

第1、2章 数学与我们同行 有理数

巅峰训练1 数学与我们同行

1. A 提示: $2\ 025 - 1\ 898 = 127$ (年), $127 \div 12 = 10 \cdots 7$, 余数是7, 蛇年再向前7年是狗年.

2. C

3. D 提示: 由图案和提供的数据可知, 第二排和第四排的第2个图案代表数字3, 第四排的第3个图案代表数字7, 未涂色圆代表数字1.

4. C 提示: 由题图可知, 图1中黑色三角形的个数为1, 图2中黑色三角形的个数为 $1+2+1=4$, 图3中黑色三角形的个数为 $1+2+3+2=8$, 图4中黑色三角形的个数为 $1+2+3+4+3=13$. 按此规律, 则图 n 中黑色三角形的个数为 $1+2+3+\cdots+n+(n-1) = \frac{n(n+1)}{2} + n - 1$, 所以图7中黑色三角形的个数为 $\frac{7 \times 8}{2} + 7 - 1 = 34$.

5. C 提示: 根据题意可知, 第1次跳跃后对应的数为3, 第2次跳跃后对应的数为5, 第3次跳跃后对应的数为2, 第4次跳跃后对应的数为1, 第5次跳跃后对应的数为3……所以每4次跳跃为一个循环. 因为 $2\ 025 \div 4 = 506 \cdots 1$, 所以经过2 025次跳跃后对应的数与第1次跳跃后对应的数一样, 即为3.

6. 9 提示: 因为第二行和第三列上的三个数字之和相等, 所以第二行第二个方格中的数字为 $16 + 12 - 15 = 13$, 又因为第一行及对角线上的三个数字之和相等, 所以 $x + 16 = 13 + 12$, 所以 $x = 9$.

7. 253 5 提示: 观察已知正偶数的排列, 发现规律: 正偶数从2开始连续排下去; 每一行排4个连续正偶数, 奇数行第1列空, 从左到右增大; 偶数行第5列空, 从左到右减小. 因为 $2\ 024 = 2 \times 1\ 012$, $1\ 012 = 4 \times 253$, 所以2 024是第1 012个正偶数, 排在第253行, 而253是奇数, 所以2 024在第253行第5列.

8. 3 提示: 由题意可知, 第1位上的数字是7, 第2位上的数字是1, 第3位上的数字是3, 第4位上的

数字是9, 第5位上的数字是7……所以各个数位上的数字以7, 1, 3, 9的顺序循环出现. 因为 $15 \div 4 = 3 \cdots 3$, 所以第15位上的数字与第3位上的数字相同, 即为3.

9. 2 028 提示: $g(2) = 2, g(4) = 6, g(6) = 2, g(8) = 0, g(10) = 0, g(12) = 2, \cdots$, 每5项构成一组循环, 且 $g(2) + g(4) + g(6) + g(8) + g(10) = 10$. 又因为 $g(2) + g(4) + g(6) + \cdots + g(2\ 024)$ 有202个循环组, 余下 $g(2\ 022), g(2\ 024)$, 且根据规律可知, $g(2\ 022) = g(2) = 2, g(2\ 024) = g(4) = 6$, 所以 $g(2) + g(4) + g(6) + \cdots + g(2\ 024) = 202 \times 10 + 2 + 6 = 2\ 028$.

10. (1) 72

(2) $n(n+1)$

(3) 解: $30 + 32 + 34 + \cdots + 118 + 120 = (2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 30 + 32 + 34 + \cdots + 118 + 120) - (2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 28) = 60 \times 61 - 14 \times 15 = 3\ 450$.

11. 解: (1) 条形码不正确. 理由如下:

由题意, 得 $a = 9 + 3 + 4 + 6 + 2 + 8 = 32$, $b = 6 + 0 + 2 + 4 + 7 + 4 = 23$, 所以 $c = 3a + b = 3 \times 32 + 23 = 119$, 因为 d 是大于或等于 c 且为10的整数倍的最小数, 所以 $d = 120$, 所以校验码 $m = d - c = 120 - 119 = 1 \neq 3$, 所以条形码不正确.

(2) 设被污染的数为 x , 由题意, 得 $a = 7 + 7 + 0 + 3 + 6 + 4 = 27$, $b = 9 + 8 + 4 + x + 7 + 2 = 30 + x$, 所以 $c = 3a + b = 3 \times 27 + 30 + x = 111 + x$, 因为校验码 $m = 1$, 所以 $d = c + m = 112 + x$, 因为 d 是大于或等于 c 且为10的整数倍的最小数, 且 $0 \leq x < 10$, 所以 $d = 120$, 所以 $112 + x = 120$, 所以 $x = 8$.

巅峰训练2 正数与负数

1. A 2. D 3. B 4. A 5. B

6. 5 7. -1

8. -50 提示:解法1 因为第10行前面数的总个数为 $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$,所以第10行从左边数第1个数为-46,第2个数为47,第3个数为-48,第4个数为49,第5个数为-50.

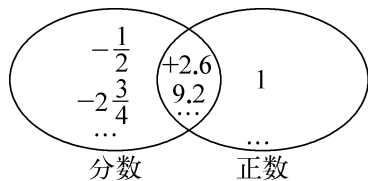
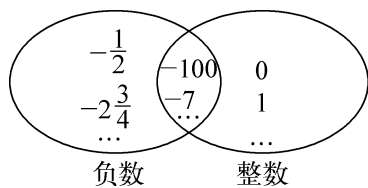
解法2 根据题意,得第 n 行有 n 个数,该行从左边数第1个数的绝对值为 $\frac{n(n-1)}{2}+1$,且满足奇数为正,偶数为负,所以第10行从左边数第1个数为-46,第5个数为-50.

9. -2, 0, $-(-2)$, 365

$$-\frac{1}{2}, \frac{22}{7}$$

$$-2, -\frac{1}{2}$$

10. 解:填数如图所示.



11. 解:(1) 以200 kg为基准数,用正、负数表示这10桶散酒的质量分别为:-1, -2, -1.5, +1, -0.5, +2, -3, +0.5, +3, +1.5.

(2) $200 \times 10 + [(-1) + (-2) + (-1.5) + 1 + (-0.5) + 2 + (-3) + 0.5 + 3 + 1.5] = 2\,000$ (kg).

答:这10桶散酒的总质量为2 000 kg.

(3) $2\,000 \times 80 = 160\,000$ (元).

答:这10桶散酒能卖160 000元.

12. C 提示:每行3个数,第 n 行的最大的数为 $-2\,023+3n$.当 n 为奇数时,最大的数在D列;当 n 为偶数时,最大的数在A列.由 $-2\,023+3n=2\,023$,得

$n=1\,348\frac{2}{3}$,即2 023是1 349行第2个数,即2 023在奇数行第2个数,所以2 023应在C列.

13. 解:(1) 0.375 0.46

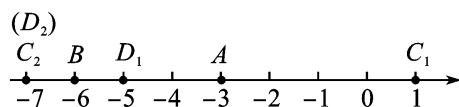
(2) 方法一: $\frac{34}{99}$ $\frac{61}{495}$ 提示:对于混循环小数 $0.\dot{1}2\dot{3}$,将其扩大10倍变成整数与纯循环小数的和,即 $1+0.\dot{2}3$,所以 $0.\dot{1}2\dot{3}=(1+0.\dot{2}3) \div 10 = (1+\frac{23}{99}) \div 10 = \frac{122}{990} = \frac{61}{495}$.

方法二:设 $x=0.0\dot{1}2$,则 $10x=0.\dot{1}2$,
 $1\,000x=12+0.\dot{1}2$.所以 $1\,000x=12+10x$,
 即 $990x=12$,解得 $x=\frac{2}{165}$.所以 $0.0\dot{1}2=\frac{2}{165}$.

巅峰训练3 数轴 绝对值与相反数

1. D

2. C 提示:如图,在数轴上满足点A与点C的距离为4的点C有点 C_1 和点 C_2 ,满足点B与点D的距离为1的点D有点 D_1 和点 D_2 ,所以 $C_1D_1=6$,
 $C_1D_2=8$, $C_2D_1=2$, $C_2D_2=0$,所以点C与点D的距离可能为6,8,2,0,不可能为4.



3. B 提示:特殊值法,如取 $a=\frac{1}{2}$,则 $-a=-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{a}=2$, $-\frac{1}{a}=-2$,所以 $\frac{1}{a}>a>-a>-\frac{1}{a}$.

4. 2 5. (-5, -6)

6. > 提示:根据题意,得 $[-1, -\frac{1}{2}] = -\frac{1}{2}$,
 $(0, -\frac{2}{3}) = -\frac{2}{3}$,因为 $-\frac{1}{2} = -\frac{3}{6}$, $-\frac{2}{3} = -\frac{4}{6}$,
 且 $|\frac{3}{6}| = \frac{3}{6} < |\frac{4}{6}| = \frac{4}{6}$,所以 $-\frac{1}{2} > -\frac{2}{3}$.

7. D 提示:由题图可知 $d-c=3$, $d-b=4$,
 $d-a=8$,故 $c=d-3$, $b=d-4$, $a=d-8$,代入 $b-$

$2a=3c+d+21$, 得 $d-4-2(d-8)=3(d-3)+d+21$, 解得 $d=0$. 故数轴上原点的对应点是 D .

8. 101 提示: 根据题意, 设小虫的出发点 A 对应的数为 a , 经过 m 次爬行第 1 次经过数 -50.5 对应的点. 因为它第 123 次刚好爬到数轴上的原点, 则 $a+1-2+3-4+5-6+\cdots-122+123=0$, 所以 $a-61+123=0$, 所以 $a=-62$. 因为小虫每爬行 2 次向负方向爬行 1 个单位长度, $-62 < -50.5$, 所以可知小虫第 m 次是向正方向爬行, 且 m 为奇数, 此时小虫爬行到数 -50 对应的点. 令 $-62+1-2+3-4+\cdots-(m-1)+m=-50$, 所以 $-62-\frac{m-1}{2}+m=-50$, 解得 $m=23$. 所以小虫爬行过程中经过数 -50.5 在数轴上对应的点的次数为 $123-23+1=101$.

9. 解: (1) ①4 提示: 根据题意知, 第 1 次到第 6 次滚动后, 大圆与数轴的公共点到原点的距离分别为 $2\pi, 2\pi, 6\pi, 10\pi, 4\pi, 8\pi$, 所以第 4 次滚动后大圆与数轴的公共点到原点的距离最远.

②总路程为 $(|-1|+|2|+|-4|+|-2|+|3|+|6|)\times 2\pi=36\pi$, 此时两圆与数轴重合的点之间的距离为 $|-1+2-4-2+3+6|\times 2\pi=8\pi$.

(2) ①当它们同向运动时, 运动时间为 $\frac{9\pi}{2\pi-\pi}=9(\text{s})$, 小圆、大圆与数轴重合的点所表示的数分别为 $9\pi, 18\pi$ 或 $-9\pi, -18\pi$;

②当它们反向运动时, 运动时间为 $\frac{9\pi}{\pi+2\pi}=3(\text{s})$, 小圆、大圆与数轴重合的点所表示的数分别为 $-3\pi, 6\pi$ 或 $3\pi, -6\pi$.

10. 解: (1) 3

(2) $|x+1|$

(3) 因为 $-3\leq a\leq 5$, 所以 $|a+3|+|a-5|=a+3+5-a=8$.

(4) ①如图 1, 当 $a<1$ 时, $|a-1|+|a-2|=AB+AC>1$;

②如图 2, 当 $1\leq a\leq 2$ 时, $|a-1|+|a-2|=AB+AC=BC=1$;

③如图 3, 当 $a>2$ 时, $|a-1|+|a-2|=AB+AC>1$.

所以当 $|a-1|+|a-2|$ 取最小值时, 数 a 的取值范围是 $1\leq a\leq 2$.

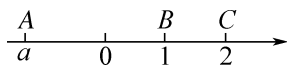


图 1

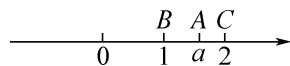


图 2

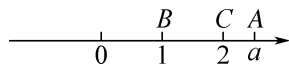


图 3

(5) $|a-1|+|a-2|+|a-3|$ 表示在数轴上数 a 对应的点与数 $1, 2, 3$ 对应的点的距离之和, 由(4)可知, 当 $1\leq a\leq 3$ 时, $|a-1|+|a-3|$ 的值最小, 又因为 $a=2$ 时, $|a-2|$ 的值最小, 所以当 $a=2$ 时, $|a-1|+|a-2|+|a-3|$ 取最小值, 且最小值为 $|2-1|+|2-2|+|2-3|=1+0+1=2$.

11. 解: (1) C_2, C_3

(2) ①设点 P 表示的数为 x .

当点 P 在点 A 的左侧时, $30-x=2(-10-x)$, 解得 $x=-50$, 所以点 P 表示的数为 -50 ; 当点 P 在线段 AB 上且离点 A 较近时, $30-x=2(x+10)$, 解得 $x=\frac{10}{3}$, 所以点 P 表示的数为 $\frac{10}{3}$; 当点 P 在线段 AB 上且离点 B 较近时, $x+10=2(30-x)$, 解得 $x=\frac{50}{3}$, 所以点 P 表示的数为 $\frac{50}{3}$.

综上所述, 点 P 表示的数为 -50 或 $\frac{10}{3}$ 或 $\frac{50}{3}$.

②50 或 70 或 110 提示: 设点 P 表示的数为 x . 当 P 为点 A, B 的“联盟点”时, $PA=2PB$, 所以 $x+10=2(x-30)$, 解得 $x=70$, 即此时点 P 表示的数为

$\frac{n}{2} - \frac{m}{2}$. 所以重叠部分的周长为 $2(a+b) = n-m$.

5. -12 提示: 因为 $a-b=-2, b-c=1$, 所以 $a-2b+c=(a-b)-(b-c)=-2-1=-3, a-c=(a-b)+(b-c)=-2+1=-1$, 所以 $c-a=1$, 所以原式 $=-3 \times (4-1+1) = -12$.

6. 解: (1) 补全表格如下:

项目	甲	乙	总计
A	x 台	$(16-x)$ 台	16 台
B	$(15-x)$ 台	$(x-3)$ 台	12 台
总计	15 台	13 台	28 台

所以运这批挖掘机的总费用为 $500x + 400(16-x) + 300(15-x) + 600(x-3) = (400x + 9\ 100)$ 元.

(2) 当从 A 地运 3 台挖掘机到甲地, 即 $x=3$ 时, 运这批挖掘机的总费用为 $400 \times 3 + 9\ 100 = 10\ 300$ (元).

7. 解: (1) 当 $0 < x \leq 40$ 时, 总费用为 $60x$ 元; 当 $x > 40$ 时, 总费用为 $60 \times 40 + (x-40) \times (60-10) = (50x+400)$ 元.

(2) ① $(60x+500m-2mx)$

② 5 2 100 提示: 方案二比方案一的费用多的钱数为 $(60x+500m-2mx) - (50x+400) = 60x+500m-2mx-50x-400 = (10-2m)x + (500m-400)$, 因为该值为固定值, 所以 $10-2m=0$, 解得 $m=5$, 所以固定值为 $500m-400 = 500 \times 5 - 400 = 2\ 100$.

8. 解: (1) 78, 79, 89, 98, 97, 87

(2) 设三位正整数的百位数字为 a , 十位数字为 b , 个位数字为 $c, a \neq b \neq c$, 且 $abc \neq 0$, 则这个三位数所有“衍生数”之和为 $(10a+b) + (10a+c) + (10b+a) + (10b+c) + (10c+a) + (10c+b) = 10a+b+10a+c+10b+a+10b+c+10c+a+10c+b = 22a+22b+22c = 22(a+b+c)$, 因为 $a+b+c \neq 0$, 所以 $22(a+b+c)$ 能被 22 整除.

9. 解: (1) A 与 B 是关于 x 的“优美多项式”. 理由如下:

因为 $A=2-x, B=4x-3$, 所以 $3A+2B=3(2-x)+2(4x-3)=6-3x+8x-6=5x$, 所以 A 与 B 是关于 x 的“优美多项式”.

(2) 因为 A 与 B 是关于 x 的“优美多项式”, 所以 $3A+2B=5x$, 所以 $A=\frac{1}{3}(5x-2B)$. 因为 $B=-3x^2+x+\frac{3}{2}m^2$ (m 是正整数), 所以 $A=\frac{1}{3}\left[5x-2\left(-3x^2+x+\frac{3}{2}m^2\right)\right]=\frac{1}{3}(6x^2+3x-3m^2)=2x^2+x-m^2$. 因为当 $x=m$ 时, 多项式 $A-B$ 的值是小于 100 的整数, 所以 $A-B=2x^2+x-m^2-\left(-3x^2+x+\frac{3}{2}m^2\right)=5x^2-\frac{5}{2}m^2=5m^2-\frac{5}{2}m^2=\frac{5}{2}m^2 < 100$ 且为整数, 即 $m^2 < 40$ 且 m 为正偶数, 故 $m=2, 4, 6$. 所以满足条件的所有 m 值之和为 12.

第 3 章综合练(1)

1. C

2. D 提示: 原式 $=x^2+2xy+y^2-2x-2y+2\ 025=x^2-2x-(2y-y^2)+2xy+2\ 025=2xy+2\ 025$. 又因为 $xy=\frac{1}{2}$, 所以原式 $=2 \times \frac{1}{2} + 2\ 025 = 2\ 026$.

3. C 提示: 当 $x > y$ 时, 根据题意, 得 $M=x-y+x+y=2x=24$, 所以 $x=12$; 当 $x < y$ 时, 根据题意, 得 $M=y-x+x+y=2y=24$, 所以 $y=12$. 故所输入的 x, y 中较大的数为 12.

4. D 提示: 设第一行中间的数为 b , 第二行中间的数为 e , 第三行第 1 个数为 a . 根据三阶幻方的规则可知, $x+e+a=2\ 025+8-m+a$, 即 $x+e=2\ 033-m$ ①, $b+e+m=2\ 025+b+x$, 即 $x-e=m-2\ 025$ ②. ①+②, 得 $2x=8$, 解得 $x=4$.

5. C 提示: 由 $\begin{cases} S_1-S_3=4, \\ S_2-S_3=16, \end{cases}$ 得 $S_2-S_1=12$.

由题图 1, 得 $S_{\text{长方形}ABCD} = S_1 + a^2 + b(AD - a)$; 由题图 2, 得 $S_{\text{长方形}ABCD} = S_2 + a^2 + b(AB - a)$. 所以 $S_1 + a^2 + b(AD - a) = S_2 + a^2 + b(AB - a)$, 所以 $S_2 - S_1 = b(AD - AB)$. 又因为 $AD - AB = m$, 所以 $mb = 12$.

6. -2 提示: 当 $x = 0$ 时, $a_0 = 1$; 当 $x = 1$ 时, $a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = -1$. 所以 $a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 = -2$.

7. 11 提示: 因为 $a = 6x^2 - 8kx + 12$ 与 $b = -2(3x^2 - 2x + k)$ (k 为常数) 始终是数 n 的“平衡数”, 所以 $a + b = 6x^2 - 8kx + 12 - 2(3x^2 - 2x + k) = 6x^2 - 8kx + 12 - 6x^2 + 4x - 2k = (4 - 8k)x + 12 - 2k = n$, 所以 $4 - 8k = 0$, 解得 $k = \frac{1}{2}$, 所以 $n = 12 - 2 \times \frac{1}{2} = 11$.

8. 2 078 提示: 从左上角到右下角未被涂色的白色图形中, 未被涂色的白色方格的个数分别是 1, 5, 9, 13, ..., 可得第 n 个白色图形中白色方格的个数是 $4n - 3$, 则前 n 个白色图形中, 白色方格的总数是 $1 + 5 + 9 + \dots + (4n - 3) = 4 \times (1 + 2 + 3 + \dots + n) - 3n = 2n^2 - n$. 因为方格纸的规格是 63×63 , 所以白色图形的个数是 31. 当 $n = 31$ 时, 白色格子的总数是 $2 \times 31^2 - 31 = 1\,891$. 所以被涂色格子的个数为 $63 \times 63 - 1\,891 = 2\,078$.

9. 15 提示: 由题意, 可得 $a_1 + a_2 + a_3 = a_2 + a_3 + a_4 = 40$, $a_2 + a_3 + a_4 = a_3 + a_4 + a_5 = 40$, $a_3 + a_4 + a_5 = a_4 + a_5 + a_6 = 40$, 所以 $a_1 = a_4$, $a_2 = a_5$, $a_3 = a_6$. 依此类推, 可得 $a_1 = a_{3n-2}$, $a_2 = a_{3n-1}$, $a_3 = a_{3n}$ (n 为正整数). 又因为 $a_3 = 3m$, $a_{99} = 12 - m$, $99 = 3 \times 33$, 所以 $a_3 = a_{99}$, 即 $3m = 12 - m$, 解得 $m = 3$, 所以 $a_3 = 9$. 又因为 $20 = 3 \times 7 - 1$, 所以 $a_{20} = a_2 = 16$. 所以 $a_1 = 40 - 16 - 9 = 15$. 又因为 $2\,026 = 3 \times 676 - 2$, 所以 $a_{2\,026} = a_1 = 15$.

10. 43 $12m + 2n - 13$ 提示: 观察表格数据, 表格中的上下两数相差 12, 左右两数相差 2, 因为 $P_{34} = 31$, 所以 $P_{44} = P_{34} + 12 = 31 + 12 = 43$, 因为 $P_{m1} = 12m - 11$, 所以 $P_{mn} = 12m - 11 + 2(n - 1) = 12m + 2n - 13$.

11. (1) $3a - 2b$

(2) 解: $CD = \left(\frac{7}{2}a - 2b - 1\right) - (2a - b) =$

$\frac{3}{2}a - b - 1$. 因为 $3a - 2b = 12$, 所以 $\frac{3}{2}a - b = 6$, 所以 $CD = 6 - 1 = 5$, 即 C, D 两站之间的距离为 5.

12. 解: (1) $1\,000a + 100b + 10c + d$

(2) $2\,345 + 5\,432 = 7\,777 = 707 \times 11$ (答案不唯一)

成立. 理由如下:

因为 $\overline{abcd} + \overline{dcba} = (1\,000a + 100b + 10c + d) + (1\,000d + 100c + 10b + a) = 1\,001a + 110b + 110c + 1\,001d = 11(91a + 91d + 10b + 10c)$, 而 $91a + 91d + 10b + 10c$ 是正整数, 所以 $(\overline{abcd} + \overline{dcba})$ 为 11 的倍数.

(3) $2\,547 = 283 \times 9$ (答案不唯一)

成立. 理由如下:

因为 $\overline{abcd} = 1\,000a + 100b + 10c + d = (999a + 99b + 9c) + (a + b + c + d) = 9(111a + 11b + c) + 9k = 9(111a + 11b + c + k)$, 而 $111a + 11b + c + k$ 是正整数, 所以 $\overline{abcd}$ 为 9 的倍数.

第 3 章综合练(2)

1. B 2. B

3. C 提示: 当 $m = 0$ 时, $-m + 1 = 1 > 0$, 故①符合题意; 因为 $-m + 1 - (-m) = 1 > 0$, 所以 $-m + 1 > -m$, 故②符合题意; 当 $m = 0$ 时, $-m + 1 = 1$, 故③不符合题意; m 越大, $-m$ 越小, $-m + 1$ 越小, 故④符合题意.

4. B 提示: 设小长方形的长为 a , 宽为 b . 根据题意, 得 $m = a + 4b$, 则图中阴影部分的周长为 $2m + 2(n - a) + 2(n - 4b) = 2m + 2n - 2a + 2n - 8b = 2m + 4n - 2(a + 4b) = 2m + 4n - 2m = 4n$.

5. B 提示: 因为关于 x 的整式 $9x^2 - mx + 6$ 与 $-3(3x^2 - x + m)$ 为常数 k 的“和谐整式”, 所以 $9x^2 - mx + 6 - 3(3x^2 - x + m) = k$, 即 $(3 - m)x + 6 -$

x min. 根据题意, 得 $72x = 66x + 90 \times 3$, 解得 $x = 45$.

6. 11 或 8 或 3 提示: 由题意可得, $8x + 10(ax - 4) + 12(x - 6) = 1188$, 化简, 得 $(2 + a)x = 130$. 因为 a 为正整数, 所以 130 必能被 x 整除, 则大于 6 的整数 x 可为 10, 13, 26. 当 $x = 10$ 时, $a = 13 - 2 = 11$; 当 $x = 13$ 时, $a = 10 - 2 = 8$; 当 $x = 26$ 时, $a = 5 - 2 = 3$.

7. 21 提示: 设树有 x 棵. 根据题意, 得 $2x + 3 = 3 \times (x - 2)$, 解得 $x = 9$. 所以 $2x + 3 = 21$. 所以诗句中谈到的群鸦有 21 只.

8. 8 提示: 设环形区域 II 四周的宽度为 x m, 则 $AB = (6 - 2x)$ m, $BC = (8 - 2x)$ m. 又因为 $AB : BC = 2 : 3$, 所以 $3(6 - 2x) = 2(8 - 2x)$, 解得 $x = 1$, 则 $AB = 4$ m, $BC = 6$ m. 所以长方形 ABCD 的面积为 $4 \times 6 = 24(\text{m}^2)$. 所以种植丙花卉区域的面积为 $\frac{1}{3} \times 24 = 8(\text{m}^2)$.

9. 解: 设每件成本价应降低 x 元. 根据题意, 得 $[510 \times (1 - 4\%) - (400 - x)] \times (1 + 10\%)m = (510 - 400)m$, 解得 $x = 10.4$. 所以该产品每件成本价应降低 10.4 元.

10. (1) 90 (2) $(0.8x + 20)$

(3) 解: 因为 $200 \times 0.9 = 180$ (元), $63 < 180$, 所以第一次购书不超过 200 元, 应享受九折优惠. 所以第一次购书的标价总和为 $63 \div 0.9 = 70$ (元).

设丙同学第二次购书的标价为 x 元, 则应付款为 $(0.8x + 20)$ 元. 根据题意, 得 $(x + 70) - [63 + (0.8x + 20)] = 37$, 解得 $x = 250$. 所以 $0.8x + 20 = 220$. 所以丙同学第二次购书实际付款 220 元.

11. 5 : 24 提示: 设十月份 A, B, C 三种糖果的销售数量分别为 $2a, a, a$, 单价分别为 $b, 3b, 4b$, 则十月份 A, B, C 三种糖果的营业额分别为 $2ab, 3ab, 4ab$. 因为 A 种糖果增加的营业额占总增加营业额的 $\frac{7}{15}$, 所以设十一月份 A 种糖果增加的营业额为 $7x$, 则十一月份总增加

的营业额为 $15x$; 又因为 A 种糖果的营业额与十一月份三种糖果的总营业额之比为 3 : 8, 所以 $(7x + 2ab) : (15x + 9ab) = 3 : 8$, 解得 $x = ab$. 所以十一月份 A 种糖果的营业额为 $9ab$, 十一月份三种糖果的总营业额为 $24ab$, 所以十一月份 B, C 两种糖果的营业额之和为 $15ab$. 又因为十一月份 B, C 两种糖果的营业额之比为 2 : 3, 所以十一月份 B, C 两种糖果的营业额分别为 $6ab, 9ab$. 所以十一月份 C 种糖果增加的营业额为 $9ab - 4ab = 5ab$. 所以十一月份 C 种糖果增加的营业额与十一月份的总营业额之比为 $5ab : 24ab = 5 : 24$.

12. 解: (1) 由 $t = \frac{600 - 120}{60} = 8$ (min) 可知, 小明每分钟走 $\frac{600 + 200}{8} = 100$ (m).

(2) 设从超市出发起 x min 后两人再次相遇. 根据题意, 得 $60x + 100x = 2 \times 800$, 解得 $x = 10$. 所以 $60x = 6 \times 10 = 600$ (m). 所以当妈妈行走了 600 m 时, 两人恰好在学校处再次相遇.

(3) 设从出发到再次相遇前, 经过 t min 时两人相距 100 m. 同向时, 根据题意, 得 $100t - 60t = 100$, 解得 $t = 2.5$; 反向时, 根据题意, 得 $100t + 60t = 800 \times 2 - 100$, 解得 $t = 9.375$. 所以从出发到再次相遇前, 经过 2.5 min 或 9.375 min 时两人相距 100 m.

巅峰训练 15 用一元一次方程解决问题(2)

1. B 2. C 3. C

4. A 提示: 设包括 U 形框内部两个数在内的九个数正中间的数为 x , 则 U 形框覆盖的七个数分别是 $x - 8, x - 6, x - 1, x + 1, x + 6, x + 7, x + 8$, 所以这七个数的和是 $7x + 7$. 由 $7x + 7 = 63$, 得 $x = 8$, 此时 U 形框只覆盖 6 个数, 不符合题意; 由 $7x + 7 = 84$, 得 $x = 11$, 符合题意; 由 $7x + 7 = 133$, 得 $x = 18$, 符合题意; 由 $7x + 7 = 161$, 得 $x = 22$, 符合题意, 所以这七个数的和不可能是 63.

5. D 提示:根据题表数据可知,答对一题得

5分,答错一题倒扣1分.设参赛学生E答错 x 道题($0 \leq x \leq 20$,且 x 为整数),则其答对 $(20-x)$ 道题,其得分为 $5(20-x)-x=100-6x$.令 $100-6x=93$,解得 $x=\frac{7}{6}$;令 $100-6x=87$,解得 $x=\frac{13}{6}$;令 $100-6x=66$,解得 $x=\frac{17}{3}$;令 $100-6x=40$,解得 $x=10$.又因为 x 为整数,所以选项D符合题意.

6. 240 提示:每件上衣需要布料 $3 \div 2 =$

$\frac{3}{2}$ (m),每条裤子需要布料 $3 \div 3 = 1$ (m).设用 x m布料生产上衣,则用 $(600-x)$ m布料生产裤子.根据题意,得 $\frac{x}{\frac{3}{2}} = \frac{600-x}{1}$,解得 $x=360$.所以 $600-360=240$ (m),即用其中240 m布料生产裤子,才能恰好配套.

7. 7 提示:设只做对三道题的人数为 x ,则只

做对两道题的人数为 $2x$,只做对四道题的人数为 $52-12-6-x-2x=34-3x$.由题意,得 $1 \times 12 + 2 \times 2x + 3x + 4 \times (34-3x) + 5 \times 6 = 52 \times 5 - 9 - 13 - 23 - 39 - 43$,解得 $x=9$.所以只做对四道题的人数是 $34-3 \times 9=7$.

8. 18 提示:设该篮球队在本赛季已经进行了

x 场比赛.由题意,得 $(x+8) \times 50\% = 45\%x + 6$,解得 $x=40$,则 $45\%x = 45\% \times 40 = 18$ (场),即该篮球队在本赛季已经取得了18场胜利.

9. 解:设检票开始时,等候检票的队伍有

a 人,每个检票口每分钟检票 x 人,队伍每分钟增加 y 人,则 $\frac{a}{x-y} = 20$, $\frac{a}{2x-y} = 8$,所以 $20(x-y) = 8(2x-y)$,解得 $x=3y$.所以同时开放三个检票口,等候检票的队伍消失的时间是 $\frac{a}{3x-y} = \frac{20(x-y)}{3x-y} = \frac{20(3y-y)}{3 \times 3y-y} = \frac{20 \times 2}{8} = 5$ (min).所以若同时开放三个检票口,则队伍消失要5 min.

10. 解:(1) 设小明答对了 x 道题.根据题意,得 $4x-2(30-x)=90$,解得 $x=25$.所以

小明答对了25道题.

(2) 不可能.理由如下:

设小刚答对了 y 道题.若他的得分是100分,则 $4y-2(30-y)=100$,解得 $y=\frac{80}{3}$.因为 y 不能为分数,所以小刚不可能得100分.

11. $\frac{3}{5}$ 或 $\frac{33}{20}$ 或 $\frac{171}{40}$ 提示:由题意可知,注水

1 min,乙的水位上升 $\frac{5}{6}$ cm,丙的水位上升 $\frac{10}{3}$ cm.设开始注入 t min的水量后,甲与乙的水位高度之差是0.5 cm,有三种情况:①当乙的水位低于甲的水位时,有 $1-\frac{5}{6}t=0.5$,解得 $t=\frac{3}{5}$.②当甲的水位低于乙的水位,且甲的水位不变时,由 $\frac{5}{6}t-1=0.5$,解得 $t=\frac{9}{5}$.因为 $\frac{10}{3} \times \frac{9}{5} = 6$ (cm) > 5 cm,所以此时丙容器已向乙容器注水.因为 $5 \div \frac{10}{3} = \frac{3}{2}$ (min), $\frac{5}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{5}{4}$ (cm),所以 $\frac{5}{4} + 2 \times \frac{5}{6} \left(t - \frac{3}{2}\right) - 1 = 0.5$,解得 $t = \frac{33}{20}$.③当甲的水位低于乙的水位且乙的水位到达管子底端而甲的水位上升时,因为乙的水位到达管子底端的时间为 $\frac{3}{2} + \left(5 - \frac{5}{4}\right) \div \frac{5}{6} \div 2 = \frac{15}{4}$ (min),所以 $5 - 1 - 2 \times \frac{10}{3} \left(t - \frac{15}{4}\right) = 0.5$,解得 $t = \frac{171}{40}$.

12. 解:(1) 设每名徒弟一天粉刷的面积为 x m²,则每名师傅一天粉刷的面积为 $(x+30)$ m².根据题意,得 $\frac{3(x+30)+40}{8} = \frac{5x}{9}$,解得 $x=90$.所以 $\frac{5x}{9} = 50$ (m²),所以每个房间需要粉刷的墙面面积为50 m².

(2) 由(1)可知,每名徒弟一天粉刷的面积为90 m²,每名师傅一天粉刷的面积为120 m².所以请1名师傅带2名徒弟去,需要 $\frac{36 \times 50}{120 + 90 \times 2} = 6$ (天)完成.

$8-x+2\ 025+x=2\ 033$; 当 $x>8$ 时, $|x-8|+|x+2\ 025|=x-8+2\ 025+x=2\ 017+2x>2\ 033$.
所以 $|x-8|+|x+2\ 025|$ 的最小值为 $2\ 033$.

第 5、6 章 走进几何世界

平面图形的初步认识

巅峰训练 16 走进几何世界

1. A 2. D 3. A 4. C 5. B 6. A

7. 5 提示: 根据题意可知, 完成 1 次变换后, 骰子朝上一面的点数为 5; 完成 2 次变换后, 骰子朝上一面的点数为 6; 完成 3 次变换后, 骰子朝上一面的点数为 3, 且状态与初始位置时一致; 连续完成 3 次变换为一个循环, 因为 $13\div 3=4\cdots 1$, 所以按上述规则连续完成 13 次变换后, 与第 1 次变换后得到的情形相同, 故骰子朝上一面的点数是 5.

8. (1) 125 (2) $(n-2)^3$ (3) $6(n-2)^2$

9. 解: 绕它的长所在直线旋转一周得到的圆柱的体积 $V_1=\pi\times 3^2\times 4=36\pi(\text{cm}^3)$;

绕它的宽所在直线旋转一周得到的圆柱的体积 $V_2=\pi\times 4^2\times 3=48\pi(\text{cm}^3)$.

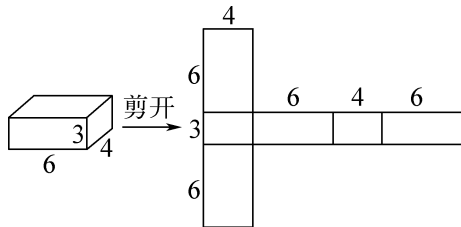
10. 解: (1) ③

(2) ① 400 提示: 长方体纸盒的底面面积为 $(30-2\times 5)^2=400(\text{cm}^2)$.

② 1 000 提示: 长方体纸盒的底面积为 $\frac{(30-2\times 5)^2}{2}=200(\text{cm}^2)$, 所以该长方体纸盒的体积为 $5\times 200=1\ 000(\text{cm}^3)$.

③ 2 提示: 无盖纸盒的体积为 $5\times 400=2\ 000(\text{cm}^3)$, 有盖纸盒的体积为 $1\ 000\text{ cm}^3$, 因为 $2\ 000\div 1\ 000=2$, 所以制作成的无盖纸盒的体积是有盖纸盒体积的 2 倍.

(3) 如图, 该长方体表面展开图的最大外围周长为 $6\times 8+4\times 4+3\times 2=70$.



巅峰训练 17 直线、射线、线段

1. B

2. 1 或 3 3. 16 或 24

4. $\frac{1}{2^{2\ 025}}a$ 提示: 因为 M_1, N_1 分别为线段

AC, CB 的中点, 所以 $CM_1=\frac{1}{2}AC, CN_1=\frac{1}{2}BC$, 所

以 $M_1N_1=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}a$. 同理 $M_2N_2=\frac{1}{2}M_1N_1=\frac{1}{2}\times$

$\frac{1}{2}a=\frac{1}{2^2}a, M_3N_3=\frac{1}{2^3}a, \cdots, M_{2\ 025}N_{2\ 025}=\frac{1}{2^{2\ 025}}a$.

5. 7 或 13

6. 1 提示: 因为 $AC=\frac{5}{3}BC$, 所以 $AB+BC=$

$\frac{5}{3}BC$, 即 $4+BC=\frac{5}{3}BC$, 解得 $BC=6$. 因为 $BD=$

$\frac{4}{7}DC$, 所以 $DC-BC=\frac{4}{7}DC$, 解得 $DC=14$. 又因为 E

是 DC 的中点, 所以 $EC=7$, 所以 $BE=EC-BC=7-6=1$.

7. -42 提示: 因为 $AO=5BO$, 所以 $|a|=5|b|$, 又因为点 A, B 在原点两侧, 所以 $a=-5b$, 所以 $-5b+b=-28$, 解得 $b=7$. 所以 $a=-35$, 所以 $a-b=-35-7=-42$.

8. $\frac{2}{3}m$ $\frac{5}{6}m$ 提示: 因为 $AE+BD=\frac{7}{3}m$,

所以 $AD+BE+2DE=\frac{7}{3}m$. 又因为 $AD+BE=m$, 所

以 $2DE=\frac{7}{3}m-m=\frac{4}{3}m$, 所以 $DE=\frac{2}{3}m$. 所以 $AB=$

$AD+BE+DE=m+\frac{2}{3}m=\frac{5}{3}m$. 因为 C 为线段 AB 的

中点, 所以 $CB=\frac{1}{2}AB=\frac{5}{6}m$.

9. 解: 不会判马小虎同学满分, 因为需要

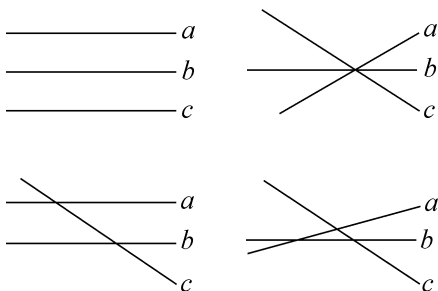
为 $\angle RFH = \angle PFE$, 所以 $\angle PFE = 2\angle 3$, 因为 EP 是 $\angle AEF$ 的平分线, 所以 $\angle AEF = 2\angle 2$, 因为 $AB \parallel CD$, 所以 $\angle AEF + \angle CFE = 180^\circ$, 所以 $2\angle 3 + 2\angle 2 = 180^\circ$, 所以 $\angle 3 + \angle 2 = 90^\circ$, 因为 $AB \parallel CD, QR \parallel CD$, 所以 $AB \parallel QR$, 所以 $\angle AEQ + \angle EQR = 180^\circ$, 即 $\angle 2 + 50^\circ + \beta + \angle 3 + \beta = 180^\circ$, 解得 $\beta = 20^\circ$, 所以 $\angle EQF = \beta = 20^\circ$.

综上所述, $\angle EQF$ 的度数为 65° 或 20° .

第 5、6 章综合练(2)

1. B

2. B 提示: 直线 a, b, c 的位置关系如下图:



由上图可知, 平面内三条直线的交点个数可以是 0 或 1 或 2 或 3.

3. B 提示: 因为 $AM \parallel NB$, 所以 $\angle MAD = \angle ABN$. 因为 $\angle AMD = \angle CNB$, 所以 $180^\circ - \angle ADM = \angle MAD + \angle AMD = \angle ABN + \angle CNB = 180^\circ - \angle BCN$, 所以 $\angle BDM = \angle ACN$, 故①正确. 由 $AM \parallel NB$, $\angle AMD = \angle CNB$ 不能得出 $AN \parallel MB$, 故②不正确. 由 $AM \parallel NB, CN \parallel MD$ 不能得出 $\angle BMD = \angle ANC$, 故③不正确. 因为 $AM \parallel NB$, 所以 $\angle MAD = \angle ABN$. 因为 $AN \parallel MB$, 所以 $\angle NAC = \angle MBA$. 所以 $\angle MAD + \angle NAC = \angle ABN + \angle MBA$, 所以 $\angle MAN = \angle MBN$, 故④正确.

4. C

5. D 提示: 若①中条件成立, 则点 B' 在 $\angle DAD'$ 外部, 点 D' 在 $\angle BAB'$ 外部, 此时 $\angle B'AD' = \angle DAB - 2\angle DAF - 2\angle BAE = 50^\circ$. 若②中条件成立,

则 $\angle EAF = \angle EAB' + \angle FAD' = \frac{1}{2}(\angle BAB' + \angle DAD') = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ$. 若③中条件成立, 会有两种情况: 一种是点 D' 在 $\angle BAB'$ 外, 点 B' 在 $\angle DAD'$ 外, 此时 $\angle EAF = \angle EAB' + \angle B'AD' + \angle D'AF = \angle B'AD' + \frac{1}{2}(\angle DAB - \angle D'AB') = 10^\circ + \frac{1}{2} \times (90^\circ - 10^\circ) = 50^\circ$; 另一种是点 D' 在 $\angle BAB'$ 内, 点 B' 在 $\angle DAD'$ 内, 此时 $\angle EAF = \angle FAB' + \angle B'AD' + \angle D'AE = \angle FAD' + \angle EAB' - \angle B'AD' = \angle FAD' + \angle EAB - \angle B'AD' = 90^\circ - \angle EAF - \angle B'AD' = 80^\circ - \angle EAF$, 所以 $\angle EAF = 40^\circ$. 若④中条件成立, 则 $\angle DAF + \angle EAB = 30^\circ$, 所以 $\angle D'AF + \angle B'AE = 30^\circ < \angle EAF$, 所以 $\angle B'AD' = \angle EAF - \angle D'AF - \angle B'AE = 30^\circ$.

6. 72 提示: 因为 $16 \div 2 = 8, 10 \div 2 = 5, 8 \div 2 = 4$, 所以一共可以切成 $8 \times 5 \times 4 = 160$ (块). 一面涂色的小正方体有 $(8-2) \times (5-2) \times 2 + (8-2) \times (4-2) \times 2 + (5-2) \times (4-2) \times 2 = 6 \times 3 \times 2 + 6 \times 2 \times 2 + 3 \times 2 \times 2 = 36 + 24 + 12 = 72$ (块).

7. 40° 提示: 设 $\angle AOB = x^\circ, \angle MON = y^\circ$, 则 $\angle BOC = \angle AOB + \angle AOC = x^\circ + \angle AOC$. 因为 ON 平分 $\angle AOC, OM$ 平分 $\angle BOC$, 所以 $\angle MOC = \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{1}{2} x^\circ + \frac{1}{2} \angle AOC, \angle NOC = \frac{1}{2} \angle AOC$, 所以 $\angle MON = \angle MOC - \angle NOC = \frac{1}{2} x^\circ$, 即 $y = \frac{1}{2} x$. 由题意可知, $x + \frac{1}{2} x = 120$, 解得 $x = 80$. 所以 $\angle MON = 40^\circ$.

8. 120° 提示: 显然 $\angle DOE$ 与 $\angle COE$ 互补, 根据条件另有一角也与 $\angle COE$ 互补. 若 $\angle BOF$ 与 $\angle COE$ 互补, 则 $\angle DOE = \angle BOF$, 所以 $\angle DOF = \angle BOE = 90^\circ$, 而 OF 平分 $\angle AOD$, 故 $\angle DOF = \angle AOF = 90^\circ$, 此时 OC 与 OA 重合, 矛盾; 若 $\angle DOA$ 与 $\angle COE$ 互补, 则由 $\angle DOA$ 与 $\angle COA$ 互补, 得 $\angle COE = \angle COA = 45^\circ$, 此时 $\angle DOA = 135^\circ$, 从而 $\angle FOA = 67.5^\circ$, 于是 $\angle COF = \angle COA + \angle FOA = 45^\circ + 67.5^\circ = 112.5^\circ$, 此时 $\angle BOC = \angle BOE + \angle COE = 135^\circ$, 也与 $\angle COE$ 互补, 矛盾; 若 $\angle FOC$ 与 $\angle COE$ 互补, 则点 E, O, F 在同一直线上, 而

OF 平分 $\angle AOD$, 故 OD 与 OB 重合, 矛盾; 若 $\angle EOF$ 与 $\angle COE$ 互补, 则 $\angle DOE = \angle EOF$, 因为 $OE \perp AB$, 所以 $\angle BOE = \angle AOE = 90^\circ$, 所以 $\angle BOD = \angle FOA$, 又因为 OF 平分 $\angle AOD$, 所以 $\angle FOA = \angle DOF$, 所以 $\angle BOD = \angle FOA = \angle DOF = 60^\circ$, 所以 $\angle COF = \angle COA + \angle FOA = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$. 综上所述, $\angle COF$ 的度数为 120° .

9. 解: $DF \parallel AB$. 理由如下:

因为 BE 是 $\angle ABC$ 的平分线, 所以 $\angle 2 = \angle CBE$, 因为 $\angle E = \angle 2$, 所以 $\angle CBE = \angle E$, 所以 $AE \parallel BC$, 所以 $\angle A + \angle ABC = 180^\circ$, 因为 $\angle 1 + \angle ABC = 180^\circ$, 所以 $\angle A = \angle 1$, 所以 $DF \parallel AB$.

10. 解: (1) $AB = 3AP$ 提示: 根据点 C, D 的运动速度知, $BD = 2PC$. 因为 $PD = 2AC$, 所以 $BD + PD = 2(PC + AC)$, 即 $PB = 2AP$. 所以 $AB = 3AP$.

(2) 如图 1, 根据题意, 得 $AQ > BQ$, 所以 $AQ = AP + PQ$. 因为 $AQ - BQ = PQ$, 所以 $AQ = BQ + PQ$, 所以 $AP = BQ$. 又由 (1), 得 $AP = \frac{1}{3}AB$, 所以 $PQ = AB - AP - BQ = \frac{1}{3}AB$, 所以 $AP = PQ$.

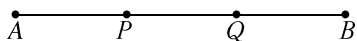


图 1

(3) $\frac{MN}{AB}$ 的值不变, 值为 $\frac{1}{12}$.

如图 2, 当点 C 停止运动时, 有 $CD = \frac{1}{2}AB$, 所以 $AC + BD = \frac{1}{2}AB$, 所以 $AP - PC + BD = \frac{1}{2}AB$. 因为 $AP = \frac{1}{3}AB$, $PC = 5$ cm, $BD = 10$ cm, 所以 $\frac{1}{3}AB - 5 + 10 = \frac{1}{2}AB$, 解得 $AB = 30$ cm. 因为 M 是 CD 的中点, N 是 PD 的中点, 所以 $MN = MD - ND =$

$$\frac{1}{2}CD - \frac{1}{2}PD = \frac{1}{2}PC = \frac{5}{2} \text{ cm}, \text{ 所以 } \frac{MN}{AB} = \frac{1}{12}.$$



图 2

11. (1) $3m$

(2) 解: 当 CB 绕点 C 顺时针旋转 180° 时,

$$t = \frac{180}{30} = 6(\text{s}).$$

①若 P 是 AC 的中点, 则 $PC = \frac{1}{2}AC$, 即

$$6m = \frac{1}{2} \times 12 = 6, \text{ 所以 } m = 1; \text{ ②若 A 是 PC 的}$$

中点, 则 $PC = 2AC$, 即 $6m = 2 \times 12 = 24$, 所以 $m = 4$.

当 CB 绕点 C 顺时针旋转 360° 时, $t =$

$$\frac{360}{30} = 12(\text{s}), \text{ 此时只能 C 是 AP 的中点, 则}$$

$PC = AC$, 即 $12m = 12$, 所以 $m = 1$.

综上所述, $m = 1$ 或 4.

(3) $\frac{12}{5}$ 或 $\frac{24}{5}$ 或 $\frac{36}{5}$ 提示: 设再经过 t s, $AC \perp$

DB. ①如图 1, $\angle BDC = 180^\circ - 45t^\circ$, $\angle ACD = 90^\circ - 30t^\circ$, 易得 $(180^\circ - 45t^\circ) + (90^\circ - 30t^\circ) = 90^\circ$, 解得 $t =$

$\frac{12}{5}$; ②如图 2, 与 ①同理, 可得 $(45t^\circ - 180^\circ) + (30t^\circ -$

$90^\circ) = 90^\circ$, 解得 $t = \frac{24}{5}$; ③如图 3, 与 ①同理, 可得

$(360^\circ - 45t^\circ) + (270^\circ - 30t^\circ) = 90^\circ$, 解得 $t = \frac{36}{5}$.

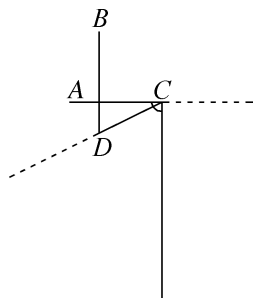


图 1

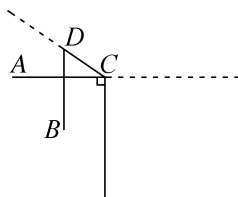


图 2

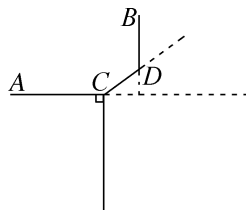


图3

期末综合练(1)

1. A

2. B 提示:根据题意,得 $2a^2 - 3b = 7$, 所以 $-4a^2 + 6b + 2 = -2(2a^2 - 3b) + 2 = -2 \times 7 + 2 = -14 + 2 = -12$.

3. C 提示:根据题意,得 $a + 5b = 0$, 即 $a = -5b$. 所以当 $a \neq 0$ 时,关于 x 的方程 $ax - b = 0$ 的解为 $x = \frac{b}{a} = \frac{b}{-5b} = -\frac{1}{5}$; 当 $a = 0$ 时, $b = 0$, 关于 x 的方程 $ax - b = 0$ 有无数个解.

4. D

5. B 提示:因为 $\angle AOB = 120^\circ$, 射线 OC 平分 $\angle AOB$, 所以 $\angle AOC = \angle BOC = \frac{1}{2} \angle AOB = 60^\circ$, 所以 $\angle AOB - \angle AOC = 60^\circ$, $\angle AOB - \angle BOC = 60^\circ$, 又因为 $\angle EOF = 60^\circ$, 所以 $\angle AOB - \angle EOF = 60^\circ$, 因为 $\angle EOF = \angle AOC = 60^\circ$, 所以 $\angle AOF - \angle AOE = 60^\circ$, $\angle AOF - \angle COF = 60^\circ$, $\angle BOE - \angle EOC = 60^\circ$, $\angle BOE - \angle BOF = 60^\circ$, 所以图中互为“优角”的共有 7 对.

6. -9 7. 6 8. 1

9. $\frac{7}{2}$ 或 $\frac{5}{2}$ 提示:任一有理数的绝对值都是非

负数,即大于或等于 0, 所以 $1 - c = |a| + \frac{3}{4} \geq 0 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$, $c = |b - 1| \geq 0$, 所以 $0 \leq c \leq \frac{1}{4}$. 又因为 c 为整数, 所

以 $c = 0$. 代入上面两式, 分别可得 $a = \frac{1}{4}$ 或 $a = -\frac{1}{4}$,

$b = 1$. 当 $a = \frac{1}{4}$, $b = 1$ 时, 原式 $= 2 \times \frac{1}{4} + 3 - 0 = \frac{7}{2}$; 当

$a = -\frac{1}{4}$, $b = 1$ 时, 原式 $= 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) + 3 - 0 = \frac{5}{2}$.

10. $15\frac{15}{59}$ 提示:当 $OA \perp OB$ 时, $\triangle OAB$ 的面

积最大. 设经过 t s 时, OA 与 OB 第一次垂直. 又由秒针 1 s 旋转 6° , 分针 1 s 旋转 0.1° , 可得 $(6 - 0.1)t = 90$, 解得 $t = 15\frac{15}{59}$. 所以经过 $15\frac{15}{59}$ s, $\triangle OAB$ 的面积第一次达到最大.

11. $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{19}{4}$ 或 $\frac{15}{2}$ 提示:因为 $BC = 6$ cm, 点 E

在边 BC 上且 $BE = 2EC$, 所以 $BE = 4$ cm, $EC = 2$ cm.

当点 P 在边 AB 上时, $0 \leq t \leq 4$, $AP = t$ cm, 所以 $S_{\triangle APE} = \frac{1}{2} AP \cdot BE = 2t$ (cm²), 所以 $2t = 5$, 解得 $t =$

$\frac{5}{2}$; 当点 P 在线段 BE 上时, $4 < t \leq 6$, $PE = BE - 2(t - 4) = 4 - 2t + 8 = (12 - 2t)$ cm, 所以 $S_{\triangle APE} = \frac{1}{2} PE \cdot$

$AB = (24 - 4t)$ cm², 所以 $24 - 4t = 5$, 解得 $t = \frac{19}{4}$; 当点 P

在线段 EC 上时, $6 < t \leq 7$, $PE = (t - 6) \times 2 = (2t - 12)$ cm, 所以 $S_{\triangle APE} = \frac{1}{2} PE \cdot AB = (4t - 24)$ cm², 所以

$4t - 24 = 5$, 解得 $t = \frac{29}{4} > 7$, 舍去; 当点 P 在边 CD 上时,

$7 < t \leq 11$, $PC = (t - 7)$ cm, 所以 $PD = DC - PC = 4 - (t - 7) = (11 - t)$ cm, 所以 $S_{\triangle APE} = S_{\text{长方形}ABCD} -$

$S_{\triangle ABE} - S_{\triangle ADP} - S_{\triangle EPC} = 4 \times 6 - \frac{1}{2} \times 4 \times 4 - \frac{1}{2} \times 6(11 - t) - \frac{1}{2} \times 2(t - 7) = (2t - 10)$ cm², 所以 $2t - 10 = 5$, 解得

$t = \frac{15}{2}$. 综上所述, $t = \frac{5}{2}$ 或 $t = \frac{19}{4}$ 或 $t = \frac{15}{2}$.

12. 解: (1) $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$

(2) 当容器乙注满水时, 容器甲中水位的高度是 $\frac{80 \times 6 - 40 \times 9}{80} = \frac{3}{2}$ (dm).

(3) 由题意可知, 容器甲中的水 $\frac{80 \times 6}{20} = 24$ (min) 后被抽干.

①当容器乙未注满水时, 设注水 x min 时, 容器甲中水位比容器乙中水位高 4 dm. 根

据题意,得 $(6-\frac{1}{4}x)-\frac{1}{2}x=4$,解得 $x=\frac{8}{3}$.所以注水 $\frac{8}{3}$ min时,容器甲中水位比容器乙中水位高4 dm.

②当容器乙未注满水时,设注水 y min时,容器乙中水位比容器甲中水位高4 dm.根据题意,得 $\frac{1}{2}y-(6-\frac{1}{4}y)=4$,解得 $y=\frac{40}{3}$.所以注水 $\frac{40}{3}$ min时,容器乙中水位比容器甲中水位高4 dm.

③当容器乙注满水后,设 z min时容器乙中水位比容器甲中水位高4 dm.根据题意,得 $9-\frac{60-20}{40}\times(z-\frac{40\times 9}{20})-(6-\frac{1}{4}z)=4$,解得 $z=\frac{68}{3}$.所以注水 $\frac{68}{3}$ min时,容器乙中水位比容器甲中水位高4 dm.

综上所述,从容器甲开始向容器乙注水起,经过 $\frac{8}{3}$ min或 $\frac{40}{3}$ min或 $\frac{68}{3}$ min,两个容器中水位的高度相差4 dm.

13. 解:(1) 因为 $|a+3|+(b-2)^2=0$,所以 $a+3=0, b-2=0$,解得 $a=-3, b=2$.

(2) 由(1),得数轴上点A对应的数为-3,点B对应的数为2,所以 $AB=|-3-2|=5$.

(3) 存在点M,使得 $MA+MB=\frac{1}{2}BC+AB$.

设点M对应的数为 m .解方程 $x+1=\frac{1}{2}x-2$,得 $x=-6$,所以点C对应的数为-6.

因为 $MA+MB=\frac{1}{2}BC+AB$,所以 $|m+3|+|m-2|=\frac{1}{2}\times|-6-2|+|-3-2|$,即 $|m+3|+|m-2|=9$.

当 $m\leq-3$ 时,有 $-m-3+2-m=9$,解得 $m=-5$;当 $-3<m\leq 2$ 时,有 $m+3+2-m=9$,此方程无解;当 $m>2$ 时,有 $m+3+m-2=9$,解得 $m=4$.

综上所述,点M对应的数为-5或4.

(4) 当点N在点B的右侧运动时, $\frac{1}{3}NQ-\frac{1}{2}BP$ 的值不变,其值为 $\frac{5}{6}$. 提示:设点N对应的数为 $n(n>2)$,则 $NA=n+3, NB=n-2$.根据题意,得 $NQ=\frac{1}{2}NA=\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}, BP=\frac{1}{3}NB=\frac{1}{3}n-\frac{2}{3}$,所以 $\frac{1}{3}NQ-\frac{1}{2}BP=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}n+\frac{3}{2})-\frac{1}{2}\times(\frac{1}{3}n-\frac{2}{3})=\frac{5}{6}$.

期末综合练(2)

1. C 2. A 3. C 4. A 5. B

6. $\frac{13}{2}$

7. 20° 提示:因为 $\angle AOF=\angle AOB-\angle BOF=90^\circ-30^\circ=60^\circ, \angle DOE=\angle COD-\angle COE=90^\circ-40^\circ=50^\circ$,所以 $\angle AOD=\angle AOF+\angle DOE-\angle EOF=60^\circ+50^\circ-90^\circ=20^\circ$.

8. 56° 提示:因为 $D'E'\parallel BC, AD\parallel BC$,所以 $AD\parallel D'E'$,所以 $\angle ADD'=\angle DD'E'=62^\circ$,因为 DD' 平分 $\angle ADC$,所以 $\angle ADC=2\angle ADD'=124^\circ$,因为 $AD\parallel BC$,所以 $\angle DCB=180^\circ-\angle ADC=56^\circ$.

9. -4 提示:原多项式 $=(2m-8)x^2+3y+8$.因为原多项式的值与 x 无关,所以 $2m-8=0$,解得 $m=4$.所以 $m^2-[2m^2-(5m-4)+m]=-m^2+4m-4=-16+16-4=-4$.

10. 143 提示:设正方形D和正方形C的边长为 x ,则由 $PQ=MN$,得 $2x-1+2x-2=x+1+x+3$,解得 $x=4$.所以长方形MNPQ的长为 $4x-3=13$,宽为 $3x-1=11$,所以长方形MNPQ的面积为 $13\times 11=143$.

11. 解:(1) 因为 $AD\parallel BE$,所以 $\angle D=$

$$\alpha + \beta = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ.$$

12. 解: (1) 1

(2) $W_1 = W_2$. 理由如下:

当 $a = m, b = -n$ 时, $W_1 = [|a - b| + (a + b)] \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} [|m + n| + (m - n)]$; 当 $a = -n, b = m$ 时, $W_2 = [|a - b| + (a + b)] \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} [|m + n| + (m - n)]$, 所以 $W_1 = W_2$.

(3) $a + 2b$ 的值为 68 或 73. 提示: 当 $x \geq 3$

时, $a = x + 2, b = x - 3$, 所以 $a > b$. 所以 $W = \frac{1}{2} (2x + 4) = 26$, 解得 $x = 24$. 所以 $a = 26, b = 21$. 所以 $a + 2b = 68$. 当 $x \leq -2$ 时, $a = -x - 2, b = 3 - x$, 所以 $a < b$. 所以 $W = \frac{1}{2} (-2x + 6) = 26$, 解得 $x = -23$. 所以 $a = 21, b = 26$. 所以 $a + 2b = 73$. 当 $-2 < x < 3$ 时, $a = x + 2, b = 3 - x$, 所以 $W = \frac{1}{2} [| (x + 2) - (3 - x) | + (x + 2) + (3 - x)] = 26$, 解得 $x = 24$ 或 $x = -23$, 均不合题意. 综上所述, $a + 2b$ 的值为 68 或 73.

13. 解: (1) 3 提示: 由题意可知, $\angle ECD = 30^\circ$, 当 AC 为 $\angle DCE$ 的平分线时, 则 $\angle ECA = \frac{1}{2} \angle ECD = 15^\circ$, 即旋转角为 15° , 所以 $t = \frac{15}{5} = 3$.

(2) 如图 1, 当 $t = 18$ 时, $\angle ECA = 18 \times 5^\circ = 90^\circ$, 因为 $\angle DCE = 30^\circ, \angle ACB = 45^\circ$, 所以 $\angle BCD = 90^\circ - \angle ACB - \angle ECD = 15^\circ$.

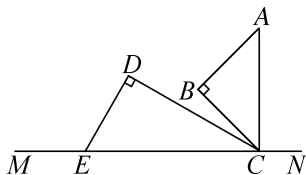


图 1

(3) 当三角板 ABC 的边 AB 平行于三角板 EDC 的某一边时, 有 3 种情况:

①当 $AB \parallel DE$ 时, 如图 2, 此时, BC 与 CD 重合, $t = (30 + 45) \div 5 = 15$.

②当 $AB \parallel CE$ 时, 如图 3, 因为 $AB \parallel CE$,

所以 $\angle BCE = \angle B = 90^\circ$, 所以 $\angle ACE = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$, 所以 $t = 135 \div 5 = 27$.

③当 $AB \parallel CD$ 时, 如图 4, 因为 $AB \parallel CD$, 所以 $\angle BCD = \angle ABC = 90^\circ$, 所以 $\angle ACE = 30^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 165^\circ$, 所以 $t = 165 \div 5 = 33$.

综上所述, $t = 15$ 或 27 或 33.

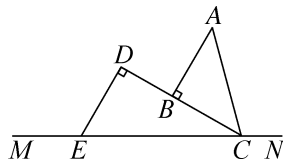


图 2

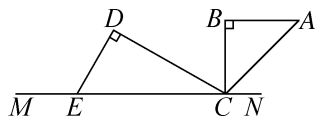


图 3

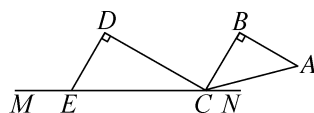


图 4

核心素养综合练(1)

1. B

2. A 提示: 如果输入的数经过一次运算就能输出结果, 则 $3x + 2 = 215$, 解得 $x = 71$; 如果输入的数字经过两次运算才能输出结果, 则第 1 次计算后的结果是 71, 于是 $3x + 2 = 71$, 解得 $x = 23$; 如果输入的数字经过三次运算才能输出结果, 则第 2 次计算后的结果是 71, 第 1 次计算后的结果是 23, 于是 $3x + 2 = 23$, 解得 $x = 7$; 如果输入的数字经过四次运算才能输出结果, 则第 1 次计算后的结果是 7, 于是 $3x + 2 = 7$, 解得 $x = \frac{5}{3}$, 此时 x 不是正整数, 舍去. 综上所述, 输入的 x 的值可能是 71, 23, 7.

3. C 提示: 由题可知, 6 点多外出时, 分针没有追上时针, 7 点前回家时, 分针追上并超过时针. 由于时针和分针 1 min 旋转的角度分别是 0.5° 和 6° , 并分别设外出和回家时的时刻为 6 点 x 分和 6 点 y 分, 则 $180 + 0.5x - 6x = 110, 6y - 180 - 0.5y = 110$, 解得 $x = \frac{140}{11}, y = \frac{580}{11}$, 所以外出的时间为 $\frac{580}{11} - \frac{140}{11} = 40(\text{min})$.

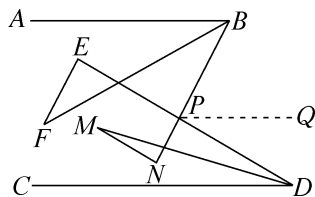
4. D 提示: ①由题意, 可得 $|1 - 2| = |-1| = 1, |1 - 3| = |-2| = 2, |2 - 4| = |-2| = 2$, 最后输出的

结果是2,故①正确;②易知输入的数为正整数时,显示的结果一定小于或等于该正整数,对于2,3,6,9,易得结果最大值一定小于或等于9,此时,正整数9必须最后输入,且前三个数显示结果为零.枚举可知,2,3,6无法得到结果0,当按3,6,2,9的顺序输入时,可得 $|3-6|=3$, $|3-2|=1$, $|1-9|=8$,全部输入完毕后显示的结果的最大值是8,故②正确;③同②可得这2 025个正整数输入后显示的结果最大值小于或等于2 025,分析可得,四个连续正整数 $x, x+1, x+2, x+3$ 按 $x, x+2, x+3, x+1$ 的顺序输入后,结果为0,故可先每四个数一组,将前2 024个数输入,使得输出结果为0,再输入2 025,即依次输入1,3,4,2;5,7,8,6;9,11,12,10;…;2 021,2 023,2 024,2 022;2 025;根据运算规律可得结果是2 025,故③正确.

5. D 提示:设对折后点 D 关于点 C 的对称点为 D' ,被剪断两处分别是点 D 和点 D' ,剪开的三段细绳依次是 $AD, DD', D'B$.因为 $AC:BC=2:3, AC+CB=AB$,所以 $AC=\frac{2}{5}AB, BC=\frac{3}{5}AB$.因为 $AD:BD=3:7, AD+DB=AB$,所以 $AD=\frac{3}{10}AB$,所以 $CD=AC-AD=\frac{2}{5}AB-\frac{3}{10}AB=\frac{1}{10}AB$,所以 $DD'=2CD=2\times\frac{1}{10}AB=\frac{1}{5}AB$.又因为 $AD=\frac{3}{10}AB$,所以 $D'B=AB-AD-DD'=AB-\frac{3}{10}AB-\frac{1}{5}AB=\frac{1}{2}AB$,所以 $DD'<AD<D'B$.所以 $DD':AD:D'B=\frac{1}{5}AB:\frac{3}{10}AB:\frac{1}{2}AB=2:3:5$.

6. ①④⑤ 提示:假设在桌面上放置这个正方体盒子,以桌面为水平底面.①当正方体盒子水平放置,使其一整个面接触桌面时,水在盒子里可以形成长方体;②因为水没有装满盒子,所以无论怎样放置,都无法形成正方体;③正方体盒子的形状决定了水无法形成圆柱体;④将正方体盒子倾斜放置,使其仅有一个顶点接触桌面时,水在盒子里可以形成三棱锥;⑤将正方体盒子倾斜放置,使其仅有一条棱接触桌面时,水在盒子里可以形成三棱柱的形状.综上所述,可能是盒子里的水形成的几何体的有①长方体,④三棱锥,⑤三棱柱.

7. 360° 提示:如图,过点 P 作 $PQ\parallel AB$.因为 $AB\parallel CD$,所以 $PQ\parallel CD$.因为 $EF\parallel BN$,所以 $\angle F=\angle FBP, \angle E=\angle EPB, \angle E+\angle EPN=180^\circ$.因为 $PQ\parallel AB$,所以 $\angle BPQ=\angle ABP=\angle ABF+\angle FBP=\angle ABF+\angle F$.因为 $MN\parallel DE$,所以 $\angle M=\angle MDE, \angle N=\angle NPD$.因为 $PQ\parallel CD$,所以 $\angle DPQ=\angle CDP=\angle MDE+\angle CDM=\angle M+\angle CDM$,所以 $\angle ABF+\angle E+\angle F+\angle EPN+\angle M+\angle N+\angle CDM=180^\circ+\angle BPQ+\angle NPD+\angle DPQ=360^\circ$.



8. AH 提示:设正八边形的边长为 a ,甲的速度为 v ,则乙的速度为 $3v$.根据题意,得第一次相遇甲、乙走的总路程为 $2a$,则第一次相遇的时间为 $\frac{2a}{v+3v}=\frac{a}{2v}$,此时甲走了 $\frac{a}{2v}\times v=\frac{1}{2}a$,即相遇在正八边形的边 AH 上;第二次相遇甲、乙走的总路程为 $8a$,则第二次相遇的时间为 $\frac{8a}{v+3v}=\frac{2a}{v}$,此时甲走了 $\frac{2a}{v}\times v=2a$,即相遇在正八边形的边 GF 上;第三次相遇甲、乙走的总路程为 $8a$,则第三次相遇的时间为 $\frac{8a}{v+3v}=\frac{2a}{v}$,此时甲走了 $\frac{2a}{v}\times v=2a$,即相遇在正八边形的边 ED 上;第四次相遇甲、乙走的总路程为 $8a$,则第四次相遇的时间为 $\frac{8a}{v+3v}=\frac{2a}{v}$,此时甲走了 $\frac{2a}{v}\times v=2a$,即相遇在正八边形的边 CB 上;第五次相遇甲、乙走的总路程为 $8a$,则第五次相遇的时间为 $\frac{8a}{v+3v}=\frac{2a}{v}$,此时甲走了 $\frac{2a}{v}\times v=2a$,即相遇在正八边形的边 AH 上……以此类推,第五次和第一次相同,所以相遇位置每四次一循环.因为 $2\ 025\div 4=506\cdots 1$,所以第2 025次相遇与第一次相同,在正八边形的边 AH 上.

9. 解:(1) 21 提示:因为线段 $AB=36\text{ cm}, CD=6\text{ cm}, AC=10\text{ cm}$,所以 $BD=AB-CD-AC=$

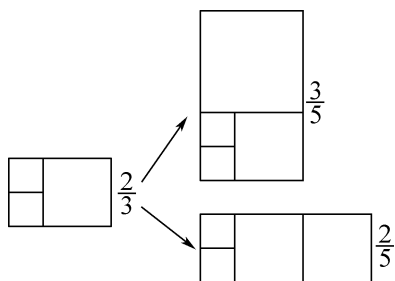
20 cm. 因为 E, F 分别是 AC, BD 的中点, 所以 $EC = \frac{1}{2}AC = 5$ cm, $DF = \frac{1}{2}BD = 10$ cm, 所以 $EF = EC + CD + DF = 5 + 6 + 10 = 21$ (cm).

(2) 线段 EF 的长度不会发生变化, 理由如下:

因为线段 CD 在线段 AB 上运动, 所以 $AC + BD = AB - CD$. 因为 E, F 分别是 AC, BD 的中点, 所以 $EC = \frac{1}{2}AC, DF = \frac{1}{2}BD$, 所以 $EF = EC + CD + DF = \frac{1}{2}AC + CD + \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}(AC + BD) + CD = \frac{1}{2}(AB - CD) + CD = \frac{1}{2}(AB + CD)$. 因为 $AB = 36$ cm, $CD = 6$ cm, 所以 $EF = \frac{1}{2}(AB + CD) = \frac{1}{2} \times (36 + 6) = 21$ (cm).

(3) $\angle AOB$ 的度数为 130° . 提示: 因为 OE, OF 分别平分 $\angle AOC$ 和 $\angle BOD$, 所以 $\angle EOC = \frac{1}{2}\angle AOC, \angle FOD = \frac{1}{2}\angle BOD$, 所以 $\angle EOF = \angle EOC + \angle FOD + \angle COD = \frac{1}{2}\angle AOC + \frac{1}{2}\angle BOD + \angle COD = \frac{1}{2}(\angle AOC + \angle BOD) + \angle COD$. 因为 $\angle AOB - \angle COD = \angle AOC + \angle BOD$, 所以 $\angle EOF = \frac{1}{2}(\angle AOB - \angle COD) + \angle COD = \frac{1}{2}(\angle AOB + \angle COD)$. 因为 $\angle EOF = 80^\circ, \angle COD = 30^\circ$, 所以 $\frac{1}{2}(\angle AOB + 30^\circ) = 80^\circ$, 所以 $\angle AOB = 130^\circ$.

10. 解: (1) 另外两种 3 阶长方形的裁剪示意图如图所示, 对应的宽长比分别是 $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}$.



(2) 3 阶长方形的宽长比为 $\frac{1}{4}$ 时, 4 阶长方形的宽长比是 $\frac{1}{5}$ 或 $\frac{4}{5}$; 3 阶长方形的宽长比为 $\frac{3}{4}$ 时, 4 阶长方形的宽长比是 $\frac{3}{7}$ 或 $\frac{4}{7}$; 3 阶长方形的宽长比为 $\frac{3}{5}$ 时, 4 阶长方形的宽长比是 $\frac{3}{8}$ 或 $\frac{5}{8}$; 3 阶长方形的宽长比为 $\frac{2}{5}$ 时, 4 阶长方形的宽长比是 $\frac{2}{7}$ 或 $\frac{5}{7}$.

(3) 选①, 作答如下: 因为 2 阶长方形的宽长比有两种可能, 即是 2^1 ; 3 阶长方形的宽长比有四种可能, 即是 2^2 ; 4 阶长方形的宽长比有八种可能, 即是 $2^3 \dots$ 所以 10 阶长方形的宽长比共有 2^9 种可能的值.

选②, 作答如下: n 阶长方形就是在 $(n-1)$ 阶长方形外再补一个正方形, 设 $(n-1)$ 阶长方形的宽为 x , 长为 y . 若在宽上补一个边长为 x 的正方形, 则得到的 n 阶长方形宽长比为 $\frac{x}{x+y}$; 若在长上补一个边长为 y 的正方形, 则得到的 n 阶长方形宽长为 $\frac{y}{x+y}$. 因为 $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} = 1$, 所以 “ $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$ ” “ $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ ” ... 是必然的.

选③, 作答如下: 因为 $2\ 024 - 1\ 105 = 919$, $1\ 105 - 919 = 186$, $919 - 186 \times 4 = 175$, $186 - 175 = 11$, $175 - 11 \times 15 = 10$, $11 - 10 = 1$, $10 = 1 \times 10$, $1 + 1 + 4 + 1 + 15 + 1 + 10 - 1 = 32$, 所以若一个长方形的宽长比为 $\frac{1\ 105}{2\ 024}$, 则它是 32 阶长方形.

核心素养综合练(2)

1. D 提示: 因为 $a + b = \frac{1}{2}, a + c = -2$, 所以

同(1), 得 $\angle DAO = \angle EAB$, $\angle ABM = \angle CBN$, 所以 $\angle OAB = 180^\circ - 2\angle EAB$, $\angle ABC = 180^\circ - 2\angle ABM$. 因为 $DE \parallel MN$, 所以 $\angle EAB = \angle ABM$, 所以 $\angle OAB = \angle ABC$, 所以 $OA \parallel BC$.

(3) 平面镜 MN 和反射光线 BC 如图 1、图 2 所示. 如图 1, 当反射光线向右时, 延长 CB 到点 F , 所以 $\angle FBM = \angle CBN$, 由光的反射原理, 得 $\angle EAB = \angle OAD = 40^\circ$, $\angle ABM = \angle CBN = \angle FBM$, 因为 $BC \parallel DE$, 所以 $\angle EAB = \angle ABF = \angle ABM + \angle FBM = 2\angle ABM$, 因为 $\angle EAB = 40^\circ$, 所以 $\angle ABM = 20^\circ$, 当点 M 和点 N 互换位置时, $\angle ABM = 160^\circ$; 如图 2, 当反射光线向左时, 由光的反射原理, 得 $\angle EAB = \angle OAD = 40^\circ$, 因为 $BC \parallel DE$, 所以 $\angle ABC = \angle EAB = 40^\circ$, 易知 BF 平分 $\angle ABC$, $\angle MBF = \angle NBF = 90^\circ$, 所以 $\angle ABF = 20^\circ$, 所以 $\angle ABM = \angle ABF + \angle MBF = 110^\circ$, 当点 M 和点 N 互换位置时, $\angle ABM = 70^\circ$.

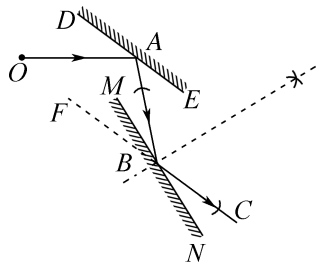


图 1

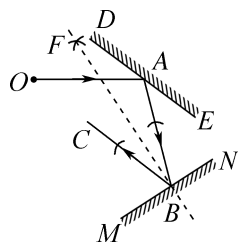


图 2

期末压轴 1

2025 年南京市秦淮区期末压轴题

1. B 提示: 因为 H 为 AC 的中点, M 为 AB 的中点, N 为 BC 的中点, 所以 $AH = CH = \frac{1}{2}AC$, $AM = BM = \frac{1}{2}AB$, $BN = CN = \frac{1}{2}BC$, 所以 $MN = BM + BN = \frac{1}{2}(AB + BC) = \frac{1}{2}AC = CH$, 故①正确, ③错误;

因为 $\frac{1}{2}(AH - BH) = \frac{1}{2}(AB - BH - BH) = BM - BH = MH$, 故②正确; 因为 $\frac{1}{2}(CH + BH) = \frac{1}{2}(BC + BH + BH) = BN + BH = HN$, 故④正确.

2. 12 或 48 提示: 由题可知, 射线 DG 旋转一周所需的时间为 $\frac{360}{6} = 60(s)$, 则射线 CH 在此时间内旋转了 60° . 设射线 DG 旋转的时间为 t s 时, 直线 $DG \perp CH$ 于点 P , 分情况讨论: 如图 1, 当射线 DG 在 $\angle EDB$ 内部, 即 $0 < t < 15$ 时, 易知 $\angle CDP = \angle GDB = \angle EDB - \angle EDG = 90^\circ - 6t^\circ$, $\angle DCP = \angle BCF + \angle FCH = 60^\circ + t^\circ$, 因为 $DG \perp CH$, 所以 $\angle CPD = 90^\circ$, 所以 $\angle CDP + \angle DCP = 90^\circ$, 即 $(90 - 6t)^\circ + (60 + t)^\circ = 90^\circ$, 解得 $t = 12$. 如图 2, 当射线 DG 在 $\angle EDB$ 外部且在直线 AB 上方, 即 $45 < t < 60$ 时, 易知 $\angle GDE = 360^\circ - 6t^\circ$, $\angle BCH = \angle BCF + \angle FCH = 60^\circ + t^\circ$, 所以 $\angle CDP = 90^\circ - \angle GDE = 90^\circ - (360 - 6t)^\circ = (6t - 270)^\circ$, $\angle DCP = 180^\circ - \angle BCH = 180^\circ - (60 + t)^\circ = (120 - t)^\circ$. 同理, $\angle CDP + \angle DCP = 90^\circ$, 即 $(6t - 270)^\circ + (120 - t)^\circ = 90^\circ$, 解得 $t = 48$. (当射线 DG 在 $\angle EDB$ 外部且在直线 AB 下方, 即 $15 < t < 45$ 时, 易知直线 DG 与直线 CH 不垂直)

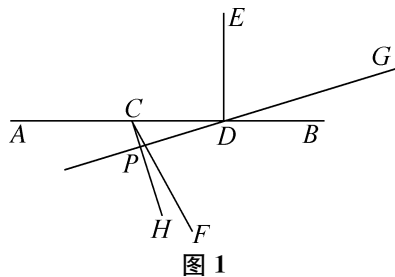


图 1

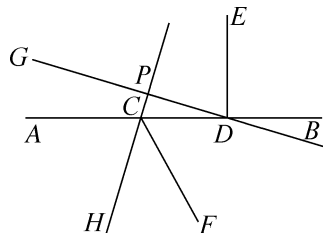


图 2

3. 解: (1) 11

(2) $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 1$ $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$ 提示:

由题中规律可知, $A(2) - A(1) = 2$, $A(3) - A(2) = 3$,

$A(4)-A(3)=4, \dots, A(n)-A(n-1)=n$, 将这 $(n-1)$ 组差相加, 得 $A(2)-A(1)+A(3)-A(2)+A(4)-A(3)+\dots+A(n)-A(n-1)=2+3+4+\dots+n$, 即 $A(n)-A(1)=2+3+4+\dots+n=\frac{(n+2)(n-1)}{2}=\frac{1}{2}(n^2+n-2)=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1$, 所以 $A(n)-2=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1$, 所以 $A(n)=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1$.

$$(3) \quad \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1 \quad \text{提示: 把 } A(1)=2,$$

$A(2)=4, A(3)=7$ 分别代入 $A(n)=kn^2+pn+q$, 得

$$\begin{cases} k+p+q=2, \\ 4k+2p+q=4, \\ 9k+3p+q=7, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} k=\frac{1}{2}, \\ p=\frac{1}{2}, \\ q=1. \end{cases} \text{所以 } A(n)=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1.$$

(4) 方法一: 1 个平面把一个空间分成 2 部分, 2 个平面最多把一个空间分成 4 部分, 3 个平面最多把一个空间分成 8 部分, 4 个平面最多把一个空间分成 15 部分……所以 $B(2)-B(1)=4-2=2=1+1, B(3)-B(2)=8-4=4=1+1+2, B(4)-B(3)=15-8=7=1+1+2+3, \dots$, 以此类推, $B(n)-B(n-1)=1+1+2+3+\dots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)+1$. 一般地, 有 $B(k)-B(k-1)-1=\frac{1}{2}k(k-1)=\frac{1}{6}k(k-1)[(k+1)-(k-2)]=\frac{1}{6}(k+1)k(k-1)-\frac{1}{6}k(k-1)(k-2), k=2, 3, \dots, n$ 时均成立. 所以 $[B(n)-B(n-1)-1]+[B(n-1)-B(n-2)-1]+\dots+[B(3)-B(2)-1]+[B(2)-B(1)-1]=\left[\frac{1}{6}(n+1)n(n-1)-\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\right]+\left[\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)-\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)\right]+\dots+\left(\frac{1}{6}\times 4\times 3\times 2-\frac{1}{6}\times 3\times 2\times 1\right)+$

$$\left(\frac{1}{6}\times 3\times 2\times 1-\frac{1}{6}\times 2\times 1\times 0\right)=\frac{1}{6}(n+1)n \cdot$$

$$(n-1), \text{即 } B(n)-B(1)-(n-1)=\frac{1}{6}(n+1)n \cdot$$

$$(n-1), \text{所以 } B(n)=\frac{1}{6}(n+1)n(n-1)+B(1)+$$

$$n-1=\frac{1}{6}(n+1)n(n-1)+n+1=\frac{1}{6}n^3+\frac{5}{6}n+1.$$

方法二: 设 $B(n)=an^3+bn^2+cn+d$, 把 $B(1)=2, B(2)=4, B(3)=8, B(4)=15$ 代入 $B(n)=an^3+bn^2+cn+d$, 得

$$\begin{cases} a+b+c+d=2, \\ 8a+4b+2c+d=4, \\ 27a+9b+3c+d=8, \\ 64a+16b+4c+d=15, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=\frac{1}{6}, \\ b=0, \\ c=\frac{5}{6}, \\ d=1. \end{cases} \text{所以}$$

$$B(n)=\frac{1}{6}n^3+\frac{5}{6}n+1.$$

期末压轴 2

2025 年南京市鼓楼区期末压轴题

1. B 提示: 因为 OD, OE 分别平分 $\angle AOB, \angle AOC$, $\angle AOC = m^\circ, \angle BOC = n^\circ$, 所以 $\angle AOD = \frac{1}{2}\angle AOB, \angle AOE = \frac{1}{2}\angle AOC$, 所以 $\angle DOE = \angle AOD - \angle AOE = \frac{1}{2}\angle AOB - \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}(\angle AOB - \angle AOC) = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{n^\circ}{2}$.

2. 35° 或 63° 提示: 因为 $AB \parallel CD, \angle PEF = 75^\circ$, 所以 $\angle PEF + \angle CFE = 180^\circ$, 所以 $\angle CFE = 105^\circ$. 分情况讨论: 如图 1, 当点 Q 在直线 CD 的上方时, 由折叠的性质, 得 $\angle EFP = \angle QFP$. 因为 $\angle CFQ = \frac{1}{2}\angle CFP = \angle QFP = \angle EFP$, 所以 $\angle EFP = \frac{1}{3}\angle CFE = 35^\circ$. 如图 2, 当点 Q 在直线 CD 的下方时, 设 $\angle CFQ = x$, 则 $\angle CFP = 2x$. 由折叠的性质, 得 $\angle EFP = \angle QFP = \angle CFP + \angle CFQ = 3x$. 因为 $\angle EFP + \angle CFP = \angle CFE$, 即 $3x + 2x = 105^\circ$, 解得