

基础小练 1 集合的概念与运算

- D** 由题意可得 $A \cap B = \{0\}$.
- B** 由题知 $N = \{x | x^2 + x = 0\} = \{-1, 0\}$, 故 $N \subsetneq M$.
- C** **思路分析** $a^2 \in P$ 说明 $a^2 = a$ 或者 $a^2 = 1$, 分类讨论, 注意互异性.
若 $a^2 = 1$, 则 $a = \pm 1$, 当 $a = 1$ 时, 不符合集合的互异性, 舍去;
若 $a^2 = a$, 则 $a = 1$ (舍去) 或 $a = 0$, 所以 a 可取 $-1, 0$.
- B** 因为 $A = \{x \in \mathbb{N}^* | x - 5 < 0\} = \{1, 2, 3, 4\}$, 所以集合 A 中的元素有 4 个.
- D** 由题意, 得 $\begin{cases} a+1=2, \\ b=2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=1, \\ b=2, \end{cases}$ 所以 $A \cup B = \{1, 2, 5\}$.
- D** $A = \{x | x^2 - 8x + 15 = 0\} = \{3, 5\}$. 因为 $A \cap B = B$, 所以 $B \subseteq A$. 因此 $B = \emptyset, \{3\}, \{5\}$, 对应实数 a 的值为 $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$, 其组成的集合的子集个数是 $2^3 = 8$.
- ACD** 因为 $A = \{x | 0 < x < 2\}, B = \{x | x \leq 0\}$, 所以 $\complement_{\mathbb{R}} B = \{x | x > 0\}$, 所以 $1 \in A$, A 正确; $A \cap B = \emptyset$, B 错误; $A \subseteq (\complement_{\mathbb{R}} B)$, C 正确; $A \cup B = \{x | x < 2\}$, D 正确.

方法突破 利用集合运算的常用性质: $\complement_U (A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$, $\complement_U (A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$, 对集合运算进行等价转换.

- ABC** 当 $m = 0$ 时, $A = \{x | 2x = 0\} = \{0\}$, 符合题意; 当 $m \neq 0$ 时, 由题意得 $\Delta = 4 - 4m^2 = 0$, 解得 $m = \pm 1$, 符合题意. 故满足题意的 m 的可能取值为 $-1, 0, 1$.
- 8 7** 由子集的定义可知集合 $M = \{0, 1, 2\}$ 的子集有 $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}$, 共 8 个, 除去 $\{0, 1, 2\}$, 则真子集有 7 个.
- $\{x | 2 < x < 10\} \cap \{x | 2 < x < 3\}$ 因为 $A = \{x | 3 \leq x < 10\}, B = \{x | 1 < 3x - 5 < 16\} = \{x | 2 < x < 7\}$, 所以 $A \cup B = \{x | 2 < x < 10\}$, $\complement_{\mathbb{R}} A = \{x | x < 3 \text{ 或 } x \geq 10\}$, 所以 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = \{x | 2 < x < 3\}$.

方法突破 求集合的交、并、补集时, 应先对集合进行化简或计算. 若涉及不等关系的连续问题, 则通常借助数轴来完成; 若涉及离散的数集问题, 则可利用韦恩图解决.

- 53** 设集合 A 表示语文在 90 分以上的学生, 则集合 A 中有 45 个元素, 集合 B 表示数学在 90 分以上的学生, 则集合 B 中有 48 个元素, $A \cap B$ 表示两科均在 90 分以上的学生, 则集合 $A \cap B$ 中有 40 个元素, $A \cup B$ 表示至少有一科成绩在 90 分以上的学生. 由题意可知 $A \cup B$ 中有 $45 + 48 - 40 = 53$ 个元素. 又因为每个同学都至少有一科成绩在 90 分以上, 所以高二 (1) 班共有 53 人.

基础小练 2 常用逻辑用语

- A** 根据存在量词命题的否定是全称量词命题, 命题“存在无理数 m , 使得 m^2 是有理数”的否定为“任意一个无理数 m ,

m^2 都不是有理数”.

- B** 因为 $\{x | x > 1\} \supsetneq \{x | x \geq 2\}$, 所以 p 是 q 的必要不充分条件.

方法突破 对于定量的充分、必要条件判定, 常用集合法: 若 $A \subseteq B$, 则 A 是 B 的充分条件 (简称小范围 $\Rightarrow$ 大范围) 或 B 是 A 的必要条件; 若 $A = B$, 则 A 是 B 的充要条件.

- A** 因为甲是乙的必要条件, 所以 $\text{乙} \Rightarrow \text{甲}$. 又丙是乙的充分不必要条件, $\text{丙} \Rightarrow \text{乙}$ 且 $\text{乙} \not\Rightarrow \text{丙}$, 所以 $\text{丙} \Rightarrow \text{乙} \Rightarrow \text{甲}$, 但 $\text{甲} \not\Rightarrow \text{丙}$. 因此丙是甲的充分不必要条件.

- D** 命题“所有能被 2 整除的数都是偶数”是一个全称量词命题, 其否定是一个存在量词命题, 故排除 A, B; 易得命题“所有能被 2 整除的数都是偶数”的否定应为“存在一个能被 2 整除的数不是偶数”.

- B** 对于命题 p , 当 $x = 1$ 时, $x^3 = x$, 所以 p 为假命题, 则 $\neg p$ 为真命题; 对于命题 q , 当 $x = -1$ 时, $x^2 + 1 > 0$, 所以 q 为真命题. 综上, $\neg p$ 和 q 均为真命题.

- C** 对于 A, $p: 3x + 2 > 5$, 可得 $x > 1$, $q: -2x - 3 > -5$, 可得 $x < 1$, 则 p 推不出 q , q 推不出 p , p 是 q 的既不充分也不必要条件. 对于 B, $p: a > 2, b < 2$, 可得 $q: a > b$; 当 $a = 1, b = 0$ 时, 满足 $a > b$, 但 q 推不出 p , 故 p 是 q 的充分不必要条件. 对于 C, 若“两条对角线互相垂直平分”成立推不出“四边形是正方形”; 反之, 若“四边形是正方形”成立可以推出“两条对角线互相垂直平分”成立, 故 p 是 q 的必要不充分条件. 对于 D, 因为两个三角形全等可推出两个三角形面积相等, 但两个三角形面积相等推不出两个三角形全等, 所以 p 是 q 的充分不必要条件.

方法突破 否定一个命题举反例即可.

- BD** 对于 A, 当 $a = 2, b = 3$ 时, $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, 但 $a < b$; 当 $a = -1, b = -2$ 时, $-1 > -2$, 但 $-\frac{1}{2} > -1$, 即 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 所以两者是既不充分也不必要条件, 故 A 错误. 对于 B, 当 $A \cap B = \emptyset$ 时, 可取 $A = \{1\}, B = \{2\}$, 但 $A \neq \emptyset$; 当 $A = \emptyset$ 时, $A \cap B = \emptyset$, 故 B 正确. 对于 C, 当 $ab^2 > cb^2$ 时, $b^2 > 0$, 从而 $a > c$, 反之, 当 $a > c$ 时, 若 $b = 0$, 则 $ab^2 = cb^2$, 所以两者不是充要条件, 故 C 错误. 对于 D, $a^2 + b^2 \neq 0$, 即 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$, 等价于 $|a| + |b| \neq 0$, 故 D 正确.

方法总结 特殊值法是解这类题的有效方法.

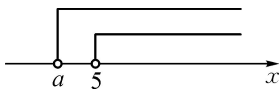
- AB** 对于 A, “菱形是正方形”即“所有的菱形是正方形”, 是全称命题, 故 A 正确; 对于 B, “ $\forall x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq 0$ ”的否定是“ $\exists x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 < 0$ ”, 故 B 正确; 对于 C, 命题“有一个奇数不能被 3 整除”的否定是“所有的奇数都能被 3 整除”, 故 C 错误; 对于 D, 由 $A = B$, 可得 $\sin A = \sin B$, 而 $\sin \frac{\pi}{3} = \sin \frac{2\pi}{3}$,

$A = \frac{\pi}{3}, B = \frac{2\pi}{3}, A \neq B$, 故“ $A = B$ ”是“ $\sin A = \sin B$ ”的充分不

必要条件,故 D 错误.

9. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 \leq 0$ 该命题的否定需将全称量词改为存在量词,同时否定结论.

10. $(-\infty, 5)$ 因为 $A = \{x | x > 5\}, B = \{x | x > a\}$,依题意可知 $A \subsetneq B$,如图所示,由图可知 $a < 5$.



方法突破 判断充分条件和必要条件的方(集合判断法)

从集合的观点看,建立 p, q 相应的集合 $A = \{x | p(x) \text{ 成立}\}, B = \{x | q(x) \text{ 成立}\}$,那么:①若 $A \subseteq B$,则 p 是 q 的充分条件;若 $A \subsetneq B$,则 p 是 q 的充分不必要条件.②若 $B \subseteq A$,则 p 是 q 的必要条件;若 $B \subsetneq A$,则 p 是 q 的必要不充分条件.③若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$,即 $A = B$,则 p 是 q 的充要条件.

11. $[0, +\infty)$ 已知命题 $p: " \exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - m \leq 0 "$ 为真命题,即存在实数 x ,使得 $m \geq x^2$ 成立,所以实数 m 的取值范围是 $[0, +\infty)$.

基础小练 3 等式性质与不等式性质

1. D 对于 A,由等式的性质知,若 $x = y$,则 $x + 5 = y + 5$,A 正确;对于 B,由等式的性质知,若 $a = b$,则 $ac = bc$,B 正确;对于 C,由等式的性质知,若 $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$,则 $a = b$,C 正确;对于 D,由等式的性质知,若 $ax = ay$,则 $x = y$ 的前提条件为 $a \neq 0$,D 错误.

2. A **解法 1** (作差法) 易知 $(x^2 + 1)^2 - x^4 - x^2 - 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^4 - x^2 - 1 = x^2 \geq 0$,即 $(x^2 + 1)^2 \geq x^4 + x^2 + 1$.

解法 2 (特殊值法) 令 $x = 0$,可排除 B, D;令 $x = 1$,可排除 C.

方法突破 比较大小的方法

(1)作差法:作差,变形,定正负,结论;

(2)作商法:作商,变形,与 1 比大小,结论;

(3)特殊值法:主观题取特殊值判断,客观题可以取特殊值探路.

3. C 由题意,若 $a > 0 > b$,则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$,故 A 错误;若 $a = 1, b = -2$,则 $a^2 < b^2$,故 B 错误;因为 $a > b$,且 $\frac{1}{c^2 + 1} > 0$,所以

$\frac{a}{c^2 + 1} > \frac{b}{c^2 + 1}$,故 C 正确;若 $c = 0$,则 $a|c| = b|c|$,故 D 错误.

4. B 由 $0 < x < 1$,得 $x - x^2 = x(1 - x) > 0$,故 $x > x^2$.又 $\sqrt{x} - x = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x}) > 0$,所以 $\sqrt{x} > x$,而 $\frac{1}{x} > 1, \sqrt{x} < 1$,所以 $\sqrt{x} < \frac{1}{x}$,所以 $x^2 < x < \sqrt{x} < \frac{1}{x}$.

5. B 因为 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$,所以 $-\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$.又 $\alpha < \beta$,所以 $\alpha - \beta < 0$,所以 $-\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < 0$.

易错警示 本题容易忽略条件 $\alpha < \beta$,即 $\alpha - \beta < 0$ 而致错.

6. B **解法 1** 对于①,因为 $b < a < 0$,所以 $|b| > |a|$,所以①

错误;对于②,因为 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$,由 $b < a < 0$,知 $ab > 0, a + b < 0$,所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} < 0$,所以②错误;对于③,由 $b < a < 0$,得 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0$,所以 $\frac{1}{a} + b < a + \frac{1}{b}$,所以③正确;对于④, $\frac{a^2}{b} - 2a + b = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{b} = \frac{(a-b)^2}{b} < 0$,所以 $\frac{a^2}{b} < 2a - b$,所以④正确.

解法 2 取 $b = -2, a = -1$,则 $|b| > |a|$,知①错误; $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{3}{2} < 0$,知②错误; $\frac{1}{a} + b = -3, \frac{1}{b} + a = -\frac{3}{2}$,知③正确; $\frac{a^2}{b} = -\frac{1}{2}, 2a - b = 0$,知④正确.

方法总结 判断已知不等条件下的不等关系的最佳方法是特值法.

7. BCD 当 $c = 0$ 时,若 $a > b$,则 $ac = bc$,故 A 为假命题;若 $ac^2 > bc^2$,则 $c \neq 0$,由于 $c^2 > 0$,故 $a > b$,故 B 为真命题;若 $a < b < 0$,则 $a^2 > ab$ 且 $ab > b^2$,即 $a^2 > ab > b^2$,故 C 为真命题;若 $c > a > b > 0$,则 $\frac{c}{a} < \frac{c}{b}$,则 $\frac{c-a}{a} < \frac{c-b}{b}$,则 $\frac{a}{c-a} > \frac{b}{c-b}$,故 D 为真命题.

8. ABD $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 等价于 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} < 0$,当 $a > b, ab > 0$ 时, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 成立,故 B, D 正确;由于正数大于负数,故 A 正确, C 错误.

9. $\left(\frac{400}{3}, 800\right)$ 由题意,得 $4\% < \frac{200 \times 8\% + x \times 3\%}{200 + x} < 6\%$,解得 $\frac{400}{3} < x < 800$.

10. $(-4, 2)$ $(1, 18)$ 因为 $-1 < x < 4, 2 < y < 3$,所以 $-3 < -y < -2, -4 < x - y < 2$.由 $-1 < x < 4, 2 < y < 3$,得 $-3 < 3x < 12, 4 < 2y < 6$,所以 $1 < 3x + 2y < 18$.

11. 乙 由题意得甲购买该用品的平均单价为 $\frac{3a+3b}{6} = \frac{a+b}{2}$,乙购买该用品的平均单价为 $\frac{20}{\frac{10}{a} + \frac{10}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$.因为 $a \neq b$,可得 $\frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{(a-b)^2}{2(a+b)} > 0$,所以 $\frac{a+b}{2} > \frac{2ab}{a+b}$,即乙的购买方式更优惠.

基础小练 4 基本不等式及其应用

1. D 因为 $a > 0, b > 0$,且 $a + 2b = 1$,所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + 2b) = 3 + \frac{2b}{a} + \frac{a}{b} \geq 3 + 2\sqrt{2}$,当且仅当 $\frac{2b}{a} = \frac{a}{b}$,即 $a = \sqrt{2} - 1, b = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$ 时等号成立.

方法突破 基本不等式中常利用“1”的代换,其本质思想是实现齐次化,不等式齐次化是使不等式中所有变量的次数一致的

代数变形.“1”的代换常见类型有:①已知 $a+b=1$, 求 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$; ②已知 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 求 $a+b$; ③已知 $a+b=c$ (常数), 即 $\frac{1}{c}(a+b)=1$, 求 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$; ④已知 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = c$ (常数), 即 $\frac{1}{c}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1$, 求 $a+b$; ⑤ $\frac{1}{m} + \frac{1}{1-m}$ 可变形为 $\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{1-m}\right)[m+(1-m)]$.

2. C 因为 $y=4x+\frac{a}{x} \geq 4\sqrt{a}$ ($x>0, a>0$), 当且仅当 $4x^2=a$, 即 $x=\frac{\sqrt{a}}{2}$ 时, 等号成立. 由题意, $\frac{\sqrt{a}}{2}=2$, 解得 $a=16$.

3. D $x>0, y>0, x+4y=xy$, 由基本不等式得 $x+4y \geq 2\sqrt{4xy}=4\sqrt{xy}$, 即 $xy \geq 4\sqrt{xy}$, 解得 $xy \geq 16$, 当且仅当 $x=4y$, 即 $x=8, y=2$ 时, 等号成立.

4. C 对于 A, 当 $x>0$ 时, $x+\frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}=2$, 当且仅当 $x=1$ 时, 等号成立, 而 $x>2$, 则 $x+\frac{1}{x}>2$ 成立, 所以 $x+\frac{1}{x} \geq 2$ 一定成立, 故 A 错误; 对于 B, 由于 $x(1-2x)=\frac{1}{2} \times 2x(1-2x) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2x+1-2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$, 当且仅当 $2x=1-2x$, 即 $x=\frac{1}{4}$ 时, 等号成立, 故 B 错误; 对于 C, 因为 $x>-1$, 所以 $x+1>0$, 所以 $2x+\frac{2}{x+1}=2(x+1)+\frac{2}{x+1}-2 \geq 2\sqrt{2(x+1) \cdot \frac{2}{x+1}}-2=2$, 当且仅当 $2(x+1)=\frac{2}{x+1}$, 即 $x=0$ 时, 等号成立, 故 C 正确; 对于 D, $\sqrt{x^2+3}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3}} \geq 2$, 但不存在 x 使 $\sqrt{x^2+3}=\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$ 成立, 所以 $\sqrt{x^2+3}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}>2$, 故 D 错误.

5. B 若每批生产 x 件产品, 则每件产品的生产准备费用是 $\frac{800}{x}$, 存储费用是 $\frac{x}{8}$, 总的费用是 $\frac{800}{x}+\frac{x}{8} \geq 2\sqrt{\frac{800}{x} \cdot \frac{x}{8}}=20$, 当且仅当 $\frac{800}{x}=\frac{x}{8}$, 即 $x=80$ 时取等号.

6. D 解法 1 由 $ab=2a+b$ 得 $\frac{2}{b}+\frac{1}{a}=1$, 则 $a+b=(a+b)\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{a}\right)=\frac{2a}{b}+\frac{b}{a}+3 \geq 2\sqrt{2}+3$, 当且仅当 $\frac{2a}{b}=\frac{b}{a}$, 即 $b=\sqrt{2}a, a=\sqrt{2}+1$ 时, $a+b$ 的最小值为 $2\sqrt{2}+3$.

解法 2 由 $ab=2a+b$, 得 $b=\frac{2a}{a-1}=2+\frac{2}{a-1}, a+b=a+2+\frac{2}{a-1}=a-1+\frac{2}{a-1}+3 \geq 2\sqrt{2}+3$, 当且仅当 $a-1=\frac{2}{a-1}$, 即 $a=\sqrt{2}+1$ 时等号成立.

方法突破 求等式条件下的代数式的最值的方法

①“1”的替换法: 由已知等式, 变形确定出常数“1”, 再把“1”的表达式与所求表达式相乘(除), 转化为和定(积定)的形式.

②消元法: 用其中一个元素表示另一个元素, 通过消元, 变形为和定(积定)的形式.

7. BCD 不等式 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ 恒成立的条件是 $a \geq 0, b \geq 0$, 故 A 错误; 当 a 为负数时, 不等式 $a+\frac{1}{a} \leq 2$ 成立, 故 B 正确; 由基本不等式可知 C 正确; 因为 x, y 为正实数, 且 $x+2y=1$, 所以 $0 < xy = \frac{1}{2}x \times 2y \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x+2y}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$, 当且仅当 $x=2y$, 即 $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{4}$ 时, 等号成立, 故 D 正确.

8. AD 对于 A, 因为 $x>1, y>0, x+y=2$, 所以 $x-1>0$, 由 $(x-1)+y=1$, 可得 $(x-1) \cdot y \leq \frac{[(x-1)+y]^2}{4} = \frac{1}{4}$, 当且仅当 $x-1=y$, 即 $x=\frac{3}{2}, y=\frac{1}{2}$ 时, 等号成立, 所以 A 正确; 对于 B, 由 $ab=1-a$, 得 $b=\frac{1}{a}-1$, 又 $a>0$, 所以 $a+b=a+\frac{1}{a}-1 \geq 2\sqrt{a \times \frac{1}{a}}-1=2-1=1$, 当且仅当 $a=1, b=0$ 时, 等号成立, 又 $b>0$, 所以 $a+b>1$, 所以 B 错误; 对于 C, 令 $m=a+2, n=b+1$, 且 $m>0, n>0$, 则 $mn=9, a+b=m+n-3 \geq 2\sqrt{mn}-3=3$, 当且仅当 $m=n=3$, 即 $a=1, b=2$ 时, 等号成立, 所以 C 错误; 对于 D, 因为 a, b 为正实数, 所以 $ab=2a+\frac{1}{2}b+3 \geq 2\sqrt{2a \cdot \frac{1}{2}b}+3=2\sqrt{ab}+3$, 所以 $(\sqrt{ab})^2-2\sqrt{ab}-3 \geq 0$, 即 $(\sqrt{ab}-3)(\sqrt{ab}+1) \geq 0$, 所以 $\sqrt{ab} \geq 3$ 或 $\sqrt{ab} \leq -1$ (舍去), 所以 $ab \geq 9$, 当且仅当 $2a=\frac{1}{2}b$, 即 $a=\frac{3}{2}, b=6$ 时, 等号成立, 所以 D 正确.

9. $2\sqrt{3}-1$ 解法 1 (换元法) 由 $x>-1$, 可得 $x+1>0$, 令 $t=x+1$ ($t>0$), 即 $x=t-1$, 则 $\frac{x^2+x+3}{x+1} = \frac{(t-1)^2+(t-1)+3}{t} = t + \frac{3}{t} - 1 \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{3}{t}} - 1 = 2\sqrt{3} - 1$, 当且仅当 $t=\sqrt{3}$, 即 $x=\sqrt{3}-1$ 时, 等号成立, 所以 $y=\frac{x^2+x+3}{x+1}$ 的最小值为 $2\sqrt{3}-1$.

解法 2 (分离常数法) 由题知 $x+1>0$, 则 $y=\frac{x^2+x+3}{x+1} = \frac{(x+1)^2-(x+1)+3}{x+1} = x+1+\frac{3}{x+1}-1 \geq 2\sqrt{3}-1$, 当且仅当 $x+1=\frac{3}{x+1}$, 即 $x=\sqrt{3}-1$ 时, 等号成立, 所以 $y=\frac{x^2+x+3}{x+1}$ 的最小值为 $2\sqrt{3}-1$.

10. $[1, 4)$ 因为 $0 < xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = 1$, 即 $0 < xy \leq 1$, 当且仅当 $x=y=1$ 时, 等号成立, 所以 $x^2+y^2-xy=(x+y)^2-3xy=4-3xy \in [1, 4)$.

11. $(a^2+c^2)(b^2+d^2) \geq (ab+cd)^2$ 因为 $(a^2+c^2)(b^2+d^2)-(ab+cd)^2=a^2d^2+b^2c^2-2abcd=(ad-bc)^2 \geq 0$, 所以 $(a^2+c^2)(b^2+d^2) \geq (ab+cd)^2$.

基础小练 5 二次函数与

一元二次方程、不等式

1. **B** 由题图知 $y > 0$ 的解集为 $\{x | -1 < x < 2\}$.
2. **A** 因为关于 x 的一元二次方程 $ax^2 - 4x - 1 = 0$ 有实数根, 所以 $\begin{cases} a \neq 0, \\ \Delta = (-4)^2 - 4a \times (-1) \geq 0, \end{cases}$ 解得 $a \geq -4$ 且 $a \neq 0$.

3. **C** 对于 A, $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, 则 $x^2 - x + 1 > 0$ 恒成立, 其解集为 $\mathbf{R}$, A 不符合题意; 对于 B, $-2x^2 + x + 1 > 0$, 即 $2x^2 - x - 1 < 0$, 有 $\Delta > 0$, 其解集不是空集, B 不符合题意; 对于 C, $2x - x^2 > 5$, 即 $x^2 - 2x + 5 < 0$, 其中 $\Delta = -16 < 0$, 其解集为 $\emptyset$, 符合题意; 对于 D, $x^2 + x > 2$, 即 $x^2 + x - 2 > 0$, 有 $\Delta > 0$, 其解集不是空集, D 不符合题意.

4. **B** 由题意, $A = \{x | x^2 - x - 2 < 0\} = \{x | (x-2)(x+1) < 0\} = \{x | -1 < x < 2\}$. 又 $B = \{x | -1 < x < 1\}$, 所以 $B \subsetneq A$, $A \cap B = B \neq \emptyset$, $A \neq B$.

5. **A** 由 $x^2 - 2ax - 8a^2 < 0 (a > 0)$, 得 $(x-4a)(x+2a) < 0$, 即 $-2a < x < 4a$, 所以 $x_1 = -2a$, $x_2 = 4a$. $x_2 - x_1 = 4a - (-2a) = 6a = 15$, 所以 $a = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$.

6. **B** 当 $a = 0$ 时, 不等式 $ax^2 + 2x + 1 < 0$ 等价于 $2x + 1 < 0$, 解得 $x < -\frac{1}{2}$, 结论成立; 当 $a \neq 0$ 时, 要使 $ax^2 + 2x + 1 < 0$ 成立, 则满足 $\begin{cases} a > 0, \\ \Delta > 0 \end{cases}$ 或 $a < 0$, 解得 $0 < a < 1$ 或 $a < 0$. 综上, $a < 1$.

方法突破 若方程或不等式的最高次项的系数含有参数, 解题时需对系数进行分类讨论.

7. **ABD** 关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$, 所以 $a > 0$, A 正确; 且 -2 和 3 是关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根, 由根与系数的关系得 $\begin{cases} -2+3 = -\frac{b}{a}, \\ -2 \times 3 = \frac{c}{a}, \end{cases}$ 则 $\begin{cases} b = -a, \\ c = -6a, \end{cases}$ 则 $a+b+c = -6a < 0$, C 错误;

不等式 $bx + c > 0$, 即 $-ax - 6a > 0$, 解得 $x < -6$, B 正确; 不等式 $cx^2 - bx + a < 0$, 即 $-6ax^2 + ax + a < 0$, 即 $6x^2 - x - 1 > 0$, 解得 $x < -\frac{1}{3}$ 或 $x > \frac{1}{2}$, D 正确.

8. **BC** 对于 A, 依题意知, 函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象与 x 轴没有交点, 当 $a > 0$ 时, 不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$, 当 $a < 0$ 时, 不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为空集, 故 A 错误; 对于 B, 依题意得不等式 $ax^2 + bx + c \leq 0 (a \neq 0)$ 对应的二次函数图象开口向下, 所以 $a < 0$ 且函数图象与 x 轴至多有一个交点, 故 $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$, 故 B 正确; 对于 C, 当 $a = 0$ 时, 不等式 $x - 1 \leq 0$ 解集为 $\{x | x \leq 1\}$, 显然不符合题意, 当 $a \neq 0$ 时, 由二次函数的性质知 $\begin{cases} a < 0, \\ \Delta = 1 + 4a \leq 0, \end{cases}$ 解得 $a \leq -\frac{1}{4}$, 故 C 正确; 对于 D, 由不等式 $\frac{1}{x} > 1$ 得 $\frac{1-x}{x} > 0$, 等价于 $x(1-x) > 0$, 解得 $0 < x < 1$, 故 D 错误.

$x) > 0$, 解得 $0 < x < 1$, 故 D 错误.

9. $[-3, 1]$ 因为 $f(-2) = f(0)$, 所以 $-\frac{b}{2} = \frac{-2+0}{2}$, 解得 $b = 2$, 由 $f(x) \leq 0$, 得 $x^2 + 2x - 3 \leq 0$, 解得 $-3 \leq x \leq 1$.

10. $[4, +\infty) \cup \{3\} \cup \{-1\}$ **思路分析** 因为 $\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 0$, 依题意可得 $x - 4 \geq 0$.

已知 $\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 0$, 则 $x^2 - 2x - 3 \geq 0$, 解得 $x \geq 3$ 或 $x \leq -1$, 当且仅当 $x = 3$ 或 $x = -1$ 时, 等号成立; 当 $x > 3$ 或 $x < -1$ 时, 由 $x - 4 \geq 0$, 解得 $x \geq 4$, 则 $x \geq 4$, 所以不等式的解集为 $[4, +\infty) \cup \{3\} \cup \{-1\}$.

11. $(-4, -1)$ **思路分析** 把不等式 $x^2 - 4x > 2ax + a$ 化为 $x^2 - (4+2a)x - a > 0$, 根据不等式恒成立时 $\Delta < 0$, 求出 a 的取值范围.

不等式 $x^2 - 4x > 2ax + a$ 变形为 $x^2 - (4+2a)x - a > 0$, 该不等式对一切实数 x 都成立, 所以 $\Delta < 0$, 即 $(4+2a)^2 - 4 \cdot (-a) < 0$, 化简得 $a^2 + 5a + 4 < 0$, 解得 $-4 < a < -1$, 所以实数 a 的取值范围是 $(-4, -1)$.

本章检测 一元二次函数、方程和不等式

1. **D** 由 $x^2 + 2x > 0$, 解得 $x > 0$ 或 $x < -2$; 由 $x^2 + 2x - 3 < 0$, 解得 $-3 < x < 1$, 则 $A \cap B = (-3, -2) \cup (0, 1)$.

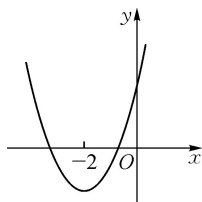
2. **C** 对于 A, $ac^2 - bc^2 = c^2(a-b)$, 当 $c = 0$ 时, 不等式不成立, 故 A 错误; 对于 B, 由于 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, $a+b$ 的正负未知, 故 B 错误; 对于 C, $\frac{1}{ab^2} - \frac{1}{a^2b} = \frac{a-b}{a^2b^2}$, 因为 $a > b$, 且 $ab \neq 0$, 所以 $\frac{a-b}{a^2b^2} > 0$, 则 $\frac{1}{ab^2} > \frac{1}{a^2b}$, 故 C 正确; 对于 D, 由 $\frac{b^2}{a} - \frac{a^2}{b} = \frac{b^3 - a^3}{ab} = \frac{(b-a)(b^2 + a^2 + ab)}{ab}$, 因为 $a^2 + b^2 + ab \geq 3ab$, $b-a < 0$, 但 ab 的正负未知, 故 D 错误.

3. **C** 依题意得 $\frac{3x}{2x+1} - 1 \leq 0$, 即 $\frac{x-1}{2x+1} \leq 0$, 则 $\begin{cases} (x-1)(2x+1) \leq 0, \\ 2x+1 \neq 0, \end{cases}$ 解得 $-\frac{1}{2} < x \leq 1$.

易错警示 解不等式应将不等式一边化为 0 再解, 而本题不等式右边是 1, 有些学生会将 1 当作 0 来解题.

4. **C** 易得不等式 $2x^2 - 5x - 3 \geq 0$ 的解集为 $\left\{x \mid x \leq -\frac{1}{2} \text{ 或 } x \geq 3\right\}$. 由题意, 选项中 x 的范围应该是上述解集的真子集, 只有 C 满足.

5. **A** 设 $y = x^2 + ax + a$, 依题意画出函数图象 (如图). 要使方程 $x^2 + ax + a = 0$ 的一根小于 -2 , 另一根大于 -2 , 则 -2 对应的函数值为负且抛物线与 x 轴有两个交点, 即 $\begin{cases} \Delta = a^2 - 4a > 0, \\ 4 - 2a + a < 0, \end{cases}$ 解得 $a > 4$, 所以实数 a 的取值范围是 $(4, +\infty)$.



6. C 正实数 x, y 满足 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 1$, 则 $x + \frac{y}{4} = \left(x + \frac{y}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y}\right) = 1 + \frac{4x}{y} + \frac{y}{4x} + 1 \geq 2 + 2\sqrt{\frac{4x}{y} \cdot \frac{y}{4x}} = 4$, 当且仅当 $\frac{4x}{y} = \frac{y}{4x}$, 即 $x=2, y=8$ 时, $x + \frac{y}{4}$ 取到最小值 4, 要使不等式 $x + \frac{y}{4} \geq m^2 - 3m$ 恒成立, 即 $m^2 - 3m \leq 4$, 解得 $-1 \leq m \leq 4$, 所以实数 m 的取值范围是 $[-1, 4]$.

7. BC 对于 A, 当 $a=1, b=-2$ 时, 满足 $a > b$ 且 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 但 $ab > 0$ 不成立, 所以 A 错误; 对于 B, 因为 $c > a > b > 0$, 所以 $c - a > 0, c - b > 0, a - b > 0$, 所以 $\frac{a}{c-a} - \frac{b}{c-b} = \frac{a(c-b) - b(c-a)}{(c-a)(c-b)} = \frac{c(a-b)}{(c-a)(c-b)} > 0$, 所以 $\frac{a}{c-a} > \frac{b}{c-b}$, 所以 B 正确; 对于 C, 因为 $a > b > c > 0$, 所以 $a - b > 0$, 所以 $\frac{b+c}{a+c} - \frac{b}{a} = \frac{a(b+c) - b(a+c)}{a(a+c)} = \frac{c(a-b)}{a(a+c)} > 0$, 所以 $\frac{b}{a} < \frac{b+c}{a+c}$, 所以 C 正确; 对于 D, 当 $a=-1, b=2$ 时, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 4$, 所以 D 错误.

8. BCD 对于 A, 因为 a, b 为正实数, 且 $(a-1)(b-1)=1$, 所以 $a+b=ab$, 因为 $ab=a+b \geq 2\sqrt{ab}$, 所以 $\sqrt{ab} \geq 2$, 则 $2ab \geq 8$, 故 A 错误; 对于 B, 因为 a, b 为正实数, 由 $a+b=ab$, 可得 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 (a > 1, b > 1)$, 所以 $2a+b = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(2a+b) = 3 + \frac{b}{a} + \frac{2a}{b} \geq 3 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{2a}{b}} \geq 3 + 2\sqrt{2}$ (当且仅当 $\frac{b}{a} = \frac{2a}{b}$, 即 $a = \frac{2+\sqrt{2}}{2}, b = \sqrt{2}+1$ 时, 等号成立), 故 B 正确; 对于 C, 因为 $a^2 + b^2 \geq 2ab \geq 8$ (都是当且仅当 $a=b=2$ 时, 等号成立), 故 C 正确; 对于 D, 因为 $a > 1, b > 1$, 即 $a-1 > 0, b-1 > 0$, 所以 $\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a-1} \cdot \frac{1}{b-1}} = 2$ (当且仅当 $\frac{1}{a-1} = \frac{1}{b-1}$, 即 $a=b=2$ 时, 等号成立), 故 D 正确.

9. $a^2 + b^2$ 因为 $0 < a < b$, 所以 $(a^2 + b^2) - 2ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 > 0$, 所以 $a^2 + b^2 > 2ab$. 又 $0 < a < b$, 且 $a+b=1$, 所以 $0 < a < \frac{1}{2}$, 则 $(a^2 + b^2) - a = a^2 + (1-a)^2 - a = 2a^2 - 3a + 1 = 2\left(a - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} > 2 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} = 0$, 所以 $a^2 + b^2 > a$, 所以 $a^2 + b^2, 2ab, a$ 中最大的是 $a^2 + b^2$.

10. $\{m | m \geq -7 \text{ 且 } m \neq -3\}$ 由题意可知, $16 + 4(m+3) \geq 0$ 且 $m \neq -3$, 解得 $m \geq -7$ 且 $m \neq -3$.

11. $2\sqrt{2} \left[-\frac{2}{3}, 2\right]$ 由 $a, b \in \mathbf{R}, a^2 + b^2 - ab = 2$, 得 $(a+b)^2 = 3(a^2 + b^2) - 4$. 因为 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$, 所以 $(a+b)^2 \geq$

$\frac{3}{2}(a+b)^2 - 4$, 解得 $-2\sqrt{2} \leq a+b \leq 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $a=b=\pm\sqrt{2}$ 时取等号. 又 $2=a^2+b^2-ab=(a+b)^2-3ab$, 所以 $2+3ab=(a+b)^2 \geq 0, 2+3ab=(a+b)^2 \leq 8$, 解得 $-\frac{2}{3} \leq ab \leq 2$, 所以 ab 的取值范围是 $\left[-\frac{2}{3}, 2\right]$.

基础小练 6 函数的概念及其表示

1. B 若函数有意义, 则 $2-x \geq 0$ 且 $x-1 \neq 0$, 所以 $x \leq 2$ 且 $x \neq 1$.

2. D $f(3) = \frac{2}{3}, f[f(3)] = f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1 = \frac{13}{9}$.

方法突破 分段函数求值时, 首先应确定所给自变量的取值属于哪一个范围, 然后选取相应的对应关系. 若自变量的值为较大的正整数, 则一般可考虑先求函数的周期.

3. C (1) $f(x) = x$ 的定义域为 $x \in \mathbf{R}, g(x) = (\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $[0, +\infty)$, $f(x)$ 与 $g(x)$ 定义域不同, 所以不是同一函数;

(2) $f(x) = x-2$ 的定义域为 $\mathbf{R}, g(x) = \sqrt{x^2-4x+4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$ 的定义域为 $\mathbf{R}, f(x)$ 与 $g(x)$ 解析式不同, 所以不是同一函数; (3) $f(x) = \pi x^2 (x \geq 0)$ 与 $g(r) = \pi r^2 (r \geq 0), f(x)$ 与 $g(x)$ 定义域相同, 解析式相同, 故两者表示同一函数;

(4) $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases} g(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases} f(x)$ 与 $g(x)$ 定义域相同, 解析式相同, 故两者表示同一函数.

4. A 解法 1 因为 $f(x+1) = 3x+2 = 3(x+1)-1$, 所以 $f(x) = 3x-1$.

解法 2 设 $t = x+1$, 则 $x = t-1$, 所以 $f(t) = 3(t-1)+2 = 3t-1$, 即 $f(x) = 3x-1$.

方法突破 已知复合函数 $f[g(x)]$ 的解析式, 求原函数 $f(x)$ 的解析式的常用方法是: (1) 配凑法; (2) 换元法.

5. C 函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $[-2, 3]$, 所以 $-2 \leq 2x-1 \leq 3$, 解得 $-\frac{1}{2} \leq x \leq 2$, 即函数 $y = f(2x-1)$ 的定义域为 $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$.

方法突破 若已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $x \in (a, b)$, 求函数 $f[g(x)]$ 的定义域的方法: 利用换元思想, 令 $a < g(x) < b$, 求解此不等式即可.

6. C 当 $x_0 \geq 0$ 时, 由 $f(x_0) = 2x_0+1=3$, 得 $x_0=1$, 符合要求; 当 $x_0 < 0$ 时, 由 $f(x_0) = 3x_0^2=3$, 得 $x_0=-1$ 或 $x_0=1$ (舍去). 故 x_0 的值为 -1 或 1 .

7. ABC 由图①知, 函数的值域不是集合 B 的子集, 不符合函数定义; 由图②和③知, 从集合 A 到集合 B 存在一对多的对应关系, 不符合函数的定义; 图④符合函数的定义.

8. AD 因为 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, 所以 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} =$

$\frac{x}{1+x^2}$, 所以 $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$; $f(-x)=\frac{-x}{1+(-x)^2}=-\frac{x}{1+x^2}=-f(x)$.

9. 3 函数 $f(x)=ax+1$, 且 $f(2)=-1$, 可得 $2a+1=-1$, 解得 $a=-1$. 则函数 $f(x)=-x+1$, $f(-2)=-1 \times (-2)+1=3$.

10. $[-4, 2]$ 当 $x \leq 0$ 时, 不等式 $f(x) \geq -1$ 可以化为 $\frac{1}{2}x+1 \geq -1$, 解得 $x \geq -4$, 此时 $-4 \leq x \leq 0$; 当 $x > 0$ 时, 不等式 $f(x) \geq -1$ 可以化为 $-(x-1)^2 \geq -1$, 解得 $0 < x \leq 2$. 综上, 不等式 $f(x) \geq -1$ 的解集为 $[-4, 2]$.

11. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ 设 $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$), 由 $f(0)=0$, 知 $c=0$, $f(x)=ax^2+bx$. 又由 $f(x+1)=f(x)+x+1$, 得 $a(x+1)^2+b(x+1)=ax^2+bx+x+1$, 即 $ax^2+(2a+b)x+a+b=ax^2+(b+1)x+1$, 所以 $\begin{cases} 2a+b=b+1, \\ a+b=1, \end{cases}$ 解得 $a=b=\frac{1}{2}$, 所以 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$.

基础小练 7 函数的基本性质

1. D 对于 A, 函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 A 错误; 对于 B, 函数 $y=-\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,$

$0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 B 错误; 对于 C, 函数 $y=\frac{1}{x}$ 的单调区间为 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$, 故 C 错误; 对于 D, 当 $k > 0$ 时, $y=kx$ 是增函数, 当 $k < 0$ 时, $y=kx$ 是减函数, 故 D 正确.

2. C 因为函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 所以 $f(-1)=-f(1)=-(1^2-2 \times 1)=1$.

3. D 因为 $f(x)$ 是实数集上的偶函数, 所以 $f(-2)=f(2)$, $f(-\pi)=f(\pi)$. 又因为 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $\pi > 3 > 2$, 所以 $f(\pi) > f(3) > f(2)$, 所以 $f(-\pi) > f(3) > f(-2)$, 结合选项知 D 正确.

方法突破 若 $f(x)$ 是定义在 D 上的偶函数, 则在 D 上必有 $f(x)=f(-x)$.

4. C 因为函数 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 且 $f(2m) > f(-m+9)$, 所以 $2m > -m+9$, 即 $m > 3$.

5. B 由 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 得 $f(-0)=-f(0)$, 得 $f(0)=0$, 由 $f(x+2)=-f(x)$, 得 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$, 所以 $f(x)$ 的周期为 4, 所以 $f(8)=f(0)=0$.

6. C 函数 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 的图象的对称轴为 $x=-\frac{2(a-1)}{2}=1-a$. 因为函数 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 在区间 $(-\infty, 4]$ 上单调递减, 所以 $1-a \geq 4$, 解得 $a \leq -3$, 所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -3]$.

方法突破 一元二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的单调性与开口方向和对称轴相关.

7. ABD 因为函数 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 所以 $f(-x)=-f(x)$ 且函数图象关于原点对称, 故 C 错误; 令 $x=0$, 可得 $f(0)=-f(0)$, 所以 $f(0)=0$, 故 A 正确; $f(2)=-$

$f(-2)=-1$, 故 B 正确; 令 $g(x)=f(x) \cdot f(-x)$, $x \in \mathbf{R}$, 则 $g(-x)=f(-x) \cdot f(x)=g(x)$, 所以 $g(x)$ 为偶函数, 即 $f(x) \cdot f(-x)$ 为偶函数, 故 D 正确.

8. BC 对于 A, $y=(x-1)^2$ 为开口向上的抛物线, 对称轴为直线 $x=1$, 所以 $y=(x-1)^2$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减, 故 A 错误; 对于 B, $y=\frac{1}{1-x}$ 的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, 将

$y=-\frac{1}{x}$ 的图象向右平移 1 个单位长度可得 $y=-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{1-x}$, 因为 $y=-\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 所以 $y=\frac{1}{1-x}$ 在

$(-\infty, 1)$ 上单调递增, 所以 $y=\frac{1}{1-x}$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递增, 故 B 正确; 对于 C, $y=1-|x-1|=\begin{cases} 2-x, & x \geq 1, \\ x, & x < 1, \end{cases}$ 所以 $y=$

$1-|x-1|$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递增, 故 C 正确; 对于 D, $y=2^{-|x|}=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ 是由 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^t$ 和 $t=|x|$ 复合而成, 因为 $y=$

$\left(\frac{1}{2}\right)^t$ 单调递减, $t=|x|=\begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递

增, 所以 $y=2^{-|x|}=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减, 故 D 错误.

9. 0 由函数 $f(x)$ 是奇函数, 得 $f(x)+f(-x)=0$, 则 $\frac{x^2-1}{x+a}+\frac{x^2-1}{-x+a}=0$, 解得 $a=0$, 经检验, 函数 $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$ 是定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 的奇函数, 所以 $a=0$.

10. $(-\infty, 40] \cup [80, +\infty)$ 由题意得 $\frac{k}{8} \leq 5$ 或 $\frac{k}{8} \geq 10$, 解得 $k \leq 40$ 或 $k \geq 80$, 故 k 的取值范围是 $(-\infty, 40] \cup [80, +\infty)$.

11. $\frac{1}{3}$ 0 因为 $f(x)=ax^2+bx+3a+b$ 是偶函数, 且定义域为 $[a-1, 2a]$, 所以 $a-1+2a=0$, 解得 $a=\frac{1}{3}$. 又 $f(-x)=f(x)$, 即 $ax^2-bx+3a+b=ax^2+bx+3a+b$, 所以 $b=0$.

12. (1)解: 当 $m=1$ 时, $f(x)=x+\frac{1}{x}$, 定义域为 $\{x|x \neq 0\}$, 关于原点对称, $f(-x)=-x-\frac{1}{x}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)=-f(x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函数.

(2)单调递减. 证明: 当 $m=0$ 时, $f(x)=\frac{1}{x}$, 取 $0 < x_1 < x_2$, $f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}$. 因为 $x_1x_2 > 0$, $x_2-x_1 > 0$, 所以 $f(x_1)-f(x_2) > 0$, 即 $f(x_1) > f(x_2)$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

方法突破 利用定义证明函数单调性的方法

- (1)取值: 设 x_1, x_2 是所给区间上的任意两个值, 且 $x_1 < x_2$;
- (2)作差变形: 即作差 $f(x_1)-f(x_2)$, 并通过因式分解、配方、有理化等方法, 向有利于判断符号的方向变形;
- (3)定号: 确定差 $f(x_1)-f(x_2)$ 的符号;

(4)下结论:判断,根据定义得出结论.

即取值 $\rightarrow$ 作差 $\rightarrow$ 变形 $\rightarrow$ 定号 $\rightarrow$ 下结论.

13. 解: (1)当 $a=b=1$ 时, 函数 $y=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$, $x \in [t, t+1]$. 当 $t+1 \leq 1$, 即 $t \leq 0$ 时, 函数 y 在 $[t, t+1]$ 上单调递减, 当 $x=t+1$ 时, $y_{\min}=t^2+1$; 当 $t \geq 1$ 时, 函数 y 在 $[t, t+1]$ 上单调递增, 当 $x=t$ 时, $y_{\min}=t^2-2t+2$; 当 $0 < t < 1$ 时, 函数 y 在 $[t, 1)$ 上单调递减, 在 $[1, t+1]$ 上单调递增, 当 $x=1$ 时, $y_{\min}=1$. 综上, y 在 $[t, t+1]$ 上的最小值 $g(t)=$

$$\begin{cases} t^2+1, & t \leq 0, \\ 1, & 0 < t < 1, \\ t^2-2t+2, & t \geq 1. \end{cases}$$

(2) 函数 y 的图象开口向上, 且对称轴为直线 $x=1 \notin [2, 4]$, 则函数 y 在 $[2, 4]$ 上单调递增, 则当 $x=2$ 时, y 取得最小值为 $b+1$; 当 $x=4$ 时, y 取得最大值为 $16a-8a+1+b=8a+1+b$.

b. 依题意, 得 $\begin{cases} b+1=1, \\ 8a+b+1=9, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=1, \\ b=0. \end{cases}$

本章检测 函数的概念与性质

1. B 依题意函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称, 所以 $\frac{m}{4}=-2$, 即 $m=-8$, 所以 $f(x)=2x^2+8x+3$, $f(1)=2+8+3=13$.

2. A 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $[2, 3]$ 上单调递减, 所以最大值为 $f(2)=\frac{1}{2}$.

3. D 根据题意, 函数 $f(x)=ax^2+b$ 是定义在 $[a, a+2]$ 上的偶函数, 则 $a+a+2=0$, 解得 $a=-1$, 则函数 $f(x)$ 是开口向下的二次函数, 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递减. 又 $g(x)=f(x-2)$, 所以函数 $g(x)$ 的对称轴为直线 $x=2$, 且在 $(2, +\infty)$ 上单调递减, 则有 $g(2) > g(3) > g(6)=g(-2)$, 即 $g(2) > g(3) > g(-2)$.

4. A 令 $x=y=0$, 可得 $f(0)=f(0)+f(0)$, 故 $f(0)=0$. 令 $y=-x$, 可得 $f(0)=f(x)+f(-x)$, 故 $f(-x)=-f(x)$. 又函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 所以函数 $f(x)$ 为奇函数. 又 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 所以函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数. 由 $f(x-2)+f(x^2-2x) > 0$, 得 $f(x-2) > -f(x^2-2x)=f(2x-x^2)$, 所以 $x-2 > 2x-x^2$, 解得 $x < -1$ 或 $x > 2$.

5. B 因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 所以 $f(-x)=f(x+4)$. 又 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(-x)=-f(x)$, 即 $f(x+4)=-f(x)$, 所以 $f(x+8)=-f(x+4)=f(x)$, 因此函数 $f(x)$ 的周期 $T=8$. 又 $2023=252 \times 8+7$, 所以 $f(2023)=f(7)=f(-1)=-f(1)=-(1-4)=3$.

6. D 因为函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 所以当 $x \leq 1$ 时, $f(x)$ 单调递减, 即 $a-3 < 0$, $a < 3$; 当 $x > 1$ 时, $f(x)$ 单调递减, 即 $a > 0$. 由 $(a-3) \times 1 + 5 \geq \frac{2a}{1}$, 解得 $a \leq 2$. 综上, 实数 a 的取值范围是 $(0, 2]$.

7. BCD 若函数 $y=f(x-1)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 则 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称, 即 $f(x)$ 为偶函数, 故 B 正确, A 错误; 又 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$

上单调递增, 所以 $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \leq f(0)$ 恒成立, 故 C 正确; 因为 $f(1)=1$, 所以 $f(-1)=1$, 又 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 当 $x \geq 0$ 时, 由 $f(x) > 1=f(1)$, 得 $0 \leq x < 1$, 当 $x < 0$ 时, 由 $f(x) > 1=f(-1)$, 得 $-1 < x < 0$, 所以 $f(x) > 1$ 的解集为 $(-1, 1)$, 故 D 正确.

8. BCD 由 $f(1-x)=f(1+x)$, 得 $f(x)=f(2-x)$, 因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(x)=-f(-x)$, 则 $-f(-x)=f(2-x)$, $f(4-x)=-f(2-x)=f(-x)$, 所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=4$, 故 A 错误; 当 $-1 < x < 0$ 时, 因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(x)=-f(-x)=-(-2x)=2x$, 因为定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(0)=0$, 所以当 $-1 < x \leq 1$ 时, $f(x)=2x$, 故 B 正确; 因为 $f(x)$ 的周期为 4, 所以 $f(x)$ 在 $[11, 13]$ 上的单调性与 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的单调性相同, 因为当 $-1 < x \leq 1$ 时, $f(x)=2x$ 单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $[11, 13]$ 上单调递增, 故 C 正确; 因为 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得最小值 -2 , 在 $x=1$ 处取得最大值 2 , 又 $f(x)$ 是周期函数, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最大值为 2 , 最小值为 -2 , 故 D 正确.

9. -3 因为函数 $f(x)=\begin{cases} \log_2(1-x), & x < 0, \\ g(x)+1, & x > 0, \end{cases}$ 所以 $f(-3)=$

2. 又因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(3)=-2$. 又 $f(3)=g(3)+1$, 所以 $g(3)=-3$.

10. 7 **解法 1** 因为 $f(2)=2^5+2^3 \cdot a+2 \cdot b+2$, $f(-2)=(-2)^5+(-2)^3 \cdot a+(-2) \cdot b+2$, 所以 $f(2)+f(-2)=4$, 所以 $f(-2)=4-f(2)=7$.

解法 2 由 $f(x)=x^5+ax^3+bx+2$, 得 $f(x)-2=x^5+ax^3+bx$. 设 $F(x)=f(x)-2$, 则 $F(x)$ 为奇函数, $F(-2)=-F(2)$, 即 $f(-2)-2=-f(2)+2$, 所以 $f(-2)=-f(2)+4=7$.

11. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 由 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < 0$, 得 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减. 因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且 $f(-1)=f(1)=3$, 所以 $f(x) < 3$ 等价于 $f(|x|) < f(1)$, 则有 $|x| > 1$, 解得 $x > 1$ 或 $x < -1$.

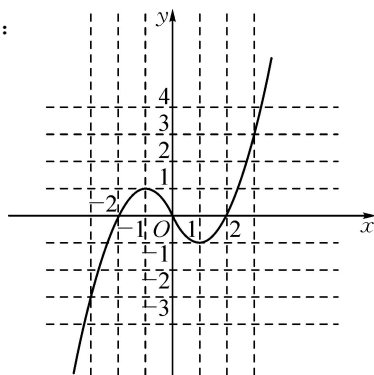
12. 解: 由函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数, 知对任意的 x , 都有 $f(-x)=-f(x)$.

(1) $f(-2)=-f(2)$. 又 $f(2)=2^2-2 \times 2=0$, 所以 $f(-2)=0$.

(2) 因为函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数, 所以 $f(0)=0$. 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 由 $f(x)$ 是奇函数, 知 $f(-x)=-f(x)$, 则 $f(x)=-f(-x)=-[(-x)^2-2(-x)]=-x^2-2x$. 综上,

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x, & x > 0, \\ 0, & x=0, \\ -x^2-2x, & x < 0. \end{cases}$$

(3) 图象如图:



13. (1)证明: $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$, 关于原点对称, 且 $f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x} = -\frac{x^2+1}{x} = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 在定义域上为奇函数.

(2)解: 在 $[-3, -2]$ 上任取 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 则 $f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1^2+1}{x_1} - \frac{x_2^2+1}{x_2} = \frac{(x_1-x_2)(x_1x_2-1)}{x_1x_2}$. 因为 $x_1, x_2 \in [-3, -2]$, $x_1 < x_2$, 所以 $x_1 - x_2 < 0, x_1x_2 - 1 > 0, x_1x_2 > 0$, 即 $\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2-1)}{x_1x_2} < 0$, 所以 $f(x_1) < f(x_2)$, 即 $f(x)$ 在 $[-3, -2]$ 上单调递增, 故函数的最小值为 $f(-3) = -\frac{10}{3}$, 最大值为 $f(-2) = -\frac{5}{2}$.

基础小练 8 指数式与对数式

1. D 对于 A, B, a 的取值范围是 $\{a|a \geq 0\}$, 排除 A, B; 对于 C, a 的取值范围是 $\{a|a \neq 0\}$, 排除 C.

方法突破 (1) 指数幂的运算首先将根式、分数指数幂统一为分数指数幂, 以便利用法则计算, 还应注意必须同底数幂相乘, 指数才能相加;

(2) 当底数是负数时, 先确定符号, 再把底数化为正数;

(3) 运算结果不能同时含有根号和分数指数, 也不能既有分母又含有负指数.

2. C 易知选项 C 错误.

3. A 因为 $a = \log_2 2^{-1} = -\log_2 2 = -1, b = 1, c = \log_2 2^2 = 2\log_2 2 = 2$, 所以 $a < b < c$.

4. C 由 $\log_5[\log_3(\log_2 x)] = 0$, 得 $\log_3(\log_2 x) = 1$, 则 $\log_2 x = 3$, 所以 $x = 8$.

5. D 对于 A, $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}} (x \neq 0)$, 所以 A 错误; 对于 B, $(3^x)^2 = 3^{2x}$, 所以 B 错误; 对于 C, $\log_3(x^2+1) + \log_3 2 = \log_3(2x^2+2)$, 所以 C 错误; 对于 D, $\log_3 \frac{1}{3^x} = \log_3 3^{-x} = -x$, 所以 D 正确.

6. A 由题意知 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_4 \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

7. CD 因为 $-\sqrt{x} = -x^{\frac{1}{2}} (x \geq 0)$, 而 $(-x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-x} (x \leq 0)$, 所以 A 错误; 因为 $\sqrt[6]{y^2} = -y^{\frac{1}{3}} (y < 0)$, 所以 B 错误; 因为 $x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{x}\right)^3} (x > 0)$, 所以 C 正确; 因为 $[\sqrt[3]{(-x)^2}]^{\frac{3}{4}} = x^{2 \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}} = x^{\frac{1}{2}} (x > 0)$, 所以 D 正确.

8. ABC 对于 A, 因为 $10^a \cdot 10^{2b} = 10^{a+2b} = 10$, 所以 $a+2b = 1$, 故 A 正确; 对于 B, 易知 $a > 0, b > 0$, 由 A 知 $a+2b = 1$, 由基本不等式 $a+2b \geq 2\sqrt{2ab}$, 得 $ab \leq \frac{1}{8}$, 当且仅当 $a = 2b = \frac{1}{2}$ 时, 取等号, 而 $10^a \neq 10^{2b}$, 即 $a \neq 2b$, 所以等号不成立, 所以 $ab < \frac{1}{8}$, 故 B 正确; 对于 C, $10^{a+b} = 10^a \cdot 10^b = 2 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5} >$

4, 故 C 正确; 对于 D, 由 $(10^a)^2 = 10^{2a} = 4 < 5 = 10^{2b}$, 得 $a < b$, 故 D 错误.

9. 7 由 $x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$, 两边平方得 $x - 2 + \frac{1}{x} = 5$, 则 $x + \frac{1}{x} = 7$.

10. 12 $(0.25)^{-2} + 8^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{16}\right)^{-0.75} = \left(\frac{1}{2^2}\right)^{-2} + (2^3)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{2^4}\right)^{-\frac{3}{4}} = 16 + 4 - 8 = 12$.

11. $\frac{1}{2}$ 原式 $= \lg \frac{4\sqrt{2}}{7} - \lg 4 + \lg 7\sqrt{5} = \lg \left(\frac{4\sqrt{2}}{7} \times \frac{1}{4} \times 7\sqrt{5}\right) = \frac{1}{2}$.

基础小练 9 幂函数、指数函数、对数函数

1. D 形如 $y = a^x (a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 的函数为指数函数, 故 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 是指数函数, 其他选项都不是指数函数.

易错警示 形如 $y = a^x$ 的函数称为指数函数, 其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$.

2. A 由题意得 $\begin{cases} 2x-1 > 0, \\ 2x-1 \neq 1, \\ 3x-2 > 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x > \frac{1}{2}, \\ x \neq 1, \\ x > \frac{2}{3}, \end{cases}$ 解得 $x > \frac{2}{3}$ 且 $x \neq 1$.

3. D 函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减; 而函数 $y = -e^{-x}$ 非奇非偶; 函数 $y = \log_2 |x|$ 是偶函数; 只有函数 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 既是奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

4. C 由 $f(x)$ 是幂函数, 得 $m^2 - m - 5 = 1$, 解得 $m = -2$ 或 $m = 3$. 当 $m = 3$ 时, $f(x) = x^9$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 不合题意; 当 $m = -2$ 时, $f(x) = x^{-1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 符合题意. 故“ $m = -2$ 或 $m = 3$ ”是“幂函数 $f(x) = (m^2 - m - 5)x^{m^2+m-3}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减”的必要不充分条件.

易错警示 由幂函数的定义求出参数值后, 需代入参数值验证是否满足题意.

5. A 因为 $a = 5^{0.1} > 5^0 = 1, b = \log_2 3^{\frac{1}{2}} = \log_2 \sqrt{3} > 0$ 且 $b = \log_2 \sqrt{3} < \log_2 \sqrt{4} = 1, c = \log_3 0.8 < \log_3 1 = 0$, 所以 $c < b < a$.

方法突破 指对幂大小比较的常用方法: 单调性、图象、中间值.

6. A 令 $2x^2 - 3x + 1 = (2x - 1)(x - 1) = t$, 则函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} t, t > 0$. 令 $t > 0$, 求得 $x < \frac{1}{2}$ 或 $x > 1$, 故函数 y 的定义域为 $\left\{x \mid x < \frac{1}{2} \text{ 或 } x > 1\right\}$. 要求函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} (2x^2 - 3x + 1)$ 的单调递减区间, 根据复合函数的单调性规律, 即求 $t = (2x - 1)(x - 1)$ 在区间 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$ 上的单调递增区间. 利用二次函数的性质可得函数 t 在定义域内的单调递增区间为 $(1, +\infty)$.

易错警示 含对数符号的复合函数 $\log_a f(x)$, 容易忽视真数