. A 5. A 6. B

7. D 提示: 由题意, 得 $-2k + b = 0$, 所以 $b = 2k$. 因为直线 $l_1: y = -2x + 4$ 与直线 $l_2: y = kx + b (k \neq 0)$ 的交点在第一象限, 所以 $k > 0$. 因为直线 l_1 交 y 轴于点 $(0, 4)$, 且当直线 l_2 经过点 $(0, 4)$ 时, $k = 2$, 所以 k 的取值范围为 $0 < k < 2$.

8. B 提示: 因为 $\angle ABC = 45^\circ$, BE 平分 $\angle ABC$, 所以 $\angle ABE = \angle CBE = 22.5^\circ$, 因为 $BE \perp AC$, 所以 $\angle BEA = \angle BEC = 90^\circ$, 所以 $\angle A = 180^\circ - \angle BEA - \angle ABE = 67.5^\circ$, 故 ② 正确; 易证 $\triangle BEA \cong \triangle BEC$

(ASA), 所以 $AE = CE = \frac{1}{2}AC$, 因为 $CD \perp AB$, 所以 $\angle ACD + \angle A = 90^\circ$, 因为 $\angle ABE + \angle A = 90^\circ$, 所以 $\angle ACD = \angle ABE$, 因为 $\angle BDC = 90^\circ$, $\angle ABC = 45^\circ$, 所以 $\angle DCB = 45^\circ = \angle ABC$, 所以 $BD = CD$, 易证 $\triangle BDF \cong \triangle CDA$ (ASA), 所以 $BF = CA$, 所以 $AE = \frac{1}{2}BF$, 故 ① 正确; 因为 $BD = CD$, H 是边 BC 的中点, 所以 $DH \perp BC$, 即 $\angle DHB = 90^\circ$, 所以 $\angle DGF = \angle BGH = 90^\circ - \angle CBE$, 因为 $\angle BEC = 90^\circ$, 所以 $\angle DFG = \angle EFC = 90^\circ - \angle ACD$, 因为 $\angle ACD = \angle ABE = \angle CBE$, 所以 $\angle DGF = \angle DFG$, 所以 $DG = DF$, 所以 $\triangle DGF$ 是等腰三角形, 故 ③ 正确; 因为 $\triangle BEA \cong \triangle BEC$, 所以 $S_{\triangle BEA} = S_{\triangle BEC}$, 因为 BG 平分 $\angle ABC$, 所以点 G 到边 BD 和边 BH 的距离相等, 又因为 $BD \neq BH$, 所以 $S_{\triangle BGD} \neq S_{\triangle BGH}$, 所以 $S_{\text{四边形}ADGE} \neq S_{\text{四边形}GHCE}$, 故 ④ 错误, 即正确的结论有 3 个.

9. 2 10. 3.2×10^6 11. $x \geq -1$ 且 $x \neq 2$

12. $7 \leq a \leq 9$ 13. $y = 3x - 2$ 14. $4\sqrt{3}$

15. $\sqrt{5}$ 提示: 连接 BE, DE . 因为 $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, $AC = 6$, E 是对角线 AC 的中点, 所以 $BE = DE = \frac{1}{2}AC = 3$. 过点 E 作 $EF' \perp BD$ 于点 F' , 则 F' 是线段 BD 的中点. 因为 $BD = 4$, 所以 $BF' = 2$. 在 $\text{Rt}\triangle BEF'$ 中, 由勾股定理, 得 $EF' = \sqrt{BE^2 - BF'^2} = \sqrt{5}$, 所以线段 EF 的最小值为 $\sqrt{5}$.

16. $(1, -1)$

17. 4 提示: 设平板车的长度不能超过 x m, 则 x 为最大值, 且此时平板车与直角通道所形成的 $\triangle CBP$ 为等腰直角三角形. 连接 PO , 与 BC 交于点 N . 因为直角通道的宽为 $\sqrt{8}$ m, 所以 $PO = 4$ m, 所以 $NP = PO - ON = 4 - 2 = 2$ (m). 又因为 $\triangle CBP$ 为等腰直角三角形, 所以 $AD = BC = 2CN = 2NP = 4$ m.

18. $-6 < s \leq -\frac{3}{2}$ 提示: 把 $x = 2, y = -3$ 代入 $y = ax + b$, 得 $2a + b = -3$. 因为过点 $(2, -3)$ 的直线 $y = ax + b (a \neq 0)$ 不经过第一象限, 所以 $b \leq 0, a < 0$. 所以 $b = -3 - 2a \leq 0$, 所以 $a \geq -\frac{3}{2}$, 所以 $-\frac{3}{2} \leq a < 0$. 因为 $s = a + 2b = a - 6 - 4a = -3a - 6$, 所

以 $-6 < s \leq -\frac{3}{2}$.

19. 解: (1) 原式 $= 5 - 3 - 4 = -2$.

(2) $(x-2)^2 = 4, x-2 = \pm 2, x = 0$ 或 $x = 4$.

20. (1) 证明: 由题意可知 $AB = CB, BE = BF, \angle ABD = \angle EBF = 60^\circ$. 所以 $\angle ABD - \angle EBD = \angle EBF - \angle EBD$, 即 $\angle ABE = \angle CBF$. 所以 $\triangle ABE \cong \triangle CBF$.

(2) 解: 因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 所以 $\angle BAC = \angle ACB = 60^\circ$. 因为 AD 是 $\angle BAC$ 的平分线, 所以 $\angle BAE = 30^\circ$. 所以由 (1) 可知 $\angle BCF = \angle BAE = 30^\circ$. 所以 $\angle ACF = \angle ACB + \angle BCF = 90^\circ$.

21. (1) 证明: 连接 AE . 因为 $DE \perp AB, D$ 是 AB 的中点, 所以 DE 垂直平分 AB , 所以 $AE = BE$, 所以 $\angle ABC = \angle EAB$. 所以 $\angle AEC = \angle ABC + \angle EAB = 2\angle ABC$. 因为 $EF = EC$, 所以 $\angle DCB = \angle EFC$. 所以 $\angle BEF = \angle DCB + \angle EFC = 2\angle DCB$. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 因为 CD 是中线, 所以 $CD = BD = \frac{1}{2}AB$, 所以 $\angle DCB = \angle ABC$. 所以 $\angle AEC = \angle BEF$. 所以 $\triangle AEC \cong \triangle BEF$ (SAS), 所以 $AC = BF$.

(2) $\frac{25}{4}$ 提示: 由 (1) 可知 $\triangle BEF \cong \triangle AEC$ (SAS), 所以 $AC = BF = 6, \angle BFE = \angle ACB = 90^\circ$. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 由勾股定理, 得 $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 8$, 设 $EF = CE = x$, 则 $BE = BC - CE = 8 - x$. 在 $\text{Rt}\triangle BEF$ 中, 由勾股定理, 得 $BE^2 = EF^2 + BF^2$, 即 $(8-x)^2 = x^2 + 6^2$, 解得 $x = \frac{7}{4}$, 所以 $BE = 8 - x = \frac{25}{4}$.

22. 解: (1) $\frac{9}{2}$ (7, 1)

(2) $3\sqrt{5}$ 提示: 因为点 $A(1, -2), B(4, -2)$ 关于直线 l 对称, 点 P 在直线 l 上, 所以 $PA = PB$, 所以 $PB + PC' = PA + PC' \geq AC'$. 因为点 $A(1, -2)$,

$C'(7, 1)$, 所以 $AC' = \sqrt{(7-1)^2 + (1+2)^2} = 3\sqrt{5}$, 所以 $PB + PC'$ 的最小值为 $3\sqrt{5}$.

23. 解: (1) 100

(2) 设点 C 的横坐标为 t . 根据题意, 得 $1\,000 - 100(t-2) = 2\,500 - 700(t-5)$, 解得 $t = 8$. 当 $t = 8$ 时, 点 C 的纵坐标为 $1\,000 - 100(8-2) = 400$, 所以点 C 的坐标为 $(8, 400)$.

点 C 的实际意义: 游船行驶 8 min 后, 在距离 A 港 400 m 处找回游客丢失的物品.

(3) 3 400

24. (1) 3, 4, 5

(2) 解: 由“作差法”可知, 最大的数为 $m^2 + n^2$.

当 $m^2 - n^2$ 最小时, 根据题意, 得 $(m^2 + n^2) + (m^2 - n^2) = 2m^2 = 72$, 解得 $m = 6$ 或 $m = -6$ (不合题意, 舍去). 又因为 $m - n = 1$, 所以 $n = 5$.

当 $2mn$ 最小时, 根据题意, 得 $(m^2 + n^2) + 2mn = (m+n)^2 = 72$. 因为 m, n 都是正整数, 所以此种情况不存在.

综上所述, $m = 6, n = 5$.

(3) $2p+3 \quad 2p^2+6p+4$ 提示: 因为 $2p^2 + 6p + 5 = (p^2 + 2p + 1) + (p^2 + 4p + 4) = (p+1)^2 + (p+2)^2$, 所以可令 $m = p+2, n = p+1$, 则 $m^2 - n^2 = (p+2)^2 - (p+1)^2 = 2p+3, 2mn = 2(p+2)(p+1) = 2p^2 + 6p + 4$, 所以另外两个数分别为 $2p+3, 2p^2+6p+4$.

25. 解: (1) (0, 1) 2 3 -1

(2) 根据题图象, 当 $x > 1$ 时, 函数 $y = kx + b$ 的值大于函数 $y = x + 1$ 的值.

(3) 连接 OD . 易知点 $C(\frac{1}{3}, 0)$. 因为点 $A(0, 1), D(1, 2)$, 所以 $S_{\text{四边形}AOCD} = S_{\triangle AOD} + S_{\triangle COD} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 2 = \frac{5}{6}$.

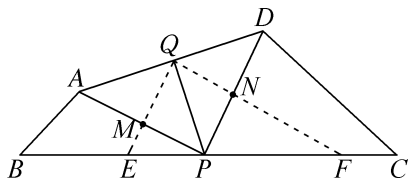
(4) 存在. ①当 $DP = DB$ 时, 设点 $P(0,$

y). 因为点 $B(0, -1)$, $D(1, 2)$, $DP^2 = DB^2$, 所以 $1^2 + (y-2)^2 = 1^2 + (2+1)^2$, 解得 $y=5$ 或 $y=-1$ (舍去), 所以点 P 的坐标为 $(0, 5)$. ②当 $BP = DB$ 时, 因为 $DB = \sqrt{10}$, 所以点 P 的坐标为 $(0, -1 - \sqrt{10})$ 或 $(0, \sqrt{10} - 1)$. ③当 $PB = PD$ 时, 设点 $P(0, a)$. 因为 $PB^2 = PD^2$, 所以 $(a+1)^2 = 1^2 + (2-a)^2$, 解得 $a = \frac{2}{3}$, 所以点 P 的坐标为 $(0, \frac{2}{3})$. 综上所述, 点 P 的坐标为 $(0, 5)$ 或 $(0, -1 - \sqrt{10})$ 或 $(0, \sqrt{10} - 1)$ 或 $(0, \frac{2}{3})$.

26. (1) ②

(2) 证明: 延长 BA, CD 交于点 M , 连接 MP . 因为 $\angle B = \angle C = 45^\circ$, 所以 $\angle BMC = 90^\circ$, 即 $\triangle BMC$ 是等腰直角三角形. 因为 P 为 BC 的中点, 所以 $BP = CP = MP$, $MP \perp BC$, $\angle PMC = \angle PMB = 45^\circ$. 又因为 $\angle APD = 90^\circ$, 所以 $\angle APB + \angle APM = 90^\circ = \angle DPM + \angle APM$, 所以 $\angle APB = \angle DPM$. 易证 $\triangle ABP \cong \triangle DMP$ (ASA), 所以 $AP = DP$. 因为 Q 是 AD 的中点, 所以 PQ 是 $\triangle APD$ 的“周长平分线”.

(3) 解: ①如图, 点 E, F 即为所求. 提示: 连接 QM 并延长交 BC 于点 E , 连接 QN 并延长交 BC 于点 F . 易证 EM 是线段 AP 的垂直平分线, FN 是线段 DP 的垂直平分线, 所以点 E, F 即为所求.



② $EF = \frac{15}{4}$. 提示: 连接 AE, DF , 过点 A 作

$AG \perp BC$ 于点 G , 过点 D 作 $DH \perp BC$ 于点 H , 则 $\angle AGB = \angle AGP = \angle DHC = \angle DHP = 90^\circ$. 又因为 $\angle B = \angle C = 45^\circ$, 所以 $\triangle AGB$ 和 $\triangle DHC$ 都是等腰直角三角形, 且 $AG = BG, DH = CH$. 又因为 $AB = \sqrt{2}, CD = 2\sqrt{2}$, 易求 $AG = BG = 1, DH = CH = 2$. 因为 $\angle GAP + \angle APG = 90^\circ = \angle HPD + \angle APG$, 所以 $\angle GAP = \angle HPD$. 易证 $\triangle GAP \cong \triangle HPD$, 所以 $PH = AG = 1, PG = DH = 2$. 由①可知, $PE = AE, PF = DF$. 设 $PE = AE = m$, 则 $EG = PG - PE = 2 - m$. 设 $PF = DF = n$, 则 $FH = PF - PH = n - 1, EF = PE + PF = m + n$. 在 $\text{Rt}\triangle DHF$ 中, 根据勾股定理, 得 $DH^2 + FH^2 = DF^2$, 即 $2^2 + (n-1)^2 = n^2$, 解得 $n = \frac{5}{2}$. 在 $\text{Rt}\triangle AGE$ 中, 根据勾股定理, 得 $AG^2 + EG^2 = AE^2$, 即 $1^2 + (2-m)^2 = m^2$, 解得 $m = \frac{5}{4}$. 所以 $EF = m + n = \frac{15}{4}$.

27. (1) 解: 猜想: $PD - PE = CF$. 证明如下:

连接 AP . 因为 $S_{\triangle APB} - S_{\triangle ACP} = S_{\triangle ABC}$, 所以 $\frac{1}{2}AB \cdot PD - \frac{1}{2}AC \cdot PE = \frac{1}{2}AB \cdot CF$. 又因为 $AB = AC$, 所以 $PD - PE = CF$.

(2) $(0, 3)$

(3) 证明: 根据题意, 得点 $A(4, 0), B(-1, 0)$, 所以 $AB = 5$. 在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中, $AC = \sqrt{AO^2 + CO^2} = 5$. 所以 $AB = AC = 5$, 所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

(4) 解: 过点 M 分别作 $MD \perp AC, ME \perp AB$, 垂足分别为 D, E . 由上述结论, 得 $ME + MD = CO$ 或 $ME - MD = CO$. 因为 $MD = 1, CO = 3$, 所以 $ME = 2$ 或 $ME = 4$. 因为点 M 在直线 l_2 上, 所以点 M 的坐标为 $(-\frac{1}{3}, 2)$ 或 $(\frac{1}{3}, 4)$.