



第一篇 初高中衔接

第1练 乘法公式

衔接高中

在初中,我们学习了多项式的乘法运算,其中主要学习的两个基本乘法公式是:

(1) 平方差公式: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

(2) 完全平方公式: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

常见变形: $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$, $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

进入高中之后,我们将面临更多更复杂的运算,教材第一章第二、三、四节及第三章第二节,主书第8练、第9练、第20练会用到更多的乘法公式,因此本练我们将拓展乘法公式的内容,补充高中常用的乘法公式,如两数和(差)立方公式、立方和(差)公式及三数和平方公式等.

知识要点

(1) 两数和立方公式: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

常见变形: $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$, $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

(2) 两数差立方公式: $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(3) 立方和公式: $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(4) 立方差公式: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(5) 三数和平方公式: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$

经典示例

例1 已知 $x+y=1$, 求 x^3+y^3+3xy 的值.

解: 因为 $x+y=1$, 所以 $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=1$, 即 $x^3+3xy(x+y)+y^3=1$, 所以 $x^3+3xy+y^3=1$.

例2 已知 $x^2+3x-1=0$, 求: (1) $x^2+\frac{1}{x^2}$; (2) $x^3-\frac{1}{x^3}$.

解: 因为 $x^2+3x-1=0$, 所以 $x\neq 0$, 所以 $x^2-1=-3x$, 所以 $x-\frac{1}{x}=-3$.

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=(-3)^2+2=11$.

(2) $x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)=-3\times(11+1)=-36$.

例3 当 $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$ 时, 求下列各式的值:

(1) $bc+ca+ab$; (2) $a^4+b^4+c^4$.

解: (1) 因为 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$, 且 $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$, 所以 $0^2=1+2(ab+bc+ca)$, 即 $bc+ca+ab=-\frac{1}{2}$.

(2) 因为 $(bc+ca+ab)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2(a^2bc+ab^2c+abc^2)=b^2c^2+$

成长笔记

小点拨

利用公式 $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ 求解.

小点拨

因为求值式的结构特点是两项之积为定值, 所以考虑对条件式进行变形, 再用“整体代换”的方法计算.

小点拨

(1) 将所求式子与已知联系, 发现可将 $bc+ca+ab$ 用 $a+b+c$ 和 $a^2+b^2+c^2$ 表示.



$c^2a^2 + a^2b^2 + 2abc(a+b+c)$, 所以 $b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 = \frac{1}{4}$. 故 $a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = 1 - 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

练习巩固

题组1 完全平方公式

- 不论 a, b 为何实数, $a^2 + b^2 - 2a - 4b + 8$ 的值 ()
 A. 总是正数 B. 总是负数
 C. 可以是零 D. 可以是正数也可以是负数
- 若 $x^2 + y^2 = 169$, $x - y = 7$, 则 xy 的值为 ()
 A. 120 B. 60 C. 30 D. 15

题组2 立方和(差)公式

- 计算: $(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 计算:
 (1) $(4+m)(16-4m+m^2)$; (2) $\left(\frac{1}{5}m - \frac{1}{2}n\right)\left(\frac{1}{25}m^2 + \frac{1}{10}mn + \frac{1}{4}n^2\right)$;
 (3) $(a+2)(a-2)(a^4+4a^2+16)$; (4) $(x^2+2xy+y^2)(x^2-xy+y^2)^2$.
 5. 已知 $x + \frac{1}{x} = 3$, 求 $x^3 + \frac{1}{x^3}$.

题组3 两数和(差)立方公式

- (1) 已知 $(2x-3)^3 = 2$, 则 $8x^3 - 36x^2 + 54x = \underline{\hspace{2cm}}$;
 (2) 已知 $x^3 + 6x^2 + 12x + 7 = 0$, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

题组4 三数和平方公式

- 已知 $(x+y)^2 - 2x - 2y + 1 = 0$, 计算 $(x+y)^{1021}$.
- 已知 $a+b+c=0$, $ab+bc+ac=-3$, 求下列各式的值:
 (1) $a^2+b^2+c^2$; (2) $a^4+b^4+c^4$.

成长笔记

(2) 由于 $a^4 + b^4 + c^4 = (a^2)^2 + (b^2)^2 + (c^2)^2$, 由(1)得到启示, 如果知道 $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ 的值, 就能得解.



初高中衔接答案详析

第1练 乘法公式

1. **A** 原式 $= (a-1)^2 + (b-2)^2 + 3 > 0$.
2. **B** 由 $x^2 + y^2 = (x-y)^2 + 2xy$ 得 $169 = 49 + 2xy$, 解得 $xy = 60$.
3. $x^6 - 1$ 原式 $= (x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1) = (x^3+1)(x^3-1) = x^6 - 1$.
4. (1) 原式 $= 4^3 + m^3 = 64 + m^3$.
(2) 原式 $= \left(\frac{1}{5}m\right)^3 - \left(\frac{1}{2}n\right)^3 = \frac{1}{125}m^3 - \frac{1}{8}n^3$.
(3) 原式 $= (a^2-4)(a^4+4a^2+4^2) = a^6 - 64$.
(4) 原式 $= (x+y)^2(x^2-xy+y^2)^2 = [(x+y)(x^2-xy+y^2)]^2 = (x^3+y^3)^2 = x^6 + 2x^3y^3 + y^6$.
5. $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\right] = 3 \times (3^2 - 3) = 18$.
6. (1) 29 (2) -1 (1) $(2x-3)^3 = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 = 2, 8x^3 - 36x^2 + 54x = 29$.
(2) $(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 1, x = -1$.
7. $(x+y)^2 - 2x - 2y + 1 = (x+y)^2 - 2(x+y) + 1 = (x+y-1)^2 = 0, x+y=1, (x+y)^{1021} = 1$.
8. (1) 由 $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$, 得 $0 = a^2 + b^2 + c^2 - 6, a^2 + b^2 + c^2 = 6$.
(2) 由 $(ab+bc+ac)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + 2abc(a+b+c) = 9$, 得 $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 = 9$, 所以 $a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 36 - 2 \times 9 = 18$.

第2练 因式分解

1. **C** 原式 $= ab(a^2-1) = ab(a+1)(a-1)$.
2. **A** 原式 $= a(x^2-4x+4) = a(x-2)^2$.
3. $x(x+3)(x^2-3x+9)$ $x^4 + 27x = x(x^3+27) = x(x+3)(x^2-3x+9)$.
4. **A** 原式 $= 3(x^2-4x-12) = 3(x-6)(x+2)$.
5. $3x(x+y)(x-2y)$ $3x^3 - 3x^2y - 6xy^2 = 3x(x^2-xy-2y^2) = 3x(x+y)(x-2y)$.
6. (1) $12x^2 - 5x - 2 = (3x-2)(4x+1)$.
(2) $x^2 + xy - 6y^2 = (x+3y)(x-2y)$.
(3) $(x^2+x)^2 - 8(x^2+x) + 12 = (x^2+x-6)(x^2+x-2) = (x+3)(x-2)(x+2)(x-1)$.
7. (1) $a^2(b-5) + a(5-b) = a(b-5)(a-1)$.
(2) **解法1** 原式 $= (x^3+3x^2) + (3x+9) = x^2(x+3) + 3(x+3) = (x+3)(x^2+3)$.
解法2 $x^3 + 9 + 3x^2 + 3x = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + 8 = (x+1)^3 + 8 = (x+1)^3 + 2^3 = [(x+1)+2][(x+1)^2 - (x+1) \times 2 + 2^2] = (x+3)(x^2+3)$.
8. 原式 $= x^3 - 4x^2 + 4x - 3x + 6 = x(x^2-4x+4) - 3(x-2) = x(x-2)^2 - 3(x-2) = (x-2)(x^2-2x-3) = (x-2)(x-3)(x+1)$.

第3练 绝对值及绝对值不等式

1. 2 由 $|a-4| = -|b+2|$ 得 $|a-4| + |b+2| = 0$, 则 $a=4, b=-2$, 所以 $a+b=2$.

2. 3 1 -1 -3 当 a, b, c 都是正数时, $M = \frac{a}{a} + \frac{b}{b} + \frac{c}{c} = 3$; 当 a, b, c 中有一个负数时, 不妨设 $a < 0, b > 0, c > 0, M = \frac{-a}{a} + \frac{b}{b} + \frac{c}{c} = 1$; 当 a, b, c 中有2个负数时, 不妨设 $a < 0, b < 0, c > 0, M = \frac{-a}{a} + \frac{-b}{b} + \frac{c}{c} = -1$; 当 a, b, c 都是负数时, $M = \frac{-a}{a} + \frac{-b}{b} + \frac{-c}{c} = -3$.

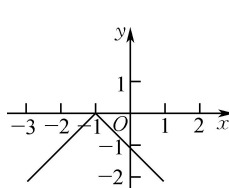
3. $-\frac{8}{3}$ 或 $\frac{2}{3}$ $|x+1| = \frac{5}{3}$, 所以 $x+1 = -\frac{5}{3}$ 或 $x+1 = \frac{5}{3}$, 所以 $x = -\frac{8}{3}$ 或 $x = \frac{2}{3}$.

4. -3 或 3 因为 $x^2 - 2|x| - 3 = 0$, 所以 $|x|^2 - 2|x| - 3 = 0$, 所以 $(|x|-3)(|x|+1) = 0$, 所以 $|x| = 3$, 所以 $x = -3$ 或 $x = 3$.

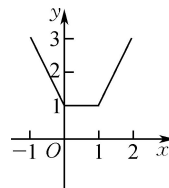
5. $-2 \leq x \leq 1$ $|x+2| + |x-1|$ 的几何意义是数轴上实数 x 到-2和1的距离之和, 当 x 位于-2和1之间时, x 到-2和1的距离之和就刚好为3.

6. (1) 当 $x \leq -1$ 时, $y = x+1$; 当 $x > -1$ 时, $y = -x-1$. 图象如图(1)所示.

- (2) 当 $x \leq 0$ 时, $y = 1-2x$; 当 $0 < x < 1$ 时, $y = 1$; 当 $x \geq 1$ 时, $y = 2x-1$, 图象如图(2)所示.



图(1)



图(2)

7. $-1 \leq x \leq 4$ 由题意知 $-5 \leq 3-2x \leq 5$, 解得 $-1 \leq x \leq 4$.

8. $x = \frac{8}{3}$ 由题意知 $8-3x=0$, 所以 $x = \frac{8}{3}$.

9. (1) **解法1** 当 $x < -2$ 时, 得 $\begin{cases} x < -2, \\ -(x-1) - (x+2) < 5, \end{cases}$ 解得 $-3 < x < -2$; 当 $-2 \leq x \leq 1$ 时, 得 $\begin{cases} -2 \leq x \leq 1, \\ -(x-1) + (x+2) < 5, \end{cases}$ 解得 $-2 \leq x \leq 1$; 当 $x > 1$ 时, 得 $\begin{cases} x > 1, \\ (x-1) + (x+2) < 5, \end{cases}$ 解得 $1 < x < 2$. 综上所述, 原不等式的解为 $-3 < x < 2$.

- 解法2** 由数轴可知, $1 - (-2) = 3 < 5$, 易知当 $x = -3$ 或 $x = 2$ 时, $|x+2| + |x-1| = 5$, 所以 x 位于-3和2之间(不含端点), 所以 $-3 < x < 2$.

- (2) 当 $x < 1$ 时, 得 $1-x+2-x > x+3$, 解得 $x < 0$; 当 $1 \leq x \leq 2$ 时, 得 $x-1+2-x > x+3$, 即 $x < -2$, 无解; 当 $x > 2$ 时, 得 $x-1+x-2 > x+3$, 解得 $x > 6$. 综上, 原不等式的解为 $x < 0$ 或 $x > 6$.

第4练 根式、根式有理化

1. **C** 由 $\begin{cases} x \geq 0, \\ x > 2 \end{cases}$ 得 $x > 2$.

第二篇
教材超精解

第一章 预备知识

重点解读

1. 如何准确理解集合中元素的特征？

集合中的元素是可以确定的一些对象，它可以是数、图形、人等。

(1) 确定性：对于某个集合中的任意一个元素，均可以判断它是不是该集合中的元素。如“2024 年中国效益较好的大型企业”就不能构成集合，因为“2024 年中国效益较好的大型企业”中的对象是不确定的，效益较好和大型企业都没有明确的标准，无法判断一些企业是否属于这个范围。

(2) 互异性：互异性是指集合中的元素必须是互不相同的。如集合 {x | x^2 + 4x + 4 = 0} = {-2}，而不能写成 {-2, -2}。

(3) 无序性：一个集合中的元素无先后顺序，只要构成两个集合的元素一样，这两个集合就是相等的。

2. 如何理解元素和集合之间的关系？

(1) 符号“∈”“∉”刻画的是元素与集合之间的关系。对于一个元素 a 与一个集合 A 而言，只有“a ∈ A”与“a ∉ A”这两种结果。

(2) ∈ 和 ∉ 具有方向性，左边是元素，右边是集合，形如 R ∈ 0 是错误的。

3. 集合的表示方法有哪些？如何选择合适的表示方法？

常见表示集合的方法有列举法、描述法、Venn 图法。

(1) 列举法：当集合中的元素满足下列条件时，适合用列举法。

①有限集，元素的个数不多；②有限集，元素个数多但有规律；③无限集，但有规律，如整数集 {..., -1, 0, 1, ...}。

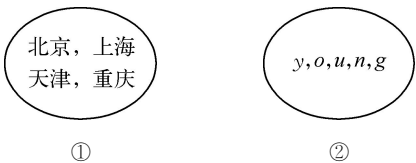
(2) 描述法：对于描述法中的代表元素应注意以下两点：

①应写清楚该集合中的代表元素。如集合 {x | 2 ≤ x ≤ 4} 不能写成 {2 ≤ x ≤ 4}，因为后者所表示的是以不等式 2 ≤ x ≤ 4 为元素的集合，它的元素是一个不等式，而原来集合表示的是满足 2 ≤ x ≤ 4 的实数 x 所构成的集合。

②竖线后边应对代表元素的取值有准确的描述。特别是表示数集和点集的时候，一定要注意代表元素的表示。

对于元素较多的集合或无限集，且能看清集合元素特征时，常选用描述法。

(3) Venn 图法：将集合中的元素一一列举出来放在一条封闭的曲线内，如图。



4. 集合之间的关系有哪些？

	定义	符号表示	图形表示
子集	如果集合 A 中的任意一个元素都是集合 B 中的元素，那么称集合 A 为集合 B 的子集	$A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$)	
真子集	如果集合 $A \subseteq B$ ，但存在元素 $x \in B$ ，且 $x \notin A$ ，那么称集合 A 是集合 B 的真子集	$A \subsetneq B$ (或 $B \supsetneq A$)	

成长笔记

拓展

如何判断集合间的关系？

集合间的关系有子集、真子集、相等关系。常见的判断集合间关系的方法：

(1) 列举观察法：当集合中元素较少时，可以列出全部元素，再根据定义进行判断。

(2) 集合元素的特征法：先确定集合的代表元素是什么，弄清集合元素的特征，再根据集合元素的特征进行判断。

(3) 数形结合法：利用数轴或 Venn 图可以直观地判断集合间的关系，其中不等式的解集之间的关系，适合用数轴法。

拓展

如果一个集合 A 有 n 个元素，那么 A 的子集有 2^n 个，A 的非空子集有 (2^n - 1) 个，A 的真子集有 (2^n - 1) 个，A 的非空真子集有 (2^n - 2) 个。



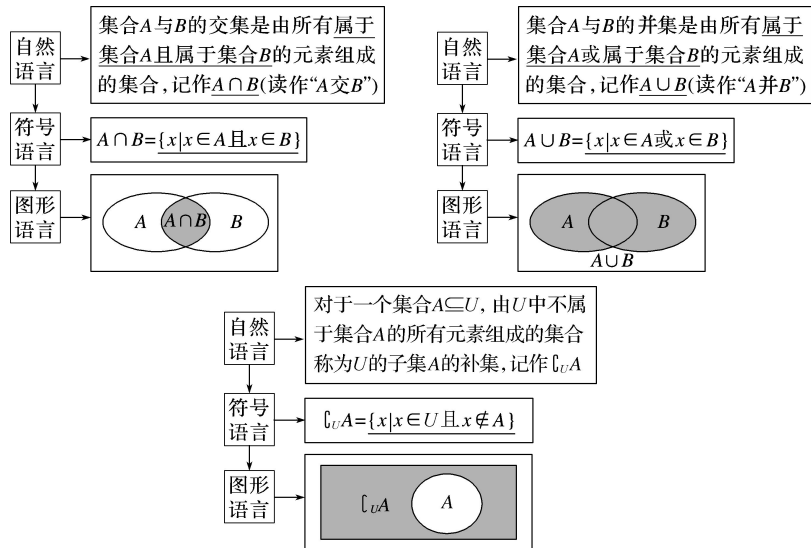
	定义	符号表示	图形表示
集合相等	如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 中的元素,同时集合 B 中的任何一个元素都是集合 A 中的元素,那么集合 A 与集合 B 相等	$A=B$	

5. 如何理解空集?

空集是一个特殊的集合, $\emptyset$ 是不含任何元素的集合,容易将空集与 $\{0\}$, $\{\emptyset\}$ 混淆,后两者都是含有一个元素的集合. 空集是任何集合的子集,是任何非空集合的真子集. 求解子集个数和集合关系的相关问题时,切勿忽略空集.

6. 集合有哪些运算?

集合的运算可以看作“两个集合生成了一个新的集合”,有“交”“并”“补”三种运算.



7. 如何理解集合的基本运算?

(1) 对交、并、补集的理解:

① 并集 $A \cup B$ 中的元素不能简单地理解为把集合 A, B 中所有元素合并,因为集合中元素要满足互异性,所以对于既属于集合 A 又属于集合 B 的元素只能出现一次.

② 交集 $A \cap B$ 中的任何元素都是集合 A 和 B 的公共元素,当集合 A, B 没有公共元素时,不能说集合 A, B 没有交集,而是 $A \cap B = \emptyset$.

③ 补集 $C_U A$ 的概念是在全集中定义的,是由属于全集 U 但不属于集合 A 的所有元素构成,集合 A 和它的补集 $C_U A$ 都是集合 U 的子集,全集不同,则补集也不同.

(2) 交、并、补集的运算性质:

并集: $A \cup \emptyset = A; A \cup A = A; A \cup B = B \cup A; A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$.

交集: $A \cap \emptyset = \emptyset; A \cap A = A; A \cap B = B \cap A; A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$.

补集: $A \cup (C_U A) = U; A \cap (C_U A) = \emptyset; C_U (C_U A) = A; C_U U = \emptyset; C_U \emptyset = U$.

8. 命题的形式是怎样的?

命题的一般形式为“若 p , 则 q ”. 其中 p 叫作命题的条件(题设), q 叫作命题的结论. 有些命题没有这种明显的结构,可以通过改写找到条件和结论.

9. 什么是充分条件、必要条件和充要条件?

(1) 如果 $p \Rightarrow q$, 那么 p 是 q 的充分条件, q 是 p 的必要条件;

(2) 如果 $p \Rightarrow q$, 且 $q \Rightarrow p$, 那么 p 是 q 的充分必要条件,简称充要条件.

10. 什么是全称量词、全称量词命题? 什么是存在量词、存在量词命题?

“所有”“任意”“每一个”等表示全体的词在逻辑学中称为全称量词. 通常用符号“ $\forall x$ ”表示“对任意 x ”.

含有全称量词的命题称为全称量词命题,一般形式为: $\forall x \in M, p(x)$.

“存在”“有的”“有一个”等表示部分或个体的词在逻辑学中称为存在量词. 通常用符号“ $\exists x$ ”表示“存在 x ”.

含有存在量词的命题称为存在量词命题,一般形式为: $\exists x \in M, p(x)$.

拓展

$\{\emptyset\}$ 可以理解为“空房子里面放了一个空箱子,房子不空了”.

拓展

1. (1) 若 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 的充分不必要条件.

(2) 若 $q \Rightarrow p$ 且 $p \nRightarrow q$, 则 p 是 q 的必要不充分条件.

(3) 若 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 的充要条件.

(4) 若 $p \nRightarrow q$ 且 $q \nRightarrow p$, 则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

2. 集合与充分、必要条件

设集合 $A = \{x | x \text{ 满足条件 } p\}$, $B = \{x | x \text{ 满足条件 } q\}$, 则有

(1) 若 $A \subseteq B$, 则 p 是 q 的充分条件; 若 $A \subsetneq B$, 则 p 是 q 的充分不必要条件.

(2) 若 $B \subseteq A$, 则 p 是 q 的必要条件; 若 $B \subsetneq A$, 则 p 是 q 的必要不充分条件.



11. 如何对全称量词命题和存在量词命题进行否定?

对全称量词命题和存在量词命题的否定见下表:

p	$\neg p$	结论
$\forall x \in M, p(x)$	$\exists x \in M, \neg p(x)$	全称量词命题的否定是存在量词命题
$\exists x \in M, p(x)$	$\forall x \in M, \neg p(x)$	存在量词命题的否定是全称量词命题

12. 命题的否定与原命题的真假性有什么关系? 命题真假的判断可怎样转化?

真命题的否定是假命题,假命题的否定是真命题.命题的否定与原命题真假性相反.

根据真命题的否定是假命题,假命题的否定是真命题,当命题 p 的真假不方便判断,而它的否定易于判断时,可先判断 $\neg p$ 的真假,再得到命题 p 的真假.

13. 两个实数大小关系的基本事实,比较大小的依据和步骤是什么?

(1) 作差法的依据:① $a-b>0 \Leftrightarrow a>b$;② $a-b=0 \Leftrightarrow a=b$;③ $a-b<0 \Leftrightarrow a<b$.

(2) 作差法的步骤:①作差;②变形(目的:便于判定差的符号,常用的方法:因式分解、配方、通分、分子有理化等);③定号(当差的符号不确定时,一般需要分类讨论);④下结论(根据差的正、负与实数大小关系的基本事实下结论).

14. 在类比等式的基本性质研究不等式的基本性质时,应特别注意哪些问题?

(1) 不等式只有同向相加,同向同正相乘,没有相减和相除的性质.

(2) 求代数式的取值范围,一般是利用整体思想,通过“一次性”不等关系的运算求得整体范围.例如:已知 $-1<x<4, 2<y<3$,求 $3x-2y$ 的取值范围,需分别求出 $3x$ 和 $-2y$ 的取值范围,再利用不等式同向相加的性质.

(3) 非零实数 a, b ,如果 $a>b$,那么 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 的大小关系不确定;如果 $ab>0$ 且 $a>b$,那么 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$;如果 $a>0>b$,那么 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

15. 两个正数的大小关系是完全确定的,但通过运算就会产生非常奇妙的变化,基本不等式就是其中之一.通过运算(代数变形)可以得出基本不等式的哪些变式?

(1) 基本不等式: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

注意:①基本不等式成立的条件: $a>0, b>0$;②等号成立的条件:当且仅当 $a=b$ 时,等号成立;③其中 $\frac{a+b}{2}$ 叫作正数 a, b 的算术平均数, $\sqrt{ab}$ 叫作正数 a, b 的几何平均数.

(2) 几个重要的不等式

① $a^2+b^2 \geq 2ab (a, b \in \mathbf{R})$; ② $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2 (a, b \text{ 同号})$; ③ $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 (a, b \in \mathbf{R})$;

④ $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 (a, b \in \mathbf{R})$. 以上不等式等号成立的条件均为 $a=b$.

16. 用基本不等式解决最大值、最小值的思考方法和步骤是什么? 求最值时,应注意哪些问题?

已知 $x>0, y>0$, 则

(1) 如果 xy 是定值 p , 那么当且仅当 $x=y$ 时, $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{p}$. (简记: 积定和最小)

(2) 如果 $x+y$ 是定值 p , 那么当且仅当 $x=y$ 时, xy 有最大值 $\frac{p^2}{4}$. (简记: 和定积最大)

(注意:一正、二定、三相等, 特别要注意“一正”“三相等”这两类陷阱)

例如: ①若两个正数的和为定值, 则这两个正数的积一定有最大值吗? 不一定. 若这两个正数能相等, 则这两个数的积一定有最大值; 若这两个正数不能相等, 则这两个正数的积无最大值.

②函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 的最小值不是 2, 当 $x<0$ 时, $y<0$, 所以函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 无最小值.

17. 二次函数的零点与一元二次方程的根, 二次函数图象与 x 轴的交点之间有什么联系?

二次函数的零点即为对应的一元二次方程的根, 也是二次函数图象与 x 轴交点的

成长笔记

(3) 若 $A=B$, 则 p 是 q 的充要条件.

(4) 若 $A \subsetneq B$, 且 $B \subsetneq A$, 则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

3. 充分性和必要性的判断方法: (1) 定义法; (2) 命题法; (3) 传递法; (4) 集合法.

►► 拓展 真分数、假分数的性质

已知 a, b, m 都是正数, 且 $a>b$, 则

1. 真分数的性质:

$$\frac{b-m}{a-m} < \frac{b}{a} < \frac{b+m}{a+m} \quad (b-m>0);$$

2. 假分数的性质:

$$\frac{a+m}{b+m} < \frac{a}{b} < \frac{a-m}{b-m} \quad (b-m>0).$$

►► 拓展 基本不等式链

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ (其中 $a>0, b>0$, 当且仅当 $a=b$ 时, 等号成立)



横坐标.

18. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$, 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 与一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0(<0)$, 三个“二次”之间有什么联系?

结合二次函数的图象, 利用数形结合思想, 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根就是二次函数的函数值等于 0 时 x 的值, 一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0(<0)$ 的解集就是二次函数的函数值大于 0 (或小于 0) 时的 x 的取值范围, 就是二次函数的图象在 x 轴上方 (或下方) 的图象对应的横坐标的取值范围.

三个二次的关系如表:

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a>0$) 的图象			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a>0$) 的根	有两个不相等的实数根 x_1, x_2 ($x_1<x_2$)	有两个相等的实数根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2+bx+c>0$ ($a>0$) 的解集	$\{x \mid x<x_1 \text{ 或 } x>x_2\}$	$\{x \mid x \neq -\frac{b}{2a}\}$	$\mathbf{R}$
$ax^2+bx+c<0$ ($a>0$) 的解集	$\{x \mid x_1<x<x_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

19. 一元二次不等式的解法和步骤是什么?

(1) 先看二次项系数是否为正, 若为负, 则将二次项系数化为正数.

(2) 写出相应的方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a>0$), 计算判别式 Δ :

①当 $\Delta>0$ 时, 求出两根 x_1, x_2 , 且 $x_1<x_2$ (注意灵活运用十字相乘法);

②当 $\Delta=0$ 时, 求根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$;

③当 $\Delta<0$ 时, 方程无解.

(3) 根据不等式, 写出解集.

20. 不等式 $ax^2+bx+c>0(<0)$ 恒成立的条件是什么?

需要注意区分 $a=0$ 和 $a \neq 0$ 两种情况, 当 $a \neq 0$ 时, $ax^2+bx+c>0$ 恒成立的条件是 $\begin{cases} a>0, \\ \Delta<0, \end{cases}$ $ax^2+bx+c<0$ 恒成立的条件是 $\begin{cases} a<0, \\ \Delta<0. \end{cases}$

题型精解

题型一 集合间关系的判断

例 1 设集合 $M=\{x \mid x=5-4a+a^2, a \in \mathbf{R}\}$, $N=\{y \mid y=4b^2+4b+2, b \in \mathbf{R}\}$, 则 M 与 N 之间的关系是_____.

答案 $M=N$

解析 集合 $M=\{x \mid x=5-4a+a^2, a \in \mathbf{R}\}=\{x \mid x=(a-2)^2+1, a \in \mathbf{R}\}=\{x \mid x \geq 1\}$, $N=\{y \mid y=4b^2+4b+2, b \in \mathbf{R}\}=\{y \mid y=(2b+1)^2+1, b \in \mathbf{R}\}=\{y \mid y \geq 1\}$, 所以 $M=N$.

例 2 已知集合 $M=\left\{x \mid x=m-\frac{5}{6}, m \in \mathbf{Z}\right\}$, $N=\left\{x \mid x=\frac{n}{2}-\frac{1}{3}, n \in \mathbf{Z}\right\}$, $P=\left\{x \mid x=\frac{p}{2}+\frac{1}{6}, p \in \mathbf{Z}\right\}$, 则集合 M, N, P 的关系为 ()

A. $M=N=P$ B. $M \subseteq N=P$ C. $M \subseteq N \subsetneq P$ D. $P \subseteq M \subseteq N$

答案 B

解析 对于集合 $M=\left\{x \mid x=m-\frac{5}{6}, m \in \mathbf{Z}\right\}$, $x=m-\frac{5}{6}=\frac{6m-5}{6}=\frac{6(m-1)+1}{6}$, 对于集合 $N=\left\{x \mid x=\frac{n}{2}-\frac{1}{3}, n \in \mathbf{Z}\right\}$, $x=\frac{n}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3n-2}{6}=\frac{3(n-1)+1}{6}$.

成长笔记

► 拓展 分式不等式的解法

① 移项化零: 将分式不等式右边化为 0;

$$\textcircled{2} \frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x)g(x) < 0;$$

$$\textcircled{3} \frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x)g(x) > 0;$$

$$\textcircled{4} \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f(x)g(x) \leq 0, \\ g(x) \neq 0; \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f(x)g(x) \geq 0, \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$$

成长笔记

小分析

利用二次函数知识求出 x 和 y 的取值范围.

小妙招

先将各集合中的元素分母统一变为 6, 这样更容易辨别各集合中元素的特征.



成长笔记

$\frac{3(n-1)+1}{6}$, 对于集合 $P = \left\{ x \mid x = \frac{p}{2} + \frac{1}{6}, p \in \mathbf{Z} \right\}$, $x = \frac{p}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3p+1}{6}$. 由于集合 M , N , P 中元素的分子一样, 只需要比较其分子即可, 且 $m, n, p \in \mathbf{Z}$. 注意到 $3(n-1)+1$ 与 $3p+1$ 表示的数都是 3 的倍数加 1, $6(m-1)+1$ 表示的数是 6 的倍数加 1, 所以 $6(m-1)+1$ 表示的数的集合是前者表示的数的集合的子集, 所以 $M \subseteq N = P$.

总结反思

集合间的包含关系主要是通过集合间元素的关系来判断的, 若集合 A 中的每一个元素都在集合 B 中, 则集合 A 是 B 的子集, 此时还要进一步判断集合 A 是否为 B 的真子集, 以及集合 A 与 B 是否相等.

题型二 求集合的子集、真子集的个数

例 3 已知集合 $M = \{x \mid 1 \leq x \leq m, x \in \mathbf{Z}\}$. 若集合 M 有 8 个子集, 则实数 m 的值为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

答案 C

解析 根据题意, 集合 M 有 8 个子集, 设 M 中有 n 个元素, 则 $2^n = 8$, 所以 $n = 3$. 又 $M = \{x \mid 1 \leq x \leq m, x \in \mathbf{Z}\}$, 其元素为大于等于 1 且小于等于 m 的全部整数, 所以 $m = 3$.

例 4 (2025 四川成都期中) 满足 $\{1, 2\} \subseteq N \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的集合 N 有 _____ 个.

答案 8

解析 由题意可得 $\{1, 2\} \subseteq N \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 可以确定集合 N 中必含有元素 1, 2, 且是集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的子集. 因此依据集合 N 的元素个数分类如下:

含有 2 个元素: $\{1, 2\}$.

含有 3 个元素: $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}$.

含有 4 个元素: $\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}$.

含有 5 个元素: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

故满足题意的集合 N 共有 8 个.

总结反思

集合 A 中含有 $n (n \geq 1)$ 个元素, 集合 C 中含有 $m (m \geq n)$ 个元素, 且 $A \subseteq B \subseteq C$, 则符合条件的集合 B 有 2^{m-n} 个.

题型三 集合的综合运算

例 5 (1) 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 集合 $A = \{2, 3, 5, 6\}$, 集合 $B = \{1, 3, 4, 6, 7\}$, 则集合 $A \cap (\complement_U B) =$ ()

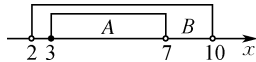
- A. $\{2, 5\}$ B. $\{3, 6\}$
C. $\{2, 5, 6\}$ D. $\{2, 3, 5, 6, 8\}$

(2) 设全集为 $\mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid 3 \leq x < 7\}$, $B = \{x \mid 2 < x < 10\}$, 则 $\complement_{\mathbf{R}}(A \cup B) =$ _____, $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B =$ _____.

答案 (1) A (2) $\{x \mid x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 10\}$ $\{x \mid 2 < x < 3 \text{ 或 } 7 \leq x < 10\}$

解析 (1) 由题意得 $\complement_U B = \{2, 5, 8\}$, 所以 $A \cap (\complement_U B) = \{2, 3, 5, 6\} \cap \{2, 5, 8\} = \{2, 5\}$.

(2) 把全集 $\mathbf{R}$ 和集合 A, B 在数轴上表示出来如图:



由图知 $A \cup B = \{x \mid 2 < x < 10\}$, 所以 $\complement_{\mathbf{R}}(A \cup B) = \{x \mid x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 10\}$.

因为 $\complement_{\mathbf{R}} A = \{x \mid x < 3 \text{ 或 } x \geq 7\}$, 所以 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = \{x \mid 2 < x < 3 \text{ 或 } 7 \leq x < 10\}$.

总结反思

解决集合交、并、补运算的技巧

(1) 若所给集合是有限集, 则先把集合中的元素一一列举出来, 然后结合交集、并集、补集的定义来求解. 在解答过程中常常借助于 Venn 图.

(2) 若所给集合是无限集, 则常借助数轴, 把已知集合及全集分别表示在数轴上, 然后进行交、并、补集的运算. 解答过程中要注意边界问题.

小分析

由 $\{1, 2\} \subseteq N$, 知 N 中必含有元素 1, 2, 从而所求问题转化为求集合 $\{3, 4, 5\}$ 的子集的个数.

小分析

(1) 先求 $\complement_U B$, 再求 $A \cap (\complement_U B)$.

(2) 碰到不等式问题, 通常借助数轴来研究.



题型四 集合中的参数问题

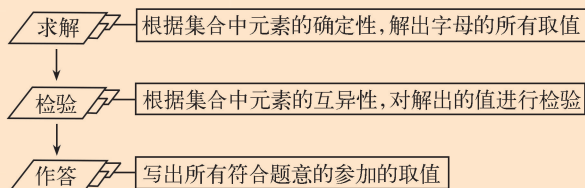
例6 (已知集合元素求参数) 已知集合 $A = \{a+3, (a+1)^2, a^2+2a+2\}$. 若 $1 \in A$, 则实数 a 的值是_____.

答案 -1 或 0

解析 ①若 $a+3=1$, 则 $a=-2$, 此时 $A = \{1, 1, 2\}$, 不符合集合中元素的互异性, 舍去. ②若 $(a+1)^2=1$, 则 $a=0$ 或 $a=-2$. 当 $a=0$ 时, $A = \{3, 1, 2\}$, 满足题意; 当 $a=-2$ 时, 由①知不符合条件, 舍去. ③若 $a^2+2a+2=1$, 则 $a=-1$, 此时 $A = \{2, 0, 1\}$, 满足题意. 综上所述, 实数 a 的值为 -1 或 0.

总结反思

根据集合中元素的特性求解参数值(范围)的步骤



例7 (已知集合间的关系求参数) (1) 设集合 $A = \{1, 3, a\}$, $B = \{1, 1-2a\}$, 且 $B \subseteq A$, 则实数 a 的值为_____.

(2) 已知集合 $A = \{x | -3 < x \leq 4\}$, $B = \{x | k+1 \leq x \leq 2k-1\}$, 且 $A \cup B = A$, 则实数 k 的取值范围是_____.

答案 (1) -1 或 $\frac{1}{3}$ (2) $\left\{k \mid k \leq \frac{5}{2}\right\}$

解析 (1) 由题意得 $1-2a=3$ 或 $1-2a=a$, 解得 $a=-1$ 或 $a=\frac{1}{3}$. 当 $a=-1$ 时, $A = \{1, 3, -1\}$, $B = \{1, 3\}$, 符合题意; 当 $a=\frac{1}{3}$ 时, $A = \left\{1, 3, \frac{1}{3}\right\}$, $B = \left\{1, \frac{1}{3}\right\}$, 符合题意. 所以实数 a 的值为 -1 或 $\frac{1}{3}$.

(2) 因为 $A \cup B = A$, 所以 $B \subseteq A$. ①当 $B = \emptyset$ 时, $k+1 > 2k-1$, 所以 $k < 2$; ②当 $B \neq \emptyset$ 时, 根据题意可得 $\begin{cases} k+1 \leq 2k-1, \\ -3 < k+1, \\ 2k-1 \leq 4, \end{cases}$ 解得 $2 \leq k \leq \frac{5}{2}$. 综上所述, 实数 k 的取值范围是 $\left\{k \mid k \leq \frac{5}{2}\right\}$.

总结反思

若集合中的元素是一一列举出的, 依据集合间的关系, 转化为方程(组)求解, 此时注意集合中元素的互异性; 若集合表示的是不等式的解集, 常依据数轴转化为不等式(组)求解, 此时注意端点值是否取到. 若集合 A 是确定的集合, 集合 B 为不确定的集合, 还要考虑集合 B 为空集的情况.

例8 (根据集合的运算求参数) 已知集合 T 是关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$ ($p^2-4q>0$) 的实数根组成的集合, 集合 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, 集合 $B = \{1, 4, 7, 10\}$, 且 $T \cap A = \emptyset$, $T \cap B = T$, 求实数 p 和 q 的值.

解析 因为 $\Delta = p^2-4q > 0$, 所以方程 $x^2+px+q=0$ 有两个不相等的实数根, 即集合 T 中含有两个元素. 因为 $A \cap T = \emptyset$, 所以 $1, 3, 5, 7, 9 \notin T$. 又因为 $T \cap B = T$, 所以 $T \subseteq B$. 所以 $T = \{4, 10\}$, 即 4 和 10 是方程 $x^2+px+q=0$ 的实数根. 由一元二次方程根与系数的关系, 得 $\begin{cases} 4+10=-p, \\ 4 \times 10=q, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} p=-14, \\ q=40. \end{cases}$ 所以 p 的值是 -14, q 的值是 40.

成长笔记

小分析

由 $1 \in A$ 得 $a+3=1$ 或 $(a+1)^2=1$ 或 $a^2+2a+2=1$, 根据集合中元素的互异性, 解出 a 后要验证.

小分析

(1) 由 $B \subseteq A$ 知, B 中的元素在 A 中, 从而 $1-2a=3$ 或 $1-2a=a$.

(2) 由 $A \cup B = A$, 知 B 是 A 的子集, 分 $B = \emptyset$ 和 $B \neq \emptyset$ 求解.

小分析

由 $T \cap A = \emptyset$, $T \cap B = T$, $A \cap B = \{1, 7\}$, 得 $T = \{4, 10\}$, 即 4 和 10 是关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$ 的根, 然后利用根与系数的关系求 p 和 q 的值.