答 案 详 析

考点过关 1　集合的概念与运算

1. C　由题知，$A=\{0,1,2,3,4\}$，$B=\{x\mid x$ 被 3 整除余 $2\}$，则 $A\cap B=\{2\}$.

2. A　设全集为 U，则阴影部分对应的集合为 $A\cap(\complement_U B)$，所以 $A\cap(\complement_U B)=\{1,2\}$.

3. C　**分析**：已知 $B\subseteq A$，所以集合 B 中的元素必须属于集合 A，因此 $1\in A$，$x^2\in A$. 根据无序性和确定性，可以是 $x^2=16$，也可以是 $x^2=4x$，求得的 x 值必须保证集合 A，B 中的元素互异. 检验互异性易被忽略，造成错误. 此类题主要考查集合中元素的三个属性：确定性、无序性、互异性. 一般步骤是，根据互异性进行讨论，根据确定性建立方程，再通过检验确保互异性.

因为 $A=\{1,16,4x\}$，$B=\{1,x^2\}$，且 $B\subseteq A$，则 $x^2=16$ 或 $x^2=4x$，解得 $x=0$ 或 $x=-4$ 或 $x=4$，而当 $x=4$ 时，$A=\{1,16,16\}$，舍去，所以 $x=0$ 或 $x=-4$.

易错警示　对于含有字母的集合，在求出字母的值后，要注意检验集合中的元素是否满足互异性.

4. B　$A\cap B=\{1,4\}$，其子集个数为 $2^2=4$.

5. D　由 $x^2-3x<0$，得 $x(x-3)<0$，所以 $0<x<3$，则 $M=(0,3)$. 由 $\log_2 x<4$，得 $0<x<16$，则 $N=(0,16)$. 因为 $U=[-1,20]$，所以 $\complement_U M=[-1,0]\cup[3,20]$，$\complement_U N=[-1,0]\cup[16,20]$，所以 $U=N\cup(\complement_U M)$.

方法突破　求集合的交、并、补时，应先对集合进行化简或计算. 若涉及连续区间问题，通常借助数轴来完成；若涉及离散的数集问题，可利用韦恩图解决.

6. A　$M=\{x\mid 0\leqslant x<1\}$，$N=\{x\mid x^2-x\leqslant 0\}=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$，得 $M\subsetneqq N$.

7. C　由 $A\subseteq(A\cap B)$，可得 $A\subseteq B$，当 A 为 B 的真子集时，选项 A，B，D 都不成立；$A\cap(\complement_U B)=\varnothing$ 恒成立，故选项 C 正确.

8. C　①因为 $4-(-2)=6\notin\{-4,-2,0,2,4\}$，故错误；②设 $a=3k_1(k_1\in\mathbf{Z})$，$b=3k_2(k_2\in\mathbf{Z})$，则 $a+b=3k_1+3k_2=3(k_1+k_2)\in A$，$a-b=3k_1-3k_2=3(k_1-k_2)\in A$，故正确；③设 $A_1=\{n\mid n=3k,k\in\mathbf{Z}\}$，$A_2=\{n\mid n=5k,k\in\mathbf{Z}\}$，则 $3\in A_1$，$5\in A_2$，$3+5\notin(A_1\cup A_2)$，故错误；④设 $A_1=\{n\mid n=3k,k\in\mathbf{Z}\}$，$A_2=\{n\mid n=5k,k\in\mathbf{Z}\}$，则 $A_1\subseteq\mathbf{R}$，$A_2\subseteq\mathbf{R}$，存在 $3+5\notin(A_1\cup A_2)$，故正确.

9. ABD　选项 A 中，M 是由 $3,-1$ 两个元素构成的集合，而集合 P 是由点 $(3,-1)$ 构成的集合；选项 B 中，$(3,1)$ 与 $(1,3)$ 表示不同的点，故 $M\neq P$；选项 C 中，$M=\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}=[1,+\infty)$，$P=\{x\mid x=t^2+1,t\in\mathbf{R}\}=[1,+\infty)$，故 $M=P$；选项 D 中，M 是二次函数 $y=x^2-1$，$x\in\mathbf{R}$ 的所有因变量组成的集合，即值域，而集合 P 是二次函数 $y=x^2-1$，$x\in\mathbf{R}$ 图象上所有点组成的集合，即一条曲线.

10. ABC　对于选项 A，B，设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{3,4\}$，$C=\{4\}$，满足 $A\cup B=A\cup C$，此时 $B\subseteq A$，$C\subseteq A$ 均不成立，故选项 A，B 不一定成立；对于选项 C，设 $U=\{1,2,3,4\}$，$A=\{1,2,3\}$，$B=\{3,4\}$，$C=\{4\}$，满足 $A\cup B=A\cup C$，此时 $A\cap(\complement_U B)=\{1,2\}\neq\{1,2,3\}=A\cap(\complement_U C)$，故 C 不一定成立；对于选项 D，若 $(\complement_U A)\cap B=\varnothing$，则有 $B\subseteq A$，所以 $A\cup B=A$，又 $A\cup C=A$，所以 $C\subseteq A$，所以 $(\complement_U A)\cap C=\varnothing=(\complement_U A)\cap B$；若 $(\complement_U A)\cap B\neq\varnothing$，不妨设任意元素 $a\in(\complement_U A)\cap B$，所以有 $a\in(\complement_U A)$ 且 $a\in B$，即 $a\notin A$ 且 $a\in B$. 又 $a\in(A\cup B)$，所以 $a\in(A\cup C)$，又 $a\notin A$，所以 $a\in C$，所以 $a\in(\complement_U A)\cap C$，故 D 正确.

解后反思　不成立的命题只要举出反例即可，正确的命题一定要给出证明.

11. BCD　对于 A，因为 $A\cup B=\mathbf{Q}$，$U=\mathbf{R}$，所以 $\complement_U\mathbf{Q}\subseteq\complement_U A$，$\complement_U\mathbf{Q}\subseteq\complement_U B$，所以 $\complement_U A$，$\complement_U B$ 都没有最大和最小元素，故 A 不可能成立；对于 B，若 $A=\{x\in\mathbf{Q}\mid x\leqslant 0\}$，$B=\{x\in\mathbf{Q}\mid x>0\}$，则 A 有一个最大元素，B 没有最小元素，故 B 可能成立；对于 C，若 $A=\{x\in\mathbf{Q}\mid x\leqslant 0$ 且 $x\neq -1\}$，$B=\{x\in\mathbf{Q}\mid x>0$ 或 $x=-1\}$，则 A 有一个最大元素，B 有一个最小元素，故 C 可能成立；对于 D，若 $A=\{x\in\mathbf{Q}\mid x<\sqrt{2}\}$，$B=\{x\in\mathbf{Q}\mid x\geqslant\sqrt{2}\}$，则 A 没有最大元素，B 也没有最小元素，故 D 可能成立.

12. -1　因为 $A=\left\{x,\dfrac{y}{x},1\right\}$，$B=\{x^2,x+y,0\}$，$A=B$，所以 $\begin{cases}y=0,\\x^2=1,\\x\neq 1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-1,\\y=0,\end{cases}$ 则 $x^{2017}+y^{2018}=(-1)^{2017}+0^{2018}=-1$.

13. 5　由 $A\cap B=A$，得 $A\subseteq B$. 由 $|x-3|\leqslant m$，得 $-m+3\leqslant x\leqslant m+3$，故有 $\begin{cases}4\leqslant m+3,\\-2\geqslant -m+3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m\geqslant 1,\\m\geqslant 5,\end{cases}$ 即 $m\geqslant 5$，所以 m 的最小值为 5.

14. $\dfrac{1}{10}$　$\left[\dfrac{8}{5},\dfrac{17}{10}\right]\cup\left(\dfrac{9}{5},2\right]$　**分析**：从集合“长度”整体把握，再到细节控制端点，更易突破. 集合 $M=\left\{x\,\middle|\,m\leqslant x\leqslant m+\dfrac{1}{2}\right\}$，$N=\left\{x\,\middle|\,n-\dfrac{3}{5}\leqslant x\leqslant n\right\}$，都是集合 $\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$ 的子集，它们的“长度”分别为 $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3}{5}$，1，集合 M，N 的长度固定，且 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{5}=\dfrac{11}{10}>1$，当 M，N 分别滑动到集合 $\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$ 的最左端和最右端，或最右端和最左端时，$M\cap N$ 的“长度”最小，最小值为 $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{5}\right)-1=\dfrac{1}{10}$. 若 $m=\dfrac{6}{5}$，则 $M=\left[\dfrac{6}{5},\dfrac{17}{10}\right]$，因为集合 $N=\left\{x\,\middle|\,n-\dfrac{3}{5}\leqslant x\leqslant n\right\}$ 的“长度”为 $\dfrac{3}{5}$，要使集合 $M\cup N$ 的“长度”大于 $\dfrac{3}{5}$，只要 $M\subseteq N$ 不成立即可. 也可先考虑 $M\subseteq N$，然后结合 $\dfrac{8}{5}\leqslant n\leqslant 2$ 求补集.

由$\begin{cases} m\geqslant 1, \\ m+\dfrac{1}{2}\leqslant 2, \end{cases}$可得 $1\leqslant m\leqslant \dfrac{3}{2}$；由$\begin{cases} n-\dfrac{3}{5}\geqslant 1, \\ n\leqslant 2, \end{cases}$可得$\dfrac{8}{5}\leqslant n\leqslant$

2. 易知 $M\cap N=\left\{x \,\middle|\, m\leqslant x\leqslant n \text{ 或 } n-\dfrac{3}{5}\leqslant x\leqslant m+\dfrac{1}{2}\right\}$，故有"长度"的最小值为 $n_{\min}-m_{\max}=\dfrac{8}{5}-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{10}$或$\left(m+\dfrac{1}{2}\right)_{\min}-\left(n-\dfrac{3}{5}\right)_{\max}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{7}{5}=\dfrac{1}{10}$，即集合 $M\cap N$ 的"长度"的最小值是$\dfrac{1}{10}$. 若 $m=\dfrac{6}{5}$，则 $M=\left[\dfrac{6}{5},\dfrac{17}{10}\right]$，故 $n-\dfrac{3}{5}<\dfrac{17}{10}-\dfrac{3}{5}$ 或 $n>\dfrac{6}{5}+\dfrac{3}{5}$，即 $n<\dfrac{17}{10}$或 $n>\dfrac{9}{5}$. 又$\dfrac{8}{5}\leqslant n\leqslant 2$，故 $n\in\left[\dfrac{8}{5},\dfrac{17}{10}\right)\cup\left(\dfrac{9}{5},2\right]$.

核心笔记

1. 解决集合问题时，要弄清集合中的元素是什么，比如集合$\{x\mid y=f(x)\}$，$\{y\mid y=f(x)\}$，$\{(x,y)\mid y=f(x)\}$三者是不同的.

2. 借助集合的图示法来表示集合间的运算. 对离散的数集间的运算或抽象集合间的运算，可借助韦恩(Venn)图；对连续的数集间的运算，常利用数轴；对点集间的运算，则往往通过坐标平面内的图形求解.（练习运用：第 2 题）

3. 根据集合的基本关系或运算求参数的注意点：(1) 化简要分类，分类的依据是参数对该不等式或对应的方程的解的影响；(2) 关系要分类，已知两个集合之间的关系求参数的取值，要注意空集的特殊性；(3) "端点"要取舍，利用集合之间的关系求参数满足的条件，要注意集合对应区间的端点的取舍.（练习运用：第 3 题、第 13 题、第 14 题）

考点过关 2 常用逻辑用语

1. A 由$\dfrac{1}{a}<2$得 $a<0$ 或 $a>\dfrac{1}{2}$，所以"$a>\dfrac{1}{2}$"是"$\dfrac{1}{a}<2$"的充分不必要条件.

2. C 存在量词命题的否定为全称量词命题，则 $\neg p$：$\forall x\in\mathbf{R}$，$a^x\leqslant kx$.

3. A **分析**：这种涉及范围的充要条件的确定，一般将充要条件的问题等价转化为集合之间的包含关系问题来解决. 规律：已知命题 p,q 中相应变量的取值集合分别为 A,B，如果 $A\subsetneqq B$，那么 p 是q 的充分不必要条件；如果 $A\subseteq B$，那么 p 是q 的充分条件；如果 $A=B$，那么 p 是 q 的充要条件.

由条件可得 p：$x<1$，q：$x<2a+1$. 因为 p 是 q 的充分不必要条件，所以 p 中集合是 q 中集合的真子集，所以 $2a+1>1$，即 $a>0$.

4. C 这段文字中，没有证明$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$是有理数的条件，也没有证明$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$是无理数的条件，A，B 错误；都说明了结论"存在无理数 a,b，使得 a^b 为有理数"，C 正确；只提及存在无理数 a,b，不涉及对任意无理数 a,b 都成立的问题，D 错误.

5. D 命题 p：有的三角形是等边三角形，其中"有的"是存在量词，所以对它的否定，应该改存在量词为全称量词"所有"，然后对结论进行否定，故有 $\neg p$：所有的三角形都不是等边三角形.

6. A 若$\exists x\in[1,3]$，使得 $x^2-ax+3>0$，即 $ax<x^2+3$，可得 $a<x+\dfrac{3}{x}$，则 $a<\left(x+\dfrac{3}{x}\right)_{\max}$. 因为函数 $f(x)=x+\dfrac{3}{x}$ 在$[1,\sqrt{3}]$上单调递减，在$[\sqrt{3},3]$上单调递增，且 $f(1)=f(3)=4$，所以当 $x\in[1,3]$时，$f(x)_{\max}=4$，即 p：$a<4$，所以 p 的一个必要不充分条件是$a<5$.

易错警示 p：$\exists x\in[1,3]$，$x^2-ax+3>0$ 是存在量词命题，不能将它当做全称量词命题，进而按恒成立的要求来求 a 的取值范围；$a<4$ 是 p 成立的充要条件，将 a 的范围扩大后，便成为 p 成立的必要不充分条件，而非缩小.

7. A 当$(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b})$时，$(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b})=0$，即$\boldsymbol{a}^2-k^2\boldsymbol{b}^2=0$，故 $20-10k^2=0$，解得 $k=\pm\sqrt{2}$. 故"$k=\sqrt{2}$"是"$(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b})$"的充分不必要条件.

8. A 因命题"$\exists x_0\in\mathbf{R}$，使得 $x_0^2+mx_0+2m-3<0$"为假命题，故"$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+mx+2m-3\geqslant 0$ 恒成立"为真命题，由二次函数开口向上，知 $\Delta=m^2-4(2m-3)\leqslant 0$，所以 $m\in[2,6]$.

9. AD 由题意，集合 $A=\{x\mid 1<x<2\}$，$B=\{x\mid x\leqslant 2\}$，可得 $A\subsetneqq B$，且 $\complement_{\mathbf{R}}B\subsetneqq\complement_{\mathbf{R}}A$，所以 $x\in A$ 是 $x\in B$ 的充分不必要条件，且 $x\in\complement_{\mathbf{R}}A$ 是$x\in\complement_{\mathbf{R}}B$ 的必要不充分条件.

10. AC 对于 A 选项，由 $x=-1$，此时 $x\neq 1$，可得$|x|=1$，所以不是充分条件，由$|x|\neq 1$，可得 $x\neq\pm 1$，可得 $x\neq 1$，所以是必要不充分条件，A 选项正确；对于 B 选项，"若 $x+y\geqslant 6$，则 x,y 中至少有一个大于 3"的否命题为"若 $x+y<6$，则 x,y 都不大于 3"，取 $x=4$，$y=1$，显然为假命题，故 B 选项错误；对于 C 选项，取 $x=-1$ 可知 C 选项正确；命题"$\exists x<0$，$x^2-x-2<0$"的否定是"$\forall x<0$，$x^2-x-2\geqslant 0$"，故 D 错误.

解后反思 若想说明一个命题是错误的，则给出问题的反面成立，即举出一个反例即可；若想证明一个命题是正确的，则需要给出严格的证明.

11. AB 因为"$\exists x\in M$，$x>3$"为假命题，所以"$\forall x\in M$，$x\leqslant 3$"为真命题，可得 $M\subseteq(-\infty,3]$. 又"$\forall x\in M$，$|x|>x$"为真命题，可得 $M\subseteq(-\infty,0)$，所以 $M\subseteq(-\infty,0)$. 则集合 M 可以为$(-\infty,-5)$，$(-3,-1]$.

12. $(-1,+\infty)$ $A=\left\{x\,\middle|\,\log_{\frac{1}{2}}(x+2)<0\right\}=\{x\mid x>-1\}$，因为 $a=-3$，所以 $B=\{x\mid(x-a)(x-b)<0\}=(-3,b)$或$(b,-3)$，由 $A\cap B\neq\varnothing$，得 $b>-1$.

13. ①② **分析**：涉及多个命题之间的充要条件的确定，一般借助图形和充要条件的传递性来解决. 这里只需将题目条件借助图形展示出来：$\begin{array}{ccccc} p & \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} & r & \Rightarrow & s \\ & & \Uparrow & \swarrow & \\ & & q & & \end{array}$，看出 q,r,s 三者是等价的，便能快速得到答案.

因为 p 是 r 的充分不必要条件，所以 $p\Rightarrow r$，$r\not\Rightarrow p$. 因为 q 是 r 的充分条件，所以 $q\Rightarrow r$. 因为 s 是 r 的必要条件，所以 $r\Rightarrow s$. 因为 q 是 s 的必要条件，所以 $s\Rightarrow q$. 因为 $q\Rightarrow r$，$r\Rightarrow s$，所以 $q\Rightarrow s$. 又 $s\Rightarrow q$，所以 s 是 q 的充要条件. 故命题①正确. 因为 $p\Rightarrow r$，$r\Rightarrow s$，$s\Rightarrow q$，所以 $p\Rightarrow q$. 若 $q\Rightarrow p$，则由 $r\Rightarrow s$，$s\Rightarrow q$，$q\Rightarrow p$. 得 $r\Rightarrow p$，与 $r\not\Rightarrow p$

矛盾. 所以 $q \nRightarrow p$. 所以 p 是 q 的充分不必要条件. 故命题②正确. 因为 $r \Rightarrow s, s \Rightarrow q$,所以 $r \Rightarrow q$. 又 $q \Rightarrow r$,所以 r 是 q 的充要条件. 故命题③错误. 因为 $s \Rightarrow q, q \Rightarrow r$,所以 $s \Rightarrow r$. 又 $r \Rightarrow s$,所以 r 是 s 的充要条件. 故命题④错误.

14. 3　2^k-1　将 $1,2,\cdots,2k-1$ 分为 k 组,1 和 $2k-1$,2 和 $2k-2$,$\cdots$,$k-1$ 和 $k+1$,k 单独一组,每组中的两个数必须同时属于或同时不属于一个满足条件的集合 M,每组属于或不属于 M 共两种情况,排除一个空集,满足条件的集合 M 的个数为 2^k-1,即 $f(k)=2^k-1$,$f(2)=3$.

核心笔记

1. 充分、必要条件的判断有三种方法:(1) 定义法,根据 $p \Rightarrow q$,$q \Rightarrow p$ 进行判断;(2) 集合法,根据使 p,q 成立的对象的集合之间的包含关系进行判断;(3) 等价转化法,将命题转化为另一个等价且容易判断真假的命题.(练习运用:第 1 题、第 3 题、第 6 题、第 7 题、第 9 题)

2. 否定全称量词命题与存在量词命题时,一是要改写量词,全称量词改写为存在量词,存在量词改写为全称量词;二是要否定结论.(练习运用:第 2 题、第 5 题)

3. 判定全称量词命题"$\forall x \in M, p(x)$"是真命题,需要对集合 M 中的每一个元素 x,证明 $p(x)$ 成立;判定存在量词命题"$\exists x \in M, p(x)$"是真命题,只需要在集合 M 中找到一个 $x=x_0$,使得 $p(x_0)$ 成立即可.(练习运用:第 8 题、第 10 题)

考点过关 3　不等关系与不等式的性质

1. C　$\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^2+1}{a^2+1}=\frac{b^2-a^2}{a^2(a^2+1)}=\frac{(b+a)(b-a)}{a^2(a^2+1)}$,因为 $a>b>0$,所以 $\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^2+1}{a^2+1}<0$,即 $\frac{b^2}{a^2}<\frac{b^2+1}{a^2+1}$,故 A 一定成立;因为 $a>b>0$,所以 $a^2+b^2>2ab>ab$,故 B 一定成立;$a+\frac{1}{a}-b-\frac{1}{b}=(a-b)\left(1-\frac{1}{ab}\right)$,当 $a=\frac{1}{2}$,$b=\frac{1}{3}$ 时,$a+\frac{1}{a}-b-\frac{1}{b}<0$,此时 $a+\frac{1}{a}<b+\frac{1}{b}$,故 C 不一定成立;$a-\frac{1}{a}-b+\frac{1}{b}=(a-b)\left(1+\frac{1}{ab}\right)$,因为 $a>b>0$,所以 $a-\frac{1}{a}-b+\frac{1}{b}>0$,即 $a-\frac{1}{a}>b-\frac{1}{b}$,故 D 一定成立.

2. B　设 A 地到 B 地相距 S m,依题意,$\frac{t_1}{2}m+\frac{t_1}{2}n=S$　①,$\frac{\frac{S}{2}}{m}+\frac{\frac{S}{2}}{n}=t_2$　②. 由①,可得 $t_1=\frac{2S}{m+n}$,由②,可得 $t_2=\frac{m+n}{2mn}S$,则 $t_1-t_2=\frac{2S}{m+n}-\frac{m+n}{2mn}S=S\left(\frac{2}{m+n}-\frac{m+n}{2mn}\right)=S\cdot\frac{4mn-(m+n)^2}{2mn(m+n)}=S\cdot\frac{-(m-n)^2}{2mn(m+n)}$,因为 $m\neq n$,且 $m,n>0$,所以 $t_1-t_2<0$,即 $t_1<t_2$.

3. D　因为 $a<0$,$-1<b<0$,所以 $ab>0$,$0<b^2<1$,所以 $0>ab^2>a$,所以 $ab>ab^2>a$.

4. A　因为 $a,b\in(0,1)$ 且 $ab>a^2$,所以 $ab-a^2=a(b-a)>0$,所以 $b-a>0$. 对于 A,因为 $\frac{1}{b}-\frac{1}{b-a}=\frac{-a}{b(b-a)}<0$,所以 $\frac{1}{b}<\frac{1}{b-a}$,所以 A 正确;对于 B,因为 $ab-b^2=b(a-b)<0$,所以 $ab<b^2$,所以 B 错误;对于 C,因为 $1+ab-(a+b)=a(b-1)-(b-1)=(a-1)(b-1)$,且 $a,b\in(0,1)$,所以 $a-1<0$,$b-1<0$,所以 $1+ab-(a+b)>0$,所以 $1+ab>a+b$,所以 C 错误;对于 D,因为 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}>0$,所以 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$,所以 D 错误.

5. B　因为 $x>y>z$,$x+y+z=0$,所以 $3x>x+y+z=0>3z$,所以 $x>0$,$z<0$. 对于 A,D,令 $x=2$,$y=0$,$z=-2$,满足条件 $x>y>z$,$x+y+z=0$,但 $xy=yz=0$,$x|y|=z|y|=0$,故 A,D 错误;对于 B,由 $y>z$,$x>0$,得 $xy>xz$,故 B 正确;对于 C,由 $x>y$,$z<0$,得 $xz<yz$,故 C 错误.

6. A　当 $\begin{cases}a>2,\\b>3\end{cases}$ 时,$\begin{cases}a+b>5,\\ab>6\end{cases}$ 成立;当 $\begin{cases}a+b>5,\\ab>6\end{cases}$ 时,取 $\begin{cases}a=2,\\b=4,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}a>2,\\b>3\end{cases}$ 不成立. 故 $\begin{cases}a>2,\\b>3\end{cases}$ 是 $\begin{cases}a+b>5,\\ab>6\end{cases}$ 的充分不必要条件.

7. D　令 $a=1$,$b=2$,$c=-1$,满足 $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$,不满足 $a>b$,故 A 错误;当 $a=1$,$b=2$,$m=-1$ 时,$\frac{b}{a}=2$,$\frac{b-m}{a-m}=\frac{3}{2}$,不满足 $\frac{b-m}{a-m}>\frac{b}{a}$,故 B 错误;当 $a=2$,$b=-1$ 时,满足 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$,不满足 $ab>0$,故 C 错误;若 $a>b>c$,$a+b+c=0$,则 $a>0$ 一定成立,故 $ab>ac$,故 D 正确.

8. B　设男学生、女学生人数分别为 x,y,教师人数为 z,家长人数为 m,其中 x,y,z,m 都是正整数,由题意,得 $\begin{cases}x>y,\\y>m,\\m>z,\\2z>x,\end{cases}$ 即 $z<m<y<x<2z$. 由于 m,x,y,z,都是正整数,所以 $2z-z\geqslant 4$,即 $z\geqslant 4$. 当 $z=4$ 时,$m=5$,$y=6$,$x=7$,$2z=8$,满足不等式,所以教师人数的最小值为 4.

9. AB　$\frac{a+c}{a}>\frac{b+c}{b}$ 可化为 $1+\frac{c}{a}>1+\frac{c}{b}$,即 $\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$,由 $a>b>0$,得 $bc>ac$,即 $(a-b)c<0$,即 $c<0$,故 A,B 正确,C,D 错误.

10. BCD　令 $a=0$,$b=-1$,$c=1$,$d=0$,满足条件,但 $ac=bd$,故 A 错误;由题意,$\frac{a+b}{b}-\frac{c+d}{d}=\frac{ad-bc}{bd}<0$,所以 $\frac{a+b}{b}<\frac{c+d}{d}$,故 B 正确;因为 $\frac{b}{a}-\frac{a}{b}=\frac{b^2-a^2}{ab}=\frac{(b-a)(b+a)}{ab}<0$,所以 $\frac{b}{a}<\frac{a}{b}$,故 C 正确;因为 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}>0$,$a>b$,所以 $ab<0$,又因为 $a>b$,所以 $a>0$,$b<0$,故 D 正确.

11. ABD　对于 A,因为 $a>b>c$,且 $2a+b+c=0$,若 $c\geqslant 0$,则 $a>b>c\geqslant 0$,所以 $2a+b+c>0$,不合题意,所以 $c<0$;若 $a\leqslant 0$,则 $0\geqslant a>b>c$,则 $2a+b+c<0$,不合题意,所以 $a>0$. 综上所述,$a>0$,$c<0$,故 A 正确. 对于 C,因为 $a>b>c$,所以 $a+b>$

$a+c$,可得 $2a+b+c>2(a+c)$,即 $0>2(a+c)$,可得 $a+c<0$,故C错误. 对于B,由选项A,C可知 $a>0>c$,又 $a+c<0$,得 $(a+c)^2>0$,即 $a^2+c^2>-2ac$,且 $ac<0$,所以 $\frac{c}{a}+\frac{a}{c}<-2$,故B正确. 对于D,因为 $(a+2c)+(a+b)=(2a+b+c)+c=c<0$,所以 $a+2c<-(a+b)$,又因为 $2a+b+c=(a+b)+(a+c)=0$,所以 $a+b=-(a+c)>0$,所以 $\frac{a+2c}{a+b}<-1$,故D正确.

12. $<$　依题意,$a-b=\sqrt{5}-(4-\sqrt{3})=\sqrt{5}+\sqrt{3}-4=\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}-4=\sqrt{8+2\sqrt{15}}-4<\sqrt{8+2\sqrt{16}}-4=0$,所以 $a<b$.

13. $a=-1,b=2$(答案不唯一)　容易发现,若要满足条件①和②式,需使 $(a+b)ab<0$,即 $a+b$ 与 ab 异号,显然应使 $a+b>0$,$ab<0$. 当 $a<0,b>0$ 时,需使 $a+b>0$,则 $|a|<|b|$,可取 $a=-1,b=2$;当 $a>0,b<0$ 时,需使 $a+b>0$,则 $|a|>|b|$,可取 $a=2,b=-1$. 综上,取任意异号的两个数,且正数的绝对值大于负数的绝对值皆为合理答案.

14. $\left[-2,-\frac{1}{3}\right)$　因为 $T(1,-1)=-2$,$T(4,2)=1$,所以 $\frac{a-b}{2-1}=-2$,$\frac{4a+2b}{2\times4+2}=1$,解得 $a=1,b=3$,所以 $T(2m,5-4m)=\frac{2m+3\times(5-4m)}{4m+5-4m}\leqslant4$,解得 $m\geqslant-\frac{1}{2}$,$T(m,3-2m)=\frac{m+3\times(3-2m)}{2m+3-2m}>P$,解得 $m<\frac{9-3P}{5}$. 因为不等式组恰有3个整数解,所以 $2<\frac{9-3P}{5}\leqslant3$,解得 $-2\leqslant P<-\frac{1}{3}$.

核心笔记

1. 比较两个数(式)大小的三种方法:(1)作差法,通过变形判断与0的大小关系;(2)作商法,通过变形判断与1的大小关系;(3)特殊值法,结合题目情境,用特殊值代入得出结论.(练习运用:第1题、第2题)

2. 判断多个不等式是否成立,需要逐一给出推理判断或反例说明. 常用的推理判断需要利用不等式的性质,常见的反例构成方式可从以下几个方面思考:①不等式两边都乘以一个代数式时,考查所乘的代数式是正数、负数或0;②不等式左边是正数,右边是负数,当两边同时平方后不等号方向不一定保持不变;③不等式左边是正数,右边是负数,当两边同时取倒数后不等号方向不变等.(练习运用:第4题、第7题、第11题)

考点过关4　基本不等式

1. A　因为 $x+y=18$,所以 $\sqrt{xy}\leqslant\frac{x+y}{2}=9$,当且仅当 $x=y=9$ 时,等号成立.

2. B　**分析**:从4个选项不难看出本题考查基本不等式和用基本不等式求最值. 用基本不等式一定要明确不等式成立时对字母的要求;用基本不等式求最值一定要逐一检查"一正、二定、三相等",尤其是"三相等".

当 $x=-1$ 时,$y=x+\frac{1}{x}=-2$,A错误;$y=3^x+3^{-x}\geqslant2\sqrt{3^x\cdot3^{-x}}=2$,当且仅当 $3^x=3^{-x}$,即 $x=0$ 时等号成立,B正确;$1<x<\mathrm{e}$,则 $\ln x\in(0,1)$,$y=\ln x+\frac{1}{\ln x}\geqslant2\sqrt{\ln x\cdot\frac{1}{\ln x}}=2$,当且仅当 $\ln x=\frac{1}{\ln x}$,即 $\ln x=1$ 时等号成立,而 $\ln x\neq1$,等号不成立,故C错误;$0<x<\frac{\pi}{2}$,则 $\sin x\in(0,1)$,$y=\sin x+\frac{1}{\sin x}\geqslant2\sqrt{\sin x\cdot\frac{1}{\sin x}}=2$,当且仅当 $\sin x=\frac{1}{\sin x}$,即 $\sin x=1$ 时等号成立,而 $\sin x\neq1$,等号不成立,故D错误.

3. C　当 $x>0$ 时,$x+\frac{1}{x}\geqslant2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$. 因为 $x,\frac{1}{x}$ 同号,所以 $x+\frac{1}{x}\geqslant2$ 时,$x>0$,$\frac{1}{x}>0$.

4. D　$y=\frac{(x+1)^2+1}{x+1}=(x+1)+\frac{1}{x+1}\geqslant2$,当且仅当 $x=0$ 时取最小值.

5. D　设 $m=2^a$,$n=2^b$,则 $m>0,n>0,m+n=1$. 因为 $m+n\geqslant2\sqrt{mn}$,即 $0<mn\leqslant\frac{1}{4}$,当且仅当 $m=n$ 时取等号,所以 $(4^a+1)(4^b+1)=(m^2+1)(n^2+1)=(mn)^2+m^2+n^2+1=(mn)^2+(m+n)^2-2mn+1=(mn)^2-2mn+2=(mn-1)^2+1\left(0<mn\leqslant\frac{1}{4}\right)$,所以当 $mn=\frac{1}{4}$ 时,$(mn)^2-2mn+2$ 取得最小值为 $\frac{25}{16}$.

6. A　**解法1**(不等式法)　因为 $(x+2y)^2=x^2+4y^2+2\cdot x\cdot2y\leqslant(x^2+4y^2)+(x^2+4y^2)=5+5=10$,所以 $-\sqrt{10}\leqslant x+2y\leqslant\sqrt{10}$,当且仅当 $x=\frac{\sqrt{10}}{2}$,$y=\frac{\sqrt{10}}{4}$ 时,$x+2y$ 取得最大值 $\sqrt{10}$.

解法2(三角换元法)　因为实数 x,y 满足 $x^2+4y^2=5$,所以可设 $x=\sqrt{5}\cos\theta$,$2y=\sqrt{5}\sin\theta$,$\theta\in[0,2\pi)$,则 $x+2y=\sqrt{5}\cos\theta+\sqrt{5}\sin\theta=\sqrt{10}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$,当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时,$x+2y$ 取得最大值 $\sqrt{10}$.

解后反思 处理双元最值问题,要有方程、减元和整体意识,要多观察题中给出式子的结构特点及条件与所求的联系,要带着方向和目标去解题.

7. A　**分析**:这种多变量的最值问题一般从不等式求最值出发,但解题时要注意"一正、二定、三相等".

由 $m>2n>0$,得 $m-2n>0$,$\frac{m}{m-2n}+\frac{m}{n}=\frac{(m-2n)+2n}{m-2n}+\frac{(m-2n)+2n}{n}=3+\frac{2n}{m-2n}+\frac{m-2n}{n}\geqslant3+2\sqrt{2}$,当且仅当 $\frac{2n}{m-2n}=\frac{m-2n}{n}$,即 $m=(2+\sqrt{2})n$ 时,等号成立.

8. C　令 $\frac{m+x}{1-n-x}>0$,得 $(x+m)(x-1+n)<0$,故函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\,|\,(x+m)(x-1+n)<0\}$. 因为 $f(x)$ 是奇函数,所以其定义域关于原点对称,可得 $-m+1-n=0$,即 $m+n=1$,此时 $f(x)=\ln\frac{m+x}{m-x}$,因为 $f(x)+f(-x)=\ln\frac{m+x}{m-x}+$

$\ln\frac{m-x}{m+x}=\ln 1=0$，所以 $f(x)$ 是奇函数，所以 $m+n=1$ 符合题意. 所以$\frac{1}{m}+\frac{2}{n}=\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\right)(m+n)=3+\frac{n}{m}+\frac{2m}{n}\geqslant 3+2\sqrt{2}$，当且仅当 $m=\sqrt{2}-1$，$n=2-\sqrt{2}$ 时等号成立，即$\frac{1}{m}+\frac{2}{n}$的最小值为 $3+2\sqrt{2}$.

9. AD　A 正确；B 不正确，因为 $\lg x$ 和 $\lg y$ 不一定是正实数，故不可用基本不等式；C 不正确，因为 $a<0$ 时，则$\frac{4}{a}+a\geqslant 4$ 不成立；D 正确，若 $x,y\in\mathbf{R}$，$xy<0$，则 $-\frac{x}{y}>0$，$-\frac{y}{x}>0$，所以 $\left(-\frac{x}{y}\right)+\left(-\frac{y}{x}\right)\geqslant 2\sqrt{\left(-\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x}\right)}=2$，则 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\leqslant -2$.

10. ABCD　对于选项 A，因为 $2^a+2^b\geqslant 2\sqrt{2^{a+b}}=4\geqslant 2\sqrt{2}$，故 A 正确；对于选项 B，因为 $2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=4$，所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 2$，当且仅当 $a=b=1$ 时，等号成立，故 B 正确；对于选项 C，因为 $2=a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，所以 $1\geqslant ab$，当且仅当 $a=b=1$ 时，等号成立，所以 $\log_2 a+\log_2 b=\log_2 ab\leqslant\log_2 1=0\leqslant 1$，故 C 正确；对于选项 D，因为$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，所以 $a^2+b^2\geqslant 2$，当且仅当 $a=b=1$ 时，等号成立，故 D 正确.

解后反思　此题属于易错题型，四个选项都是不等式中的常规问题，都有常规的解题方法，需要注意使用基本不等式的条件，符合“一正、二定、三相等”.

11. ABC　由 $AC+CB=a+b$，由射影定理可知 $CD=\sqrt{ab}$，又 $OD\geqslant CD$，所以$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ $(a>0,b>0)$，A 正确；因为 $CD\leqslant\frac{1}{2}AB$，故 $AB^2\geqslant 4CD^2$，即 $(a+b)^2\geqslant 4ab$，即 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ $(a>0,b>0)$，B 正确；由射影定理可知 $CD^2=DE\cdot OD$，即 $DE=\frac{CD^2}{OD}=\frac{ab}{\frac{a+b}{2}}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$，又 $CD\geqslant DE$，即 $\sqrt{ab}\geqslant\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ $(a>0,b>0)$，C 正确.

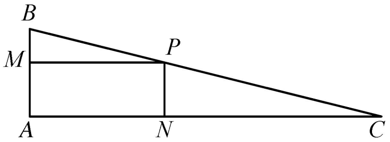
解后反思　一般地，在题目中出现“$a\pm b$，a^2+b^2，ab”三者关系时有两种思考角度，一个是用基本不等式，一个是用根与系数的关系，当然必须要利用恒等式 $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ 把题设中“$a\pm b$，a^2+b^2，ab”化为两者的关系.

12. 8　由 x,y 都是正实数，且 $x+2y=xy$，可得 $xy=x+2y\geqslant 2\sqrt{2xy}$，即 $\sqrt{xy}(\sqrt{xy}-2\sqrt{2})\geqslant 0$，解得 $\sqrt{xy}\geqslant 2\sqrt{2}$，即 $xy\geqslant 8$，当且仅当 $x=2y$，即 $x=4$，$y=2$ 时，等号成立，所以 xy 的最小值为 8.

13. $2\sqrt{2}+1$　**分析**：从已知条件中易得 $x+2y=1$，这里的“1”就不能用乘“1”法了，而是凑齐次，由$\frac{1}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x+2y}{x}+\frac{x}{y}=1+\frac{2y}{x}+\frac{x}{y}$，这就是常用的代“1”法，其目的就是要产生“乘积为定值的两项之和”，以便利用基本不等式求最值.

由题得 $2^x\cdot 4^y=2$，所以 $2^{x+2y}=2$，所以 $x+2y=1$. $\frac{1}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x+2y}{x}+\frac{x}{y}=1+\frac{2y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant 1+2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=1+2\sqrt{2}$，当且仅当 $x=\sqrt{2}-1$，$y=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$时取等号.

14. $\frac{9}{4}$　如图，因为 $PM\perp AB$，所以 $PM/\!/AC$. 所以$\frac{PM}{BM}=\frac{AC}{AB}=4$. 所以 $PM=4BM$. 所以 $BM=\frac{1}{4}h_1$. 由 $AM=PN=h_2$，得$\frac{1}{4}h_1+h_2=1$. 所以$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}=\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}\right)\left(\frac{1}{4}h_1+h_2\right)=\frac{5}{4}+\frac{h_2}{h_1}+\frac{h_1}{4h_2}\geqslant\frac{5}{4}+2\sqrt{\frac{h_2}{h_1}\cdot\frac{h_1}{4h_2}}=\frac{5}{4}+1=\frac{9}{4}$，当且仅当$\frac{h_2}{h_1}=\frac{h_1}{4h_2}$，即 $h_1=2h_2=\frac{4}{3}$时，等号成立，所以$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}$的最小值为$\frac{9}{4}$.



核心笔记

1. 多元问题用基本不等式求最值，基本的理念就是要减少变量. 一是把其中的两个自变量的和、积或特定的结构视为整体，二是将一个量用另外两个量来表示，最终可化归为前面的类型.（练习运用：第 6 题、第 12 题）

2. 利用基本不等式求最值问题. 已知 $x>0$，$y>0$，①若积 xy 是定值 p，则当且仅当 $x=y$ 时，$x+y$ 有最小值 $2\sqrt{p}$（简记：积定和最小）；②若和 $x+y$ 是定值 q，则当且仅当 $x=y$ 时，xy 有最大值 $\frac{q^2}{4}$（简记：和定积最大）.（练习运用：第 9 题）

考点过关 5　二次函数与一元二次不等式

1. A　因为 $A=(-\sqrt{3},\sqrt{3})$，$B=(-1,2)$，所以 $A\cap B=(-1,\sqrt{3})$.

2. D　当 $t=2$ 时，$f(0)=2t^2-2t=2\times 2^2-2\times 2\neq 0$，所以 $f(x)$ 的图象不恒过点 $(0,0)$，故 A 错误；当 $t=0$ 时，$\Delta=4t^2-4(2t^2-2t)=-4t^2+8t=0$，此时 $f(x)$ 的图象与 x 轴只有 1 个交点，故 B 错误；$f(x)=x^2-2tx+2t^2-2t=(x-t)^2+t^2-2t$，则 $f(x)$ 的最小值为 $t^2-2t=(t-1)^2-1\geqslant -1$，所以函数的最小值不可能是 -2，可能为 -1，故 C 错误，D 正确.

3. D　由 $\exists x\in\mathbf{R}$，$\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}-a<0$，可得 $a>\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$在 $\mathbf{R}$ 上能成立. 因为$\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}(x+1)^2-2\geqslant -2$，所以 $a>-2$. 由题意知，$(-2,+\infty)$ 是选项的范围的真子集即可.

4. B　由题意，得 $c<0$，-1，$\frac{1}{2}$是 $cx^2+ax+b=0$ 的两个根，则

$-1+\frac{1}{2}=-\frac{a}{c}$，$-1\times\frac{1}{2}=\frac{b}{c}$，即 $a=\frac{1}{2}c<0$，$b=-\frac{1}{2}c>0$，所以函数 $y=ax^2+bx-c$ 的图象开口向下，对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}>0$，与 y 轴交点纵坐标为 $-c>0$.

5. D　因为 $0<a<1$，所以 $\frac{1}{a}>1$，原不等式等价于 $(x-a)\left(x-\frac{1}{a}\right)>0$，解得 $x<a$ 或 $x>\frac{1}{a}$，所以不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x<a\text{ 或 }x>\frac{1}{a}\right\}$.

6. D　已知 $a>0$，$b>0$，则 $\frac{a}{b}>0$，$\frac{b}{a}>0$，所以 $\frac{b}{a}+\frac{2}{b}=\frac{b}{a}+\frac{a+2b}{b}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+2\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+2=4$，当且仅当 $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$，即 $a=b=\frac{2}{3}$ 时等号成立，故 $\frac{b}{a}+\frac{2}{b}$ 的最小值为4. 因为 $3t^2-t\leqslant\frac{b}{a}+\frac{2}{b}$ 恒成立，所以 $3t^2-t\leqslant 4$，即 $(3t-4)(t+1)\leqslant 0$，解得 $-1\leqslant t\leqslant\frac{4}{3}$，即 $t\in\left[-1,\frac{4}{3}\right]$.

7. B　由函数 $f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbf{R})$ 的值域为 $[0,+\infty)$，得方程 $x^2+ax+b=0$ 有两个相等的实根，则 $\Delta=a^2-4b=0$，即 $b=\frac{1}{4}a^2$. 由不等式 $x^2+ax+\frac{1}{4}a^2<c$ 的解集为 $(m,m+2\sqrt{5})$，得方程 $x^2+ax+\frac{1}{4}a^2-c=0$ 的两根为 $m,m+2\sqrt{5}$，所以 $\begin{cases}m+m+2\sqrt{5}=-a,\\ m(m+2\sqrt{5})=\frac{1}{4}a^2-c,\end{cases}$ 即 $m(m+2\sqrt{5})=\frac{1}{4}(-2m-2\sqrt{5})^2-c$，所以 $c=5$.

8. D　由题意，得 $M=\{x|(x-3m)(x+m)\leqslant 0\}$，$N=\{x|(x-m)(x+2m)\leqslant 0\}$，方程 $x^2-2mx-3m^2=0$ 的根为 $-m,3m$，方程 $x^2+mx-2m^2=0$ 的根为 $-2m,m$. 当 $m=0$ 时，$M\cap N=\{0\}$，不合题意；当 $m>0$ 时，$M=\{x|-m\leqslant x\leqslant 3m\}$，$N=\{x|-2m\leqslant x\leqslant m\}$，$M\cap N=\{x|-m\leqslant x\leqslant m\}$，由 $m-(-m)=4$，得 $m=2$，此时 $M=\{x|-2\leqslant x\leqslant 6\}$，$N=\{x|-4\leqslant x\leqslant 2\}$，$M\cup N=\{x|-4\leqslant x\leqslant 6\}$，$M\cup N$ 的长度为10；当 $m<0$ 时，$M=\{x|3m\leqslant x\leqslant -m\}$，$N=\{x|m\leqslant x\leqslant -2m\}$，$M\cap N=\{x|m\leqslant x\leqslant -m\}$，由 $(-m)-m=4$，得 $m=-2$，此时 $M=\{x|-6\leqslant x\leqslant 2\}$，$N=\{x|-2\leqslant x\leqslant 4\}$，$M\cup N=\{x|-6\leqslant x\leqslant 4\}$，$M\cup N$ 的长度为10. 综上所述，$M\cup N$ 的长度为10.

9. BD　由图象知，当 $x=0$ 时，$y=c>0$，开口向下，$a<0$，$-3+1=-\frac{b}{a}<0$，即 $\frac{b}{a}>0$，则 $b<0$，$ab>0$，所以 $abc>0$，故A错误；当 $x=1$ 时，$a+b+c=0$ 且 $a<0$，所以 $b+c>0$，故B正确；因为 $2a+b+c=a+a+b+c=a<0$，所以C错误；由 $cx^2+bx+a=0$，可得 $a\left(\frac{1}{x}\right)^2+b\cdot\frac{1}{x}+c=0$，因为 $-3,1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根，所以 $-\frac{1}{3},1$ 是方程 $a\left(\frac{1}{x}\right)^2+b\cdot\frac{1}{x}+c=0$ 的两根，所以关于 x 的方程 $cx^2+bx+a=0$ 的解集为 $\left\{-\frac{1}{3},1\right\}$，故D正确.

10. AC　由题意可得方程 $ax^2-3x+9b=0$ 的两根为 a 和 b，且 $a<0$，根据根与系数的关系可得 $\begin{cases}a+b=\frac{3}{a},\\ ab=\frac{9b}{a},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\sqrt{3},\\ b=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-3,\\ b=2,\end{cases}$ 则 $a+b=-\sqrt{3}$ 或 $a+b=-1$.

11. BCD　当 $k=1$ 时，$2kx^2+kx-\frac{3}{8}=2x^2+x-\frac{3}{8}<0$，解得 $-\frac{3}{4}<x<\frac{1}{4}$，故A错误. 若 $\forall x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则当 $k=0$ 时，$-\frac{3}{8}<0$ 成立；当 $k\neq 0$ 时，$2k<0$，$\Delta=k^2-4\times 2k\times\left(-\frac{3}{8}\right)<0$，解得 $-3<k<0$. 综上，$-3<k\leqslant 0$，则整数 k 的取值集合为 $\{-2,-1,0\}$，故B正确. 若不等式 $2kx^2+kx-\frac{3}{8}<0$ 对 $0\leqslant k\leqslant 1$ 恒成立，则 $(2x^2+x)k-\frac{3}{8}<0$，即 $(2x^2+x)\times 1-\frac{3}{8}<0$，$(2x^2+x)\times 0-\frac{3}{8}<0$，则 $-\frac{3}{4}<x<\frac{1}{4}$，故C正确. 令 $h(x)=2kx^2+kx-\frac{3}{8}$，因为 $h(0)=-\frac{3}{8}<0$，所以整数 $x=0$ 符合题意. 又恰有一个整数 x 使得不等式 $2kx^2+kx-\frac{3}{8}<0$ 成立，所以 $k>0$，且 $\begin{cases}h(-1)=2k-k-\frac{3}{8}\geqslant 0,\\ h(1)=3k-\frac{3}{8}\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $k\geqslant\frac{3}{8}$，故D正确.

12. 6　函数 $f(x)=x^2-2x+5$ 的图象开口向上，对称轴为直线 $x=1$，则 $f(x)_{\min}=f(1)=4\leqslant 4m$，解得 $m\geqslant 1$，所以 $f(x)$ 在 $[m,n]$ 上单调递增，所以 $\begin{cases}f(m)=4m,\\ f(n)=4n,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m^2-2m+5=4m,\\ n^2-2n+5=4n,\end{cases}$ 所以 m,n 为方程 $x^2-2x+5=4x$ 的两个根，即 m,n 为方程 $x^2-6x+5=0$ 的两个根，由根与系数的关系得 $m+n=6$.

13. $\left(-\frac{3}{5},1\right]$　由题意可得，命题的否定“$\forall x\in\mathbf{R}$，不等式 $(a^2-1)x^2-(a-1)x-1<0$ 恒成立”为真命题. 当 $a^2-1=0$，即 $a=\pm 1$ 时，若 $a=1$，则不等式为 $-1<0$ 恒成立；若 $a=-1$，$2x-1<0$ 不恒成立，即 $a=-1$ 不满足；当 $a^2-1\neq 0$ 时，$\begin{cases}a^2-1<0,\\ \Delta=(a-1)^2+4(a^2-1)<0,\end{cases}$ 解得 $-\frac{3}{5}<a<1$. 综上所述，实数 a 的取值范围是 $\left(-\frac{3}{5},1\right]$.

14. $[-1-\sqrt{2},-1]$　由 $f[f(x)]\leqslant 1$，可得 $(x^2-2ax+1)^2-2a(x^2-2ax+1)+1\leqslant 1$，即 $(x^2-2ax+1)(x^2-2ax+1-2a)\leqslant 0$. 由 $A=B$，可得 $x^2-2ax+1-2a\geqslant 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，即 $\Delta=4a^2-4(1-2a)\leqslant 0$，解得 $-1-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant -1+\sqrt{2}$　①. 又集合 A 是非空集合，所以 $x^2-2ax+1\leqslant 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上有解，则 $\Delta'=4a^2-4\geqslant 0$，解得 $a\leqslant -1$ 或 $a\geqslant 1$　②. 由①②可得 $a\in[-1-\sqrt{2},-1]$.

核心笔记

1. 二次函数的解析式有：

①一般式：$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$；