

第一章 集合与常用逻辑用语

第 001 练 集合及其运算

1. D 解析 由题意得 $A \cup B = \{x | -3 < x < 5\}$, $A \cap B = \{x | 0 < x < 2\}$. 故阴影部分表示的集合为 $\complement_{A \cup B}(A \cap B) = \{x | -3 < x \leq 0 \text{ 或 } 2 \leq x < 5\}$.

2. C 解析 联立方程组 $\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=0, \\ y=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1, \\ y=\frac{9}{4}. \end{cases}$ 所以集合 $M \cap N$ 含有 2 个元素, 其真子集个数为 $2^2 - 1 = 3$.

3. ABD 解析 A, B, D 中都有明确的标准, C 中“近似”标准不明确.

4. ACD 解析 A 中, 两个集合都是由元素 2 和 5 组成的, 是同一个集合; B 中, 集合 P 中的元素是点 (2, 5), 集合 Q 中的元素是点 (5, 2), 故 P 与 Q 不是同一个集合; C 中, 两个集合都是由所有奇数组成的, 是同一个集合; D 中, 两个集合都是由所有是 6 的整数倍的数组成的, 是同一个集合.

5. 4 解析 由题意知 $ax^2 + ax + 1 = 0$ 只有一个实数解. 当 $a = 0$ 时, 方程无实数解; 当 $a \neq 0$ 时, 由 $\Delta = a^2 - 4a = 0$, 解得 $a = 4$. 所以 $a = 4$.

6. 15 解析 当 $0 \leq x < \frac{1}{8}$ 时, $f(x) = [2x] + [4x] + [8x] = 0 + 0 + 0 = 0$; 当 $\frac{1}{8} \leq x < \frac{1}{4}$ 时, $f(x) = [2x] + [4x] + [8x] = 0 + 0 + 1 = 1$; $\frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{8}$ 时, $f(x) = [2x] + [4x] + [8x] = 0 + 1 + 2 = 3$; 当 $\frac{3}{8} \leq x < \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = [2x] + [4x] + [8x] = 0 + 1 + 3 = 4$; 当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = [2x] + [4x] + [8x] = 1 + 2 + 4 = 7$. 故 $A = \{0, 1, 3, 4, 7\}$, 元素和为 $0 + 1 + 3 + 4 + 7 = 15$.

7. 解: (1) 由题得 $A \cup B = \{x | 2 < x < 10\}$, $\complement_{\mathbb{R}} A = \{x | x < 3 \text{ 或 } x > 7\}$.

所以 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = \{x | 2 < x < 3 \text{ 或 } 7 < x < 10\}$.

(2) 由 $A \cap C = C$ 得 $C \subseteq A$.

当 $C = \emptyset$ 时, 有 $2a - 3 > a + 1$, 即 $a > 4$, 符合题意;

当 $C \neq \emptyset$ 时, 有 $a \leq 4$, 且满足 $\begin{cases} a+1 \leq 7, \\ 2a-3 \geq 3, \end{cases}$ 解得 $3 \leq a \leq 4$.

所以实数 a 的取值范围是 $[3, +\infty)$.

8. 解: (1) 由题意知 $A = \{x | [x - (m - 2)][x - (m + 2)] \leq 0, m \in \mathbb{R}\} = \{x | m - 2 \leq x \leq m + 2\}$, $B = \left\{x \mid -1 < x < \frac{7}{2}\right\}$.

因为 $A \cup B = B$, 所以 $A \subseteq B$.

所以 $\begin{cases} m-2 > -1, \\ m+2 < \frac{7}{2}. \end{cases}$ 解得 $1 < m < \frac{3}{2}$.

所以实数 m 的取值范围为 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$.

(2) 由 (1) 知 $A = \{x | m - 2 \leq x \leq m + 2\}$, $B = \left\{x \mid -1 < x < \frac{7}{2}\right\}$.

因为 $A \cap B = \left\{x \mid 0 \leq x < \frac{7}{2}\right\}$,

所以 $\begin{cases} m-2=0, \\ m+2 \geq \frac{7}{2}. \end{cases}$ 解得 $m=2$.

所以实数 m 的取值范围是 $\{2\}$.

(3) 由题意知 $\complement_{\mathbb{R}} A = \{x | x < m - 2 \text{ 或 } x > m + 2\}$, $B = \left\{x \mid -1 < x < \frac{7}{2}\right\}$.

因为 $B \subseteq \complement_{\mathbb{R}} A$,

所以 $m - 2 \geq \frac{7}{2}$ 或 $m + 2 \leq -1$. 解得 $m \geq \frac{11}{2}$ 或 $m \leq -3$.

所以实数 m 的取值范围是 $(-\infty, -3] \cup \left[\frac{11}{2}, +\infty\right)$.

第 002 练 充要条件与量词

1. B 解析 将全称量词改为存在量词, 同时否定结论.

2. C 解析 由题意知 $p \Rightarrow q$, 且 $q \not\Rightarrow p$, 所以 $m + 1 > 3$, 即 $m > 2$. 故实数 m 的取值范围是 $(2, +\infty)$.

3. ABD 解析 命题“每个正方形都是矩形”含有全称量词“每个”, 是全称量词命题, 故 A 错误; 命题“有一个素数不是奇数”含有存在量词“有一个”, 是存在量词命题, 故 B 错误; 命题“ $\forall x \in \mathbb{R}, x^4 \in \mathbb{R}$ ”的否定为“ $\exists x \in \mathbb{R}, x^4 \notin \mathbb{R}$ ”, 故 C 正确; 命题“每个整数都是有理数”的否定为“存在一个整数不是有理数”, 故 D 错误.

4. AD 解析 对于 A, 若 $xc^2 > yc^2$, 则 $c^2 \neq 0$, 则 $x > y$, 反之 $x > y$, 当 $c = 0$ 时, 得不到 $xc^2 > yc^2$, 所以“ $xc^2 > yc^2$ ”是“ $x > y$ ”的充分不必要条件, 故 A 正确; 对于 B, 若 $x^2 > y^2$, 则 $|x| > |y|$, 得不到 $x > y$, 反之由 $x > y$ 也得不到 $x^2 > y^2$ (如 $x = 1$, $y = -2$), 所以“ $x^2 > y^2$ ”是“ $x > y$ ”的既不充分也不必要条件, 故 B 错误; 对于 C, 由 $|x| > |y|$ 不能推出 $x > y$ (如 $x = -2$, $y = -1$), 由 $x > y$ 也不能推出 $|x| > |y|$ (如 $x = 1$, $y = -2$), 所以“ $|x| > |y|$ ”是“ $x > y$ ”的既不充分也不必要条件, 故 C 错误; 对于 D, 由 $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} < 0$ 可得 $y < x < 0$, 即能推出 $x > y$; 但由 $x > y$ 不能推出 $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} < 0$ (因为 x, y 的正负不确定), 所以“ $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} < 0$ ”是“ $x > y$ ”的充分不必要条件, 故 D 正确.

5. $a = 0$ 或 $b = 0$ $a = 0(b = 0)$ 解析 由 $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ 或 $b = 0$; 由 $a = 0$ 或 $b = 0 \Rightarrow ab = 0$, 故“ $ab = 0$ ”成立的充要条件为“ $a = 0$ 或 $b = 0$ ”. 由 $ab = 0 \not\Rightarrow a = 0$, 而由 $a = 0 \Rightarrow ab = 0$, 故“ $ab = 0$ ”成立的一个充分不必要条件为“ $a = 0$ ”. 同理可知, “ $b = 0$ ”也为“ $ab = 0$ ”成立的一个充分不必要条件.

6. ①③ 解析 ①“若 $x + y = 0$, 则 x, y 互为相反数”的逆命题为“若 x, y 互为相反数, 则 $x + y = 0$ ”, 为真命题; ②“全等三角形的面积相等”的否命题为“不全等三角形的面积不相等”, 为假命题; ③因为 $x^2 + 2x + q = 0$ 有实根, 所以 $\Delta = 4 - 4q \geq 0$, 即 $q \leq 1$, 所以“若 $q \leq 1$, 则 $x^2 + 2x + q = 0$ 有实根”的逆命题为“若 $x^2 + 2x + q = 0$ 有实根, 则 $q \leq 1$ ”, 为真命题; ④因为等腰三角形的两个内角相等, 所以原命题为假命题, 原命题与其逆否命题的

真假性一致,所以其逆否命题也为假命题.

7. 解:由题意得 $A = \left\{ x \mid \frac{x-1}{x+1} < 0 \right\} = \{ x \mid -1 < x < 1 \}$, 当 $a=1$ 时, $B = \{ x \mid (x-b)^2 < 1 \} = \{ x \mid b-1 < x < b+1 \}$.

因为 $A \cap B \neq \emptyset$, 所以 $\begin{cases} b+1 > -1, \\ b-1 < 1, \end{cases}$ 解得 $-2 < b < 2$.

所以实数 b 的取值范围是 $(-2, 2)$.

8. 解:(1)由题意知命题:“ $\forall x \in [-1, 1], x^2 - x - m < 0$ ”是真命题.

所以 $x^2 - x - m < 0$ 在 $[-1, 1]$ 上恒成立.

所以 $m > (x^2 - x)_{\max}$, 即 $m > 2$, 即 $B = \{ m \mid m > 2 \}$.

(2)由 $(x-3a)(x-a-2)=0$ 可得 $x=3a$ 或 $x=2+a$.

当 $3a > 2+a$, 即 $a > 1$ 时, 解集 $A = \{ x \mid 2+a < x < 3a \}$, 若“ $x \in B$ ”是“ $x \in A$ ”的必要不充分条件, 则 $A \not\subseteq B$, 所以 $2+a \geq 2$, 即 $a \geq 0$, 所以 $a > 1$;

当 $3a = 2+a$, 即 $a = 1$ 时, 解集 $A = \emptyset$, 满足 $A \not\subseteq B$;

当 $3a < 2+a$, 即 $a < 1$ 时, 解集 $A = \{ x \mid 3a < x < 2+a \}$, 若 $A \not\subseteq B$ 成立, 则 $3a \geq 2$, 即 $a \geq \frac{2}{3}$, 所以 $\frac{2}{3} \leq a < 1$.

所以实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{2}{3}, +\infty \right)$.

第二章 不等式

第 003 练 不等式的性质

1. C 解析 由 $|a-b| > |b|$ 得 $a^2 + b^2 - 2ab > b^2$, 所以 $a(a-2b) > 0$, 所以 $\frac{a-2b}{a} > 0$, 所以 $1 - \frac{2b}{a} > 0$, 所以 $\frac{b}{a} < \frac{1}{2}$. 反之, 也成立. 所以“ $|a-b| > |b|$ ”是“ $\frac{b}{a} < \frac{1}{2}$ ”的充要条件.

2. A 解析 由题意知 $\begin{cases} a+2 > 0, \\ 2a+2 > 0, \end{cases}$ 解得 $a > -1$. 故实数 a 的取值范围是 $(-1, +\infty)$.

3. CD 解析 由 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0$ 可得 $b < a < 0$, 所以 $|a| < |b|$, 故 A, B 错误; 因为 $a+b < 0, ab > 0$, 所以 $a+b < ab$ 成立, 故 C 正确; $a^3 > b^3$, 故 D 正确.

4. BC 解析 对于 A, 由于 $ac^2 \geq bc^2$, 当 $c=0$ 时, 不一定有 $a \geq b$, 故 A 错误; 对于 B, 若 $a < b < 0$, 则 $a-b < 0$, 故 $a^2 - ab = a(a-b) > 0, ab - b^2 = b(a-b) > 0$, 所以 $a^2 > ab > b^2$, 故 B 正确; 对于 C, 由 $c > d$ 得 $-d > -c$, 又 $a > b$, 所以 $a-d > b-c$, 故 C 正确; 对于 D, 由 $a < b$ 无法确定 a, b 的正负, 所以 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$ 的正负无法确定, 故 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 的大小无法确定, 故 D 错误.

5. < 解析 因为 $(\sqrt{7} + \sqrt{5})^2 - (2\sqrt{6})^2 = 12 + 2\sqrt{35} - 24 = 2\sqrt{35} - 12 = \sqrt{140} - \sqrt{144} < 0$, 所以 $\sqrt{7} + \sqrt{5} < 2\sqrt{6}$.

6. $\left(\frac{1}{8}, 2 \right)$ 解析 因为 $2 < b < 8$, 所以 $\frac{1}{8} < \frac{1}{b} < \frac{1}{2}$, 而 $1 < a < 4$, 所以 $1 \times \frac{1}{8} < a \cdot \frac{1}{b} < 4 \times \frac{1}{2}$, 即 $\frac{1}{8} < \frac{a}{b} < 2$. 故 $\frac{a}{b}$ 的取值范围是 $\left(\frac{1}{8}, 2 \right)$.

7. 证明: 因为 $c > d > 0$, 所以 $\frac{1}{d} > \frac{1}{c} > 0$.

又因为 $a > b > 0$, 所以 $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

8. 证明:(1)因为 $b > a > 0, m > 0$, 所以 $a-b < 0, b+m > 0$.

所以 $\frac{a}{b} - \frac{a+m}{b+m} = \frac{a(b+m) - b(a+m)}{b(b+m)} = \frac{(a-b)m}{b(b+m)} < 0$.

所以 $\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$.

(2)由 $x > 0, y > 0, z > 0$ 得 $x+y+z > x+y, x+y+z > y+z, x+y+z > z+x$.

所以 $\frac{x}{x+y} > \frac{x}{x+y+z}, \frac{y}{y+z} > \frac{y}{x+y+z}, \frac{z}{z+x} > \frac{z}{x+y+z}$.

所以 $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} > \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{z}{x+y+z} = 1$.

又根据(1)的结论可知

$\frac{x}{x+y} < \frac{x+z}{x+y+z}, \frac{y}{y+z} < \frac{x+y}{x+y+z}, \frac{z}{z+x} < \frac{y+z}{x+y+z}$.

所以 $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} < \frac{x+z}{x+y+z} + \frac{x+y}{x+y+z} + \frac{y+z}{x+y+z} = 2$.

所以 $1 < \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} < 2$.

第 004 练 基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} (a > 0, b > 0)$

及其应用

1. D 解析 因为 $x > 0, y > 0$, 且 $2x+y=6$, 所以 $9^x + 3^y \geq 2\sqrt{9^x \cdot 3^y} = 2\sqrt{3^{2x+y}} = 2\sqrt{3^6} = 54$, 当且仅当 $9^x = 3^y$, 即 $x = \frac{3}{2}, y = 3$ 时, 等号成立, 所以 $9^x + 3^y$ 有最小值 54.

2. D 解析 设半圆 O 的半径为 R , 由 $AD = R + OD = a, BD = R - OD = b$, 可得 $R = \frac{a+b}{2}, OD = \frac{a-b}{2}$. 因为 $CD \perp AB, AC \perp BC$, 所以 $CD^2 = AD \cdot BD = ab$. 在 $\text{Rt} \triangle OFD$ 中, $DF = \sqrt{OD^2 + OF^2} = \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$. 在 $\text{Rt} \triangle OCD$ 中, $DE \perp OC$, 则 $\cos \angle OCD = \frac{CD}{OC} = \frac{CE}{CD}$, 可得 $CE = \frac{CD^2}{OC} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b}$. 因为 $CE \leq DF$, 所以 $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

3. ACD 解析 对于 A, $y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2} \geq 2\sqrt{\frac{2}{x} \cdot \frac{x}{2}} = 2$, 当且仅当 $\frac{2}{x} = \frac{x}{2}$, 即 $x = 2$ 时, 等号成立. 故 A 正确; 对于 B, $y = 4x + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x} + 3x \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} + 3x = 3x + 2$. 又 $x \geq 1$, 所以 $y_{\min} = 5$. 故 B 错误; 对于 C, $y = 3x - \frac{1}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $y_{\min} = 3 - 1 = 2$, 故 C 正确; 对于 D, 由 $x \geq 1$ 得 $x+1 \geq 0, y = x - 1 + \frac{4}{x+1} = x + 1 + \frac{4}{x+1} - 2 \geq 2\sqrt{(x+1) \cdot \frac{4}{x+1}} - 2 = 4 - 2 =$

2, 当且仅当 $x+1=\frac{4}{x+1}$, 即 $x=1$ 时, 等号成立, 故 D 正确.

4. ACD 解析 因为 $a>0, b>0$, 所以 $a+b+\frac{1}{\sqrt{ab}} \geq 2\sqrt{ab}+\frac{1}{\sqrt{ab}} \geq 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $a=b$ 且 $2\sqrt{ab}=\frac{1}{\sqrt{ab}}$, 即 $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号, 故 A 正确; 因为 $a+b \geq 2\sqrt{ab}>0$, 所以 $\frac{2ab}{a+b} \leq \frac{2ab}{2\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$, 当且仅当 $a=b$ 时取等号, 所以 $\frac{2ab}{a+b} \geq \sqrt{ab}$ 不一定成立, 故 B 错误; 因为 $\frac{2ab}{a+b} \leq \frac{2ab}{2\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$, 当且仅当 $a=b$ 时取等号, $\frac{a^2+b^2}{a+b} = \frac{(a+b)^2-2ab}{a+b} = a+b-\frac{2ab}{a+b} \geq 2\sqrt{ab}-\sqrt{ab} = \sqrt{ab}$, 当且仅当 $a=b$ 时取等号, 所以 $\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \sqrt{ab}$, 所以 $\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}} \geq a+b$, 故 C 正确; 因为 $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = 2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geq 2+2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 4$, 当且仅当 $a=b$ 时取等号, 故 D 正确.

5. $(-\infty, 9]$ 解析 由题意得 $m \leq (x+y)_{\min}$.

解法 1 (消元法) 由 $x+4y-xy=0$ 得 $y=\frac{x}{x-4}$. 因为 x, y 是正实数, 所以 $y>0, x>4$, 则 $x+y=x+\frac{x}{x-4}=x+\frac{4}{x-4}+1=(x-4)+\frac{4}{x-4}+5 \geq 2\sqrt{(x-4) \cdot \frac{4}{x-4}}+5=9$, 当且仅当 $x-4=\frac{4}{x-4}$, 即 $x=6$ 时, 等号成立, 即 $x+y$ 的最小值是 9, 故 $m \leq 9$, 即实数 m 的取值范围是 $(-\infty, 9]$.

解法 2 (“1”的代换) 因为 x, y 是正实数, 所以由 $x+4y-xy=0$, 得 $\frac{4}{x}+\frac{1}{y}=1, x+y=(x+y)\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{4y}{x}+\frac{x}{y}+5 \geq 2\sqrt{\frac{4y}{x} \cdot \frac{x}{y}}+5=9$, 当且仅当 $x=6, y=3$ 时, 等号成立, 即 $x+y$ 的最小值是 9, 故 $m \leq 9$, 即实数 m 的取值范围是 $(-\infty, 9]$.

6. 118 000 $\sqrt{10}$ 解析 由题意得 $AM=\frac{200-x^2}{4x}$, 由 $AM>0$ 得 $0<x<10\sqrt{2}$. 所以 $S=4 200x^2+210 \times (200-x^2)+80 \times 4 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{200-x^2}{4x}\right)^2=4 200x^2+42 000-210x^2+\frac{400 000+10x^4-4 000x^2}{x^2}=4 000x^2+\frac{400 000}{x^2}+38 000 \geq 2\sqrt{4 000x^2 \cdot \frac{400 000}{x^2}}+38 000=80 000+38 000=118 000$, 当且仅当 $4 000x^2=\frac{400 000}{x^2}$, 即 $x=\sqrt{10}$ 时, 等号成立. 所以当 $x=\sqrt{10}$ m 时, S 最小且最小值为 118 000 元.

7. 解: (1) 因为 $0<x<\frac{1}{2}$,

所以 $1-2x>0, y=\frac{1}{4} \cdot 2x \cdot (1-2x) \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2x+1-2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ (当且仅当 $2x=1-2x$, 即 $x=\frac{1}{4}$ 时, 取等号).

所以函数 $y=\frac{1}{2}x(1-2x)$ 的最大值为 $\frac{1}{16}$.

(2) 因为 $x<3$, 所以 $x-3<0$.

所以 $f(x)=\frac{4}{x-3}+x=\frac{4}{x-3}+(x-3)+3=-\left[\frac{4}{3-x}+(3-x)\right]+3 \leq -2\sqrt{\frac{4}{3-x} \cdot (3-x)}+3=-1$ (当且仅当 $\frac{4}{3-x}=3-x$, 即 $x=1$ 时, 取等号).

所以函数 $f(x)=\frac{4}{x-3}+x$ 的最大值为 -1 .

8. 证法 1 因为 $a>0, b>0, a+b=1$,

所以 $1+\frac{1}{a}=1+\frac{a+b}{a}=2+\frac{b}{a}$. 同理 $1+\frac{1}{b}=2+\frac{a}{b}$.

所以 $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) = \left(2+\frac{b}{a}\right)\left(2+\frac{a}{b}\right) = 5+2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right) \geq 5+2 \times 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 9$ (当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时, 取等号).

所以 $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) \geq 9$.

证法 2 $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)$

$=1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}$
 $=1+\frac{a+b}{ab}+\frac{1}{ab}=1+\frac{2}{ab}$.

因为 $a>0, b>0, a+b=1$,

所以 $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ (当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时, 取等号).

所以 $\frac{2}{ab} \geq 8$.

所以 $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) \geq 9$.

第 005 练 从函数观点看一元二次方程和一元二次不等式

1. A 解析 由题意得 $A=\{x|x>-1\}, B=\{x|-2 \leq x<1\}$, 故 $A \cap B=\{x|-1<x<1\}$.

2. C 解析 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0 (a<0)$ 的两个实数根为 $-2, 3$, 结合二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象知一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0 (a<0)$ 解集为 $\{x|-2<x<3\}$.

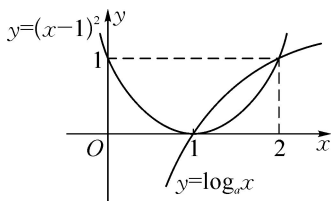
3. BC 解析 对于 A, 当 $x=1$ 时, 不等式不成立, 故 A 错误; 对于 B, 因为 $-x^2+2x-\sqrt{5} \leq 0$, 所以 $x^2-2x+\sqrt{5} \geq 0$, 又 $\Delta=4-4\sqrt{5}<0$, 故 B 正确; 对于 C, 因为 $\Delta=36-4 \times 1 \times 10=-4<0$, 故 C 正确; 对于 D, 当 $x=0$ 时, 不等式不成立, 故 D 错误.

4. BCD 解析 当 $a=0$ 时, 一元二次不等式即为 $x^2-4x \leq 0$, 解得 $0 \leq x \leq 4$, 有 5 个整数解, 故 A 错误; 当 $a=1$ 时, 一元二次不等式即为 $x^2-4x+1 \leq 0$, 解得 $2-\sqrt{3} \leq x \leq 2+\sqrt{3}$, 有

3 个整数解 1, 2, 3, 故 B 正确; 当 $a=2$ 时, 一元二次不等式即为 $x^2-4x+2 \leq 0$, 解得 $2-\sqrt{2} \leq x \leq 2+\sqrt{2}$, 有 3 个整数解 1, 2, 3, 故 C 正确; 当 $a=3$ 时, 一元二次不等式即为 $x^2-4x+3 \leq 0$, 解得 $1 \leq x \leq 3$, 有 3 个整数解 1, 2, 3, 故 D 正确.

5. $\left[-2, \frac{6}{5}\right)$ 解析 设 $y=(a^2-4)x^2+(a+2)x-1$, 当 $a=-2$ 时, $-1 \geq 0$ 不成立, 所以原不等式的解集为空集, 符合题意; 当 $a=2$ 时, 原不等式变形为 $4x-1 \geq 0$, 即 $x \geq \frac{1}{4}$, 不是空集, 不符合题意; 当 $a^2-4 \neq 0$ 时, 则 $\begin{cases} a^2-4 < 0, \\ \Delta=(a+2)^2+4(a^2-4) < 0, \end{cases}$ 解得 $-2 < a < \frac{6}{5}$. 综上, 实数 a 的取值范围为 $\left[-2, \frac{6}{5}\right)$.

6. (1, 2] 解析 如图, 在同一平面直角坐标系中画出函数 $y=(x-1)^2$ 和 $y=\log_a x$ 的图象. 由于当 $x \in (1, 2)$ 时, 函数 $y=(x-1)^2$ 的图象恒在函数 $y=\log_a x$ 的图象的下方, 则 $\begin{cases} a > 1, \\ \log_a 2 \geq 1, \end{cases}$ 解得 $1 < a \leq 2$. 故实数 a 的取值范围是 $(1, 2]$.



7. 解: (1) 由题意得 $\begin{cases} (-1) + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{a-1}{a}, \\ (-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{a}, \\ a < 0. \end{cases}$ 解得 $a=-2$.

所以原不等式等价于 $\frac{-2x+3}{x-1} \leq 0$, 即 $\begin{cases} (2x-3)(x-1) \geq 0, \\ x-1 \neq 0. \end{cases}$ 解得 $x < 1$ 或 $x \geq \frac{3}{2}$.

所以不等式 $\frac{ax+3}{x-1} \leq 0$ 的解集为 $\left\{x \mid x < 1 \text{ 或 } x \geq \frac{3}{2}\right\}$.

(2) 当 $a=0$ 时, 原不等式可化为 $x+1 \leq 0$, 解得 $x \leq -1$;

当 $a>0$ 时, 原不等式可化为 $\left(x-\frac{1}{a}\right)(x+1) \geq 0$, 解得

$x \leq -1$ 或 $x \geq \frac{1}{a}$;

当 $a<0$ 时, 原不等式可化为 $\left(x-\frac{1}{a}\right)(x+1) \leq 0$.

当 $\frac{1}{a} > -1$, 即 $a < -1$ 时, 解得 $-1 \leq x \leq \frac{1}{a}$;

当 $\frac{1}{a} = -1$, 即 $a = -1$ 时, 解得 $x = -1$;

当 $\frac{1}{a} < -1$, 即 $-1 < a < 0$ 时, 解得 $\frac{1}{a} \leq x \leq -1$.

综上所述, 当 $a>0$ 时, 原不等式的解集为 $\left\{x \mid x \leq -1 \text{ 或 } x \geq \frac{1}{a}\right\}$; 当 $a=0$ 时, 原不等式的解集为 $\{x \mid x \leq -1\}$; 当 $-1 < a < 0$ 时, 原不等式的解集为 $\left\{x \mid \frac{1}{a} \leq x \leq -1\right\}$; 当 $a = -1$ 时, 原

不等式的解集为 $\{-1\}$; 当 $a < -1$ 时, 原不等式的解集为 $\left\{x \mid -1 \leq x \leq \frac{1}{a}\right\}$.

8. 解: (1) 因为每件商品的售价为 50 万元,

所以 x 千件商品的销售额为 $50x$ 万元.

依题意知, 当 $0 < x < 80$ 时, $L(x) = 50x - \left(\frac{1}{3}x^2 + 10x\right) - 250 = -\frac{1}{3}x^2 + 40x - 250$;

当 $x \geq 80$ 时, $L(x) = 50x - \left(51x + \frac{10\,000}{x} - 1\,450\right) - 250 = 1\,200 - \left(x + \frac{10\,000}{x}\right)$.

所以 $L(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^2 + 40x - 250, & 0 < x < 80, \\ 1\,200 - \left(x + \frac{10\,000}{x}\right), & x \geq 80. \end{cases}$

(2) 当 $0 < x < 80$ 时, $L(x) = -\frac{1}{3}(x-60)^2 + 950$. 对称轴为 $x=60$, 即当 $x=60$ 时, $L(x)_{\max} = 950$ (万元);

当 $x \geq 80$ 时, $L(x) = 1\,200 - \left(x + \frac{10\,000}{x}\right) \leq 1\,200 - 2\sqrt{10\,000} = 1\,000$ (万元), 当且仅当 $x=100$ 时, $L(x)_{\max} = 1\,000$ (万元).

所以当年产量为 100 千件时, 所获年利润最大.

第 006 练 一元二次不等式恒成立与存在问题

1. D 解析 当 $a-2=0$, 即 $a=2$ 时, $-4 < 0$, 恒成立, 符合题意; 当 $a-2 \neq 0$ 时, 由题意知 $\begin{cases} a-2 < 0, \\ 4(a-2)^2 + 16(a-2) < 0, \end{cases}$ 解得 $-2 < a < 2$. 综上, 实数 a 的取值范围为 $(-2, 2]$.

2. A 解析 不等式 $x^2-4x-2-a \geq 0$ 在 $[1, 4]$ 内有解等价于在 $[1, 4]$ 内, $a \leq (x^2-4x-2)_{\max}$. 当 $1 \leq x \leq 4$ 时, $-6 \leq x^2-4x-2 \leq -2$, 所以 $a \leq -2$. 故实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -2]$.

3. ACD 解析 因为函数 $f(x) = x^2 + 2ax - 3$ 在区间 $(-\infty, -3]$ 上单调递减, 所以 $-\frac{2a}{2} \geq -3$, 解得 $a \leq 3$, 即 $A = \{a \mid a \leq 3\}$.

不等式 $x + \frac{1}{x-2} \geq a$ ($x > 2$) 恒成立等价于 $\left(x + \frac{1}{x-2}\right)_{\min} \geq a$ ($x > 2$). 当 $x > 2$ 时, $x-2 > 0$, 所以 $x + \frac{1}{x-2} = x-2 + \frac{1}{x-2} + 2 \geq 2\sqrt{(x-2) \cdot \frac{1}{x-2}} + 2 = 4$, 当且仅当 $x-2 = \frac{1}{x-2}$, 即 $x=3$ 时, 等号成立, 所以 $\left(x + \frac{1}{x-2}\right)_{\min} = 4$, 所以 $a \leq 4$, 即 $B = \{a \mid a \leq 4\}$. 因为 $A \subsetneq B$, 所以“ $x \in B$ ”是“ $x \in A$ ”的必要不充分条件.

4. AB 解析 对于 A, 令 $f(x) = x^2 + (a^2-1)x + a-2$, 则 $f(1) < 0$, 即 $1^2 + (a^2-1) + a-2 < 0$, 解得 $-2 < a < 1$, 故 A 正确; 对于 B, 令 $g(x) = x^2 - kx + k-1$, 则 $\begin{cases} g(1) \leq 0, \\ g(2) \leq 0, \end{cases}$ 即

$\begin{cases} 1^2 - k + k - 1 \leq 0, \\ 2^2 - 2k + k - 1 \leq 0. \end{cases}$ 解得 $k \geq 3$, 故 B 正确; 对于 C, 因为关于 x 的不等式 $ax-b > 0$ 的解集是 $(1, +\infty)$, 所以 $a=b > 0$, 则关于 x 的不等式 $\frac{ax+b}{x-2} > 0$ 等价于 $(ax+b)(x-2) > 0$, 即

$a(x+1)(x-2)>0$, 解得 $x<-1$ 或 $x>2$, 故 C 错误; 对于 D, 若不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x|x<-2 \text{ 或 } x>4\}$, 则 $a>0$, 且 $ax^2+bx+c=a(x-4)(x+2)=ax^2-2ax-8a$, 所以 $b=-2a, c=-8a$, 又 $a>0$, 所以 $abc=16a^3>0$, 故 D 错误.

5. $\left[0, \frac{1}{4}\right)$ 解析 由题意知“ $\forall x \in \mathbf{R}, mx^2+4mx+1>0$ ”是真命题. 当 $m=0$ 时, $1>0$, 符合题意; 当 $m \neq 0$ 时, 则 $\begin{cases} m>0, \\ \Delta=16m^2-4m<0, \end{cases}$ 解得 $0<m<\frac{1}{4}$. 综上, $0 \leq m < \frac{1}{4}$. 故实数 m 的取值范围是 $\left[0, \frac{1}{4}\right)$.

6. $(-3, 3)$ 解析 由定义知, 存在 $1 \leq x \leq 2, (m-x) \otimes (m+x) < 0$ 成立, 即 $(m-x-1)(m+x+1) < 0$, 即 $(x-m+1)(x+m+1) > 0$, 即存在 $1 \leq x \leq 2$, 使得 $x^2+2x+1 > m^2$ 成立, 因为函数 $y=x^2+2x+1$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增, 所以当 $x=2$ 时, y 有最大值 9, 所以 $9 > m^2$, 解得 $-3 < m < 3$, 故实数 m 的取值范围是 $(-3, 3)$.

7. 解: (1) 因为不等式 $(a-5)x^2-4x+6 < 0$ 的解集是 $\{x|x < -3 \text{ 或 } x > 1\}$,

所以 -3 和 1 是方程 $(a-5)x^2-4x+6=0$ 的两根,

所以 $-3+1=\frac{4}{a-5}$, 解得 $a=3$.

所以不等式 $2x^2+(2-a)x-a > 0$ 等价于 $2x^2-x-3 > 0$, 即 $(x+1)(2x-3) > 0$,

解得 $x < -1$ 或 $x > \frac{3}{2}$.

所以所求不等式的解集为 $\left\{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > \frac{3}{2}\right\}$.

(2) 对于任意 $x \in [2, 5]$, 不等式 $ax^2+bx+3 \geq 0$ 恒成立, 即 $3x^2+bx+3 \geq 0$,

所以 $b \geq -3x - \frac{3}{x} = -3\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

设 $f(x) = -3\left(x + \frac{1}{x}\right), x \in [2, 5]$, 则

$f(x)$ 在 $[2, 5]$ 上是减函数,

所以 $f(x)_{\max} = f(2) = -\frac{15}{2}$.

所以实数 b 的取值范围是 $\left[-\frac{15}{2}, +\infty\right)$.

8. 解: (1) 当 $m=1$ 时, $f(x) = -1 < 0$, 显然成立.

所以 $m=1$ 符合题意;

当 $m \neq 1$ 时, 因为对于一切实数 $x, f(x) < 0$ 恒成立,

所以 $\begin{cases} m-1 < 0, \\ \Delta = (m-1)^2 + 4(m-1) < 0, \end{cases}$ 解得 $-3 < m < 1$.

所以实数 m 的取值范围为 $(-3, 1]$.

(2) 因为对于 $m \in [0, 2], f(x) < -m+3$ 恒成立,

所以 $(m-1)x^2 - (m-1)x + m-4 < 0$ 在 $m \in [0, 2]$ 上恒成立.

令 $g(m) = (m-1)x^2 - (m-1)x + m-4 = (x^2-x+1)m - (x^2-x+4)$.

因为 $g(m)$ 是关于 m 的一次函数.

所以只需 $\begin{cases} g(0) = -(x^2-x+4) < 0, \\ g(2) = x^2-x-2 < 0, \end{cases}$ 解得 $-1 < x < 2$.

所以 x 的取值范围是 $(-1, 2)$.

第三章 函数

第 007 练 函数的概念及其表示

1. A 解析 根据函数的定义可知, 对应定义域内的任意自变量 x 只能有唯一的 y 与之对应, 选项 A 中, 出现了两个不同的 y 和 x 对应, 不满足唯一性, 而选项 B, C, D 符合函数的定义.

2. B 解析 A 中, $y = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$ 与 $y = x+1$, 解析式不同, 不是同一函数; B 中, $y = x^2 - 2x$ 与 $y = t^2 - 2t$ 的解析式相同, 定义域相同, 是同一函数; C 中, $y = x^0$ 的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$, $y = 1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 定义域不同, 不是同一函数; D 中, $y = \lg x^2$ 的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$, $y = 2\lg x$ 的定义域为 $\{x|x > 0\}$, 定义域不同, 不是同一函数.

3. BD 解析 由题意知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 2)$, 故 A 错误; 当 $x \leq -1$ 时, $f(x)$ 的取值范围是 $(-\infty, 1]$, 当 $-1 < x < 2$ 时, $f(x)$ 的取值范围是 $[0, 4)$, 因此 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, 4)$, 故 B 正确; 当 $x=1$ 时, $f(1) = 1^2 = 1$, 故 C 错误; 当 $x \leq -1$ 时, $x+2=3$, 解得 $x=1$ (舍去), 当 $-1 < x < 2$ 时, $x^2=3$, 解得 $x=\sqrt{3}$ 或 $x=-\sqrt{3}$ (舍去), 故 D 正确.

4. AB 解析 对于 A, ①当 $x=0$ 或 1 时, $L(0)=0=L(1)$, 满足 $L(x)=L(1-x)$; ②当 x 为 $(0, 1)$ 内的无理数时, $1-x$ 也为 $(0, 1)$ 内的无理数, 故 $L(x)=0=L(1-x)$; ③当 $x=\frac{p}{q}$

($p, q \in \mathbf{Z}^+$, 且 p, q 互质) 时, 则 $1-x=\frac{q-p}{q}$ 为既约真分数, 所以 $L(x)=\frac{1}{q}=L(1-x)$. 综上, 对任意 $x \in [0, 1]$, 都有 $L(x)=L(1-x)$, 故 A 正确. 对于 B, ①若 a 与 b 中至少有一个为 0 或 1

或 $(0, 1)$ 内的无理数时, 则 $L(a)L(b)=0 \leq L(ab)$; ②若 a 与 b 都为 $(0, 1)$ 内的有理数, 设 $a=\frac{p_1}{q_1}, b=\frac{p_2}{q_2}$, 且 $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbf{Z}^+$,

$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}$ 为既约真分数, 所以 $L(a)=\frac{1}{q_1}, L(b)=\frac{1}{q_2}$, 又 $ab=\frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}$, 所以 $\frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}$ 能约分时, ab 写成既约真分数分母小于 $q_1 q_2$, 设

为 q_0 , 则 $L(ab)=\frac{1}{q_0} > \frac{1}{q_1 q_2} = L(a)L(b)$; 当 $\frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}$ 不能约分时,

$L(ab)=\frac{1}{q_1 q_2} = L(a)L(b)$, 综上, $L(a)L(b) \leq L(ab)$ 成立, 故 B

正确. 对于 C, 取 $a=\frac{1}{3}, b=\frac{2}{3}$, 则 $L(a+b)=L(1)=0$, 而

$L(a)+L(b)=L\left(\frac{1}{3}\right)+L\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}>0$, 故 C 错误. 对于 D,

记 $M=\{x|x=0 \text{ 或 } x=1 \text{ 或 } x \text{ 为 } (0, 1) \text{ 内的无理数}\}$. 若 $x \in M$, $L(x)=0$, 而 $\frac{1}{5}x + \frac{1}{5} > 0$, 此时 $L(x) < \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$; 若 $x=\frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbf{Z}^+$, 且 p, q 互质), 则 $L(x)=\frac{1}{q}$, q 为大于 1 的正整数, 由

$L(x) > \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$ 得 $\frac{1}{q} > \frac{1}{5} \times \frac{p}{q} + \frac{1}{5}$, 解得 $p+q < 5$, 又因为

$x=\frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbf{Z}^+$, 且 p, q 互质), 所以 $x=\frac{1}{2}$ 或 $x=\frac{1}{3}$, 综上, 不

等式 $L(x) > \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$ 的解集为 $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$, 故 D 错误.

5. 3 解析 依题意,对任意的 $x < y$, 恒有 $f(x) \leq f(y)$, 满足条件的函数有: ① $f(1)=f(2)=7, f(3)=8, f(4)=9$; ② $f(1)=7, f(2)=f(3)=8, f(4)=9$; ③ $f(1)=7, f(2)=8, f(3)=f(4)=9$. 共有 3 个.

6. -1 40 解析 当 $x \leq 0$ 时, $f(x)=2^x-1 \in (-1, 0]$, 令 $f(t)=2^t-1=-\frac{1}{2}$, 得 $t=-1$; 当 $x > 0$ 时, $f(x)=f(x-1)+2 > 1$, 令 $f(t)=-\frac{1}{2}$, t 无解. 综上, $t=-1$. 因为 $f(0)=2^0-1=0$, 所以 $f(10)=f(9)+2=f(8)+2 \times 2=\dots=f(0)+2 \times 10=20$, 所以 $f[f(10)]=f(20)=f(0)+2 \times 20=40$.

7. 解: 由题意得 $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x-2$ ①.

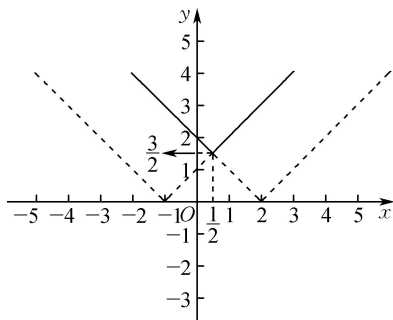
令 $x=\frac{1}{x}$, 得 $f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{3}{x}-2$ ②.

联立①②, 解得 $f(x)=\frac{2}{x}-x-\frac{2}{3}$ ($x \neq 0$).

8. 解: 令 $|x+1|=|x-2|$, 解得 $x=\frac{1}{2}$.

$$\text{所以 } f(x)=\begin{cases} x+1, & x \geq \frac{1}{2}, \\ 2-x, & x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

由定义结合函数 $y=|x+1|, y=|x-2|$ 的图象画出函数 $f(x)$ 的图象, 如图实线部分.



第 008 练 函数的定义域

1. A 解析 由 $-x^2+2x+3 \geq 0$ 得 $-1 \leq x \leq 3$, 即函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 3]$. 由 $-1 \leq 3x-2 \leq 3$, 解得 $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{5}{3}$.

故函数 $f(3x-2)$ 的定义域为 $\left[\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right]$.

2. D 解析 由 $y=f(x+1)$ 的定义域是 $[-1, 1]$, 得 $x+1 \in [0, 2]$, 故 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0, 2]$, 则要使 $g(x)=\frac{f(2x)}{x}$ 有意义, 有 $\begin{cases} 0 \leq 2x \leq 2, \\ x \neq 0. \end{cases}$ 解得 $0 < x \leq 1$. 所以函数 $g(x)=\frac{f(2x)}{x}$ 的定义域是 $(0, 1]$.

3. BC 解析 对于 A, $f(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ 与 $g(x)=\begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ 定义域不同, 不是同一个函数, 故 A 错误; 对于 B, 根据函数定义可知函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $x=1$ 的交点最多有一个, 故 B 正确; 对于 C, 函数 $f(x)=x^2$, 定义域 $A=\{2\}$ 或

$\{-2\}$ 或 $\{-2, 2\}$, 值域 $B=\{4\}$, 故 C 正确; 对于 D, 函数 $f(x)=\frac{x}{x+1}=\frac{x+1-1}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$ 的定义域为 $\{x|x \neq -1\}$, 值域为 $\{y|y \neq 1\}$, 故 D 错误.

4. BCD 解析 由题设, “同族函数”存在不同区间能取到相同的值域, 对于 A, 显然 $f(x)=x$ 不符合, 对于 B, $f(x)=x^2+x-1$ 的图象关于直线 $x=-\frac{1}{2}$ 对称, 必存在不同区间能取到相同值域, 满足题设; 对于 C, $f(x)=x-\frac{1}{x}$ 在 y 轴两侧各自单调递增, 且值域均为 $\mathbf{R}$, 满足题设; 对于 D, $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 在区间 $(-1, 0), (0, 1)$ 上对应的值域相同, 满足题设.

5. $(1, 2) \cup (2, +\infty)$ 解析 要使函数 $f(x)$ 有意义, 需 $\begin{cases} x-1 > 0, \\ x-2 \neq 0. \end{cases}$ 解得 $x > 1$ 且 $x \neq 2$. 故函数 $f(x)$ 的定义域为 $(1, 2) \cup (2, +\infty)$.

6. $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ 解析 根据题意可得 $\begin{cases} 1-2x > 0, \\ \log_{\frac{1}{2}}(1-2x) \geq 0, \end{cases}$ 解得 $0 \leq x < \frac{1}{2}$, 即函数 $f(x)$ 的定义域是 $\left[0, \frac{1}{2}\right)$.

7. 解: (1) 由题意知整个路线共计 16 km, 所以用时为 $16 \div 4 = 4$ (h).

又中途休息了 0.5 h, 所以 $t_{\max} = 4 + 0.5 = \frac{9}{2}$ (h),

所以函数的定义域为 $\left[0, \frac{9}{2}\right]$.

当 P 处于点 D 时, y 取得最大值.

所以 $y_{\max} = |DA|^2 = |DF|^2 + |FA|^2 = 4^2 + 4^2 = 32$.

所以值域为 $[0, 32]$.

(2) 当 $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ 时, 点 P 在 AB 段, $y = 16t^2$;

当 $\frac{1}{2} < t \leq \frac{3}{2}$ 时, 点 P 在 BC 段, $y = 4 + \left[4\left(t - \frac{1}{2}\right)\right]^2 = 16\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 4$;

当 $\frac{3}{2} < t \leq 2$ 时, 点 P 在 CD 段, $y = 16 + \left[2 + 4\left(t - \frac{3}{2}\right)\right]^2 = 16(t-1)^2 + 16$;

当 $2 < t \leq \frac{5}{2}$ 时, 点 P 在 DE 段, $y = 16 + [4 - 4(t-2)]^2 = 16(t-3)^2 + 16$;

当 $\frac{5}{2} < t \leq 3$ 时, 点 P 在点 E , $y = 16 + 4 = 20$;

当 $3 < t \leq \frac{7}{2}$ 时, 点 P 在 EF 段, $y = 16 + [2 - 4(t-3)]^2 = 16\left(t - \frac{7}{2}\right)^2 + 16$;

当 $\frac{7}{2} < t \leq \frac{9}{2}$ 时, 点 P 在 FA 段, $y = \left[4 - 4\left(t - \frac{7}{2}\right)\right]^2 = 16\left(t - \frac{9}{2}\right)^2$.

8. 解: (1) 设 $g(x) = |2x+2| - |x-3| + x$, 则 $f(x)$ 的定义域即为不等式 $g(x) \geq 0$ 的解集.