

基础篇

考点过关 1 集合的概念与运算

1. C 由题知, $A=\{0,1,2,3,4\}$, $B=\{x|x \text{ 被 } 3 \text{ 整除余 } 2\}$, 则 $A \cap B = \{2\}$.

2. A 设全集为 U , 则阴影部分对应的集合为 $A \cap (\complement_U B)$, 所以 $A \cap (\complement_U B) = \{1, 2\}$.

3. C 【分析】已知 $B \subseteq A$, 所以集合 B 中的元素必须属于集合 A , 因此 $1 \in A$, $x^2 \in A$. 根据无序性和确定性, 可以是 $x^2 = 16$, 也可以是 $x^2 = 4x$, 求得的 x 值必须保证集合 A, B 中的元素互异. 检验互异性易被忽略, 造成错误. 此类题主要考查集合中元素的三个属性: 确定性、无序性、互异性. 一般步骤是, 根据互异性进行讨论, 根据确定性建立方程, 再通过检验确保互异性.

因为 $A = \{1, 16, 4x\}$, $B = \{1, x^2\}$, 且 $B \subseteq A$, 则 $x^2 = 16$ 或 $x^2 = 4x$, 解得 $x = 0$ 或 $x = -4$ 或 $x = 4$, 而当 $x = 4$ 时, $A = \{1, 16, 16\}$, 舍去, 所以 $x = 0$ 或 $x = -4$.

【易错警示】对于含有字母的集合, 在求出字母的值后, 要注意检验集合中的元素是否满足互异性.

4. B $A \cap B = \{1, 4\}$, 其子集个数为 $2^2 = 4$.

5. D 由 $x^2 - 3x < 0$, 得 $x(x-3) < 0$, 所以 $0 < x < 3$, 则 $M = (0, 3)$. 由 $\log_2 x < 4$, 得 $0 < x < 16$, 则 $N = (0, 16)$. 因为 $U = [-1, 20]$, 所以 $\complement_U M = [-1, 0] \cup [3, 20]$, $\complement_U N = [-1, 0] \cup [16, 20]$, 所以 $U = N \cup (\complement_U M)$.

【方法突破】求集合的交、并、补时, 应先对集合进行化简或计算. 若涉及连续区间问题, 通常借助数轴来完成; 若涉及离散的数集问题, 可利用韦恩图解决.

6. A $M = \{x | 0 \leq x < 1\}$, $N = \{x | x^2 - x \leq 0\} = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$, 得 $M \subsetneq N$.

7. C 由 $A \subseteq (A \cap B)$, 可得 $A \subseteq B$, 当 A 为 B 的真子集时, 选项 A, B, D 都不成立; $A \cap (\complement_U B) = \emptyset$ 恒成立, 故选项 C 正确.

8. C ①因为 $4 - (-2) = 6 \notin \{-4, -2, 0, 2, 4\}$, 故错误; ②设 $a = 3k_1$ ($k_1 \in \mathbf{Z}$), $b = 3k_2$ ($k_2 \in \mathbf{Z}$), 则 $a + b = 3k_1 + 3k_2 = 3(k_1 + k_2) \in A$, $a - b = 3k_1 - 3k_2 = 3(k_1 - k_2) \in A$, 故正确; ③设 $A_1 = \{n | n = 3k, k \in \mathbf{Z}\}$, $A_2 = \{n | n = 5k, k \in \mathbf{Z}\}$, 则 $3 \in A_1, 5 \in A_2, 3 + 5 \notin (A_1 \cup A_2)$, 故错误; ④设 $A_1 = \{n | n = 3k, k \in \mathbf{Z}\}$, $A_2 = \{n | n = 5k, k \in \mathbf{Z}\}$, 则 $A_1 \subseteq \mathbf{R}, A_2 \subseteq \mathbf{R}$, 存在 $3 + 5 \notin (A_1 \cup A_2)$, 故正确.

9. ABD 选项 A 中, M 是由 $3, -1$ 两个元素构成的集合, 而集合 P 是由点 $(3, -1)$ 构成的集合; 选项 B 中, $(3, 1)$ 与 $(1, 3)$ 表示不同的点, 故 $M \neq P$; 选项 C 中, $M = \{y | y = x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\} = [1, +\infty)$, $P = \{x | x = t^2 + 1, t \in \mathbf{R}\} = [1, +\infty)$, 故 $M = P$; 选项 D 中, M 是二次函数 $y = x^2 - 1, x \in \mathbf{R}$ 的所有因变量组成的集合, 即值域, 而集合 P 是二次函数 $y = x^2 - 1, x \in \mathbf{R}$ 图象上所有点组成的集合, 即一条曲线.

10. ABC 对于选项 A, B, 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$, $C = \{4\}$, 满足 $A \cup B = A \cup C$, 此时 $B \subseteq A, C \subseteq A$ 均不成立, 故选项 A, B 不一定成立; 对于选项 C, 设 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$, $C = \{4\}$, 满足 $A \cup B = A \cup C$, 此时 $A \cap (\complement_U B) = \{1, 2\} \neq \{1, 2, 3\} = A \cap (\complement_U C)$, 故 C 不一定成立; 对于选项 D, 若 $(\complement_U A) \cap B = \emptyset$, 则有 $B \subseteq A$, 所以 $A \cup B = A$, 又 $A \cup C = A$, 所以 $C \subseteq A$, 所以 $(\complement_U A) \cap C = \emptyset = (\complement_U A) \cap B$; 若 $(\complement_U A) \cap B \neq \emptyset$, 不妨设任意元素 $a \in (\complement_U A) \cap B$, 所以有 $a \in (\complement_U A)$ 且 $a \in B$, 即 $a \notin A$ 且 $a \in B$. 又 $a \in (A \cup B)$, 所以 $a \in (A \cup C)$, 又 $a \notin A$, 所以 $a \in C$, 所以 $a \in (\complement_U A) \cap C$, 故 D 正确.

【解后反思】不成立的命题只要举出反例即可, 正确的命题一定要给出证明.

11. BCD 对于 A, 因为 $A \cup B = \mathbf{Q}, U = \mathbf{R}$, 所以 $\complement_U \mathbf{Q} \subseteq \complement_U A, \complement_U \mathbf{Q} \subseteq \complement_U B$, 所以 $\complement_U A, \complement_U B$ 都没有最大和最小元素, 故 A 不可能成立; 对于 B, 若 $A = \{x \in \mathbf{Q} | x \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{Q} | x > 0\}$, 则 A 有一个最大元素, B 没有最小元素, 故 B 可能成立; 对于 C, 若 $A = \{x \in \mathbf{Q} | x \leq 0 \text{ 且 } x \neq -1\}$, $B = \{x \in \mathbf{Q} | x > 0 \text{ 或 } x = -1\}$, 则 A 有一个最大元素, B 有一个最小元素, 故 C 可能成立; 对于 D, 若 $A = \{x \in \mathbf{Q} | x < \sqrt{2}\}$, $B = \{x \in \mathbf{Q} | x \geq \sqrt{2}\}$, 则 A 没有最大元素, B 也没有最小元素, 故 D 可能成立.

12. -1 因为 $A = \left\{x, \frac{y}{x}, 1\right\}, B = \{x^2, x + y, 0\}, A = B$, 所

以 $\begin{cases} y=0, \\ x^2=1, \\ x \neq 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=-1, \\ y=0, \end{cases}$ 则 $x^{2017} + y^{2018} = (-1)^{2017} + 0^{2018} = -1$.

13. 5 由 $A \cap B = A$, 得 $A \subseteq B$. 由 $|x-3| \leq m$, 得 $-m+3 \leq x \leq m+3$, 故有 $\begin{cases} 4 \leq m+3, \\ -2 \geq -m+3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m \geq 1, \\ m \geq 5, \end{cases}$ 即 $m \geq 5$, 所以 m 的最小值为 5.

14. $\frac{1}{10} \left[\frac{8}{5}, \frac{17}{10} \right) \cup \left(\frac{9}{5}, 2 \right]$ 【分析】从集合“长度”整体

把握, 再到细节控制端点, 更易突破. 集合 $M = \left\{x \mid m \leq x \leq m + \frac{1}{2}\right\}$, $N = \left\{x \mid n - \frac{3}{5} \leq x \leq n\right\}$, 都是集合 $\{x | 1 \leq x \leq 2\}$ 的子集,

它们的“长度”分别为 $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, 1$, 集合 M, N 的长度固定, 且 $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{11}{10} > 1$, 当 M, N 分别滑动到集合 $\{x | 1 \leq x \leq 2\}$ 的最左端和

最右端, 或最右端和最左端时, $M \cap N$ 的“长度”最小, 最小值为

$\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\right) - 1 = \frac{1}{10}$. 若 $m = \frac{6}{5}$, 则 $M = \left[\frac{6}{5}, \frac{17}{10}\right]$, 因为集合 N

$= \left\{x \mid n - \frac{3}{5} \leq x \leq n\right\}$ 的“长度”为 $\frac{3}{5}$, 要使集合 $M \cup N$ 的“长

度”大于 $\frac{3}{5}$, 只要 $M \subseteq N$ 不成立即可. 也可先考虑 $M \subseteq N$, 然后

结合 $\frac{8}{5} \leq n \leq 2$ 求补集.

由 $\begin{cases} m \geq 1, \\ m + \frac{1}{2} \leq 2, \end{cases}$ 可得 $1 \leq m \leq \frac{3}{2}$; 由 $\begin{cases} n - \frac{3}{5} \geq 1, \\ n \leq 2, \end{cases}$ 可得 $\frac{8}{5} \leq n$

≤ 2 . 易知 $M \cap N = \left\{x \mid m \leq x \leq n \text{ 或 } n - \frac{3}{5} \leq x \leq m + \frac{1}{2}\right\}$, 故有

“长度”的最小值为 $n_{\min} - m_{\max} = \frac{8}{5} - \frac{3}{2} = \frac{1}{10}$ 或 $\left(m + \frac{1}{2}\right)_{\min} -$

$\left(n - \frac{3}{5}\right)_{\max} = \frac{3}{2} - \frac{7}{5} = \frac{1}{10}$, 即集合 $M \cap N$ 的“长度”的最小值是

$\frac{1}{10}$. 若 $m = \frac{6}{5}$, 则 $M = \left[\frac{6}{5}, \frac{17}{10}\right]$, 故 $n - \frac{3}{5} < \frac{17}{10} - \frac{3}{5}$ 或 $n > \frac{6}{5} +$

$\frac{3}{5}$, 即 $n < \frac{17}{10}$ 或 $n > \frac{9}{5}$. 又 $\frac{8}{5} \leq n \leq 2$, 故 $n \in \left[\frac{8}{5}, \frac{17}{10}\right) \cup \left(\frac{9}{5}, 2\right]$.

考点过关 2 常用逻辑用语

1. A 由 $\frac{1}{a} < 2$ 得 $a < 0$ 或 $a > \frac{1}{2}$, 所以“ $a > \frac{1}{2}$ ”是“ $\frac{1}{a} < 2$ ”的充分不必要条件.

2. C 存在量词命题的否定为全称量词命题, 则 $\neg p: \forall x \in \mathbf{R}, a^x \leq kx$.

3. A 【分析】这种涉及范围的充要条件的确定, 一般将充要条件的问题等价转化为集合之间的包含关系问题来解决. 规律: 已知命题 p, q 中相应变量的取值集合分别为 A, B , 如果 $A \subseteq B$, 那么 p 是 q 的充分不必要条件; 如果 $A \subseteq B$, 那么 p 是 q 的充分条件; 如果 $A = B$, 那么 p 是 q 的充要条件.

由条件可得 $p: x < 1, q: x < 2a + 1$. 因为 p 是 q 的充分不必要条件, 所以 p 中集合是 q 中集合的真子集, 所以 $2a + 1 > 1$, 即 $a > 0$.

4. C 这段文字中, 没有证明 $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ 是有理数的条件, 也没有证明 $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ 是无理数的条件, A, B 错误; 都说明了结论“存在无理数 a, b , 使得 a^b 为有理数”, C 正确; 只提及存在无理数 a, b , 不涉及对任意无理数 a, b 都成立的问题, D 错误.

5. D 命题 p : 有的三角形是等边三角形, 其中“有的”是存在量词, 所以对它的否定, 应该改存在量词为全称量词“所有”,

然后对结论进行否定,故有 $\neg p$:所有的三角形都不是等边三角形.

6. A 若 $\exists x \in [1, 3]$,使得 $x^2 - ax + 3 > 0$,即 $ax < x^2 + 3$,可得 $a < x + \frac{3}{x}$,则 $a < \left(x + \frac{3}{x}\right)_{\max}$.

因为函数 $f(x) = x + \frac{3}{x}$ 在 $[1, \sqrt{3}]$ 上单调递减,在 $[\sqrt{3}, 3]$ 上单调递增,且 $f(1) = f(3) = 4$,所以当 $x \in [1, 3]$ 时, $f(x)_{\max} = 4$,即 $p: a < 4$,所以 p 的一个必要不充分条件是 $a < 5$.

【易错警示】 $p: \exists x \in [1, 3], x^2 - ax + 3 > 0$ 是存在量词命题,不能将它当做全称量词命题,进而按恒成立的要求来求 a 的取值范围; $a < 4$ 是 p 成立的充要条件,将 a 的范围扩大后,便成为 p 成立的必要不充分条件,而非缩小.

7. A 当 $(a+kb) \perp (a-kb)$ 时, $(a+kb) \cdot (a-kb) = 0$,即 $a^2 - k^2 b^2 = 0$,故 $20 - 10k^2 = 0$,解得 $k = \pm\sqrt{2}$.故“ $k = \sqrt{2}$ ”是“ $(a+kb) \perp (a-kb)$ ”的充分不必要条件.

8. A 因命题“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}$,使得 $x_0^2 + mx_0 + 2m - 3 < 0$ ”为假命题,故“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + mx + 2m - 3 \geq 0$ 恒成立”为真命题,由二次函数开口向上,知 $\Delta = m^2 - 4(2m - 3) \leq 0$,所以 $m \in [2, 6]$.

9. AD 由题意,集合 $A = \{x | 1 < x < 2\}$, $B = \{x | x \leq 2\}$,可得 $A \not\subseteq B$,且 $\mathbb{R}B \not\subseteq \mathbb{R}A$,所以 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的充分不必要条件,且 $x \in \mathbb{R}A$ 是 $x \in \mathbb{R}B$ 的必要不充分条件.

10. AC 对于A选项,由 $x = -1$,此时 $x \neq 1$,可得 $|x| = 1$,所以不是充分条件,由 $|x| \neq 1$,可得 $x \neq \pm 1$,可得 $x \neq 1$,所以是必要不充分条件,A选项正确;对于B选项,“若 $x + y \geq 6$,则 x, y 中至少有一个大于3”的否命题为“若 $x + y < 6$,则 x, y 都不大于3”,取 $x = 4, y = 1$,显然为假命题,故B选项错误;对于C选项,取 $x = -1$ 可知C选项正确;命题“ $\exists x < 0, x^2 - x - 2 < 0$ ”的否定是“ $\forall x < 0, x^2 - x - 2 \geq 0$ ”,故D错误.

【解后反思】若想说明一个命题是错误的,则给出问题的反面成立,即举出一个反例即可;若想证明一个命题是正确的,则需要给出严格的证明.

11. AB 因为“ $\exists x \in M, x > 3$ ”为假命题,所以“ $\forall x \in M, x \leq 3$ ”为真命题,可得 $M \subseteq (-\infty, 3]$.又“ $\forall x \in M, |x| > x$ ”为真命题,可得 $M \subseteq (-\infty, 0)$,所以 $M \subseteq (-\infty, 0)$.则集合 M 可以为 $(-\infty, -5), (-3, -1]$.

12. $(-1, +\infty)$ $A = \{x | \log_{\frac{1}{2}}(x+2) < 0\} = \{x | x > -1\}$,因为 $a = -3$,所以 $B = \{x | (x-a)(x-b) < 0\} = (-3, b)$ 或 $(b, -3)$,由 $A \cap B \neq \emptyset$,得 $b > -1$.

13. ①② 【分析】涉及多个命题之间的充要条件的确定,一般借助图形和充要条件的传递性来解决.这里只需将题目条件借助图形展示出来: $p \Rightarrow r \Rightarrow s$, $q \Rightarrow r \Rightarrow s$,看出 q, r, s 三者是等价的,便能快速得到答案.

因为 p 是 r 的充分不必要条件,所以 $p \Rightarrow r, r \not\Rightarrow p$.因为 q 是 r 的充分条件,所以 $q \Rightarrow r$.因为 s 是 r 的必要条件,所以 $r \Rightarrow s$.因为 q 是 s 的必要条件,所以 $s \Rightarrow q$.因为 $q \Rightarrow r, r \Rightarrow s$,所以 $q \Rightarrow s$.又 $s \Rightarrow q$,所以 s 是 q 的充要条件.故命题①正确.因为 $p \Rightarrow r, r \Rightarrow s, s \Rightarrow q$,所以 $p \Rightarrow q$.若 $q \Rightarrow p$,则由 $r \Rightarrow s, s \Rightarrow q, q \Rightarrow p$,得 $r \Rightarrow p$,与 $r \not\Rightarrow p$ 矛盾.所以 $q \not\Rightarrow p$.所以 p 是 q 的充分不必要条件.故命题②正确.因为 $r \Rightarrow s, s \Rightarrow q$,所以 $r \Rightarrow q$.又 $q \Rightarrow r$,所以 r 是 q 的充要条件.故命题③错误.因为 $s \Rightarrow q, q \Rightarrow r$,所以 $s \Rightarrow r$.又 $r \Rightarrow s$,所以 r 是 s 的充要条件.故命题④错误.

14. 3 $2^k - 1$ 将 $1, 2, \dots, 2k-1$ 分为 k 组, 1 和 $2k-1, 2$ 和 $2k-2, \dots, k-1$ 和 $k+1, k$ 单独一组,每组中的两个数必须同时属于或同时不属于一个满足条件的集合 M ,每组属于或不属于 M 共两种情况,排除一个空集,满足条件的集合 M 的个数为 $2^k - 1$,即 $f(k) = 2^k - 1, f(2) = 3$.

考点过关 3 不等关系与不等式的性质

1. C $\frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2+1}{a^2+1} = \frac{b^2-a^2}{a^2(a^2+1)} = \frac{(b+a)(b-a)}{a^2(a^2+1)}$,因为 $a > b > 0$,所以 $\frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2+1}{a^2+1} < 0$,即 $\frac{b^2}{a^2} < \frac{b^2+1}{a^2+1}$,故A一定成立;因为 a

$> b > 0$,所以 $a^2 + b^2 > 2ab > ab$,故B一定成立; $a + \frac{1}{a} - b - \frac{1}{b} = (a-b)\left(1 - \frac{1}{ab}\right)$,当 $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}$ 时, $a + \frac{1}{a} - b - \frac{1}{b} < 0$,此时 $a + \frac{1}{a} < b + \frac{1}{b}$,故C不一定成立; $a - \frac{1}{a} - b + \frac{1}{b} = (a-b)\left(1 + \frac{1}{ab}\right)$,因为 $a > b > 0$,所以 $a - \frac{1}{a} - b + \frac{1}{b} > 0$,即 $a - \frac{1}{a} > b - \frac{1}{b}$,故D一定成立.

2. B 设A地到B地相距 S m,依题意, $\frac{t_1}{2}m + \frac{t_1}{2}n = S$

①, $\frac{S}{m} + \frac{S}{n} = t_2$ ②.由①,可得 $t_1 = \frac{2S}{m+n}$,由②,可得 $t_2 = \frac{m+n}{2mn}S$,则 $t_1 - t_2 = \frac{2S}{m+n} - \frac{m+n}{2mn}S = S\left(\frac{2}{m+n} - \frac{m+n}{2mn}\right) = S \cdot \frac{4mn - (m+n)^2}{2mn(m+n)} = S \cdot \frac{-(m-n)^2}{2mn(m+n)}$,因为 $m \neq n$,且 $m, n > 0$,所以 $t_1 - t_2 < 0$,即 $t_1 < t_2$.

3. D 因为 $a < 0, -1 < b < 0$,所以 $ab > 0, 0 < b^2 < 1$,所以 $0 > ab^2 > a$,所以 $ab > ab^2 > a$.

4. A 因为 $a, b \in (0, 1)$ 且 $ab > a^2$,所以 $ab - a^2 = a(b-a) > 0$,所以 $b-a > 0$.对于A,因为 $\frac{1}{b} - \frac{1}{b-a} = \frac{-a}{b(b-a)} < 0$,所以 $\frac{1}{b} < \frac{1}{b-a}$,所以A正确;对于B,因为 $ab - b^2 = b(a-b) < 0$,所以 $ab < b^2$,所以B错误;对于C,因为 $1+ab - (a+b) = a(b-1) - (b-1) = (a-1)(b-1)$,且 $a, b \in (0, 1)$,所以 $a-1 < 0, b-1 < 0$,所以 $1+ab - (a+b) > 0$,所以 $1+ab > a+b$,所以C错误;对于D,因为 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} > 0$,所以 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$,所以D错误.

5. B 因为 $x > y > z, x+y+z=0$,所以 $3x > x+y+z=0 > 3z$,所以 $x > 0, z < 0$.对于A, D,令 $x=2, y=0, z=-2$,满足条件 $x > y > z, x+y+z=0$,但 $xy = yz = 0, x|y| = z|y| = 0$,故A, D错误;对于B,由 $y > z, x > 0$,得 $xy > xz$,故B正确;对于C,由 $x > y, z < 0$,得 $xz < yz$,故C错误.

6. A 当 $\begin{cases} a > 2, \\ b > 3 \end{cases}$ 时, $\begin{cases} a+b > 5, \\ ab > 6 \end{cases}$ 成立;当 $\begin{cases} a+b > 5, \\ ab > 6 \end{cases}$ 时,取 $\begin{cases} a=2, \\ b=4 \end{cases}$,则 $\begin{cases} a > 2, \\ b > 3 \end{cases}$ 不成立.故 $\begin{cases} a > 2, \\ b > 3 \end{cases}$ 是 $\begin{cases} a+b > 5, \\ ab > 6 \end{cases}$ 的充分不必要条件.

7. D 令 $a=1, b=2, c=-1$,满足 $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$,不满足 $a > b$,故A错误;当 $a=1, b=2, m=-1$ 时, $\frac{b}{a} = 2, \frac{b-m}{a-m} = \frac{3}{2}$,不满足 $\frac{b-m}{a-m} > \frac{b}{a}$,故B错误;当 $a=2, b=-1$ 时,满足 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$,不满足 $ab > 0$,故C错误;若 $a > b > c, a+b+c=0$,则 $a > 0$ 一定成立,故 $ab > ac$,故D正确.

8. B 设男学生、女学生人数分别为 x, y ,教师人数为 z ,家长人数为 m ,其中 x, y, z, m 都是正整数,由题意,得 $\begin{cases} x > y, \\ y > m, \\ m > z, \\ 2z > x, \end{cases}$ 即

$z < m < y < x < 2z$.由于 m, x, y, z 都是正整数,所以 $2z - z \geq 4$,即 $z \geq 4$.当 $z=4$ 时, $m=5, y=6, x=7, 2z=8$,满足不等式,所以教师人数的最小值为4.

9. AB $\frac{a+c}{a} > \frac{b+c}{b}$ 可化为 $1 + \frac{c}{a} > 1 + \frac{c}{b}$,即 $\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$,由 $a > b > 0$,得 $bc > ac$,即 $(a-b)c < 0$,即 $c < 0$,故A, B正确, C, D错误.

10. BCD 令 $a=0, b=-1, c=1, d=0$,满足条件,但 $ac = bd$,故A错误;由题意, $\frac{a+b}{b} - \frac{c+d}{d} = \frac{ad-bc}{bd} < 0$,所以 $\frac{a+b}{b} < \frac{c+d}{d}$,故B正确;因为 $\frac{b}{a} - \frac{a}{b} = \frac{b^2-a^2}{ab} = \frac{(b-a)(b+a)}{ab} < 0$,所

以 $\frac{b}{a} < \frac{a}{b}$, 故 C 正确; 因为 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} > 0, a > b$, 所以 $ab < 0$, 又因为 $a > b$, 所以 $a > 0, b < 0$, 故 D 正确.

11. ABD 对于 A, 因为 $a > b > c$, 且 $2a + b + c = 0$, 若 $c \geq 0$, 则 $a > b > c \geq 0$, 所以 $2a + b + c > 0$, 不合题意, 所以 $c < 0$; 若 $a \leq 0$, 则 $0 \geq a > b > c$, 则 $2a + b + c < 0$, 不合题意, 所以 $a > 0$. 综上所述, $a > 0, c < 0$, 故 A 正确. 对于 C, 因为 $a > b > c$, 所以 $a + b > a + c$, 可得 $2a + b + c > 2(a + c)$, 即 $0 > 2(a + c)$, 可得 $a + c < 0$, 故 C 错误. 对于 B, 由选项 A, C 可知 $a > 0 > c$, 又 $a + c < 0$, 得 $(a + c)^2 > 0$, 即 $a^2 + c^2 > -2ac$, 且 $ac < 0$, 所以 $\frac{c}{a} + \frac{a}{c} < -2$, 故 B 正确.

对于 D, 因为 $(a + 2c) + (a + b) = (2a + b + c) + c = c < 0$, 所以 $a + 2c < -(a + b)$, 又因为 $2a + b + c = (a + b) + (a + c) = 0$, 所以 $a + b = -(a + c) > 0$, 所以 $\frac{a + 2c}{a + b} < -1$, 故 D 正确.

12. < 依题意, $a - b = \sqrt{5} - (4 - \sqrt{3}) = \sqrt{5} + \sqrt{3} - 4 = \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2} - 4 = \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} - 4 < \sqrt{8 + 2\sqrt{16}} - 4 = 0$, 所以 $a < b$.

13. $a = -1, b = 2$ (答案不唯一) 容易发现, 若要满足条件 ① 和 ② 式, 需使 $(a + b)ab < 0$, 即 $a + b$ 与 ab 异号, 显然应使 $a + b > 0, ab < 0$. 当 $a < 0, b > 0$ 时, 需使 $a + b > 0$, 则 $|a| < |b|$, 可取 $a = -1, b = 2$; 当 $a > 0, b < 0$ 时, 需使 $a + b > 0$, 则 $|a| > |b|$, 可取 $a = 2, b = -1$. 综上, 取任意异号的两个数, 且正数的绝对值大于负数的绝对值皆为合理答案.

14. $[-2, -\frac{1}{3}]$ 因为 $T(1, -1) = -2, T(4, 2) = 1$, 所以 $\frac{a-b}{2-1} = -2, \frac{4a+2b}{2 \times 4+2} = 1$, 解得 $a = 1, b = 3$, 所以 $T(2m, 5-4m) = \frac{2m+3 \times (5-4m)}{4m+5-4m} \leq 4$, 解得 $m \geq -\frac{1}{2}, T(m, 3-2m) = \frac{m+3 \times (3-2m)}{2m+3-2m} > P$, 解得 $m < \frac{9-3P}{5}$. 因为不等式组恰有 3 个整数解, 所以 $2 < \frac{9-3P}{5} \leq 3$, 解得 $-2 \leq P < -\frac{1}{3}$.

考点过关 4 基本不等式

1. A 因为 $x + y = 18$, 所以 $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = 9$, 当且仅当 $x = y = 9$ 时, 等号成立.

2. B 【分析】从 4 个选项不难看出本题考查基本不等式和用基本不等式求最值. 用基本不等式一定要明确不等式成立时对字母的要求; 用基本不等式求最值一定要逐一检查“一正、二定、三相等”, 尤其是“三相等”.

当 $x = -1$ 时, $y = x + \frac{1}{x} = -2$, A 错误; $y = 3^x + 3^{-x} \geq 2\sqrt{3^x \cdot 3^{-x}} = 2$, 当且仅当 $3^x = 3^{-x}$, 即 $x = 0$ 时等号成立, B 正确; $1 < x < e$, 则 $\ln x \in (0, 1)$, $y = \ln x + \frac{1}{\ln x} \geq 2\sqrt{\ln x \cdot \frac{1}{\ln x}} = 2$, 当且仅当 $\ln x = \frac{1}{\ln x}$, 即 $\ln x = 1$ 时等号成立, 而 $\ln x \neq 1$, 等号不成立, 故 C 错误; $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin x \in (0, 1)$, $y = \sin x + \frac{1}{\sin x} \geq 2\sqrt{\sin x \cdot \frac{1}{\sin x}} = 2$, 当且仅当 $\sin x = \frac{1}{\sin x}$, 即 $\sin x = 1$ 时等号成立, 而 $\sin x \neq 1$, 等号不成立, 故 D 错误.

3. C 当 $x > 0$ 时, $x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$. 因为 $x, \frac{1}{x}$ 同号, 所以 $x + \frac{1}{x} \geq 2$ 时, $x > 0, \frac{1}{x} > 0$.

4. D $y = \frac{(x+1)^2 + 1}{x+1} = (x+1) + \frac{1}{x+1} \geq 2$, 当且仅当 $x = 0$ 时取最小值.

5. D 设 $m = 2^a, n = 2^b$, 则 $m > 0, n > 0, m + n = 1$. 因为 $m + n \geq 2\sqrt{mn}$, 即 $0 < mn \leq \frac{1}{4}$, 当且仅当 $m = n$ 时取等号, 所以 $(4^a + 1)(4^b + 1) = (m^2 + 1)(n^2 + 1) = (mn)^2 + m^2 + n^2 + 1 = (mn)^2$

$+ (m+n)^2 - 2mn + 1 = (mn)^2 - 2mn + 2 = (mn-1)^2 + 1 \left(0 < mn \leq \frac{1}{4} \right)$, 所以当 $mn = \frac{1}{4}$ 时, $(mn)^2 - 2mn + 2$ 取得最小值为 $\frac{25}{16}$.

6. A 解法 1 (不等式法) 因为 $(x+2y)^2 = x^2 + 4y^2 + 2 \cdot x \cdot 2y \leq (x^2 + 4y^2) + (x^2 + 4y^2) = 5 + 5 = 10$, 所以 $-\sqrt{10} \leq x + 2y \leq \sqrt{10}$, 当且仅当 $x = \frac{\sqrt{10}}{2}, y = \frac{\sqrt{10}}{4}$ 时, $x + 2y$ 取得最大值 $\sqrt{10}$.

解法 2 (三角换元法) 因为实数 x, y 满足 $x^2 + 4y^2 = 5$, 所以可设 $x = \sqrt{5} \cos \theta, 2y = \sqrt{5} \sin \theta, \theta \in [0, 2\pi)$, 则 $x + 2y = \sqrt{5} \cos \theta + \sqrt{5} \sin \theta = \sqrt{10} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$, 当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时, $x + 2y$ 取得最大值 $\sqrt{10}$.

【解后反思】 处理双元最值问题, 要有方程、减元和整体意识, 要多观察题中给出式子的结构特点及条件与所求的联系, 要带着方向和目标去解题.

7. A 【分析】这种多变量的最值问题一般从不等式求最值出发, 但解题时要注意“一正、二定、三相等”.

由 $m > 2n > 0$, 得 $m - 2n > 0, \frac{m}{m-2n} + \frac{m}{n} = \frac{(m-2n)+2n}{m-2n} + \frac{(m-2n)+2n}{n} = 3 + \frac{2n}{m-2n} + \frac{m-2n}{n} \geq 3 + 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $\frac{2n}{m-2n} = \frac{m-2n}{n}$, 即 $m = (2 + \sqrt{2})n$ 时, 等号成立.

8. C 令 $\frac{m+x}{1-n-x} > 0$, 得 $(x+m)(x-1+n) < 0$, 故函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | (x+m)(x-1+n) < 0\}$. 因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以其定义域关于原点对称, 可得 $-m+1-n=0$, 即 $m+n=1$, 此时 $f(x) = \ln \frac{m+x}{m-x}$, 因为 $f(x) + f(-x) = \ln \frac{m+x}{m-x} + \ln \frac{m-x}{m+x} = \ln 1 = 0$, 所以 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $m+n=1$ 符合题意. 所以 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n} = \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{n}\right)(m+n) = 3 + \frac{n}{m} + \frac{2m}{n} \geq 3 + 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $m = \sqrt{2} - 1, n = 2 - \sqrt{2}$ 时等号成立, 即 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n}$ 的最小值为 $3 + 2\sqrt{2}$.

9. AD A 正确; B 不正确, 因为 $\lg x$ 和 $\lg y$ 不一定是正实数, 故不可用基本不等式; C 不正确, 因为当 $a < 0$ 时, $\frac{4}{a} + a \geq 4$ 不成立; D 正确, 若 $x, y \in \mathbf{R}, xy < 0$, 则 $-\frac{x}{y} > 0, -\frac{y}{x} > 0$, 所以 $\left(-\frac{x}{y}\right) + \left(-\frac{y}{x}\right) \geq 2\sqrt{\left(-\frac{x}{y}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x}\right)} = 2$, 则 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq -2$.

10. ABCD 对于选项 A, 因为 $2^a + 2^b \geq 2\sqrt{2^{a+b}} = 4 \geq 2\sqrt{2}$, 故 A 正确; 对于选项 B, 因为 $2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a+b) = 2 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 4$, 所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2$, 当且仅当 $a = b = 1$ 时, 等号成立, 故 B 正确; 对于选项 C, 因为 $2 = a + b \geq 2\sqrt{ab}$, 所以 $1 \geq ab$, 当且仅当 $a = b = 1$ 时, 等号成立, 所以 $\log_2 a + \log_2 b = \log_2 ab \leq \log_2 1 = 0 \leq 1$, 故 C 正确; 对于选项 D, 因为 $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, 所以 $a^2 + b^2 \geq 2$, 当且仅当 $a = b = 1$ 时, 等号成立, 故 D 正确.

【解后反思】 此题属于易错题型, 四个选项都是不等式中的常规问题, 都有常规的解题方法, 需要注意使用基本不等式的条件, 符合“一正、二定、三相等”.

11. ABC 由 $AC + CB = a + b$, 由射影定理可知 $CD = \sqrt{ab}$, 又 $OD \geq CD$, 所以 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} (a > 0, b > 0)$, A 正确; 因为 $CD \leq$

$\frac{1}{2}AB$, 故 $AB^2 \geq 4CD^2$, 即 $(a+b)^2 \geq 4ab$, 即 $a^2+b^2 \geq 2ab (a>0, b>0)$, B 正确; 由射影定理可知 $CD^2 = DE \cdot OD$, 即 $DE = \frac{CD^2}{OD} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b}$, 又 $CD \geq DE$, 即 $\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} (a>0, b>0)$, C 正确.

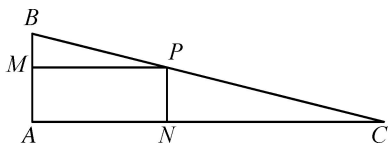
【解后反思】一般地, 在题目中出现“ $a \pm b, a^2 + b^2, ab$ ”三者关系时有两种思考角度, 一个是用基本不等式, 一个是用根与系数的关系, 当然必须要利用恒等式 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ 把题设中“ $a \pm b, a^2 + b^2, ab$ ”化为两者的关系.

12. 8 由 x, y 都是正实数, 且 $x+2y=xy$, 可得 $xy=x+2y \geq 2\sqrt{2xy}$, 即 $\sqrt{xy}(\sqrt{xy}-2\sqrt{2}) \geq 0$, 解得 $\sqrt{xy} \geq 2\sqrt{2}$, 即 $xy \geq 8$, 当且仅当 $x=2y$, 即 $x=4, y=2$ 时, 等号成立, 所以 xy 的最小值为 8.

13. $2\sqrt{2}+1$ **【分析】**从已知条件中易得 $x+2y=1$, 这里的“1”就不能用乘“1”法了, 而是凑齐次, 由 $\frac{1}{x} + \frac{x}{y} = \frac{x+2y}{x} + \frac{x}{y} = 1 + \frac{2y}{x} + \frac{x}{y}$, 这就是常用的代“1”法, 其目的就是要产生“乘积为定值的两项之和”, 以便利用基本不等式求最值.

由题得 $2^x \cdot 4^y = 2$, 所以 $2^{x+2y} = 2$, 所以 $x+2y=1$. $\frac{1}{x} + \frac{x}{y} = \frac{x+2y}{x} + \frac{x}{y} = 1 + \frac{2y}{x} + \frac{x}{y} \geq 1 + 2\sqrt{\frac{2y}{x} \cdot \frac{x}{y}} = 1 + 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $x=\sqrt{2}-1, y=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ 时取等号.

14. $\frac{9}{4}$ 如图, 因为 $PM \perp AB$, 所以 $PM \parallel AC$. 所以 $\frac{PM}{BM} = \frac{AC}{AB} = 4$. 所以 $PM=4BM$. 所以 $BM=\frac{1}{4}h_1$. 由 $AM=PN=h_2$, 得 $\frac{1}{4}h_1+h_2=1$. 所以 $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} = \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right) \left(\frac{1}{4}h_1+h_2\right) = \frac{5}{4} + \frac{h_2}{h_1} + \frac{h_1}{4h_2} \geq \frac{5}{4} + 2\sqrt{\frac{h_2}{h_1} \cdot \frac{h_1}{4h_2}} = \frac{5}{4} + 1 = \frac{9}{4}$, 当且仅当 $\frac{h_2}{h_1} = \frac{h_1}{4h_2}$, 即 $h_1=2h_2=\frac{4}{3}$ 时, 等号成立, 所以 $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}$ 的最小值为 $\frac{9}{4}$.



考点过关 5 二次函数与一元二次不等式

1. A 因为 $A=(-\sqrt{3}, \sqrt{3}), B=(-1, 2)$, 所以 $A \cap B = (-1, \sqrt{3})$.

2. D 当 $t=2$ 时, $f(0)=2t^2-2t=2 \times 2^2-2 \times 2 \neq 0$, 所以 $f(x)$ 的图象不恒过点 $(0, 0)$, 故 A 错误; 当 $t=0$ 时, $\Delta=4t^2-4(2t^2-2t)=-4t^2+8t=0$, 此时 $f(x)$ 的图象与 x 轴只有 1 个交点, 故 B 错误; $f(x)=x^2-2tx+2t^2-2t=(x-t)^2+t^2-2t$, 则 $f(x)$ 的最小值为 $t^2-2t=(t-1)^2-1 \geq -1$, 所以函数的最小值不可能是 -2, 可能为 -1, 故 C 错误, D 正确.

3. D 由 $\exists x \in \mathbf{R}, \frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}-a < 0$, 可得 $a > \frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$ 在 $\mathbf{R}$ 上能成立. 因为 $\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2} = \frac{1}{2}(x+1)^2-2 \geq -2$, 所以 $a > -2$. 由题意知, $(-2, +\infty)$ 是选项的范围的真子集即可.

4. B 由题意, 得 $c < 0, -1, \frac{1}{2}$ 是 $cx^2+ax+b=0$ 的两个根, 则 $-1+\frac{1}{2}=-\frac{a}{c}, -1 \times \frac{1}{2}=\frac{b}{c}$, 即 $a=\frac{1}{2}c < 0, b=-\frac{1}{2}c > 0$, 所以函数 $y=ax^2+bx-c$ 的图象开口向下, 对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a} > 0$, 与 y 轴交点纵坐标为 $-c > 0$.

5. D 因为 $0 < a < 1$, 所以 $\frac{1}{a} > 1$, 原不等式等价于 $(x-a)(x-\frac{1}{a}) > 0$, 解得 $x < a$ 或 $x > \frac{1}{a}$, 所以不等式的解集为 $\{x | x < a \text{ 或 } x > \frac{1}{a}\}$.

6. D 已知 $a > 0, b > 0$, 则 $\frac{a}{b} > 0, \frac{b}{a} > 0$, 所以 $\frac{b}{a} + \frac{2}{b} = \frac{b}{a} + \frac{a+2b}{b} = \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 2 \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} + 2 = 4$, 当且仅当 $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$, 即 $a=b=\frac{2}{3}$ 时等号成立, 故 $\frac{b}{a} + \frac{2}{b}$ 的最小值为 4. 因为 $3t^2-t \leq \frac{b}{a} + \frac{2}{b}$ 恒成立, 所以 $3t^2-t \leq 4$, 即 $(3t-4)(t+1) \leq 0$, 解得 $-1 \leq t \leq \frac{4}{3}$, 即 $t \in [-1, \frac{4}{3}]$.

7. B 由函数 $f(x)=x^2+ax+b (a, b \in \mathbf{R})$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 得方程 $x^2+ax+b=0$ 有两个相等的实根, 则 $\Delta=a^2-4b=0$, 即 $b=\frac{1}{4}a^2$. 由不等式 $x^2+ax+\frac{1}{4}a^2 < c$ 的解集为 $(m, m+2\sqrt{5})$, 得方程 $x^2+ax+\frac{1}{4}a^2-c=0$ 的两根为 $m, m+2\sqrt{5}$, 所以 $\begin{cases} m+m+2\sqrt{5}=-a, \\ m(m+2\sqrt{5})=\frac{1}{4}a^2-c, \end{cases}$ 即 $m(m+2\sqrt{5})=\frac{1}{4}(-2m-2\sqrt{5})^2-c$, 所以 $c=5$.

8. D 由题意, 得 $M=\{x | (x-3m)(x+m) \leq 0\}, N=\{x | (x-m)(x+2m) \leq 0\}$, 方程 $x^2-2mx-3m^2=0$ 的根为 $-m, 3m$, 方程 $x^2+mx-2m^2=0$ 的根为 $-2m, m$. 当 $m=0$ 时, $M \cap N = \{0\}$, 不合题意; 当 $m > 0$ 时, $M=\{x | -m \leq x \leq 3m\}, N=\{x | -2m \leq x \leq m\}, M \cap N = \{x | -m \leq x \leq m\}$, 由 $m-(-m)=4$, 得 $m=2$, 此时 $M=\{x | -2 \leq x \leq 6\}, N=\{x | -4 \leq x \leq 2\}, M \cup N = \{x | -4 \leq x \leq 6\}$, $M \cup N$ 的长度为 10; 当 $m < 0$ 时, $M=\{x | 3m \leq x \leq -m\}, N=\{x | m \leq x \leq -2m\}, M \cap N = \{x | m \leq x \leq -m\}$, 由 $(-m)-m=4$, 得 $m=-2$, 此时 $M=\{x | -6 \leq x \leq 2\}, N=\{x | -2 \leq x \leq 4\}, M \cup N = \{x | -6 \leq x \leq 4\}$, $M \cup N$ 的长度为 10. 综上所述, $M \cup N$ 的长度为 10.

9. BD 由图象知, 当 $x=0$ 时, $y=c > 0$, 开口向下, $a < 0$, $-3+1=-\frac{b}{a} < 0$, 即 $\frac{b}{a} > 0$, 则 $b < 0, ab > 0$, 所以 $abc > 0$, 故 A 错误; 当 $x=1$ 时, $a+b+c=0$ 且 $a < 0$, 所以 $b+c > 0$, 故 B 正确; 因为 $2a+b+c=a+a+b+c=a < 0$, 所以 C 错误; 由 $cx^2+bx+a=0$, 可得 $a\left(\frac{1}{x}\right)^2+b \cdot \frac{1}{x}+c=0$, 因为 $-3, 1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根, 所以 $-\frac{1}{3}, 1$ 是方程 $a\left(\frac{1}{x}\right)^2+b \cdot \frac{1}{x}+c=0$ 的两根, 所以关于 x 的方程 $cx^2+bx+a=0$ 的解集为 $\{-\frac{1}{3}, 1\}$, 故 D 正确.

10. AC 由题意可得方程 $ax^2-3x+9b=0$ 的两根为 a 和 b , 且 $a < 0$, 根据根与系数的关系可得 $\begin{cases} a+b=\frac{3}{a}, \\ ab=\frac{9b}{a}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-\sqrt{3}, \\ b=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-3, \\ b=2, \end{cases}$ 则 $a+b=-\sqrt{3}$ 或 $a+b=-1$.

11. BCD 当 $k=1$ 时, $2kx^2+kx-\frac{3}{8}=2x^2+x-\frac{3}{8} < 0$, 解得 $-\frac{3}{4} < x < \frac{1}{4}$, 故 A 错误. 若 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则当 $k=0$ 时, $-\frac{3}{8} < 0$ 成立; 当 $k \neq 0$ 时, $2k < 0, \Delta=k^2-4 \times 2k \times \left(-\frac{3}{8}\right) < 0$, 解得 $-3 < k < 0$. 综上, $-3 < k \leq 0$, 则整数 k 的取值集合为 $\{-2, -1, 0\}$, 故 B 正确. 若不等式 $2kx^2+kx-\frac{3}{8} < 0$ 对 $0 \leq k \leq 1$ 恒成

立, 则 $(2x^2+x)k - \frac{3}{8} < 0$, 即 $(2x^2+x) \times 1 - \frac{3}{8} < 0$, $(2x^2+x) \times 0 - \frac{3}{8} < 0$, 则 $-\frac{3}{4} < x < \frac{1}{4}$, 故 C 正确. 令 $h(x) = 2kx^2 + kx - \frac{3}{8}$, 因为 $h(0) = -\frac{3}{8} < 0$, 所以整数 $x=0$ 符合题意. 又恰有一个整数 x 使得不等式 $2kx^2 + kx - \frac{3}{8} < 0$ 成立, 所以 $k > 0$, 且

$$\begin{cases} h(-1) = 2k - k - \frac{3}{8} \geq 0, \\ h(1) = 3k - \frac{3}{8} \geq 0, \end{cases} \quad \text{解得 } k \geq \frac{3}{8}, \text{ 故 D 正确.}$$

12. 6 函数 $f(x) = x^2 - 2x + 5$ 的图象开口向上, 对称轴为直线 $x=1$, 则 $f(x)_{\min} = f(1) = 4 \leq 4m$, 解得 $m \geq 1$, 所以 $f(x)$ 在 $[m, n]$ 上单调递增, 所以 $\begin{cases} f(m) = 4m, \\ f(n) = 4n, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} m^2 - 2m + 5 = 4m, \\ n^2 - 2n + 5 = 4n, \end{cases}$ 所以 m, n 为方程 $x^2 - 2x + 5 = 4x$ 的两个根, 即 m, n 为方程 $x^2 - 6x + 5 = 0$ 的两个根, 由根与系数的关系得 $m+n=6$.

13. $\left(-\frac{3}{5}, 1\right]$ 由题意可得, 命题的否定“ $\forall x \in \mathbf{R}$, 不等式 $(a^2-1)x^2 - (a-1)x - 1 < 0$ 恒成立”为真命题. 当 $a^2-1=0$, 即 $a=\pm 1$ 时, 若 $a=1$, 则不等式为 $-1 < 0$ 恒成立; 若 $a=-1$, $2x-1 < 0$ 不恒成立, 即 $a=-1$ 不满足; 当 $a^2-1 \neq 0$ 时, $\begin{cases} a^2-1 < 0, \\ \Delta = (a-1)^2 + 4(a^2-1) < 0, \end{cases}$ 解得 $-\frac{3}{5} < a < 1$. 综上所述, 实数 a 的取值范围是 $\left(-\frac{3}{5}, 1\right]$.

14. $[-1-\sqrt{2}, -1]$ 由 $f[f(x)] \leq 1$, 可得 $(x^2-2ax+1)^2 - 2a(x^2-2ax+1) + 1 \leq 1$, 即 $(x^2-2ax+1)(x^2-2ax+1-2a) \leq 0$. 由 $A=B$, 可得 $x^2-2ax+1-2a \geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 即 $\Delta = 4a^2 - 4(1-2a) \leq 0$, 解得 $-1-\sqrt{2} \leq a \leq -1+\sqrt{2}$. ①. 又集合 A 是非空集合, 所以 $x^2-2ax+1 \leq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上有解, 则 $\Delta' = 4a^2 - 4 \geq 0$, 解得 $a \leq -1$ 或 $a \geq 1$. ②. 由①②可得 $a \in [-1-\sqrt{2}, -1]$.

考点过关 6 函数的概念及其表示

1. C 对于 A, $y=1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $y=x^0$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 定义域不相同, 故 A 错误; 对于 B, $y = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}$ 的定义域为 $[1, +\infty)$, $y = \sqrt{x^2-1}$ 的定义域为 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, 定义域不相同, 故 B 错误; 对于 C, $y=x$ 和 $y = \sqrt[3]{x^3}$ 的定义域都为 $\mathbf{R}$, 且 $y = \sqrt[3]{x^3} = x$, 对应关系一致, 故 C 正确; 对于 D, $y=|x|$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $[0, +\infty)$, 定义域不相同, 故 D 错误.

2. B 【分析】根据函数的概念可知函数图象和与 y 轴平行的直线至多只有一个交点, 据此可排除选项 C, 其他三个选项都可作为函数图象, 但还需要符合题目中函数的另外两个要素: 定义域和值域.

A 项中, 定义域为 $[-2, 0]$; C 项中, 当 $x=0$ 时, 有两个 y 值与之对应; D 项中, 值域不是 $[0, 2]$. 排除 A, C, D.

3. B 要使 $f(x)$ 有意义, 则 $4-x > 0$, 所以 $x < 4$, 所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 4)$, 所以 $g(x)$ 的定义域满足 $\begin{cases} 2x < 4, \\ x \neq 1, \end{cases}$ 所以 $x < 2$ 且 $x \neq 1$.

【方法突破】 简单函数定义域的求法

(1) 已知函数的解析式, 则构造使解析式有意义的不等式(组)求解.

(2) 抽象函数

① 若已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a, b]$, 则函数 $f[g(x)]$ 的定义域由不等式 $a \leq g(x) \leq b$ 求出;

② 若已知函数 $f[g(x)]$ 的定义域为 $[a, b]$, 则 $f(x)$ 的定义域为 $g(x)$ 在 $x \in [a, b]$ 时的值域.

4. B 将点 $(0, 0)$ 代入可排除选项 A, C; 将点 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 代入可排除选项 D.

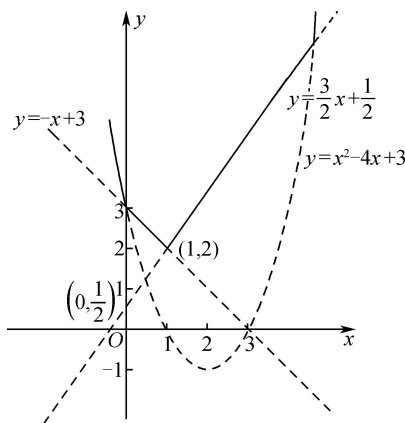
5. D 【分析】对“所有点 $(m, f(n))$ 构成一个正方形区域”这句话的理解是突破口, 尽管 m, n 是任意的, 但它们属于定义域 D , $f(n)$ 是任意的, 但它属于值域 C . 若点 $(m, f(n))$ 构成一个正方形区域, 则定义域的区间“长度”和值域的区间“长度”必须相等.

由题意得 $ax^2 - 2ax \geq 0$, 且 $a < 0$, 解得 $D = [0, 2]$. 因为 $y = x^2 - 2x$ 在 $x=1$ 处取最小值 -1 , 所以 $y = a(x^2 - 2x)$ 在 $x=1$ 处取最大值 $-a$, 所以 $f(x) = \sqrt{ax^2 - 2ax}$ 在 $x=1$ 处取最大值 $\sqrt{-a}$. 因为 $D = [0, 2]$, $f(0) = f(2) = 0$, 且所有点 $P(m, f(n))$ 构成正方形区域, 所以 $\sqrt{-a} = 2$, 解得 $a = -4$.

6. D 【分析】求抽象函数或复合函数的定义域, 抓住两点, 就能迎刃而解. 1. 定义域是指单个 x 的取值范围; 2. 相同的对应关系 f , 对实施对象的范围要求是一致的. 这里 $y = f(2^x)$ 和 $y = f(\log_3 x)$ 中 2^x 和 $\log_3 x$ 所属范围是相同的. 由 $y = f(2^x)$ 的定义域可求得 2^x 的范围, 即为 $\log_3 x$ 的范围, 据此可求得 x 的范围, 即函数 $y = f(\log_3 x)$ 的定义域.

由 $x \in [-1, 1]$, 得 $2^x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, 所以 $\log_3 x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, 所以 $x \in [\sqrt{3}, 9]$.

7. A 作出函数 $y = -x + 3$, $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$, $y = x^2 - 4x + 3$ 在同一平面直角坐标系中的图象, 则函数 $f(x)$ 的图象为图中实线部分(如图). 当 $x=1$ 时, $f(x)$ 取最小值 2.



8. D 由题意得 $f(x) + \frac{2}{x}$ 为常数, 不妨设 $f(x) + \frac{2}{x} = a$, 则 $f(x) = a - \frac{2}{x}$, 原式化为 $f(a) = 1$, 即 $a - \frac{2}{a} = 1$, 解得 $a = 2$ 或 $a = -1$ (舍去), 故 $f(x) = 2 - \frac{2}{x}$, 所以 $f(1) = 2 - 2 = 0$.

9. ABC 从图中可以看出当 $x=8$ 时, 甲方案所需要的费用低于乙方案, 故 A 选项正确; 从图中可以看出当 $x=10$ 时, 甲方案与乙方案所需要的费用相同, 均为 12 元, 故乘客选择甲、乙方案均可, 故 B 选项正确; 打车 3 km 以上时, 甲方案每公里增加的费用为 $\frac{12-5}{10-3} = 1$ (元), 乙方案每公里增加的费用为 $\frac{12-7}{10-3} = \frac{5}{7}$ (元), 故每公里增加的费用甲方案比乙方案多, C 选项正确; 增加 1 公里增加的费用甲方案与乙方案不同, 由 C 选项的计算可知, D 选项错误.

10. ACD 若 $a \geq 0$, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = ax \geq 0$, 若函数的值域为 $[0, +\infty)$, 则当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^2 - ax$ 的对称轴 $x = \frac{a}{2} \geq 0$, 此时 $f(x) = x^2 - ax$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 且 $f(0) = 0$, 满足题意, 所以选项 A, C, D 符合题意; 若 $a < 0$, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = ax < 0$, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^2 - ax$ 的对称轴 $x = \frac{a}{2} < 0$, 此时 $f(x)_{\min} = f\left(\frac{a}{2}\right) < f(0) = 0$, 不满足值域为 $[0, +\infty)$, 所以 $a = -3$ 不符合题意.

11. ACD 对于 A, 当 $x \in \mathbf{Q}$ 时, $f(x) = 1$, 则 $f[f(x)] = f(1) = 1$, 当 $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ 时, $f(x) = 0$, 则 $f[f(x)] = f(0) = 1$, 综上,

对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f[f(x)] = 1$, A 正确; 对于 B, 当 $x \in \mathbf{Q}$ 时, $-x \in \mathbf{Q}$, 则 $f(-x) + f(x) = 2$, B 错误; 对于 C, 若 $a < 0, b > 1$, 则 $\{x | f(x) > a\} = \mathbf{R} = \{x | f(x) < b\}$, C 正确; 对于 D, 取 $A(0, 1), B(\sqrt{3}, 0), C(-\sqrt{3}, 0)$, 则 $|AB| = |AC| = 2, |BC| = 2\sqrt{3}$, $\triangle ABC$ 为等腰三角形, D 正确.

12. 6 因为 $7 < 9$, 所以 $f(7) = f[f(7+4)] = f[f(11)] = f(11-3) = f(8)$. 又 $8 < 9$, 所以 $f(8) = f[f(12)] = f(9) = 9-3 = 6$, 即 $f(7) = 6$.

13. $\left[0, \frac{3}{4}\right)$ 由题意得关于 x 的方程 $ax^2 + 4ax + 3 = 0$ 无解, 当 $a = 0$ 时, 方程显然无解; 当 $a \neq 0$ 时, $\Delta = 16a^2 - 12a < 0$, 解得 $0 < a < \frac{3}{4}$. 综上所述, 实数 a 的取值范围是 $\left[0, \frac{3}{4}\right)$.

14. 1 5 因为 $f(x) = \begin{cases} 2-x, & x \geq 1, \\ x^2+x-1, & x < 1, \end{cases}$ 所以 $f(4) = 2-4 = -2$. 所以 $f[f(4)] = f(-2) = (-2)^2 - 2 - 1 = 1$. 设 $f(a) = t$, 则 $f(t) = t$, 当 $t \geq 1$ 时, $f(t) = 2-t = t$, 可得 $t = 1$, 当 $t < 1$ 时, $f(t) = t^2 + t - 1 = t$, 可得 $t = -1$, 所以 $f(a) = 1$ 或 $f(a) = -1$. 当 $a \geq 1$ 时, 由 $f(a) = 2-a = 1$ 或 $f(a) = 2-a = -1$, 可得 $a = 1$ 或 $a = 3$; 当 $a < 1$ 时, $f(a) = a^2 + a - 1 = 1$ 或 $f(a) = a^2 + a - 1 = -1$, 可得 $a = -2$ 或 $a = 1$ (舍去) 或 $a = -1$ 或 $a = 0$. 综上所述, $a = -2, -1, 0, 1, 3$, 符合题意的实数 a 的个数为 5.

考点过关 7 函数的基本性质

1. A 对于 A, $y = f(x) = x^{-2}$ 满足 $f(-x) = f(x)$, 故 $f(x)$ 为偶函数, 由幂函数的性质可知 $f(x) = x^{-2}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故 $f(x) = x^{-2}$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, A 正确; 对于 B, $y = |x|$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, B 错误; 对于 C, $y = |x|$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, $y = 2^x$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 由复合函数的单调性可知 $y = 2^{|x|}$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, C 错误; 对于 D, $y = x^3$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, D 错误.

2. C 解法 1 因为 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 所以 $|f(x)|, |g(x)|$ 都是偶函数, 根据一个奇函数与一个偶函数的积为奇函数, 两个偶函数的积还是偶函数知 $f(x) \cdot |g(x)|$ 是奇函数.

解法 2 因为 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 所以 $f(-x) = -f(x), g(-x) = g(x)$. 对于 A, $f(-x)g(-x) = -f(x) \cdot g(x)$, 为奇函数, 错误; 对于 B, $|f(-x)|g(-x) = |f(x)| \cdot g(x)$, 为偶函数, 错误; 对于 C, $f(-x)|g(-x)| = -f(x) \cdot |g(x)|$, 是奇函数, 正确; 对于 D, $|f(-x) \cdot g(-x)| = |f(x)g(x)|$, 是偶函数, 错误.

【方法突破】判断函数的奇偶性

(1) 函数奇偶性的判断, 本质是判断 $f(x) = \pm f(-x)$ 是否成立, 前提是定义域关于原点对称, 在运算中, 也可以转化为判断奇偶性的等价关系式 $f(x) + f(-x) = 0$ 或 $f(x) - f(-x) = 0$ 是否成立.

(2) 判断函数的奇偶性, 必先检验其定义域是否关于原点对称.

(3) 函数 $f(x)$ 为奇函数, 且在 $x=0$ 处有定义, 必有 $f(0) = 0$; 但反之未必成立.

(4) 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $f(-x) = f(x) = f(|x|)$.

(5) 已知函数奇偶性求参数值问题时, 常用特值法, 如函数是奇函数, 在 $x=0$ 处有意义, 常用 $f(0) = 0$ 求参数, 否则用其他特值进行运算.

3. D $f(-3) = -6 - a = -f(3) = -8$, 所以 $a = 2$, 所以当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$. $2f(1) + f(-2) = -2f(-1) + f(-2) = -4 + 1 = -3$.

4. A 因为函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 成中心对称, 所以 $f(1) = 0$, 即 $2 + a = 0$, 解得 $a = -2$, 故 $f(0) = -f(2) = -(2 \times 2 - 2) = -2$.

5. B $f(-x+1) = f(x+1) = -f(x-1)$, 即 $f(x+2) = -f(x)$, 则 $f(x+4) = f(x)$, 即 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数, $f(2018) = f(504 \times 4 + 2) = 0, f(2019) = f(505 \times 4 - 1) = -1$, 则 $f(2018) + f(2019) = 0 - 1 = -1$.

【方法突破】求函数周期的方法

(1) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+T) = f(x)$, 则由函数周期性的定义可知 T 是函数的一个周期.

(2) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = -f(x)$, 则 $f(x+2a) = f[(x+a)+a] = -f(x+a) = f(x)$, 所以 $2a$ 是函数的一个周期.

(3) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = \frac{1}{f(x)}$, 则 $f(x+2a) = f[(x+a)+a] = \frac{1}{f(x+a)} = f(x)$, 所以 $2a$ 是函数的一个周期.

(4) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = -\frac{1}{f(x)}$, 则同理可得 $2a$ 是函数的一个周期.

6. D 【分析】对函数及性质的研究, 掌握一些常见方法很有必要, 比如求函数解析式通常有: 1. 待定系数法 (适用于已知函数类型); 2. 配凑法或换元法 (适用于复合函数, 求外函数); 3. 方程组法 (适用于含有函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的等式). 这里用的是方程组法, 但还需要寻找一个关于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的新的等式, 根据奇偶性条件, 不难想到用 $-x$ 去替换已知等式中的 x 并结合奇偶性, 就能得到一个新的等式, 进而运用方程组思想求得 $f(x)$ 和 $g(x)$.

$f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x) = e^{-x}$, 所以 $g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

7. A 因为偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 故 x 越靠近 y 轴, 函数值越小. 因为 $f(2x-1) < f\left(\frac{1}{3}\right)$, 所以 $|2x-1| < \frac{1}{3}$, 解得 $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$.

8. A 解法 1 (利用函数单调性) 设 $g(x) = 2^x, h(x) = 3^{-x}$, 易知 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 则 $f(x) = g(x) - h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 又 $f(x^2) < f(2x+3)$, 所以 $x^2 < 2x+3$, 即 $x \in (-1, 3)$.

解法 2 (取特殊值) 当 $x=0$ 时, $f(0) < f(3)$, 排除 B, D; 当 $x=1$ 时, $f(1) < f(5)$, 排除 C, 故 A 正确.

9. AB 对于选项 A, 因为 $\log_2 3 > 1$, 所以 $f(\log_2 3) = 2^{\log_2 3} = 3$, 所以选项 A 正确; 对于选项 B, 欲使该函数在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 则满足 $\begin{cases} 3-2a > 0, \\ a > 1, \\ 3-2a-1 \leq a, \end{cases}$ 解得 $1 < a < \frac{3}{2}$, 所以选项 B 正确; 对于选项 C, 使得 $f(0) = -1$, 此时 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 与条件不符, 所以选项 C 错误. 对于选项 D, 该函数为非奇非偶函数, 所以选项 D 错误.

10. ABD 对于 A 选项, 由题意知, $f(x)$ 关于 $(0, 0)$ 中心对称, 且直线 $x=1$ 为对称轴, 所以直线 $x=-1$ 也是对称轴, 故 A 正确; 对于 B 选项, 因为 $f(x)$ 关于 $(0, 0)$ 中心对称, 关于直线 $x=1$ 对称, 所以 $f(x) = -f(-x) = f(2-x)$, 进而得到 $f(2+x) = -f(x)$, 所以 $f(4+x) = -f(2+x) = f(x)$, 即 $f(x)$ 是周期为 4 的函数, 所以 $g(2023) = f(2024) = f(0) = 0$, 故 B 正确; 对于 C 选项, 只能说明 $f(x)$ 的周期为 4, 但不能说明 $f(x)$ 的最小正周期为 4, 故 C 错误; 对于 D 选项, 因为 $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称, 所以 $f(1+x) = f(1-x)$, 即 $f(x) = f(2-x)$, 故 D 正确.

11. ACD 对于函数 $f(x) = \frac{2}{2^x-1} + a (a \in \mathbf{R})$, 令 $2^x - 1 \neq 0$, 解得 $x \neq 0$, 所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 故 A 正确. 因为 $2^x > 0$, 当 $2^x - 1 > 0$ 时, $\frac{2}{2^x-1} > 0$, 所以 $\frac{2}{2^x-1} + a > a$.

当 $-1 < 2^x - 1 < 0$ 时, $\frac{2}{2^x-1} < -2$, 所以 $\frac{2}{2^x-1} + a < -2 + a$; 综上可得 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, -2+a) \cup (a, +\infty)$, 故 B 错误. 当 $a = 1$ 时, $f(x) = \frac{2}{2^x-1} + 1 = \frac{2^x+1}{2^x-1}$, 则 $f(-x) = \frac{2^{-x}+1}{2^{-x}-1} = -\frac{2^x+1}{2^x-1} = -f(x)$, 所以 $f(x) = \frac{2}{2^x-1} + 1$ 为奇函数, 故 C 正确. 当 $a = 2$ 时, $f(x) = \frac{2}{2^x-1} + 2 = \frac{2^x+1}{2^x-1} + 1$, 则 $f(-x) + f(x) =$