

高中数学

小题为王[®]做

..... 全程提优

选择性必修第一册 SJ

主 编 恩波教育研究中心
编 委 梁家斌 邹广银 周家忠



南京大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高中数学小题狂做全程提优·选择性必修 第一册 SJ/
恩波教育研究中心主编. -- 南京: 南京大学出版社,
2024. 11(2025. 4 重印)

ISBN 978-7-305-27870-9

I. ①高… II. ①恩… III. ①中学数学课—高中—教
学参考资料 IV. ①G634.603

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2024)第 035754 号

出版发行 南京大学出版社
社 址 南京市汉口路 22 号 邮 编 210093

GAOZHONG SHUXUE XIAOTI KUANGZUO QUANCHENG TIYOU · XUANZEXING BIXIU · DI-YI CE · SJ

书 名 高中数学小题狂做全程提优·选择性必修·第一册·SJ
主 编 恩波教育研究中心
责任编辑 刘 琦 编辑热线 025-83530763

印 刷 句容市和平印务有限公司
开 本 880 mm×1230 mm 1/16 开 印张 22 字数 629 千
版 次 2024 年 11 月第 1 版 2025 年 4 月第 2 次印刷
ISBN 978-7-305-27870-9
定 价 69.80 元

网 址 <http://www.njupco.com>
官方微博 <http://weibo.com/njupco>
官方微信 njupress
销售咨询热线 025-83594756

-
- * 版权所有,侵权必究
 - * 凡购买南大版图书,如有印装质量问题,请与所购
图书销售部门联系调换

Contents 目录

第1章 直线与方程

►见答案

课时提优1	1.1 直线的斜率与倾斜角	1
课时提优2	1.2.1 直线的点斜式方程	3
课时提优3	1.2.2 直线的两点式方程	5
课时提优4	1.2.3 直线的一般式方程	7
课时提优5	1.3 两条直线的平行与垂直	9
单元综合练1	直线的方程	11
课时提优6	1.4 两条直线的交点	12
课时提优7	1.5.1 平面上两点间的距离	14
课时提优8	1.5.2 点到直线的距离	16
单元综合练2	平面内点、直线的位置关系综合问题	18
培优突破练1	直线中的对称问题	20
章末提优		22
感悟真题		24

方法	利用斜率判断三点共线与否的一般步骤/1
方法	截距式方程应用的注意事项/4
方法	直线方程的选择技巧/4
方法	研究动直线过定点问题的常用方法/7
方法	判断两直线垂直的方法/7
易错	忽视斜率不存在的情况造成漏解/8
方法	利用两条直线的平行或垂直判定几何图形形状的步骤与注意点/9
方法	计算两点间距离的方法/13
方法	求两条平行直线间距离的方法/15
方法	对称问题的解决方法/18
方法	利用对称性求距离的最值问题/19

第2章 圆与方程

课时提优9	2.1.1 圆的标准方程	25
课时提优10	2.1.2 圆的一般方程	27
课时提优11	2.2 直线与圆的位置关系	29
课时提优12	2.3 圆与圆的位置关系	31
单元综合练3	直线与圆的综合问题	33
培优突破练2	与圆有关的最值(范围)问题	35
培优突破练3	圆系方程及其应用	37
培优突破练4	与圆有关的定点(定值)问题	39
章末提优		41
阶段滚动(第1章)		44
感悟真题		44

方法	直接法求圆的标准方程的策略/23
方法	判断点与圆的位置关系的两种方法/23
方法	圆的一般方程的辨析/25
方法	代入法求解曲线方程的步骤/25
方法	直线与圆的位置关系的判断方法/27
方法	求直线与圆相交时弦长的方法/27
方法	两个圆位置关系的判断方法/29
方法	利用代数式的几何意义求最值的方法/36

第3章 圆锥曲线与方程

课时提优 13	3.1.1 椭圆的标准方程	45
课时提优 14	3.1.2 椭圆的几何性质	47
课时提优 15	3.1.3 直线与椭圆的位置关系	50
单元综合练 4	椭圆及其几何性质的综合应用	52
课时提优 16	3.2.1 双曲线的标准方程	54
课时提优 17	3.2.2 双曲线的几何性质	57
课时提优 18	3.2.3 双曲线的综合问题	59
课时提优 19	3.3.1 抛物线的标准方程	62
课时提优 20	3.3.2 抛物线的几何性质	64
单元综合练 5	双曲线、抛物线的综合应用	66
培优突破练 5	圆锥曲线中的定点、定值、定直线问题	68
培优突破练 6	圆锥曲线中的最值与范围问题	71
章末提优		73
阶段滚动(第1章—第2章)		76
感悟真题		76

方法	利用待定系数法求椭圆标准方程的步骤/49
方法	椭圆定义的应用技巧/49
方法	利用椭圆的几何性质求标准方程的思路/51
方法	求椭圆离心率的值或取值范围的方法/51
易错	忽视焦点的位置导致漏解/52
方法	点差法研究椭圆的中点弦问题/54
方法	由双曲线的方程研究几何性质的步骤/62
方法	共渐近线的双曲线方程的设法/62
方法	用待定系数法求抛物线方程的步骤/68
方法	处理抛物线的中点弦问题的常用解法/69
方法	圆锥曲线中取值范围问题的求解策略/79

第4章 数列

课时提优 21	4.1 数列	77
课时提优 22	4.2.1 等差数列的概念与通项公式	79
课时提优 23	4.2.2 等差数列的性质及应用	81
课时提优 24	4.2.3.1 等差数列的前 n 项和	83
课时提优 25	4.2.3.2 等差数列前 n 项和的性质及应用	85
单元综合练 6	等差数列的综合问题	87
课时提优 26	4.3.1 等比数列的概念与通项公式	88
课时提优 27	4.3.2 等比数列的性质及应用	90
课时提优 28	4.3.3.1 等比数列的前 n 项和	92
课时提优 29	4.3.3.2 等比数列前 n 项和的性质及应用	94
单元综合练 7	等比数列的综合问题	96
培优突破练 7	求数列通项的常用方法	98
培优突破练 8	数列求和的常用方法	100
培优突破练 9	数列中的不等式问题	102
章末提优		104
阶段滚动(第1章—第3章)		106
感悟真题		106

方法	根据数列的前几项求解通项公式的解题思路/87
方法	判断数列单调性的方法/88
方法	等差数列通项公式的求法与应用技巧/90
方法	等差数列的常用性质/90
方法	等差数列中对称设项法的应用/90
方法	数列 $\{a_n\}$ 成等差数列的充要条件/92
方法	等比中项的应用及注意事项/96
方法	判断一个数列是等比数列的方法/97
方法	等比数列前 n 项和的运算技巧/100
方法	错位相减法的适用范围与注意事项/100

第5章 导数及其应用

课时提优 30	5.1.1 平均变化率	107
课时提优 31	5.1.2 瞬时变化率——导数	109
课时提优 32	5.2.1 基本初等函数的导数	111
课时提优 33	5.2.2 函数的和、差、积、商的导数	113
课时提优 34	5.2.3 简单复合函数的导数	115
课时提优 35	5.3.1 单调性	117
课时提优 36	5.3.2 极大值与极小值	119
课时提优 37	5.3.3.1 最大值与最小值	121
课时提优 38	5.3.3.2 导数的实际应用	123
单元综合练 8	导数在研究函数中的应用	126
培优突破练 10	曲线的切线问题	128
培优突破练 11	三次函数的图象与性质	130
培优突破练 12	函数的存在性问题与恒成立问题	132
培优突破练 13	导数中的函数构造问题	134
章末提优		136
阶段滚动(第1章—第4章)		138
感悟真题		138

方法	求平均变化率的主要步骤/114
方法	用导数的定义求函数在某一点处的导数的步骤/115
方法	导数的几何意义及其应用/115
方法	求运动物体瞬时速度的步骤/115
方法	求曲线“在”某点处的切线方程的步骤/116
方法	求曲线“过”某点处的切线方程的步骤/117
方法	已知函数 $f(x)$ 在区间 D 上存在单调区间求参数的方法/121
方法	求函数最值的步骤/125
方法	分离参数法解决恒(能)成立问题的策略/136
方法	“双变量”恒(能)成立问题中的等价变换/137

答案全解精析(另册)

小帮手——思维导图+专题突破(另册)

第1章 直线与方程

课时提优 1 1.1 直线的斜率与倾斜角

答案见 P1

题型索引

题型 1 直线的斜率公式(题 1,6,7)

题型 2 直线的倾斜角问题(题 2,9)

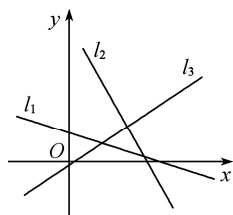
题型 3 直线的斜率与倾斜角的综合问题(题 4,8,10,14)

题型 4 利用直线的斜率处理共线(或不共线)问题(题 5,12)

题型 5 斜率的几何意义的应用(题 3,11,15)

基础强化

- (2024 广东潮州期末)已知斜率为 $\sqrt{2}$ 的直线经过点 $M(2,m)$, $N(1,2)$, 则 m 的值为 ()
A. $\sqrt{2}-2$ B. $\sqrt{2}+2$ C. 1 D. 0
- (2024 安徽滁州中学期末)若直线经过 $A(2,0)$, $B(1,\sqrt{3})$ 两点, 则直线 AB 的倾斜角为 ()
A. 30° B. 60° C. 120° D. 150°
- (2023 青海西宁校考阶段练习)如图, 在平面直角坐标系中有三条直线 l_1, l_2, l_3 , 其对应的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 , 则下列选项正确的是 ()



- A. $k_3 > k_1 > k_2$ B. $k_2 > k_1$
C. $k_2 k_3 > 0$ D. $k_3 > k_2 > k_1$
- (多选题, 2025 河北衡水期中)下列叙述正确的是 ()
A. 直线倾斜角 α 的取值范围是 $[0, \pi)$
B. 平面直角坐标系内的任意一条直线都存在倾斜角和斜率
C. 若一条直线的倾斜角为 α ($\alpha \neq 90^\circ$), 则此直线的斜率为 $\tan \alpha$
D. 与坐标轴垂直的直线的倾斜角是 0° 或 90°
 - (2024 全国专题练习)若点 $P(3,m)$ 在过点 $A(2,-1)$, $B(-3,4)$ 的直线上, 则 $m =$ _____.

- (2025 青海海南期中)过 $A(3m-1, 3m-2)$, $B(2m^2, m^2)$ 两个不同点的直线 l 的斜率为 1, 则实数 m 的值为 _____.

综合提升

- (2023 江苏期末)已知直线 l 上的一点先向右平移 4 个单位长度, 再向下平移 2 个单位长度后, 仍在该直线上, 则直线 l 的斜率为 ()
A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$
C. 2 D. -2
- (2025 天津阶段练习)已知直线斜率为 k , 且 $-\sqrt{3} \leq k \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则倾斜角 α 的取值范围是 ()
A. $[0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$
B. $[0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}, \pi)$
C. $[0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{2\pi}{3}, \pi)$
D. $[0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$
- (多选题)若直线 l 与 x 轴交于点 A , 其倾斜角为 α , 直线 l 绕点 A 顺时针旋转 45° 后得到直线 l_1 , 则直线 l_1 的倾斜角可能为 ()
A. $\alpha + 45^\circ$ B. $\alpha + 135^\circ$
C. $\alpha - 45^\circ$ D. $135^\circ - \alpha$
- (多选题, 2024 河南商丘期中)已知在直角坐标系中, 等边三角形 ABC 的顶点 A 与原点重

合,且 AB 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,则 BC 的斜率可能为 ()

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{5}$ B. $-\frac{2\sqrt{3}}{5}$
C. $-2\sqrt{3}$ D. $-3\sqrt{3}$

11. (2025 上海阶段练习)已知点 $P(x, y)$ 在线段 AB (包括端点) 上运动, $A(2, 4), B(5, -2)$, 则 $\frac{y+1}{x+1}$ 的取值范围是_____.

12. (2025 云南期中)过曲线 $y = \log_3 x$ 上一点 A 作平行于两坐标轴的直线,分别交曲线 $y = \log_3 x$ 于点 B, C . 若直线 BC 过原点,则其斜率为_____.

13. (2024 河南南阳阶段练习)已知直线 l 过点 $A(2m, 3), B(2, -1)$.

- (1) 若直线 l 的倾斜角为 45° ,求实数 m 的值;
(2) 若直线 l 的倾斜角为钝角,求实数 m 的取值范围.

14. (2025 贵州贵阳阶段练习)已知两点 $A(-4, 3), B(3, 2)$,过点 $P(0, -1)$ 的直线 l 与线段 AB 有公共点. 求:

- (1) 直线 l 的斜率 k 的取值范围;
(2) 直线 l 的倾斜角的取值范围.

✓应用·创新

15. 已知函数 $f(x) = \log_3(x+2)$. 若 $a > b > c > 0$, 则 $\frac{f(a)}{a}, \frac{f(b)}{b}, \frac{f(c)}{c}$ 的大小关系为 ()

- A. $\frac{f(c)}{c} < \frac{f(b)}{b} < \frac{f(a)}{a}$
B. $\frac{f(a)}{a} < \frac{f(b)}{b} < \frac{f(c)}{c}$
C. $\frac{f(c)}{c} < \frac{f(a)}{a} < \frac{f(b)}{b}$
D. $\frac{f(a)}{a} < \frac{f(c)}{c} < \frac{f(b)}{b}$

单元综合练1 直线的方程

答案见 P9

综合提升

- (2024 湖北华中师大一附中期末) 已知直线 l 的方程为 $x + y \sin \theta + 3 = 0 (\theta \in \mathbf{R})$, 则直线 l 的倾斜角 α 的取值范围是 ()
 A. $[0, \pi)$ B. $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$
 C. $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ D. $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]$
- (2025 江西南昌阶段练习) 已知在 $\triangle ABC$ 中, $B(1, 3), C(5, 1)$, 且 $AB = AC$, 则边 BC 上的中线所在直线的方程为 ()
 A. $x + 2y - 3 = 0$ B. $x + 2y - 7 = 0$
 C. $2x - y + 4 = 0$ D. $2x - y - 4 = 0$
- (多选题, 2023 湖南雅礼中学阶段练习) 直线 $l: y = m(x + 1) - \sqrt{3}$ 与直线 $x + y - 2 = 0$ 的交点位于第一象限, 则直线 l 的倾斜角 θ 可能是 ()
 A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{5\pi}{18}$ D. $\frac{5\pi}{12}$
- (多选题, 2025 福建期中) 已知直线 $l_1: (a - 2)x + 3y + a = 0, l_2: ax + 3(a - 2)y - 3 = 0$, 则下列说法正确的是 ()
 A. 若 l_1 满足在 x 轴上的截距与在 y 轴上的截距相等, 则 $a = 5$
 B. l_2 必过定点 $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$
 C. 若 $l_1 // l_2$, 则 $a = 1$ 或 4
 D. 若 $l_1 \perp l_2$, 则 $a = 2$
- (2025 江苏扬州期中) 过点 $P(0, 2)$ 作直线 l , 使它被两条相交直线 $2x - y - 2 = 0$ 和 $x + y + 3 = 0$ 所截得的线段, 恰好被点 P 平分, 则直线 l 的方程为_____.
- (2025 辽宁大连阶段练习) 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 A, B 分别在射线 $y = 2x (x \geq 0)$ 和射

线上 $y = -\frac{1}{2}x (x \geq 0)$ 运动, 且 $\triangle AOB$ 的面积为 1, 则 A, B 两点的横坐标之积为_____, $\triangle AOB$ 周长的最小值为_____.

- (2023 河北张家口一中阶段练习) 菱形 $ABCD$ 的顶点 A, C 的坐标分别为 $A(-1, -1), C(9, -13)$, 边 BC 所在直线过点 $P(4, -3)$. 求:
 (1) 边 AD 所在直线的方程;
 (2) 对角线 BD 所在直线的方程.
- (2024 广东广州期中) 已知分别过定点 A, B 的直线 $l_1: ax + y - 3 = 0, l_2: 3x + (a - 2)y - 4a - 1 = 0, l_2$ 与 x 轴交于点 C .
 (1) 若 l_1 为 $\triangle ABC$ 中, 边 BC 上的高所在直线, 求边 BC 上的中线所在直线的方程;
 (2) 若 l_1 为 $\triangle ABC$ 中, 边 BC 上的中线所在直线, 求边 BC 上的高所在直线的方程.

应用·创新

- 在平面直角坐标系中, 横坐标、纵坐标都为有理数的点称为有理点. 若任作一条倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线, 则这样的直线最多能通过_____个有理点.

培优突破练 1 直线中的对称问题

答案见 P18

1. (2023 四川内江校考期中) 已知点 $A(1,2)$ 关于直线 l 对称的点为 $B(3,1)$, 则直线 l 的方程为 ()

A. $4x+2y-5=0$ B. $x-2y-5=0$
C. $x+2y-5=0$ D. $4x-2y-5=0$

2. 已知点 $P(1,2)$ 在直线 l 上, 直线 l_1 与 l 关于点 $(0,1)$ 对称, 则一定在直线 l_1 上的点为 ()

A. $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ B. $(-1, \frac{3}{2})$
C. $(-1, 0)$ D. $(1, 0)$

3. (2023 陕西长安一中期中) 设直线 $l_1: 3x-2y-6=0$, 直线 $l_2: x-y-4=0$, 则 l_1 关于 l_2 对称的直线方程为 ()

A. $3x+2y-14=0$ B. $2x-3y-14=0$
C. $3x+2y-6=0$ D. $2x-3y-6=0$

4. (2025 江苏盐城阶段练习) 已知 $A(0,4)$, $B(0,-4)$, $C(4,0)$, $E(0,1)$, $F(0,-1)$, 一束光线从点 F 出发射到 BC 上的点 D 经 BC 反射后, 再经 AC 反射, 落到线段 AE 上(不含端点), 则直线 FD 的斜率的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -\frac{5}{8})$ B. $(-\frac{5}{8}, 0)$
C. $(-\infty, -\frac{3}{8})$ D. $(-\frac{3}{8}, 0)$

5. (2023 湖北咸宁中学阶段练习) 已知点 $O(0,0)$, $A(-3,0)$, 直线 $l: y=kx$ 上存在点 P , 且点 P 关于直线 $l': y=x$ 对称的点 P' 满足 $P'O=2P'A$, 则实数 k 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$

B. $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

C. $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$

D. $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$

6. (2023 四川石室中学阶段练习) 已知点 $M(3,5)$,

在直线 $l: x-2y+2=0$ 和 y 轴上各找一点 P , Q , 则 $\triangle MPQ$ 的周长的最小值为 ()

A. $3\sqrt{5}$ B. $4\sqrt{6}$
C. $3\sqrt{6}$ D. $4\sqrt{5}$

7. (多选题, 2024 山西太原期中) 已知直线 $l_1: x+y=0$, $l_2: 2x-3y-6=0$, 则下列说法正确的是 ()

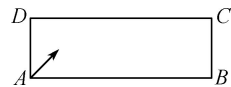
A. 直线 l_1 与 l_2 相交于点 $(\frac{6}{5}, -\frac{6}{5})$

B. 直线 l_1, l_2 和 x 轴围成的三角形的面积为 $\frac{6}{5}$

C. 直线 l_2 关于原点 O 对称的直线方程为 $2x-3y+6=0$

D. 直线 l_2 关于直线 l_1 对称的直线方程为 $3x-2y+6=0$

8. (多选题, 2023 江苏新丰中学期中) 台球运动已有五六百年的历史, 参与者用球杆在台上击球. 如图, 有一张长方形球台 $ABCD$, $AB=3AD$, 现从角落 A 沿角 α 的方向把球打出去, 球经两次碰撞球台内沿后进入角落 C 的球袋中. 若和光线一样, 台球在球台上碰到障碍物后也遵从反射定律, 则 $\tan \alpha$ 的值可以为 ()



A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\frac{3}{2}$

9. (多选题, 2023 福建德化一中阶段练习) 已知点 $M(-1,1)$, $N(2,1)$, 且点 P 在直线 $l: x+y+2=0$ 上, 则 ()

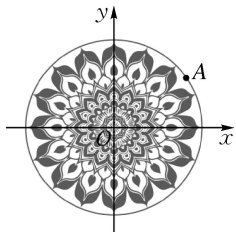
A. 存在点 P , 使得 $PM \perp PN$

B. 若 $\triangle MNP$ 为等腰三角形, 则点 P 的个数是 3

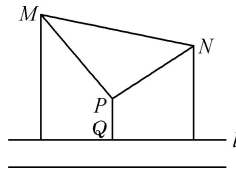
C. $PM+PN$ 的最小值为 $\sqrt{29}$

D. $|PM-PN|$ 最大值为 3

10. (2025 河南洛阳期中)剪纸艺术是我国民间艺术之一,很多剪纸作品都体现了数学中的对称美.如图所示的剪纸是一幅中心对称图形,以中心对称点为坐标原点将其放入平面直角坐标系中,若图中点 A 的坐标为 $(2,1)$,其关于 y 轴对称的点 B 的坐标为 $(3-m, n+2)$,其关于坐标原点对称的点 C 的坐标为 $(-x, 2y-1)$,则 $mn+xy=$ _____.



11. (2024 江西九江阶段练习)设直线 $l: x+y-1=0$,一束光线从原点 O 出发沿射线 $y=kx(x \geq 0)$ 向直线 l 射出,经 l 反射后与 x 轴交于点 M ,再次经 x 轴反射后与 y 轴交于点 N .若 $|\overrightarrow{MN}| = \frac{\sqrt{13}}{6}$,则 k 的值为 _____.
12. (2023 辽宁沈阳二十中阶段练习)已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(4,2)$,角 B ,角 C 的平分线分别与直线 $x+y-2=0$ 和 $2x-y+1=0$ 重合,则边 BC 所在直线的方程为 _____.
13. (2024 河北期中)在 $\triangle ABC$ 中, $A(3,6)$, $\angle B$ 的平分线方程为 $y=1$,边 AC 上的高线 BH 方程的为 $x-2y+1=0$.
- (1) 求边 AC 所在直线的方程;
 - (2) 求边 BC 所在直线的方程.
14. 已知直线 $l: x-y+3=0$,一束光线从点 $A(1,2)$ 处射向 x 轴上一点 B ,又从点 B 反射到 l 上的一点 C ,最后从点 C 反射回点 A .
- (1) 试判断由此得到的 $\triangle ABC$ 的个数;
 - (2) 求直线 BC 的方程.
15. 如图,相距 14 km 的两个居民小区 M 和 N 位于河岸 l (直线) 的同侧, M 和 N 距离河岸分别为 10 km 和 8 km. 现要在河的小区一侧选一地点 P ,在 P 处建一个生活污水处理站,从 P 处排直线水管 PM, PN 分别到两个小区和垂直于河岸的水管 PQ ,使小区污水经处理后排入河道. 设 PQ 段长为 t km ($0 < t < 8$).
- (1) 求污水处理站 P 到两小区的水管的总长的最小值(用 t 表示);
 - (2) 请确定污水处理站 P 的位置,使所排三段水管的总长最小,并求出此时污水处理站分别到两小区水管的长度.



章末提优

答案见 P21

1. (2025 江苏镇江期中)将直线 $l_1: x+y-2=0$ 绕点 $(2,0)$ 顺时针旋转 90° 得到直线 l_2 , 则直线 l_2 的方程是 ()

A. $2x-y+2=0$ B. $x+y+2=0$
C. $x-y-2=0$ D. $2x-y-2=0$

2. (2025 江苏扬州期中)已知直线 $3x+4y-3=0$ 与直线 $6x+my-1=0$ 平行, 则它们之间的距离为 ()

A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{2}{5}$

3. (2023 陕西西安统考期中)费马点是法国著名数学家费马于 1643 年提出的, 根据费马的结论可得: 当 $\triangle ABC$ 的三个内角都小于 120° 时, 在 $\triangle ABC$ 内部存在唯一的点 P , 使点 P 到三角形三个顶点距离之和最小, 且点 P 满足 $\angle APB = \angle BPC = \angle APC = 120^\circ$. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $A(2,0), B(1,2), \triangle AOB$ 的费马点为 P , 则点 B 到直线 PA 的距离为 ()

A. 2 B. 3
C. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$

4. (2025 广东东莞期中)已知 $t \in [0,1]$, 且点 $M(2+t, 5t-3), P(0,-1)$, 则直线 MP 的倾斜角的取值范围是 ()

A. $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ B. $[\frac{3\pi}{4}, \pi)$
C. $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ D. $[0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi)$

5. (2023 江苏邗江中学月考)设直线 $l_1: x-y+1=0$ 与直线 $l_2: mx+y+3=0$ 的交点为 A, P , Q 分别为 l_1, l_2 上任意两点, M 为 PQ 的中点. 若 $AM = \frac{1}{2}PQ$, 则 m 的值为 ()

A. 2 B. -2 C. 1 D. -1

6. (2025 贵州期中)已知函数 $f(x) = \frac{4x-3}{x-1}$ 的图

象与直线 $kx-y+4-k=0$ 有两个交点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 则 $x_1+x_2+y_1+y_2 =$ ()

A. 6 B. 8 C. 10 D. 12

7. (多选题, 2023 湖南岳阳一中阶段练习)已知直线 l 的方程是 $Ax+By+C=0$ (A, B 不同时为 0), 则下列结论正确的是 ()

A. $A^2+C^2 \neq 0$
B. 若 $C=-A$, 则直线 l 过定点 $(1,0)$
C. 若 $A \cdot B < 0$ 且 $B \cdot C > 0$, 则直线 l 不过第二象限
D. 若 $AC > 0$, 则直线 l 必过第二、三象限

8. (多选题, 2025 河南洛阳期中)已知直线 $l: mx-y+3m+1=0$, 则下列说法正确的是 ()

A. 直线 l 过定点 $(-3,1)$
B. 点 $P(1,-1)$ 到直线 l 的最大距离为 $2\sqrt{5}$
C. 直线 l 一定经过第四象限
D. 当 $m=-1$ 时, 直线 l 关于直线 $x+2y-3=0$ 对称的直线为 $x+7y-28=0$

9. (多选题, 2023 广东深圳校考阶段练习)设 $m \in \mathbf{R}$, 过定点 A 的动直线 $x+my+1=0$ 和过定点 B 的动直线 $mx-y-3m+4=0$ 交于点 $P(x, y)$, 则下列说法正确的是 ()

A. 平面上存在定点 Q , 使得 PQ 的长度为定值
B. $PA+PB$ 的最大值为 8
C. $PA \cdot PB$ 的最大值为 32
D. 点 P 到直线 AB 的距离的最大值为 $2\sqrt{2}$

10. (2023 江苏扬州统考期中)设 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 为直线 l 上的两个不同的点, 则 $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1)$, 我们把向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 及与它平行的非零向量都称为直线 l 的方向向量. 当直线 l 与 x 轴不垂直时, $\frac{1}{x_2-x_1} \overrightarrow{P_1P_2}(1, k)$ (其中 $k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 叫作直线 l 的斜率) 也是直线 l 的一个方向向量. 如果直

线 l 经过点 $P_1(1,2)$, 且它的一个方向向量是 $(1,3)$, 那么直线 l 上任意一点 $P(x,y)$ 的坐标 x,y 满足的关系式为_____.

11. (2025 湖北期中) 在平面直角坐标系 xOy 中, A 为直线 $l: y=2x$ 上在第一象限内的点, $B(5,0)$, 线段 AB 的垂直平分线分别交直线 AB 和直线 l 于 C, D 两点. 若 $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$, 则点 A 的横坐标为_____.

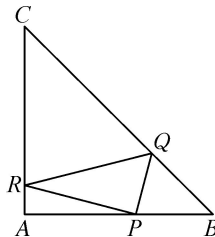
12. (2023 福建福州联考期中) 若恰有两组实数对 (A, B) 满足关系式 $\frac{|2A+B+3|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|5A-2B+3|}{\sqrt{A^2+B^2}} = t$, 则符合题意的 t 的值为_____.

13. (2023 广东容山中学期中) 已知直线 l 经过点 $P(-2,4)$.

- (1) 若原点到直线 l 的距离为 2, 求直线 l 的方程;
- (2) 若直线 l 被两条相交直线 $l_1: 2x-y-2=0$ 和 $l_2: x+y-7=0$ 所截得的线段恰被点 P 平分, 求直线 l 的方程.

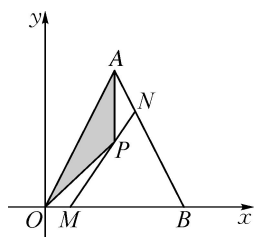
14. (2025 四川期中) 如图, 在等腰直角三角形 ABC 中, $AB=AC=4$, P 是边 AB 上异于点 A, B 的一点, 光线从点 P 出发, 经 BC, CA 反射后又回到原点 P , 光线 QR 经过 $\triangle ABC$ 的重心 (若 G, A, B, C 分别是三角形的重心和三个顶点, 且分别为 $G(x, y), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$, 则有 $G(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$).

- (1) 建立适当的平面直角坐标系, 求 $\triangle ABC$ 的重心 G 的坐标;
- (2) 求点 P 的坐标;
- (3) 求 $\triangle PQR$ 的周长.



15. (2025 河南周口阶段练习)如图,将一块三角形的玉石 ABO 置于平面直角坐标系中,已知 $AO=AB=\sqrt{5}$, $OB=2$, 点 $P(1,1)$, 图中阴影三角形部分为玉石上的瑕疵,为了将这块玉石雕刻成工艺品,要先将瑕疵部分切割掉,可沿经过点 P 的直线 MN 进行切割.

- (1) 求直线 MN 的倾斜角 α 的取值范围.
- (2) 是否存在直线 MN , 使得点 A 关于直线 MN 的对称点在线段 AB 上?
- (3) 设玉石经切割后剩余部分的面积为 S , 求 S 的取值范围.



感悟真题

1. (2020 全国 III 卷) 点 $(0, -1)$ 到直线 $y = k(x+1)$ 的距离的最大值为 ()
A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2
2. (2016 上海卷(理)) 已知平行直线 $l_1: 2x + y - 1 = 0$, $l_2: 2x + y + 1 = 0$, 则 l_1, l_2 间的距离是 _____.

☞ 答案见 P23

3. (2014 四川卷(理)) 设 $m \in \mathbf{R}$, 过定点 A 的动直线 $x + my = 0$ 和过定点 B 的动直线 $mx - y - m + 3 = 0$ 交于点 $P(x, y)$, 则 $PA \cdot PB$ 的最大值是 _____.

第2章 圆与方程

课时提优9 2.1.1 圆的标准方程

答案见 P23

题型索引

题型1 圆的标准方程的特征(题1)

题型2 根据条件求圆的标准方程(题2,5,6,8,9)

题型3 点与圆的位置关系问题(题3,4)

题型4 与圆有关的最值问题(题3,11,13(3),15)

题型5 与圆有关的应用问题(题12,14)

基础强化

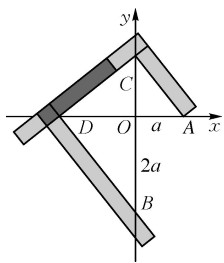
- (2024 山西太原统考期末)圆 $(x+1)^2+(y+2)^2=3$ 的圆心坐标和半径分别为 ()
A. $(-1,-2),\sqrt{3}$ B. $(1,2),\sqrt{3}$
C. $(-1,-2),3$ D. $(1,2),3$
- (2024 河北邯郸统考期末)已知圆 M 过点 $O(0,0),A(2,0),B(2,-2)$,则圆 M 的标准方程是 ()
A. $(x-1)^2+(y+1)^2=2$
B. $(x-1)^2+(y-1)^2=2$
C. $(x+1)^2+(y+1)^2=2$
D. $(x+1)^2+(y-1)^2=2$
- (2025 福建泉州期中)已知点 Q 在圆 $(x+3)^2+(y-2)^2=49$ 上,点 $P(1,5)$,则 PQ 的值可能为 ()
A. 1 B. 7 C. 13 D. 15
- (多选题,2024 安徽亳州阶段练习)已知 $P_1(4,9),P_2(6,3)$ 两点,以线段 P_1P_2 为直径的圆为圆 P ,则 ()
A. 点 $M(6,9)$ 在圆 P 上
B. 点 $N(3,3)$ 在圆 P 内
C. 点 $Q(5,3)$ 在圆 P 内
D. 点 $R(2,7)$ 在圆 P 外
- (2024 广东肇庆统考期末)写出一个过点 $(0,0),(2,2)$ 的圆的标准方程:_____.
- (2025 北京房山期中)已知点 $B(-2,1)$ 和点 $C(3,2)$, $\text{Rt}\triangle ABC$ 以 BC 为斜边,则直角顶点 A 的轨迹方程为_____.

综合提升

- (2024 河南开封联考期末)已知圆 M 经过点 $(0,2),(0,4)$,且圆心 M 在直线 $2x-y-1=0$ 上,则圆 M 的面积为 ()
A. 2π B. $\sqrt{5}\pi$ C. 4π D. 5π
- (2025 重庆期中)已知圆 $M:(x+1)^2+(y+2)^2=1$,则圆 M 关于直线 $l:2x-y-5=0$ 对称的圆的方程为 ()
A. $(x-4)^2+(y+3)^2=1$
B. $(x+4)^2+(y+3)^2=1$
C. $(x-3)^2+(y-4)^2=1$
D. $(x-3)^2+(y+4)^2=1$
- (多选题,2023 福建福州联考期中)已知圆 M 与 y 轴相切,且经过 $A(1,0),B(2,1)$ 两点,则圆 M 可能是 ()
A. $(x-1)^2+(y-2)^2=4$
B. $(x-5)^2+(y+3)^2=25$
C. $(x-1)^2+(y-1)^2=1$
D. $(x-3)^2+(y+1)^2=9$
- (多选题)已知圆 M 过点 $A(1,3),B(-2,4)$,且圆心 M 在 x 轴上,则下列说法正确的是 ()
A. 圆心 M 的坐标为 $(-\frac{5}{3},0)$
B. 圆 M 的标准方程为 $(x+\frac{5}{3})^2+y^2=\frac{145}{9}$
C. 圆 M 与 y 轴的交点坐标为 $(0,\pm\frac{2\sqrt{10}}{3})$
D. 圆 M 上一点到点 $(\frac{10}{3},0)$ 的距离的最大值为 $5+\frac{\sqrt{145}}{3}$

11. 圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 上的点到直线 $x - y = 2$ 的距离的最大值是_____.

12. (2024 河南阶段练习) 求作一个立方体, 使其体积等于已知立方体体积的 2 倍, 这就是历史上有名的立方倍积问题. 1837 年法国数学家阿诺德兹尔证明了立方倍积问题不能只用直尺与圆规作图来完成, 不过人们发现, 跳出直尺与圆规作图的框框, 可以找到不同的作图方法. 如图是柏拉图 (公元前 427—公元前 347 年) 的方法: 假设已知立方体的棱长为 a , 作两条互相垂直的直线, 相交于点 O , 在一条直线上截取 $OA = a$, 在另一条直线上截取 $OB = 2a$, 在直线 OB , OA 上分别取点 C, D , 使 $\angle ACD = \angle BDC = 90^\circ$ (只要移动两个直角尺, 使一个直角尺的边缘通过点 A , 另一个直角尺的边缘通过点 B , 并使两直角尺的另一边重合, 则两直角尺的直角顶点即为 C, D), 则线段 OC 即为所求立方体的一边. 以直线 OA, OC 分别为 x 轴、 y 轴建立平面直角坐标系. 若圆 E 经过点 A, C, D , 则圆 E 的方程为_____.

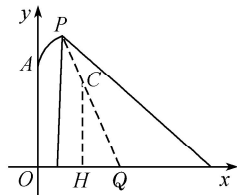


13. (2025 北京大兴期中) 已知圆 C 过 $A(4, 1)$, $B(0, 1)$, $M(2, 3)$ 三点, 直线 $l: y = x + 2$.

- (1) 求圆 C 的方程;
- (2) 求圆 C 关于直线 l 对称的圆 C' 的方程;
- (3) 若 P 为直线 l 上的动点, Q 为圆 C 上的动点, O 为坐标原点, 求 $OP + PQ$ 的最小值.

14. (2024 上海进才中学期末) 如图, 在宽为 14 的路边安装路灯, 灯柱 OA 高为 8, 灯杆 PA 是半径为 r 的圆 C 的一段劣弧. 路灯采用锥形灯罩, 灯罩顶 P 到路面的距离为 10, 到灯柱 OA 所在直线的距离为 2. 设 Q 为灯罩轴线与路面的交点, 圆心 C 在线段 PQ 上. 以 O 为原点, OA 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系.

- (1) 当 Q 恰好为路面中点时, 求此时圆 C 的方程;
- (2) 记圆心 C 在路面上的射影为点 H , 且点 H 在线段 OQ 上, 求 HQ 长的最大值.



应用·创新

15. (2025 广东广州期中) 已知 $A(-2, -2)$, $B(-2, 6)$, $C(4, -2)$ 三点, 点 P 在圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上运动, 则 $PA^2 + PB^2 + PC^2$ 的最大值与最小值之差为_____.

阶段滚动(第1章)

答案见 P47

- (2025 海南直辖县级单位期中)已知直线 $(k+3)x+(k-2)y-1=0$ 不过第二象限,则原点到直线 $y=kx+2$ 的距离的取值范围是()
 A. $[\frac{2\sqrt{5}}{5}, 2]$ B. $[\frac{\sqrt{10}}{5}, 2]$
 C. $[\frac{2\sqrt{10}}{5}, 2]$ D. $[\frac{3\sqrt{5}}{5}, 2]$
- (多选题, 2024 安徽马鞍山二中期末)若三条直线 $l_1: 2x-y+1=0, l_2: x+y-1=0, l_3: 2x+ay+a-2=0$ 有两个公共点,则实数 a 的值可以为()
 A. -2 B. -1
 C. 1 D. 2
- (2024 江苏常州统考期末)已知点 $A(-2, 1), B(a, 1-a)$, 过点 A, B 的直线为 l , 则下列说法正确的有()
 A. 若 $a=1$, 则直线 l 的方程为 $x+3y-1=0$
 B. 若 $a=-1$, 则直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$
 C. 对任意实数 a , 都有 $AB \geq \sqrt{3}$
 D. 存在两个不同的实数 a , 使直线 l 在 x 轴、 y 轴上的截距互为相反数
- 已知直线 $l_1: 2x-y+2=0$ 与 $l_2: x+2y+1=0$ 相交于点 P , 过点 $Q(1, 1)$ 的直线 l 与 l_1, l_2 分别交于 M, N 两点, 写出一个使“ $\frac{S_{\triangle MPQ}}{S_{\triangle NPQ}} = \frac{3}{2}$ ”成立的直线 l 的方程:_____.
- (2025 黑龙江哈尔滨期中)已知边长为 1 的正三角形 ABC 的内心为 O , 过点 O 的直线与边 AB, AC 分别交于点 P, Q , 则 $\frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2}$ 的最大值为_____.

感悟真题

答案见 P48

- (2023 新高考 I 卷)过点 $(0, -2)$ 与圆 $x^2+y^2-4x-1=0$ 相切的两条直线的夹角为 α , 则 $\sin \alpha$ 的值为()
 A. 1 B. $\frac{\sqrt{15}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$
- (2024 全国甲卷文)已知直线 $ax+y+2-a=0$ 与圆 $C: x^2+y^2+4y-1=0$ 交于 A, B 两点, 则 AB 的最小值为()
 A. 2 B. 3 C. 4 D. 6
- (多选题, 2021 新高考 II 卷)已知直线 $l: ax+by-r^2=0$ 与圆 $C: x^2+y^2=r^2$, 点 $A(a, b)$, 则下列说法正确的是()
 A. 若点 A 在圆 C 上, 则直线 l 与圆 C 相切
 B. 若点 A 在圆 C 内, 则直线 l 与圆 C 相离
 C. 若点 A 在圆 C 外, 则直线 l 与圆 C 相离
 D. 若点 A 在直线 l 上, 则直线 l 与圆 C 相切
- (多选题, 2021 新高考 I 卷)已知点 P 在圆 $(x-5)^2+(y-5)^2=16$ 上, 点 $A(4, 0), B(0, 2)$, 则()
 A. 点 P 到直线 AB 的距离小于 10
 B. 点 P 到直线 AB 的距离大于 2
 C. 当 $\angle PBA$ 最小时, $PB=3\sqrt{2}$
 D. 当 $\angle PBA$ 最大时, $PB=3\sqrt{2}$
- (2022 新高考 I 卷)写出与圆 $x^2+y^2=1$ 和 $(x-3)^2+(y-4)^2=16$ 都相切的一条直线的方程:_____.
- (2022 新高考 II 卷)设点 $A(-2, 3), B(0, a)$, 若直线 AB 关于 $y=a$ 对称的直线与圆 $(x+3)^2+(y+2)^2=1$ 有公共点, 则 a 的取值范围是_____.

第3章 圆锥曲线与方程

课时提优 13 3.1.1 椭圆的标准方程

答案见 P49

题型索引

题型 1 椭圆的定义及其应用(题 1,4,6,7,10,11,14,15)

题型 2 椭圆的方程及应用(题 5,8,13)

题型 3 含参数的椭圆方程问题(题 2,3,9)

题型 4 与椭圆有关的轨迹问题(题 12)

基础强化

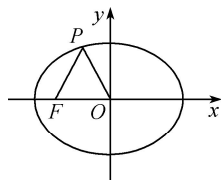
- (2025 广东中山阶段练习)平面内,动点 P 的坐标 (x, y) 满足方程 $\sqrt{(x+\sqrt{3})^2+y^2} + \sqrt{(x-\sqrt{3})^2+y^2} = 2\sqrt{6}$, 则动点 P 的轨迹方程为 ()
 A. $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{21} = 1$ B. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$
 C. $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ D. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$
- (2024 福建龙岩一中期末)已知方程 $\frac{x^2}{m+1} + \frac{y^2}{7-m} = 1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆,则实数 m 的取值范围是 ()
 A. $(-1, 7)$ B. $(-1, 3)$
 C. $(3, 7)$ D. $(-1, 3) \cup (3, 7)$
- (2025 浙江强基联盟联考)若椭圆 $C: \frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上一点到椭圆 C 的两个焦点的距离之和为 $2m$, 则 $m =$ ()
 A. 1 B. 3 C. $\frac{9}{2}$ D. 1 或 3
- (多选题, 2025 陕西西安期中)下列说法正确的是 ()
 A. 已知 $F_1(-4, 0), F_2(4, 0)$, 平面内到 F_1, F_2 两点的距离之和等于 8 的点的轨迹是线段
 B. 已知 $F_1(-4, 0), F_2(4, 0)$, 平面内到 F_1, F_2 两点的距离之和等于 6 的点的轨迹是椭圆
 C. 平面内到点 $F_1(-4, 0), F_2(4, 0)$ 的距离相

等的点的轨迹是椭圆

- 平面内到 $F_1(-4, 0), F_2(4, 0)$ 两点的距离之和等于点 $M(5, 3)$ 到 F_1, F_2 的距离之和的点的轨迹是椭圆
- (2025 贵州贵阳期中)若椭圆 C 的长轴长为 12, 且与椭圆 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} = 1$ 有相同的焦点, 则椭圆 C 的标准方程为_____.
- (2024 上海晋元中学模拟预测)已知椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ 的焦点为 F_1, F_2 , 点 P 在椭圆上, 且 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$, 则点 P 到 y 轴的距离为_____.

综合提升

- (2025 重庆阶段练习)已知 M 是椭圆 $C: \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ 上一点, F_1, F_2 分别是椭圆 C 的左、右焦点. 若 $\frac{MF_1}{MF_2} = \frac{4}{3}$, 则 $\triangle MF_1F_2$ 的面积为 ()
 A. 49 B. 48 C. 25 D. 24
- 如图, 已知椭圆 C 的中心为原点 $O, F(-2\sqrt{5}, 0)$ 为 C 的左焦点, P 为 C 上一点, 满足 $OP = OF$, 且 $PF = 4$, 则椭圆 C 的方程为 ()



- A. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{5} = 1$ B. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$
C. $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{10} = 1$ D. $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{25} = 1$

9. (多选题, 2025 广东佛山期中) 已知曲线 $C: x^2 + my^2 = 1$, 则下列结论正确的有 ()

- A. 若 $0 < m < 1$, 则曲线 C 是焦点在 y 轴上的椭圆
B. 若 $m = 1$, 则曲线 C 是圆
C. 若 $m > 1$, 则曲线 C 是焦点在 y 轴上的椭圆
D. 若 $m = 0$, 则曲线 C 是两条平行于 y 轴的直线

10. (多选题) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (3 > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , O 为坐标原点, P 是椭圆上一点, 延长 PF_2 与椭圆交于点 A . 若 $OF_1 = OA$, $\triangle OF_1A$ 的面积为 2, 则 AF_1 的值可以为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

11. (2025 天津期中) 设 P 是椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上一点, F_1, F_2 是椭圆的两个焦点, 且 $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{3}$, 则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为 _____, $\triangle F_1PF_2$ 的内切圆半径为 _____.

12. (2024 河南信阳统考期末) 圆 $C_1: (x+2)^2 + y^2 = 1$ 与 $C_2: (x-2)^2 + y^2 = 49$ 的位置关系为 _____; 与圆 C_1, C_2 都内切的动圆圆心的轨迹方程为 _____.

13. (2025 上海期中) 求满足下面条件的椭圆的标准方程.

(1) 两个焦点的坐标分别为 $F_1(-2, 0), F_2(2, 0)$, 并且椭圆经过点 $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$;

(2) 椭圆经过点 $P(-2\sqrt{3}, 1)$ 和点 $Q(\sqrt{3}, -2)$.

14. 设圆 $x^2 + y^2 + 2x - 15 = 0$ 的圆心为 A , 直线 l 过点 $B(1, 0)$ 且与 x 轴不重合, l 交圆 A 于 C, D 两点, 过点 B 作 AC 的平行线交 AD 于点 E . 求证: $EA + EB$ 为定值, 并写出点 E 的轨迹方程.

应用·创新

15. (2025 江苏南通阶段练习) 已知点 M 在椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上, 点 $A(0, -\frac{3}{4}), B(1, 0)$, 则 $MA + MB$ 的最大值为 ()

- A. $\frac{11}{4}$ B. 4 C. $\frac{21}{4}$ D. 5

第4章 数列

课时提优 21 4.1 数列

答案见 P87

题型索引

题型 1 数列的概念及分类(题 4)

题型 3 利用递推关系求数列的项或通项(题 2)

题型 5 求数列中的最大(小)项(题 12)

题型 2 根据数列的前几项求一个通项公式(题 1)

题型 4 数列的单调性的判断及其应用(题 5,6)

题型 6 与周期有关的数列问题(题 3,11)

基础强化

1. (2025 甘肃联考)数列 $-2, 4, -\frac{26}{3}, 20, \dots$ 的一个通项公式可以是 ()

A. $a_n = (-1)^n \cdot 2n$

B. $a_n = (-1)^n \cdot \frac{3^n - 1}{n}$

C. $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2^{n+1} - 2}{n}$

D. $a_n = (-1)^n \cdot \frac{3^n - n}{n}$

2. (2024 北京期中)已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, 则 $a_4 =$ ()

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{7}{4}$

C. $\frac{4}{5}$

D. $\frac{9}{5}$

3. (2025 甘肃酒泉期末)已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$, 且 $a_{n+1}a_n = a_n - 1$, 则 a_{2021} 的值为 ()

A. 3

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $-\frac{1}{2}$

4. (多选题, 2025 重庆永川阶段练习)下面四个数列中, 既是无穷数列又是递增数列的为 ()

A. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

B. $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, -\frac{1}{2^{n-1}}, \dots$

C. $\sin \frac{\pi}{7}, \sin \frac{2\pi}{7}, \sin \frac{3\pi}{7}, \dots, \sin \frac{n\pi}{7}, \dots$

D. $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{n}, \dots$

5. (2024 青海海西期中)设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n^2 - (k-5)n + 1$. 若数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 则实数 k 的取值范围是_____.

6. (2024 四川凉山期中)已知函数 $f(x) = \begin{cases} (3-a)x-7, & x \leq 8, \\ a^{x-8}, & x > 8. \end{cases}$ 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = f(n) (n \in \mathbb{N}^*)$, 且 $\{a_n\}$ 是递增数列, 则实数 a 的取值范围是_____.

综合提升

7. (2023 黑龙江鹤岗一中期中)已知在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2, a_n = \frac{a_{n-1} + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - a_{n-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} (n \geq 2)$, 则数列

$\{a_n\}$ 的周期为 ()

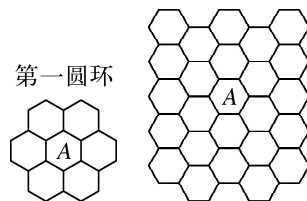
A. 3

B. 6

C. 9

D. 15

8. (2024 山西期中)石墨烯是一种由单层碳原子构成的具有平面网状结构的物质, 其结构如图所示, 其中每个六边形的顶点是一个碳原子的所处位置. 现令六边形 A 为中心六边形, 其外围紧邻的每个六边形构成“第一圆环”, “第一圆环”外围紧邻的六边形构成“第二圆环”. 以此类推, 则“第七圆环”上的碳原子数为 ()



A. 42

B. 120

C. 168

D. 210

9. (多选题, 2024 江苏盐城阶段练习) 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = -2n^2 + 13n$, 则 ()

- A. 该数列仅有 6 个正数项
 B. 该数列有无限多个负数项
 C. 该数列的最大项就是函数 $f(x) = -2x^2 + 13x$ 的最大值
 D. -70 是该数列中的一项

10. (多选题, 2023 福建漳州期中) 下列能作为数列 $2, 0, 2, 0, \dots$ 的通项公式的为 ()

- A. $a_n = 1 + (-1)^{n+1}$ B. $a_n = 1 - (-1)^n$
 C. $a_n = 1 + (-1)^n$ D. $a_n = 1 - \cos n\pi$

11. (2025 安徽六安阶段练习) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, n \in \mathbf{N}^*$, 则 $a_{2\ 023} =$ _____.

12. (2025 江苏扬州联考) 已知数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{3n-7}{2^{n-1}}$, 则当 $n =$ _____ 时, b_n 取最大值, 最大值为 _____.

13. (2025 江苏淮安阶段练习) 已知下列三个数列的前 4 项: ① $4, 2, 4, 2, \dots$; ② $2, -1, 2, -1, \dots$; ③ $5, -3, 5, -3, \dots$.

- (1) 分别写出这三个数列的通项公式;
 (2) 根据(1)的结果, 推测 ABAB 型数列的通项公式.

14. (2024 江西阶段练习) 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{2n^2 - 3n}{4n^2 - 9}$.

- (1) 求 a_4 .
 (2) $\frac{45}{101}$ 是不是该数列中的项? 为什么?
 (3) 在区间 $(\frac{3}{10}, \frac{7}{20})$ 内是否有该数列中的项? 若有, 求出有几项; 若没有, 请说明理由.

应用·创新

15. (2025 湖南长沙月考) 古希腊毕达哥拉斯学派的数学家研究过各种多边形数. 如三角形数 $1, 3, 6, 10, \dots$, 第 n 个三角形数为 $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$. 记第 n 个 k 边形数为 $N(n, k)$ ($k \geq 3$), 下面列出了部分 k 边形数中第 n 个数的表达式: 三角形数 $N(n, 3) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$; 正方形数 $N(n, 4) = n^2$; 五边形数 $N(n, 5) = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$; 六边形数 $N(n, 6) = 2n^2 - n$. 可以推测 $N(n, k)$ 的表达式, 由此计算 $N(20, 23) =$ ()

- A. 4 020 B. 4 010
 C. 4 210 D. 4 120

第5章 导数及其应用

课时提优 30 5.1.1 平均变化率

答案见 P114

题型索引

题型 1 平均变化率的定义(题 10)

题型 2 平均变化率的几何意义(题 3)

题型 3 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[m, n]$ 内的平均变化率(题 1, 4)

题型 4 质点在闭区间 $[m, n]$ 内的平均速度(题 13)

基础强化

1. (2024 北京房山期末) 函数 $f(x) = 2^x + 1$ 在 $[-1, 2]$ 上的平均变化率是 ()

A. $\frac{21}{2}$ B. $\frac{7}{2}$ C. $\frac{7}{6}$ D. $\frac{7}{12}$

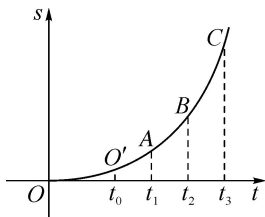
2. (2025 江苏东台阶段检测) 设地铁在某段时间内进行调试, 由始点起经过 t s 后的距离为 $s(t) = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$ (单位: m), 则列车运行

10 s 的平均速度为 ()

A. 10 m/s B. 8 m/s
C. 4 m/s D. 0 m/s

3. (2025 江苏淮安联考) 汽车行驶的路程 s 和时间 t 之间的函数图象如图所示, 在时间段 $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$ 上的平均速度分别为 $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$, 则三者的大小关系为 ()

A. $\bar{v}_1 > \bar{v}_2 > \bar{v}_3$
B. $\bar{v}_3 > \bar{v}_2 > \bar{v}_1$
C. $\bar{v}_2 > \bar{v}_1 > \bar{v}_3$
D. $\bar{v}_2 > \bar{v}_3 > \bar{v}_1$



4. (多选题) 下列四个函数在区间 $[0, 1]$ 上的平均变化率是正数的有 ()

A. $y = x$ B. $y = e^x$
C. $y = \sin x$ D. $y = \frac{1}{x+1}$

5. (2025 湖南怀化期中) 已知函数 $f(x) = x^2 + 3x$ 在 $[0, m]$ 上的平均变化率是函数 $g(x) = 2x + 1$ 在 $[1, 4]$ 上的平均变化率的 3 倍, 则实数 m 的值是_____.

6. (2025 山东潍坊阶段检测) 若函数 $f(x) = x^2 - m^2$ 在区间 $[2, t]$ 上的平均变化率为 5, 则 $t =$ _____.

综合提升

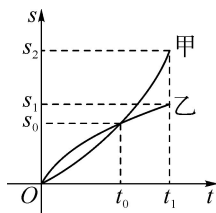
7. (2024 江苏南通阶段练习) 函数 $f(x) = x^2 - \cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上的平均变化率为 ()

A. 1 B. 2 C. $\pi + \frac{2}{\pi}$ D. π

8. (2024 福建龙岩期中) 在 $x = 1$ 附近, 取 $\Delta x = 0.3$, 在下面四个函数中, 平均变化率最大的是 ()

A. $y = x$ B. $y = x^2$ C. $y = x^3$ D. $y = \frac{1}{x}$

9. (多选题, 2024 江苏高邮联考) 如图所示是物体甲、乙在时间 0 到 t_1 范围内路程的变化情况, 下列说法错误的是 ()



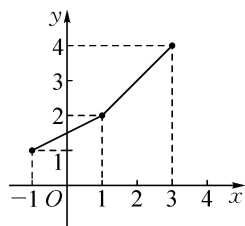
- A. 在 0 到 t_0 范围内, 甲的平均速度大于乙的平均速度
B. 在 0 到 t_0 范围内, 甲的平均速度小于乙的平均速度
C. 在 t_0 到 t_1 范围内, 甲的平均速度大于乙的平均速度
D. 在 t_0 到 t_1 范围内, 甲的平均速度小于乙的平均速度.

10. (多选题, 2025 山东烟台阶段练习) 设函数 $y=f(x)$, 当自变量 x 由 x_0 变化到 $x_0+\Delta x$ 时, 下列说法正确的是 ()

A. Δx 可以是正数也可以是负数, 但不能为 0
 B. 函数值的改变量 Δy 为 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$
 C. 函数 $f(x)$ 在 $[x_0, x_0+\Delta x]$ 上的平均变化率为 $f(x_0) \cdot \Delta x$
 D. 函数 $f(x)$ 在 $[x_0, x_0+\Delta x]$ 上的平均变化率为 $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

11. (2025 广东江门阶段检测) 已知二次函数 $f(x)$ 从 1 到 $1+\Delta x$ 的平均变化率为 $2\Delta x+3$, 请写出满足条件的一个二次函数的表达式 $f(x)=$ _____.

12. (2025 安徽芜湖阶段检测) 如图是某变量变化的折线图, 则该变量在区间 $[0, 2]$ 上的平均变化率为_____.



13. (2025 广东湛江联考) 在一次跳水运动中, 运动员相对于水面的高度 h (单位: m) 与起跳后的时间 t (单位: s) 存在函数关系 $h(t) = -4.9t^2 + 6.5t + 10$, 根据上述探究, 你能求出该运动员在 $0 \leq t \leq 0.5, 1 \leq t \leq 2, 0 \leq t \leq \frac{65}{49}$ 内的平均速度吗? 有什么发现?

14. 甲、乙两人跑步的路程与时间关系以及百米赛跑的路程与时间关系分别如图 1, 图 2 所示, 请问:

(1) 甲、乙两人哪一个跑得快?
 (2) 甲、乙两人百米赛跑, 快到终点时, 谁跑得比较快?

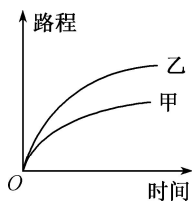


图 1

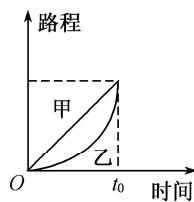
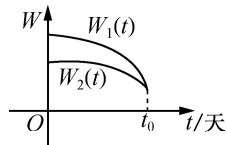


图 2

应用·创新

15. (多选题) 两个学校 W_1, W_2 开展节能活动, 活动开始后两学校的用电量 $W_1(t), W_2(t)$ 与时间 t (天) 之间的关系如图所示, 则下列说法错误的有 ()



A. W_1 比 W_2 节能效果好
 B. W_1 的用电量在时间 $[0, t_0]$ 内的平均变化率比 W_2 的用电量在时间 $[0, t_0]$ 内的平均变化率大
 C. 两个学校的节能效果一样好
 D. W_1 与 W_2 自节能以来用电量总是一样大